

กลศาสตร์โครงสร้าง 2

ตรงตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ

พุทธศักราช 2545 (ปรับปรุง พ.ศ. 2546)

ประเภทวิชาอุตสาหกรรม สาขาวิชาการก่อสร้าง ศึกษางานช่างก่อสร้าง

สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษากระทรวงศึกษาธิการ

เรียบเรียงโดย นางสาวณัฐณี ทำบุญ

แผนกวิชาช่างก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเชียงใหม่



เอกสารประกอบการเรียน
วิชา กลศาสตร์โครงสร้าง 2
รหัสวิชา 2106 - 2118
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ
สาขาวิชาการก่อสร้าง ประเภทวิชาช่างอุตสาหกรรม

เรียบเรียงโดย

นางสาวญาณิ์ ทำบุญ

แผนกวิชาช่างก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเชียงใหม่
สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารประกอบการเรียน
วิชา กลศาสตร์โครงสร้าง 2
รหัสวิชา 2106 - 2118
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ
สาขาวิชาการก่อสร้าง ประเภทวิชาช่างอุตสาหกรรม

เรียบเรียงโดย

นางสาวญาติี ทำบุญ

แผนกวิชาช่างก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเชียงใหม่
สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

เอกสารประกอบการเรียน วิชาทฤษฎีโครงสร้าง 2 รหัสวิชา 2106-2118 เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอน ตรงตามจุดประสงค์รายวิชา มาตรฐานรายวิชาและคำอธิบายรายวิชา หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2545 (ปรับปรุง พ.ศ. 2546) ประเภทวิชาช่างอุตสาหกรรม สาขาวิชาการก่อสร้าง ของสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา

เอกสารเล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหาสาระ 4 หน่วย คือ หน่วยที่ 1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับโครงสร้าง หน่วยที่ 2 แรงปฏิกิริยา หน่วยที่ 3 แรงเฉือนและโมเมนต์คด และหน่วยที่ 4 การหาแรงภายในโครงถัก ซึ่งเนื้อหาดังกล่าวเป็นความรู้พื้นฐานเพื่อนำไปใช้คำนวณออกแบบโครงสร้างลักษณะต่างๆ ดังนั้นเอกสารฉบับนี้จึงได้เรียบเรียงความรู้ที่เกี่ยวกับพื้นฐานลักษณะโครงสร้างแบบต่างๆ ลักษณะฐานรองรับ การหาค่าแรงต่างๆ ภายในโครงสร้าง เพื่อใช้เป็นคู่มือในการจัดการเรียนการสอนของแผนกวิชาช่างก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเชียงใหม่

ผู้จัดทำได้เรียบเรียงเอกสารที่มีการปรับปรุง แก้ไข และพัฒนามาเป็นลำดับเพื่อให้เอกสารมีความสมบูรณ์ และถูกต้องที่สุด หากพบข้อผิดพลาดในเอกสารเล่มนี้กรุณาแจ้งให้ผู้จัดทำได้ทราบ เพื่อจะได้ทำการแก้ไขปรับปรุงให้ถูกต้องต่อไป

สุดท้ายนี้ผู้จัดทำขอขอบพระคุณผู้แต่งตำรา วารสารบทความทางวิชาการทุกท่าน ตลอดจนครูจากสถานศึกษาที่ให้ความร่วมมือในการเผยแพร่ ซึ่งได้ให้คำแนะนำทดลองใช้เอกสารประกอบการเรียนและได้ให้ข้อเสนอแนะต่างๆ นำมาปรับปรุงและรวบรวมเป็นรูปเล่มที่สมบูรณ์ ผู้จัดทำเชื่อว่าเอกสารประกอบการเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่ครูผู้สอน นักเรียน นักศึกษา และผู้ที่สนใจทั่วไป

นางสาวญาณี ทำบุญ
แผนกวิชาช่างก่อสร้าง
วิทยาลัยเทคนิคเชียงใหม่

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	ก
แผนบริหารการเรียนประจำวิชา	ณ
หน่วยการเรียน	ช
หน่วยที่ 1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับโครงสร้าง	
1.1 แรงที่กระทำต่อโครงสร้าง	2
1.2 ฐานรองรับ	3
1.3 น้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้าง	7
1.4 สมการสมดุล	9
1.5 ประเภทของโครงสร้าง	9
แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน	12
หน่วยที่ 2 แรงปฏิกิริยา	
2.1 ฟังก์ชันของแรง	16
2.2 ขั้นตอนการหาแรงปฏิกิริยาในโครงสร้างอย่างง่ายหรือแบบดีเทอร์มิเนท	17
2.3 การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา	17
แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน	45
หน่วยที่ 3 แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด	
3.1 ชนิดของคานาดีเทอร์มิเนท	48
3.2 พฤติกรรมการรับแรงของคานาดีเทอร์มิเนท	49
3.3 เครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรง	50
3.4 การคำนวณหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคานาดีเทอร์มิเนท	51
3.5 การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด	54
3.6 การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดอย่างรวดเร็ว	63
แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน	71

สารบัญ (ต่อ)

เรื่อง	หน้า
หน่วยที่ 4 การหาแรงภายในโครงถัก	
4.1 ความหมายและส่วนประกอบของโครงถัก	74
4.2 ประเภทของโครงถัก	75
4.3 สมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงถัก	77
4.4 พฤติกรรมของโครงถัก	78
4.5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถัก และเครื่องหมายแทนแรง	79
4.6 การหาแรงภายในโครงถัก	80
แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน	102
บรรณานุกรม	105

สารบัญรูป

รูป	หน้า
รูปที่ 1.1 แสดงแรงกระทำบน โครงสร้าง	2
รูปที่ 1.2 แสดงแรงต้านทานแรงกระทำ	3
รูปที่ 1.3 แสดงสัญลักษณ์ของฐานรองรับแบบขีดหมุนเคลื่อนที่ได้ (Roller Supports)	4
รูปที่ 1.4 แสดงฐานรองรับแบบขีดหมุนเคลื่อนที่ได้ (Roller Supports)	4
รูปที่ 1.5 แสดงสัญลักษณ์ของฐานรองรับแบบขีดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ (Hinge Supports)	5
รูปที่ 1.6 แสดงฐานรองรับแบบขีดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ (Hinge Supports)	5
รูปที่ 1.7 แสดงสัญลักษณ์ของฐานรองรับแบบขีดแน่น (Fixed Supports)	6
รูปที่ 1.8 แสดงฐานรองรับแบบขีดแน่น (Fixed Supports)	6
รูปที่ 1.9 แสดงจุดต่อแบบขีดหมุน (Pinned Joints)	7
รูปที่ 1.10 แสดงจุดต่อแบบขีดแข็ง (Rigid Joints)	7
รูปที่ 1.11 แสดงสัญลักษณ์ของน้ำหนักกระทำเป็นจุด	8
รูปที่ 1.12 แสดงสัญลักษณ์ของน้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ (Uniform Load)	8
รูปที่ 1.13 แสดงสัญลักษณ์ของน้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายไม่สม่ำเสมอ (Non-Uniform Load)	8
รูปที่ 1.14 แสดงโครงสร้างอย่างง่ายหรือโครงสร้างแบบดีเทอร์มิเนท	9
รูปที่ 1.15 แสดงโครงสร้างอย่างยากหรือโครงสร้างแบบอินดีเทอร์มิเนท	10
รูปที่ 2.1 แสดงการเขียนผังอิสระของแรง	16
รูปที่ 3.1 แสดงคานช่วงเดียวธรรมดา	48
รูปที่ 3.2 แสดงคานยื่น	48
รูปที่ 3.3 แสดงคานช่วงเดียวปลายยื่น	49
รูปที่ 3.4 แสดงพฤติกรรมของคาน	49
รูปที่ 3.5 แสดงแรงภายในคานดีเทอร์มิเนท	49
รูปที่ 3.6 แสดงเครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรงในแนวแกน	50
รูปที่ 3.7 แสดงเครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรงเฉือน	51
รูปที่ 3.8 แสดงเครื่องหมายและสัญลักษณ์แทน โมเมนต์คัต	51
รูปที่ 3.9 แสดงลักษณะแรงเฉือนและ โมเมนต์คัต	52
รูปที่ 3.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกทุก แรงเฉือน และ โมเมนต์คัต	53
รูปที่ 3.11 แสดงการเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและ โมเมนต์คัต	55

สารบัญรูป (ต่อ)

รูป	หน้า
รูปที่ 4.1 แสดงโครงถักแต่ละรูปทรงเมื่อมีแรงกระทำ	74
รูปที่ 4.2 แสดงส่วนประกอบของโครงถัก	75
รูปที่ 4.3 แสดงโครงถักแบบโครงหลังคา	75
รูปที่ 4.4 แสดงโครงถักแบบสะพาน	76
รูปที่ 4.5 แสดงแนวแรงของชิ้นส่วน	78
รูปที่ 4.6 แสดงพฤติกรรมของโครงถักเมื่อรับแรง	78
รูปที่ 4.7 แสดงพฤติกรรมของโครงถักกรณีไม่มีชิ้นส่วน CE	79

แผนบริหารการเรียนประจำวิชา
2106 – 2118 กลศาสตร์โครงสร้าง 2 2 (2)

จุดประสงค์รายวิชา

1. เพื่อให้มีความเข้าใจ ชนิดของแรง น้ำหนัก ชนิดของฐานรองรับ
2. เพื่อให้สามารถคำนวณหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้าง โมเมนต์ดัด แรงเฉือน ความเค้นในองค์อาคาร
3. เพื่อให้มีความรับผิดชอบ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

มาตรฐานรายวิชา

1. เข้าใจพฤติกรรมของแรง น้ำหนักบรรทุก ที่มีต่อโครงสร้างอาคาร
2. จำแนก ชนิดของแรง น้ำหนัก ชนิดของฐานรองรับ
3. คำนวณหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้าง โมเมนต์ดัด แรงเฉือน ความเค้นในองค์อาคาร

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมของแรง หรือน้ำหนักบรรทุกที่มีต่อโครงสร้างอาคาร ชนิดของแรง น้ำหนัก ชนิดของฐานรองรับ การหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้าง โมเมนต์ดัด แรงเฉือน ความเค้นในองค์อาคาร

หน่วยการเรียน

วิชา กลศาสตร์โครงสร้าง 2 รหัสวิชา 2106 – 2118

จำนวน 2 ชั่วโมง / สัปดาห์ รวม 36 ชั่วโมง

หน่วยที่	ชื่อหน่วยการสอน	จำนวนชั่วโมง
1	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงสร้าง	4
	1.1 แรงที่กระทำต่อโครงสร้าง	
	1.2 ฐานรองรับ	
	1.3 นำหนักบรรทุกบนโครงสร้าง	
	1.4 สมการสมดุล	
	1.5 ประเภทของโครงสร้าง	
2	แรงปฏิกิริยา	12
	2.1 ฟังก์ชันของแรง	
	2.2 ประเภทของโครงสร้าง	
	2.3 การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา	
3	แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด	10
	3.1 ชนิดของคานาดีเทอร์มิเนท	
	3.2 พฤติกรรมการรับแรงของคานาดีเทอร์มิเนท	
	3.3 เครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรง	
	3.4 การคำนวณหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคานาดีเทอร์มิเนท	
	3.5 การเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด	
4	การหาแรงภายในโครงถัก	10
	4.1 ความหมายและส่วนประกอบของโครงถัก	
	4.2 ประเภทของโครงถัก	
	4.3 สมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงถัก	
	4.4 พฤติกรรมของโครงถัก	
	4.5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักและเครื่องหมายแทนแรง	
	4.6 การหาแรงภายในโครงถัก	
	รวม	36

หน่วยที่ 1

ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับโครงสร้าง

สาระการเรียนรู้

- เรื่องที่ 1.1 แรงที่กระทำต่อโครงสร้าง
- เรื่องที่ 1.2 ฐานรองรับ
- เรื่องที่ 1.3 น้ำหนักบรรทุกทุกบนโครงสร้าง
- เรื่องที่ 1.4 สมการสมดุล
- เรื่องที่ 1.5 ประเภทของโครงสร้าง

สาระสำคัญ

ในการเรียนวิชากลศาสตร์โครงสร้าง 2 นั้น เนื้อหาส่วนใหญ่จะเป็นการวิเคราะห์หาแรงต่างๆ ที่เกิดขึ้นกับโครงสร้างเมื่อมีแรงมากระทำ ดังนั้นก่อนที่จะทำการวิเคราะห์จึงจำเป็นต้องศึกษาถึงสิ่งต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง เช่น แรงที่มากระทำต่อโครงสร้าง ลักษณะและการรับแรงของฐานรองรับชนิดต่าง ๆ น้ำหนักบรรทุกทุกกระทำบนโครงสร้าง สมการสมดุลรวมทั้งเงื่อนไขของสมการซึ่งจะต้องใช้ในการวิเคราะห์ ตลอดจนศึกษาประเภทของโครงสร้างว่ามีกี่ประเภทแต่ละประเภทมีลักษณะอย่างไร เพื่อให้สามารถวิเคราะห์หรือแก้ปัญหาโจทย์ต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อศึกษาหน่วยที่ 1 แล้วสามารถ

1. อธิบายลักษณะของแรงที่กระทำต่อโครงสร้างได้
2. บอกชนิดของฐานรองรับได้
3. อธิบายลักษณะการรับแรงของฐานรองรับแต่ละชนิดได้
4. บอกประเภทของน้ำหนักบรรทุกทุกบนโครงสร้างได้
5. อธิบายความหมายสมการสมดุลได้
6. อธิบายประเภทของโครงสร้างได้

หน่วยที่ 1

ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับโครงสร้าง

1.1 แรงที่กระทำต่อโครงสร้าง

แรงที่กระทำต่อโครงสร้างโดยทั่วไปจะมีอยู่ 2 ชนิด คือ

1.1.1 แรงกระทำ (Active Force)

แรงกระทำ หมายถึง น้ำหนักของโครงสร้างเองหรือน้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนโครงสร้าง ซึ่งน้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนโครงสร้างยังสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ น้ำหนักบรรทุกแบบตายตัว (Dead Load) เช่น น้ำหนักของแผ่นพื้น , ผนังถ้ำลงคาน , น้ำหนักกระเบื้องมุงหลังคาถ้ำลงบนแป เป็นต้น และน้ำหนักบรรทุกจร (Live Load) เช่น น้ำหนักของคนที่ใช้อาคาร โต๊ะ ตู้ที่วางบนอาคาร และแรงลม เป็นต้น



(ก) น้ำหนักบรรทุกตายตัว
(Dead Load)



(ข) น้ำหนักบรรทุกจร
(Live Load)

รูปที่ 1.1 แสดงแรงกระทำบนโครงสร้าง

1.1.2 แรงต้านทานแรงกระทำ (Reactive Force)

แรงต้านทานแรงกระทำ เป็นแรงที่เกิดขึ้นบริเวณ ฐานรองรับ เพื่อให้เกิดสภาวะสมดุล (Equilibrium) โดยทั่วไปจะเรียกว่า แรงปฏิกิริยา (Reaction) ซึ่งแรงปฏิกิริยาจะกระทำในแนวตั้งฉากและแนวขนานกับฐานรองรับ นอกจากนี้แล้วยังมีโมเมนต์ดัดอีกหนึ่งตัวที่เกิดขึ้นคล้ายกับแรงปฏิกิริยา โดยโมเมนต์ดัดจะต้านทานต่อการหมุน หรือการดัดโค้งของโครงสร้างอันเนื่องมาจากแรงกระทำ



รูปที่ 1.2 แสดงแรงต้านทานแรงกระทำ

1.2 ฐานรองรับ (Supports)

ฐานรองรับของโครงสร้างจริงมีหลายรูปแบบ เพื่อให้เหมาะสมกับการใช้งานแต่ละประเภท ให้โครงสร้างเกิดการสมดุล มีความมั่นคง แข็งแรง ในการวิเคราะห์หาค่าแรงต่างๆ ของโครงสร้าง เพื่อออกแบบส่วนต่างๆ ของอาคาร จะต้องมีการกำหนดสัญลักษณ์ และเครื่องหมายสำหรับฐานรองรับแต่ละแบบ เพื่อความเข้าใจที่ตรงกันและสะดวกในการคำนวณ ฐานรองรับของโครงสร้างมีหลายรูปแบบ ในที่นี่จะกล่าวถึงเฉพาะฐานรองรับที่สำคัญ และเหมาะสำหรับการเรียนการสอนในระดับ ปวช. ซึ่งเป็นพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ขั้นสูงต่อไป ชนิดของฐานรองรับสำหรับโครงสร้างโดยทั่วไปแบ่งออกเป็น 3 ชนิดดังนี้

1.2.1 ฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ได้ (Roller Supports)

ฐานรองรับแบบนี้ยอมให้เกิดการหมุนได้รอบแกน ค่าของโมเมนต์ดัดที่ฐานรองรับแบบนี้ จึงเป็นศูนย์ หรือที่รองรับแบบนี้ไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดได้นั่นเอง นอกจากนี้ฐานรองรับแบบนี้ ยังยอมให้มีการเคลื่อนที่ได้ตามแนวขนานกับฐานรองรับ จึงไม่สามารถรับแรงตามแนวขนาน กับฐานรองรับหรือตามแนวอนได้ เพราะ ฉะนั้นฐานรองรับแบบนี้จึงสามารถรับแรงได้เพียง แรงเดียว คือ แรงตามแนวตั้งฉากกับฐานรองรับ หรือตามแนวคิ่งเท่านั้น



รูปที่ 1.3 แสดงสัญลักษณ์ของฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ได้ (Roller Supports)



รูปที่ 1.4 แสดงฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ได้ (Roller Supports)

1.2.2 ฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ (Hinge Supports)

ฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ หรือบางครั้งเรียกว่า ฐานรองรับแบบบานพับ ซึ่ง ฐานรองรับแบบนี้จะไม่ยอมให้เกิดการเคลื่อนที่ทั้งในแนวนอนและตั้งฉากกับฐานรองรับ แต่จะยอมให้เกิดหมุนได้รอบแกน ดังนั้นฐานรองรับแบบนี้จึงสามารถรับแรงได้ 2 แรง คือ แรงตามแนวนอนกับฐานรองรับหรือแนวอน และแรงตามแนวตั้งฉากกับฐานรองรับหรือแนวตั้ง แต่ไม่สามารถรับโมเมนต์คัตได้หรือโมเมนต์คัตมีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง



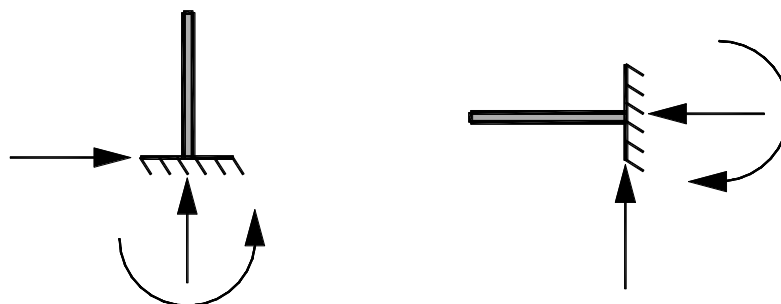
รูปที่ 1.5 แสดงสัญลักษณ์ของฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ (Hinge Supports)



รูปที่ 1.6 แสดงฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ (Hinge Supports)

1.2.3 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Supports)

ฐานรองรับแบบนี้จะยึดแน่นอยู่กับที่ ไม่ยอมให้มีการหมุน หรือมีการเคลื่อนที่ใด ๆ ทั้งสิ้น ดังนั้นจึงสามารถรับแรงได้ทั้งแนวนอนกับฐานรองรับ แนวตั้งฉากกับฐานรองรับ และยังสามารถรับโมเมนต์คัตได้อีกด้วย



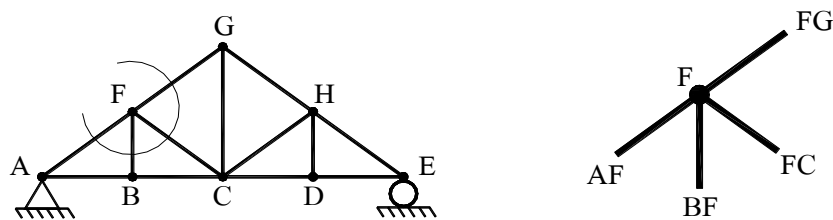
รูปที่ 1.7 แสดงสัญลักษณ์ของฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Supports)



รูปที่ 1.8 แสดงฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Supports)

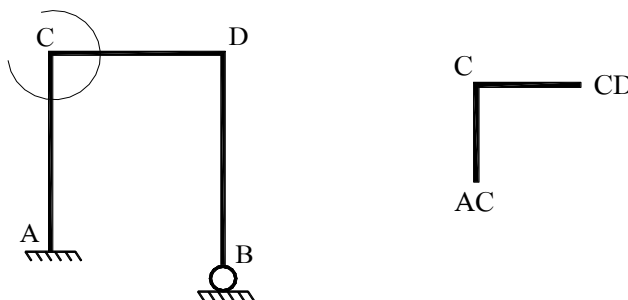
นอกจากฐานรองรับทั้ง 3 แบบตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ยังมีจุดต่อ (Joints) ของโครงสร้างที่ใช้กับโครงข้อหมุนหรือโครงถัก (Trusses) และโครงข้อแข็งหรือโครงเกร็ง (Rigid Frames) เพื่อให้ชิ้นส่วนของโครงสร้างหรือองค์อาคาร (Members) มาต่อยึดเข้าด้วยกัน ซึ่งมีอยู่ 2 แบบ คือ

1) จุดต่อแบบยึดหมุน (Pinned Joints) จุดต่อแบบนี้จะถ่ายแรงจากองค์อาคารหนึ่งไปยังอีกองค์อาคารหนึ่ง แต่จะไม่มีถ่ายโมเมนต์ตัด เพราะฉะนั้นค่าโมเมนต์ตัดที่จุดต่อนี้จะมีค่าเป็นศูนย์ ($M = 0$) จุดต่อแบบนี้จะใช้กับโครงสร้างที่เป็นโครงสร้า งข้อหมุนหรือโครงถัก (Trusses)



รูปที่ 1.9 แสดงจุดต่อแบบยึดหมุน (Pinned Joints)

2) จุดต่อแบบยึดรั้ง (Rigid Joints) จุดต่อแบบนี้จะถ่ายโมเมนต์ตัดจากองค์อาคารหนึ่งไปยังอีกองค์อาคารหนึ่ง เพราะฉะนั้นค่าโมเมนต์ตัดที่จุดต่อนี้ จะไม่เท่ากับศูนย์ ($M \neq 0$) ถ้าองค์อาคารใดองค์อาคารหนึ่งตรงจุดต่อนี้หมุนไปเป็นมุมเท่าใดองค์อาคารอื่นๆ ที่อยู่จุดต่อเดียวกันจะหมุนไปในทิศทางเดียวกันและขนาดมุมที่เท่ากันด้วย จุดต่อแบบนี้จะใช้กับโครงสร้างที่เป็น โครงข้อแข็งหรือ โครงเกร็ง (Rigid Frames)



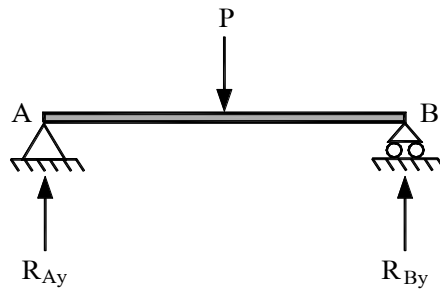
รูปที่ 1.10 แสดงจุดต่อแบบยึดรั้ง (Rigid Joints)

1.3 นำหนักบรรทุกบนโครงสร้าง (Load)

นำหนักบรรทุกที่กระทำต่อโครงสร้าง อาจเป็นน้ำหนักของตัว โครงสร้างเองหรือน้ำหนักภายนอกที่มากระทำ เช่น น้ำหนักของผู้คนที่ใช้อาคาร น้ำหนักสิ่งของต่างๆ แรงลม เป็นต้น นำหนักบรรทุกบนโครงสร้างที่จะใช้สำหรับการวิเคราะห์หาค่าแรงต่างๆ แบ่งออกเป็น 2 ประเภท ใหญ่ๆ ได้แก่

1.3.1 นำหนักกระทำเป็นจุด (Point Load หรือ Concentrated Load)

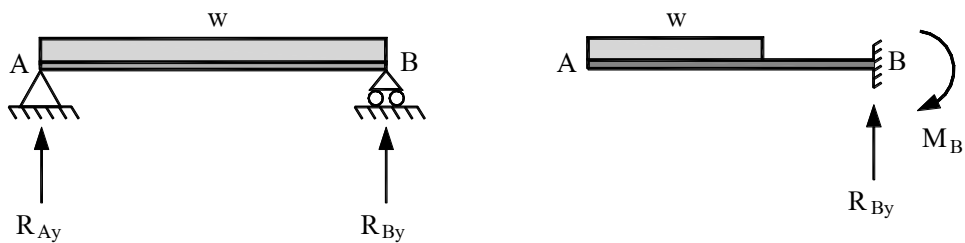
นำหนักที่กระทำเป็นจุด เป็นนำหนักที่กระทำต่อโครงสร้างบนพื้นที่ที่มี ขนาดเล็กๆ จนถึงถือว่าเป็นจุดได้ เช่น น้ำหนักจากแปลถายลงบนจันทัน น้ำหนักจากคานถ้ำยลงสู่เสา เป็นต้น



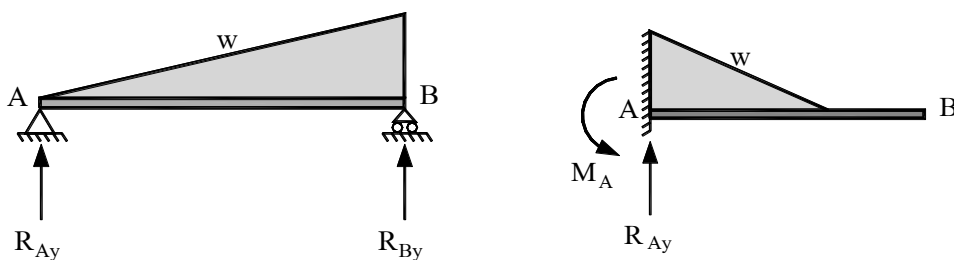
รูปที่ 1.11 แสดงสัญลักษณ์ของน้ำหนักกระทำเป็นจุด

1.3.2 น้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจาย (Distributed Load)

น้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจาย เป็นน้ำหนักที่กระทำต่อโครงสร้างเป็นบริเวณกว้าง อาจจะเป็นบางส่วนหรือทั้งหมดของโครงสร้าง ก็ได้ เช่น น้ำหนักของผนังที่ถ่ายลงบนคาน น้ำหนักของกระเบื้องถ่ายลงบนแป หรือแรงลมที่กระทำต่อผนังของอาคาร เป็นต้น น้ำหนักแบบแผ่กระจายยังสามารถแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ ได้แก่ น้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ และน้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายไม่สม่ำเสมอ คืออาจจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างสม่ำเสมอก็ได้



รูปที่ 1.12 แสดงสัญลักษณ์ของน้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ (Uniform Load)



รูปที่ 1.13 แสดงสัญลักษณ์ของน้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายไม่สม่ำเสมอ (Non-Uniform Load)

1.4 สมการสมดุล (Equilibrium Equations)

ในทางสถิตยศาสตร์ การสมดุล (Equilibrium) หมายถึง สภาวะที่วัตถุหรือโครงสร้างอยู่นิ่งกับที่ไม่มีการเคลื่อนที่ใดๆ เมื่อมีแรงมากระทำภายใต้สภาวะสมดุลนี้ตามกฎข้อที่สามของนิวตัน จะได้สมการสมดุล 3 สมการ ได้แก่

$\Sigma F_x = 0$ หมายถึง ผลรวมทางพีชคณิตของแรงตามแนวนอนหรือแนวแกน x มีค่าเท่ากับศูนย์

$\Sigma F_y = 0$ หมายถึง ผลรวมทางพีชคณิตของแรงตามแนวตั้งหรือแนวแกน y มีค่าเท่ากับศูนย์

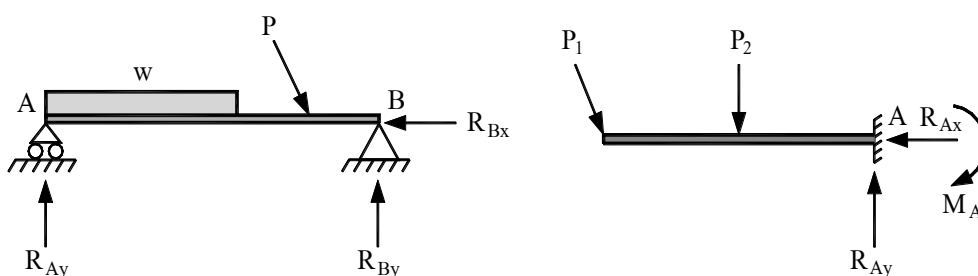
$\Sigma M = 0$ หมายถึง ผลรวมทางพีชคณิตของโมเมนต์ของแรงรอบจุดใดๆ มีค่าเท่ากับศูนย์

1.5 ประเภทของโครงสร้าง (Type of Structure)

โครงสร้างที่มีอยู่ทั่วไปมีหลากหลายรูปแบบเพื่อการใช้งานหลากหลาย วัตถุประสงค์ โครงสร้างบางชนิด สร้างขึ้นอย่างง่าย ๆ ก็เพียงพอที่จะให้เกิดการใช้งานอย่างปลอดภัย แต่ โครงสร้างบางประเภทก็ต้องสร้างขึ้นอย่างพิถีพิถัน มีความยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้น เพื่อการใช้งานที่ ปลอดภัย เช่น โครงสร้างที่มีขนาดใหญ่ และรับแรงมากขึ้น โครงสร้างโดยทั่วไปแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท คือ

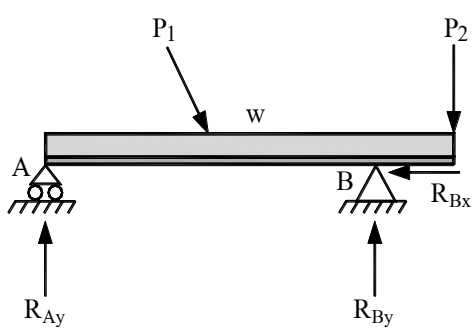
1.5.1 โครงสร้างอย่างง่ายหรือโครงสร้างแบบดีเทอร์มิเนท (Determinate Structure)

โครงสร้างประเภทนี้ จะมีแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์ด้านทานต่างๆ หรือที่เรียกว่าตัวไม่ทราบค่า (Unknown) ไม่เกินจำนวนสมการ สมดุล ซึ่งจะมีฐานรองรับที่ ทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาพอดี ที่จะทำให้โครงสร้างนั้นมีเสถียรภาพหรือทรงตัวอยู่ได้ (Stable) ถ้าเอาฐานรองรับตัวใดตัวหนึ่งของ โครงสร้างออกไปโครงสร้างนั้นจะไม่มีเสถียรภาพหรือทรงตัวอยู่ไม่ได้ (Unstable) โครงสร้างชนิดนี้สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์ด้านทานต่างๆ ได้โดยใช้สมการสมดุลตามลำดับ

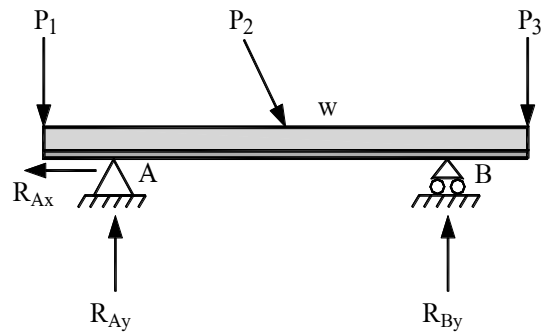


ก. คานช่วงเดียวธรรมดา

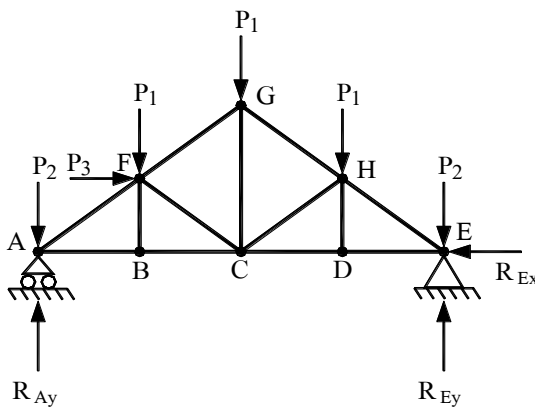
ข. คานอื่น



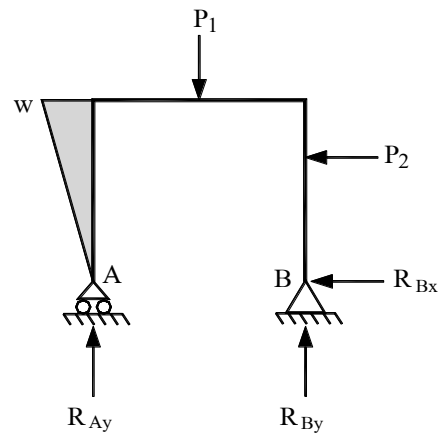
ค. คานช่วงเดียวธรรมดาปลายยื่นข้างเดียว



ง. คานช่วงเดียวธรรมดาปลายยื่นสองข้าง



จ. โครงข้อหมุนหรือโครงถัก

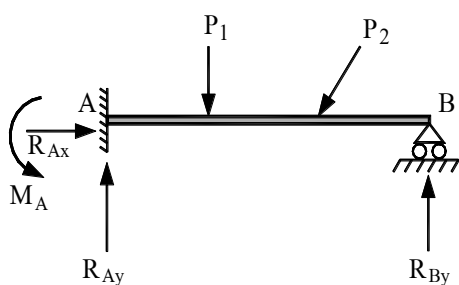


ฉ. โครงข้อแข็งหรือโครงเกร็ง

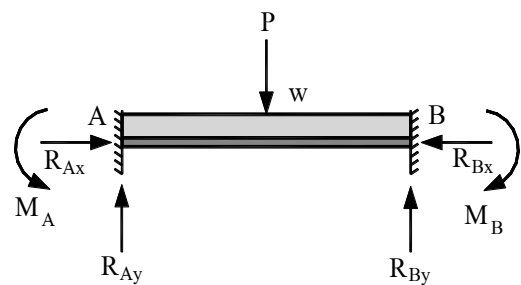
รูปที่ 1.14 แสดงโครงสร้างอย่างง่ายหรือโครงสร้างแบบดีเทอร์มิเนท

1.5.2 โครงสร้างอย่างยากหรือโครงสร้างแบบอินดีเทอร์มิเนท (Indeterminate Structure)

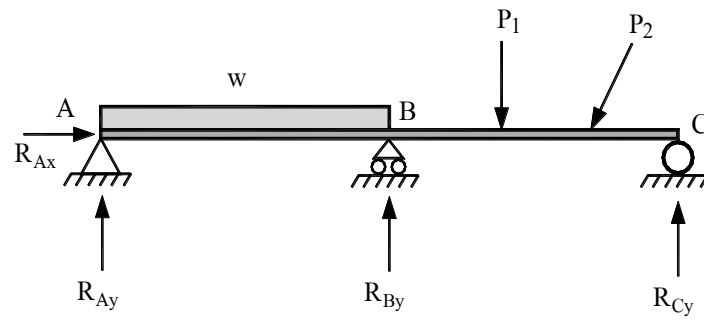
โครงสร้างประเภทนี้ จะมีจำนวนของแรงปฏิกิริยาและ โมเมนต์ต้านทานต่างๆ หรือตัวไม่ทราบค่า (Unknown) เกินกว่าจำนวนของสมการสมดุลจึงไม่สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงต่างๆ โดยใช้สมการสมดุลเพียงค่าพั่งได้ จำนวนตัวไม่ทราบค่าที่เกินจากจำนวนสมการสมดุลนี้เรียกว่า ดีกรีของความยาก (Degree of Statically Indeterminacy ; SI) เช่น ถ้าจำนวนตัวไม่ทราบค่าเกินไป 1 ตัว เรียกว่า มีดีกรีความยากเท่ากับหนึ่ง หรือ 1° SI เป็นต้น



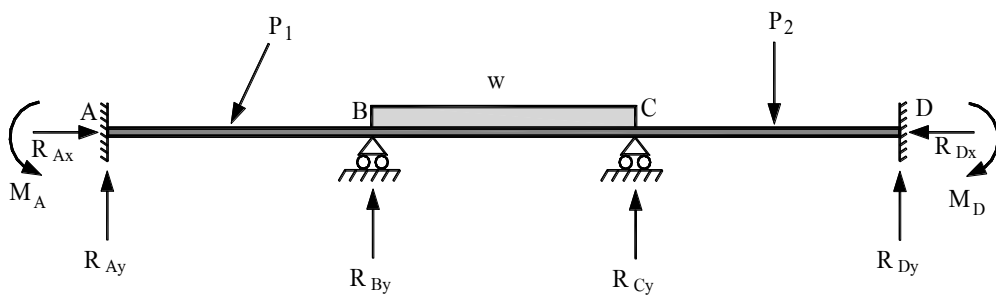
ก. คานช่วงเดียว 1° SI



ข. คานช่วงเดียว 2° SI



ค. คานต่อเนื่อง 1° SI



ง. คานต่อเนื่อง 5° SI

รูปที่ 1.15 แสดงโครงสร้างอย่างยากหรือโครงสร้างแบบอินดีเทอรั่มิเนท

แบบฝึกหัดท้ายบทหน่วยที่ 1

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. แรงลมเป็นน้ำหนักรทุกชนิดใด

ก. น้ำหนักรทุกตายตัว

ข. น้ำหนักรทุกจร

ค. น้ำหนักรทุกคงที่

ง. ถูกทุกข้อ

2. Reaction หมายถึงแรงชนิดใด

ก. แรงกระทำ

ข. แรงกิริยา

ค. แรงปฏิกิริยา

ง. ไม่มีข้อถูก

3. Roller Supports เป็นฐานรองรับที่รับแรงได้กี่แรง

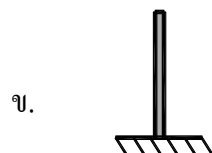
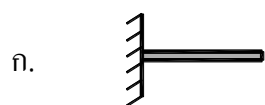
ก. 1 แรง

ข. 2 แรง

ค. 3 แรง

ง. 4 แรง

4. ข้อใดคือสัญลักษณ์ของ Hinge Supports



5. Fixed Supports หมายถึงฐานรองรับชนิดใด
- ฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ได้
 - ฐานรองรับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้
 - ฐานรองรับแบบยึดแน่น
 - ฐานรองรับแบบจุดต่อ
6. ข้อใดคือน้ำหนักกระทำเป็นจุด (Point Load)
- น้ำหนักของพื้นถ่ายลงบนคาน
 - น้ำหนักของผนังถ่ายลงบนคาน
 - น้ำหนักของกระเบื้องถ่ายลงบนแป
 - น้ำหนักของแปถ่ายลงบนจันทัน
7. ข้อใด คือน้ำหนักกระทำแบบแผ่กระจายสม่ำเสมอ (Uniform Load)
- แรงดันของน้ำกระทำต่อกันสรวายน้ำ
 - แรงดันดินกระทำต่อผนังกันดิน
 - แรงดันน้ำกระทำต่อสันเขื่อน
 - แรงลมกระทำต่ออาคาร
8. ผลรวมทางพีชคณิตของแรงตามแนวตั้งเท่ากับศูนย์ เขียนเป็นสมการได้ตามข้อใด
- $\sum F_x = 0$
 - $\sum F_y = 0$
 - $\sum F_z = 0$
 - $\sum M = 0$
9. ถ้าต้องการหาค่าโมเมนต์ตัดควรเลือกใช้สมการใด
- $\sum F_x = 0$
 - $\sum F_y = 0$
 - $\sum F_z = 0$
 - $\sum M = 0$

10. คานช่วงเดียวที่มีฐานรองรับเป็น Roller Supports ข้างหนึ่ง และ Hinge Supports ข้างหนึ่ง จะมีแรงปฏิกิริยาที่แรง

- ก. 1 แรง
- ข. 2 แรง
- ค. 3 แรง
- ง. 4 แรง

ตอนที่ 2 จงเติมคำในช่องว่างให้สมบูรณ์

1. แรงกระทำ หมายถึง.....
.....
2. แรงปฏิกิริยาจะเกิดบริเวณใดของโครงสร้าง.....
.....
3. ฐานรองรับ มี.....ชนิด คือ.....
.....
4. Hinge Supports สามารถรับแรงได้.....แรง ตามแนว.....
.....
5. ฐานรองรับชนิดที่สามารถรับโมเมนต์คัตได้ ได้แก่.....
.....
6. น้ำหนักบรรทุกทุกบนโครงสร้าง มี.....ชนิด คือ.....
.....
7. น้ำหนักของผนังที่ถ่ายลงบนคานถือเป็นน้ำหนักบรรทุกทุกชนิด.....
.....
8. สมการสมดุลมี.....สมการ คือ.....
.....
9. โครงสร้างแบ่งเป็น.....ประเภท คือ.....
.....
10. คานยื่นเป็น โครงสร้างประเภท.....
.....

หน่วยที่ 2

แรงปฏิกิริยา

สาระการเรียนรู้

เรื่องที่ 2.1 ฟังก์ชันของแรง

เรื่องที่ 2.2 ขั้นตอนการหาแรงปฏิกิริยาในโครงสร้างอย่างง่ายหรือแบบดีเทอร์มิเนท

เรื่องที่ 2.3 การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา

สาระสำคัญ

แรงปฏิกิริยา (Reaction) เป็นแรงที่โครงสร้างออกแรงต้านทานต่อแรงกระทำซึ่งจะเกิดบริเวณฐานรองรับ เพื่อให้โครงสร้างอยู่ในสภาวะสมดุล ในการวิเคราะห์หาค่าแรงปฏิกิริยานั้น จำเป็นจะต้องเขียนฟังก์ชันของแรงเพื่อความสะดวกในการพิจารณาปัญหาและวิเคราะห์โจทย์ และสิ่งสำคัญอีกอย่างหนึ่งก็คือต้องสามารถจำแนกประเภทของโครงสร้าง ตามเงื่อนไขต่างๆ ได้ การวิเคราะห์หาแรงปฏิกิริยาจึงจะมีความถูกต้อง

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อศึกษาหน่วยที่ 2 แล้ว สามารถ

1. อธิบายความหมายของฟังก์ชันได้
2. บอกประโยชน์ของการเขียนฟังก์ชันได้
3. อธิบายความหมายของแรงปฏิกิริยาได้
4. อธิบายขั้นตอนการคำนวณหาแรงปฏิกิริยาได้
5. คำนวณหาแรงปฏิกิริยาได้

หน่วยที่ 2

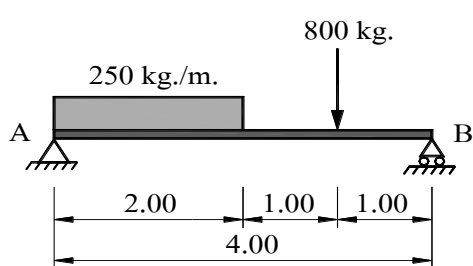
แรงปฏิกิริยา

แรงปฏิกิริยา (Reaction) เป็นแรงต้านแรงกระทำซึ่งเกิดบริเวณฐานรองรับของโครงสร้าง เพื่อให้เกิดการสมดุลในโครงสร้างขึ้น การวิเคราะห์หาค่าแรงปฏิกิริยา เป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่ง เพราะค่าแรงปฏิกิริยาจะเป็นข้อมูลเบื้องต้นที่จะนำไปสู่การวิเคราะห์หาค่าแรงอื่นๆ ที่เกิดขึ้นในโครงสร้าง และการคำนวณออกแบบส่วนของโครงสร้างต่อไป ดังนั้นผู้เรียนต้องศึกษา รายละเอียดต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งขั้นตอนการคำนวณ เพื่อให้สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงปฏิกิริยาได้อย่างถูกต้อง และนำไปออกแบบโครงสร้างได้อย่างถูกต้องเหมาะสม มีความปลอดภัยในการทำงานต่อไป

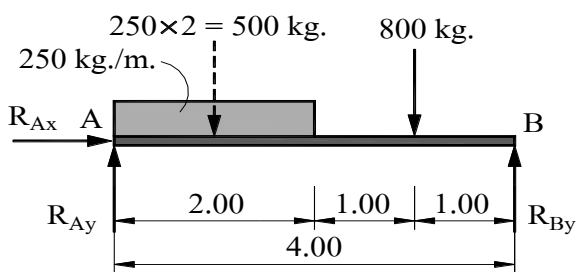
2.1 ผังอิสระของแรง (Free Body Diagram)

ตัวอย่างของผังอิสระของแรงใช้ F.B.D. การเขียนผังอิสระของแรงจะเป็นการใส่สัญลักษณ์ของแรงปฏิกิริยาตรงฐานรองรับ และเขียนแรงกระทำลงบนรูปอิสระตามโจทย์กำหนด ถ้าแรงกระทำเป็นแรงเอียงก็ทำการ แดกแรงให้เรียบร้อย การเขียน ผังอิสระของแรงนี้จะเป็นประโยชน์มากสำหรับการพิจารณาแรงต่างๆ ให้ครบถ้วน สะดวกในการวิเคราะห์หาค่าแรงและการตรวจสอบ

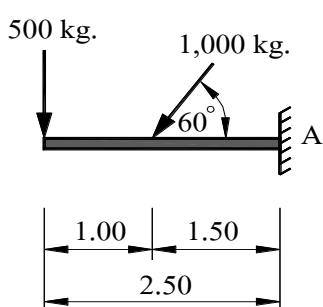
ตัวอย่างการเขียนผังอิสระ เช่น



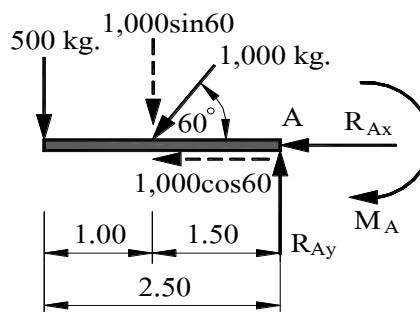
ก. Loading Diagram (L.D.)



ข. Free Body Diagram (F.B.D.)



ค. Loading Diagram (L.D.)



ง. Free Body Diagram (F.B.D.)

รูปที่ 2.1 แสดงการเขียนผังอิสระของแรง

2.2 ขั้นตอนการหาแรงปฏิกิริยาในโครงสร้างแบบง่ายหรือแบบดีเทอร์มิเนท

การหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างแบบง่ายหรือแบบดีเทอร์มิเนท หาได้ 2 วิธี คือ โดยการเขียนรูป (Graphical Method) และการคำนวณ (Analytical Method) สำหรับวิธีการเขียนรูปนั้นไม่ค่อยได้รับความนิยมเพราะไม่ค่อยแม่นยำ และผิดพลาดได้ง่าย ในที่นี้จึงกล่าวถึงวิธีการคำนวณเท่านั้น ซึ่งทำได้โดยใช้สมการสมดุลทั้ง 3 สมการในการวิเคราะห์ตามขั้นตอนดังนี้

1) พิจารณาฐานรองรับของโครงสร้างว่าเป็นแบบใด แล้วใส่สัญลักษณ์ของแรงปฏิกิริยาตามแบบของฐานรองรับ พร้อมทั้งสมมุติทิศทางของแรงปฏิกิริยา ถ้าสมมุติไม่ถูกค่าแรงปฏิกิริยาที่ได้จะมีค่าเป็นลบ ก็ทำการกลับหัวลูกศรหรือทิศทางของแรงปฏิกิริยา ก็จะได้ทิศทางที่ถูกต้อง

2) พิจารณาน้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนโครงสร้าง ถ้ามี แรงที่กระทำในแนวเอียง ให้ทำการแตกแรงเอียงนั้นให้อยู่ในแนวแกน X และแกน Y สำหรับน้ำหนักบรรทุกชนิดแผ่กระจายให้ทำการรวมแรง และแรงลัพธ์ที่ได้จะกระทำผ่านจุดศูนย์กลางของน้ำหนักแผ่กระจายนั้น

3) ใช้สมการสมดุลทั้ง 3 สมการ วิเคราะห์หาค่าแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์ ด้านทานที่เกิดขึ้นบริเวณฐานรองรับ

4) ตรวจสอบความถูกต้อง แรงปฏิกิริยาในแนวดิ่ง และแนวนอน รวมทั้งโมเมนต์ตัด โดยใช้สมการสมดุลทั้ง 3 สมการ

2.3 การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา

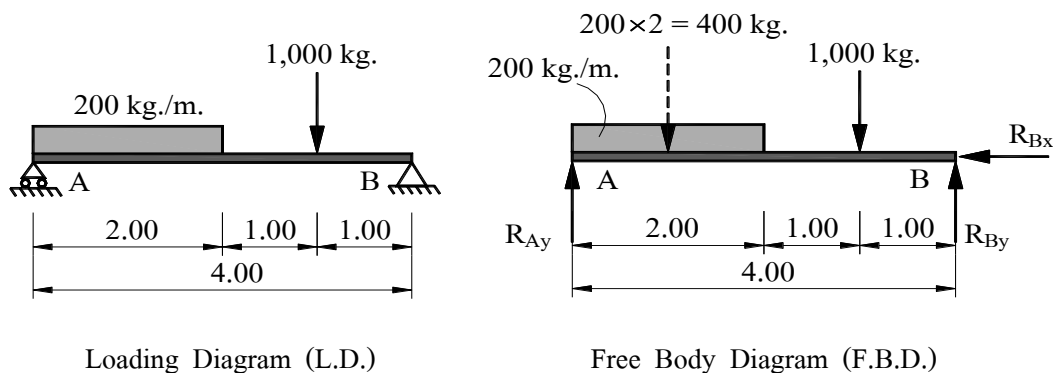
การคำนวณหาค่าแรงปฏิกิริยาของโครงสร้าง ในที่นี้จะกล่าวถึง การหาแรงปฏิกิริยาในโครงสร้างแบบง่ายหรือแบบ ดีเทอร์มิเนท โดยมีน้ำหนักกระทำ บนโครงสร้าง ในลักษณะต่างๆ ได้แก่ น้ำหนักกระทำเป็นจุด (Point Load) น้ำหนักแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอ (Uniformly Distributed Load) น้ำหนักแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอในทางเพิ่มขึ้น หรือลดลง (Uniformly Varying Distributed Load) และแรงคู่ควบ (Couples) หรือโมเมนต์ตัดที่กระทำต่อโครงสร้าง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

2.3.1 การหาแรงปฏิกิริยาของคานช่วงเดียว

ตัวอย่างที่ 2.1

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานช่วงเดียว ความยาว 4.00 ม. รั้งน้ำหนักแผ่นกระจายสม่ำเสมอและน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



หา R_{Ay} ; กำหนดให้จุด B เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_B = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$(R_{Ay} \times 4) - (200 \times 2 \times 3) - (1,000 \times 1) = 0$$

$$4 R_{Ay} - 1,200 - 1,000 = 0$$

$$4 R_{Ay} = 1,000 + 1,200$$

$$R_{Ay} = \frac{(1,000 + 1,200)}{4}$$

$$\therefore R_{Ay} = 550 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{By}

$$\Sigma F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - (200 \times 2) - 1,000 = 0$$

$$550 + R_{By} - 400 - 1,000 = 0$$

$$R_{By} = 1,000 + 400 - 550$$

$$\therefore R_{By} = 850 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Bx}

$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$\therefore R_{Bx} = 0 \text{ kg.}$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

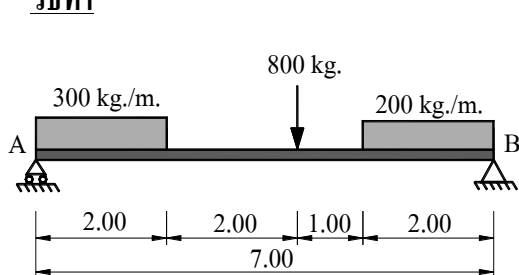
$$550 + 850 - (200 \times 2) - 1,000 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

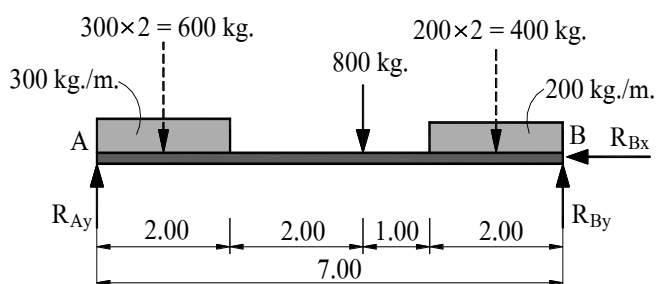
ตัวอย่างที่ 2.2

จงหาแรงปฏิกิริยาของ คานช่วงเดียว ความยาว 7.00 ม. รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ และน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)



Free Body Diagram (F.B.D.)

หา R_{Ay} ; กำหนดให้จุด B เป็นจุดหมุน

$$\sum M_B = 0 ; \curvearrowright +$$

$$(R_{Ay} \times 7) - (200 \times 2 \times 1) - (800 \times 3) - (300 \times 2 \times 6) = 0$$

$$7 R_{Ay} - 400 - 2,400 - 3,600 = 0$$

$$7 R_{Ay} = 3,600 + 2,400 + 400$$

$$R_{Ay} = \frac{(3,600 + 2,400 + 400)}{7}$$

$$R_{Ay} = 914.29 \text{ kg.}$$

$$\therefore R_{Ay} = 914.29 \text{ kg.} \uparrow$$

หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$-(R_{By} \times 7) + (300 \times 2 \times 1) + (800 \times 4) - (200 \times 2 \times 6) = 0$$

$$-7 R_{By} + 600 + 3,200 + 2,400 = 0$$

$$600 + 3,200 + 2,400 = 7 R_{By}$$

$$\frac{(600 + 3,200 + 2,400)}{7} = R_{By}$$

$$885.71 \text{ kg.} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 885.71 \text{ kg.} \quad \uparrow$$

หา R_{Bx}

$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$\therefore R_{Bx} = 0 \text{ kg.}$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

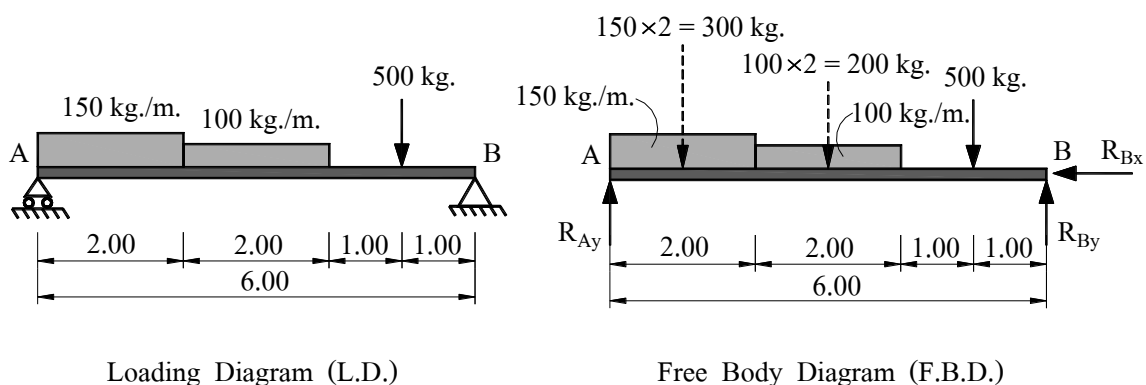
$$914.29 + 885.71 - 600 - 800 - 400 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.3

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานช่วงเดียว ความยาว 6.00 ม. รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอและน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



หา R_{Ay} ; กำหนดให้จุด B เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_B = 0 ; \text{ (clockwise +)}$$

$$(R_{Ay} \times 6) - (500 \times 1) - (100 \times 2 \times 3) - (150 \times 2 \times 5) = 0$$

$$6 R_{Ay} - 500 - 600 - 1,500 = 0$$

$$6 R_{Ay} = 1,500 + 600 + 500$$

$$R_{Ay} = \frac{(1,500 + 600 + 500)}{6}$$

$$R_{Ay} = 433.33 \text{ kg.}$$

$$\therefore R_{Ay} = 433.33 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_A = 0 ; \text{ (clockwise +)}$$

$$-(R_{By} \times 6) + (150 \times 2 \times 1) + (100 \times 2 \times 3) + (500 \times 5) = 0$$

$$-6 R_{By} + 300 + 600 + 2,500 = 0$$

$$300 + 600 + 2,500 = 6 R_{By}$$

$$\frac{(300 + 600 + 2,500)}{6} = R_{By}$$

$$566.67 \text{ kg.} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 566.67 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Bx}

$$\Sigma F_x = 0 ; \text{ (right +)}$$

$$\therefore R_{Bx} = 0 \text{ kg.}$$

ตรวจสอบ

$$\Sigma F_y = 0 ; \text{ (up +)}$$

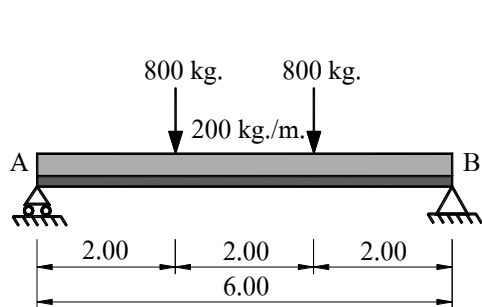
$$433.33 + 566.67 - 300 - 200 - 500 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

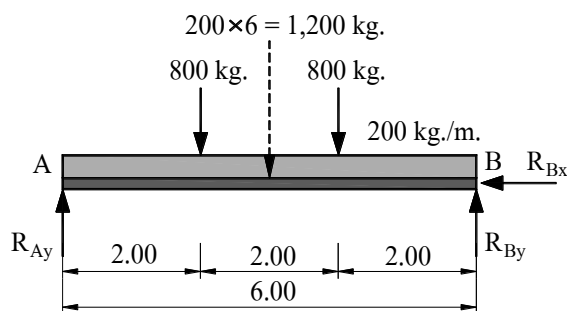
ตัวอย่างที่ 2.4

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานช่วงเดียว ความยาว 6.00 ม. รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอและน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)



Free Body Diagram (F.B.D.)

หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$-(R_{By} \times 6) + (200 \times 6 \times 3) + (800 \times 2) + (800 \times 4) = 0$$

$$-6 R_{By} + 3,600 + 1,600 + 3,200 = 0$$

$$3,600 + 1,600 + 3,200 = 6 R_{By}$$

$$\frac{(3,600 + 1,600 + 3,200)}{6} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 1,400 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - (200 \times 6) - 800 - 800 = 0$$

$$R_{Ay} + 1,400 - 1,200 - 800 - 800 = 0$$

$$R_{Ay} = 800 + 800 + 1,200 - 1,400$$

$$\therefore R_{Ay} = 1,400 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Bx}

$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$\therefore R_{Bx} = 0 \text{ kg.}$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

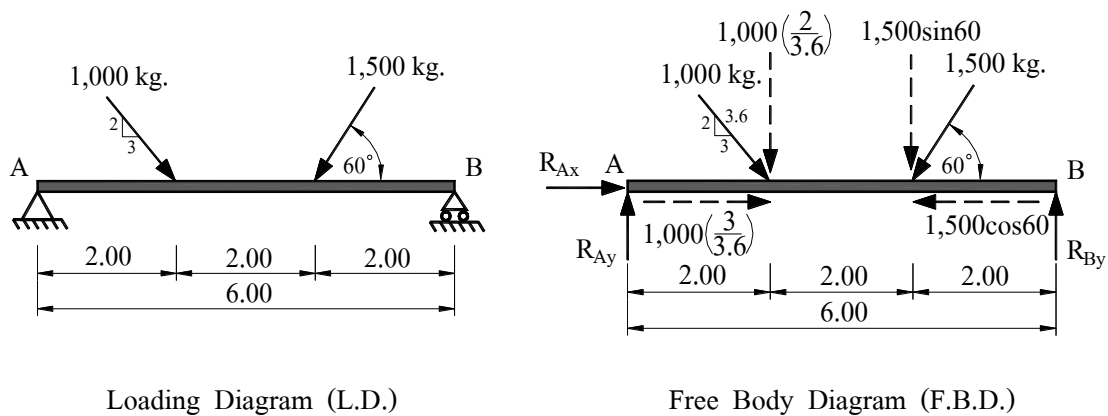
$$1,400 + 1,400 - 1,200 - 800 - 800 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.5

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานช่วงเดียวความยาว 6.00 ม. รับน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \curvearrowright +$$

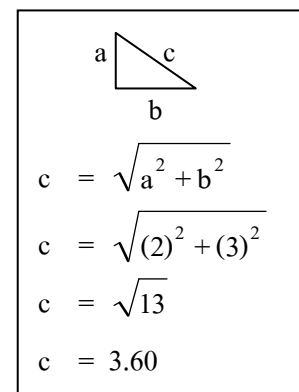
$$-(R_{By} \times 6) + \left(\frac{2}{3.6} \times 1,000 \times 2\right) + (1,500 \sin 60 \times 4) = 0$$

$$-6 R_{By} + 1,111.11 + 5,196.15 = 0$$

$$1,111.11 + 5,196.15 = 6 R_{By}$$

$$\frac{(1,111.11 + 5,196.15)}{6} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 1,051.21 \text{ kg. } \uparrow$$



หา R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - \left(\frac{2}{3.6} \times 1,000\right) - (1,500 \sin 60) = 0$$

$$R_{Ay} + 1,051.21 - 555.56 - 1,299.04 = 0$$

$$R_{Ay} = 1,299.04 + 555.56 - 1,051.21$$

$$\therefore R_{Ay} = 803.39 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$R_{Ax} + \left(\frac{3}{3.6} \times 1,000\right) - (1,500 \cos 60) = 0$$

$$R_{Ax} + 833.33 - 750 = 0$$

$$R_{Ax} = 750 - 833.33$$

$$R_{Ax} = -83.33$$

$$\therefore R_{Ax} = 83.33 \text{ kg. } \rightarrow$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

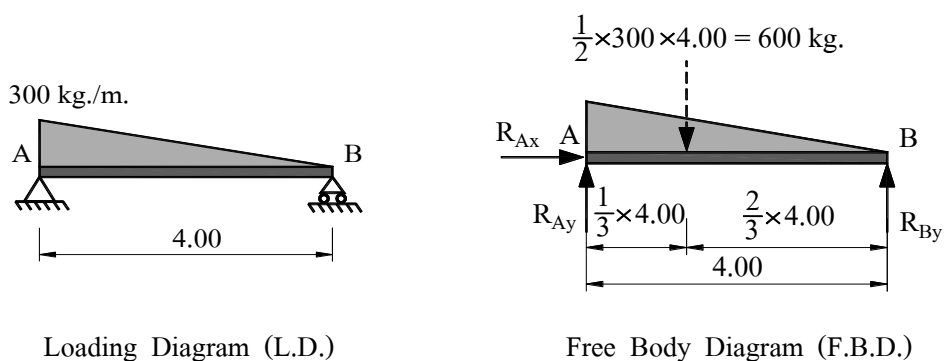
$$803.39 + 1,051.21 - 555.56 - 1,299.04 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.6

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานช่วงเดียว ความยาว 4.00 ม. รับน้ำหนักแผ่กระจาย แบบลดลง สม่ำเสมอ ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_A = 0 ; \curvearrowright +$$

$$-(R_{By} \times 4) + \left(\frac{1}{2} \times 300 \times 4\right) \left(\frac{1}{3} \times 4\right) = 0$$

$$-4 R_{By} + 800 = 0$$

$$800 = 4 R_{By}$$

$$\frac{800}{4} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 200 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ay}

$$\Sigma F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - \left(\frac{1}{2} \times 300 \times 4\right) = 0$$

$$R_{Ay} + 200 - 600 = 0$$

$$R_{Ay} = 600 - 200$$

$$\therefore R_{Ay} = 400 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\Sigma F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$\therefore R_{Ax} = 0 \text{ kg.}$$

ตรวจสอบ

$$\Sigma F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$400 + 200 - 600 = 0$$

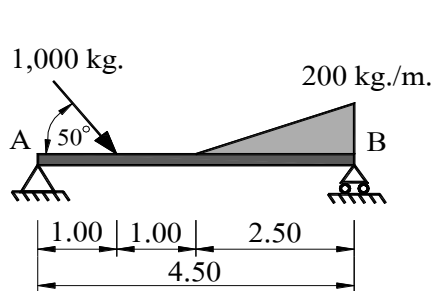
$$0 = 0$$

O.K.

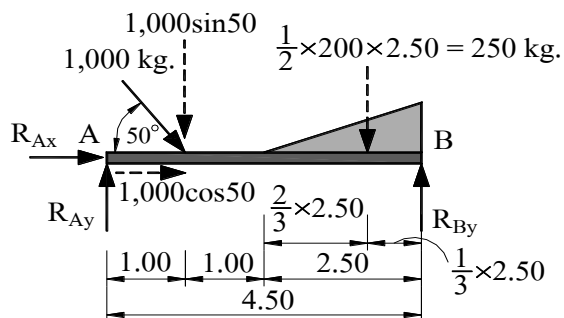
ตัวอย่างที่ 2.7

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานช่วงเดียว ความยาว 4.50 ม. รับน้ำหนักแต่ละกระจายแบบเพิ่มขึ้น สม่ำเสมอและรับน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)



Free Body Diagram (F.B.D.)

หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$-(R_{By} \times 4.5) + (1,000 \sin 50 \times 1) + \left(\frac{1}{2} \times 200 \times 2.5\right) \left(2 + \frac{2}{3} \times 2.5\right) = 0$$

$$-4.5 R_{By} + 766.04 + 916.67 = 0$$

$$916.67 + 766.04 = 4.5 R_{By}$$

$$\frac{(916.67 + 766.04)}{4.5} = R_{By}$$

$$373.93 = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 373.93 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - (1,000 \sin 50) - \left(\frac{1}{2} \times 200 \times 2.5\right) = 0$$

$$R_{Ay} + 373.93 - 766.04 - 250 = 0$$

$$R_{Ay} = 250 + 766.04 - 373.93$$

$$\therefore R_{Ay} = 642.11 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$R_{Ax} + (1,000 \cos 50) = 0$$

$$R_{Ax} + 642.79 = 0$$

$$R_{Ax} = -642.79 \text{ kg.} \quad \rightarrow$$

$$\therefore R_{Ax} = 642.79 \text{ kg.} \quad \leftarrow$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$642.11 + 373.93 - 766.04 - 250 = 0$$

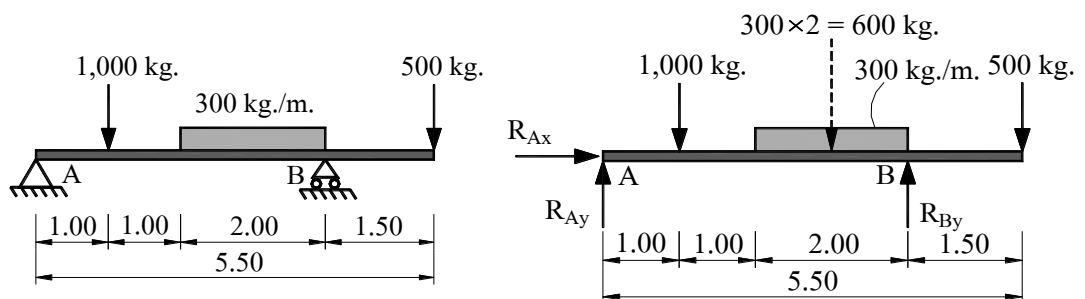
$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

2.3.2 การหาแรงปฏิกิริยาของคานปลายยื่น

ตัวอย่างที่ 2.8

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานปลายยื่นข้างเดียว รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ และน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)

Free Body Diagram (F.B.D.)

หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \quad \text{⤵} +$$

$$-(R_{By} \times 4) + (300 \times 2 \times 3) + (1,000 \times 1) + (500 \times 5.5) = 0$$

$$-4 R_{By} + 1,800 + 1,000 + 2,750 = 0$$

$$1,800 + 1,000 + 2,750 = 4 R_{By}$$

$$\frac{(1,800 + 1,000 + 2,750)}{4} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 1,387.50 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - (300 \times 2) - 1,000 - 500 = 0$$

$$R_{Ay} + 1,387.5 - 600 - 1,000 - 500 = 0$$

$$R_{Ay} = 500 + 1,000 + 600 - 1,387.5$$

$$\therefore R_{Ay} = 712.50 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$\therefore R_{Ax} = 0 \text{ kg.}$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$712.50 + 1,387.5 - 600 - 1,000 - 500 = 0$$

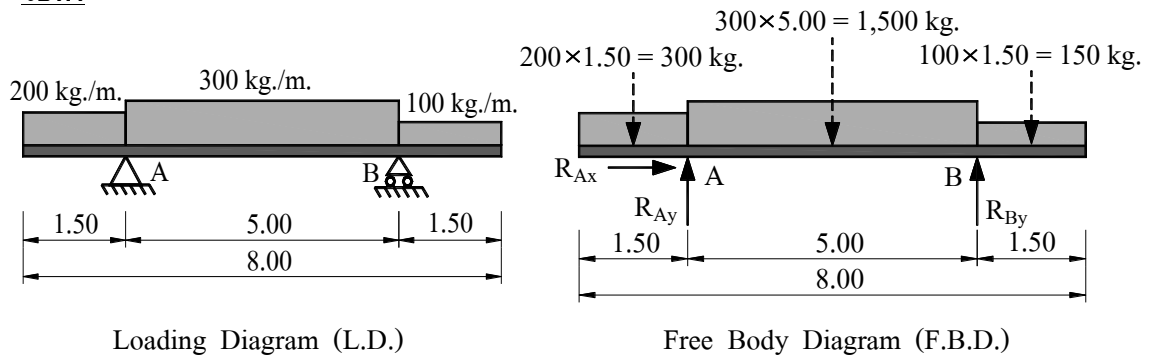
$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.9

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานาปลายยื่นสองข้าง รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ ดังแสดงใน

รูป

วิธีทำ



หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \curvearrowright +$$

$$-(R_{By} \times 5) + (300 \times 5 \times 2.5) + (100 \times 1.5 \times 5.75) - (200 \times 1.5 \times 0.75) = 0$$

$$-5 R_{By} + 3,750 + 862.5 - 225 = 0$$

$$3,750 + 862.5 - 225 = 5 R_{By}$$

$$\frac{(3,750 + 862.5 + 225)}{5} = R_{By}$$

$$5$$

$$\therefore R_{By} = 967.50 \text{ kg.} \uparrow$$

หา R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - (300 \times 5) - (200 \times 1.5) - (100 \times 1.5) = 0$$

$$R_{Ay} + 967.50 - 1,500 - 300 - 150 = 0$$

$$R_{Ay} = 1,500 + 300 + 150 - 967.50$$

$$\therefore R_{Ay} = 982.50 \text{ kg.} \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$\therefore R_{Ax} = 0 \text{ kg.}$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

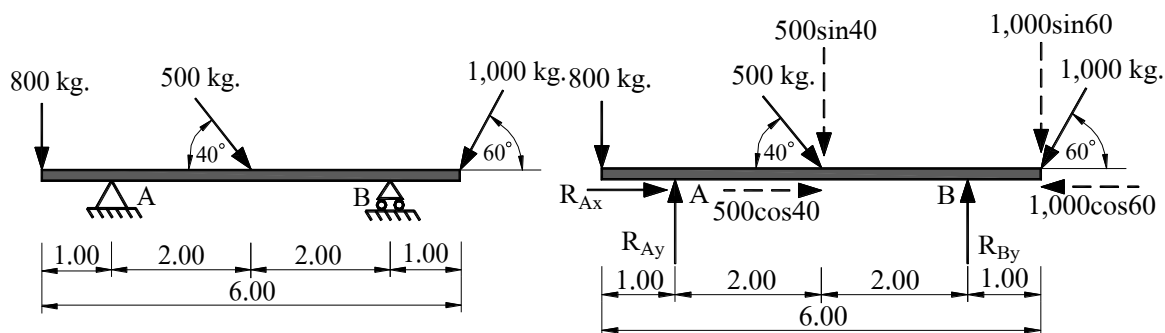
$$982.50 + 967.50 - 1,500 - 300 - 150 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.10

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานปลายยื่นสองข้าง รับน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)

Free Body Diagram (F.B.D.)

หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \curvearrowright +$$

$$-(R_{By} \times 4) - (800 \times 1) + (500 \sin 40 \times 2) + (1,000 \sin 60 \times 5) = 0$$

$$-4 R_{By} - 800 + 642.79 + 4,330.13 = 0$$

$$-800 + 642.79 + 4,330.13 = 4 R_{By}$$

$$\frac{(4,330.13 + 642.79 - 800)}{4} = R_{By}$$

4

$$\therefore R_{By} = 1,043.23 \text{ kg. } \uparrow$$

หาค่า R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 800 - (500\sin 40) - (1,000\sin 60) = 0$$

$$R_{Ay} + 1,043.23 - 800 - 321.39 - 866.03 = 0$$

$$R_{Ay} = 866.03 + 321.39 + 800 - 1,043.23$$

$$\therefore R_{Ay} = 944.19 \text{ kg. } \uparrow$$

หาค่า R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$R_{Ax} + (500\cos 40) - (1,000\cos 60) = 0$$

$$R_{Ax} + 383.02 - 500 = 0$$

$$R_{Ax} = 500 - 383.02$$

$$\therefore R_{Ax} = 116.98 \text{ kg. } \rightarrow$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

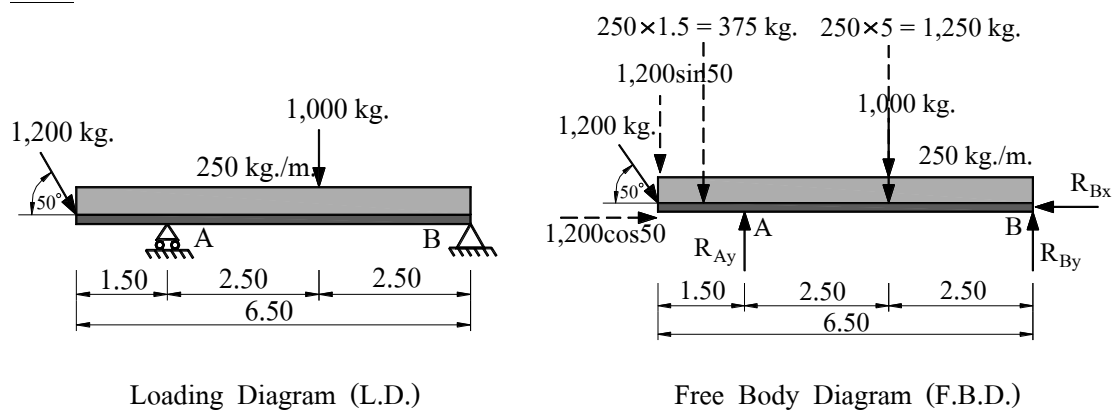
$$944.19 + 1,043.23 - 800 - 321.39 - 866.03 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.11

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานปลายยื่นข้างเดียว รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ และน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_A = 0 ; \text{ (clockwise +)}$$

$$-(R_{By} \times 5) - (250 \times 1.5 \times 0.75) - (1,200 \sin 50 \times 1.5) + (250 \times 5 \times 2.5) + (1,000 \times 2.5) = 0$$

$$-5 R_{By} - 281.25 - 1,378.88 + 3,125 + 2,500 = 0$$

$$-281.25 - 1,378.88 + 3,125 + 2,500 = 5 R_{By}$$

$$\frac{(2,500 + 3,125 - 1,378.88 - 281.25)}{5} = R_{By}$$

5

$$\therefore R_{By} = 792.97 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ay}

$$\Sigma F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - (250 \times 6.5) - 1,000 - (1,200 \sin 50) = 0$$

$$R_{Ay} + 792.97 - 1,625 - 1,000 - 919.25 = 0$$

$$R_{Ay} = 919.25 + 1,000 + 1,625 - 792.97$$

$$\therefore R_{Ay} = 2,751.28 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Bx}

$$\Sigma F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$(1,200 \cos 50) - R_{Bx} = 0$$

$$771.35 - R_{Bx} = 0$$

$$771.35 \text{ kg.} = R_{Bx}$$

$$\therefore R_{Bx} = 771.35 \text{ kg. } \leftarrow$$

ตรวจสอบ

$$\Sigma F_y = 0 ; \uparrow +$$

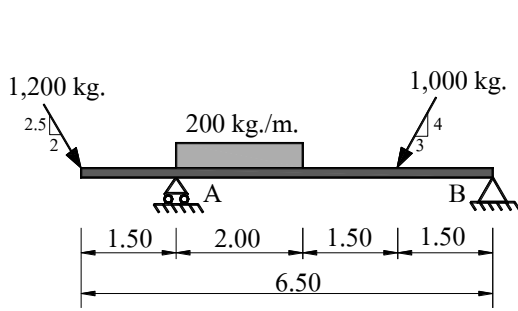
$$2,751.28 + 792.97 - 1,625 - 1,000 - 919.25 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

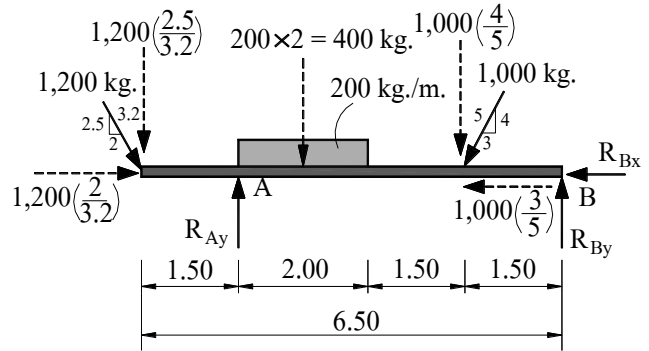
ตัวอย่างที่ 2.12

จงหาแรงปฏิกิริยาของคาน ปลายยื่นข้างเดียว รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอและรับน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)



Free Body Diagram (F.B.D.)

หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

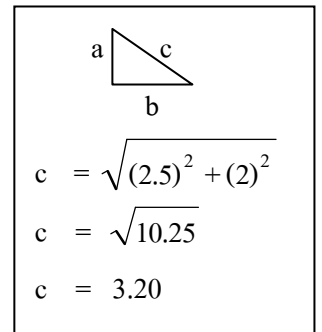
$$\sum M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$-(R_{By} \times 5) - \left(\frac{2.5}{3.2} \times 1,200 \times 1.5\right) + (200 \times 2 \times 1) + \left(\frac{4}{5} \times 1,000 \times 3.5\right) = 0$$

$$2,800 + 400 - 1,406.25 = 5 R_{By}$$

$$\frac{(2,800 + 400 - 1,406.25)}{5} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 358.75 \text{ kg. } \uparrow$$



หา R_{Ay}

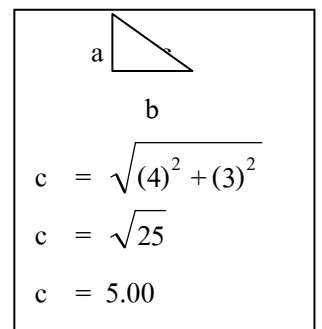
$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - \left(\frac{2.5}{3.2} \times 1,200\right) - (200 \times 2) - \left(\frac{4}{5} \times 1,000\right) = 0$$

$$R_{Ay} + 358.75 - 937.5 - 400 - 800 = 0$$

$$R_{Ay} = 800 + 400 + 937.5 - 358.75$$

$$\therefore R_{Ay} = 1,778.75 \text{ kg. } \uparrow$$



หา R_{Bx}

$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$-R_{Bx} + \left(\frac{2}{3.2} \times 1,200\right) - \left(\frac{3}{5} \times 1,000\right) = 0$$

$$-R_{Bx} + 750 - 600 = 0$$

$$750 - 600 = R_{Bx}$$

$$\therefore R_{Bx} = 150 \text{ kg. } \leftarrow$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

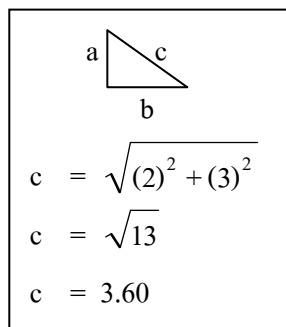
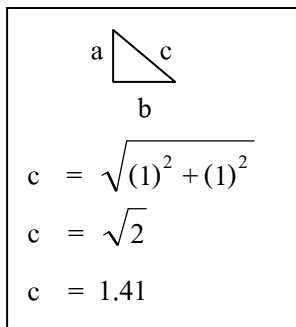
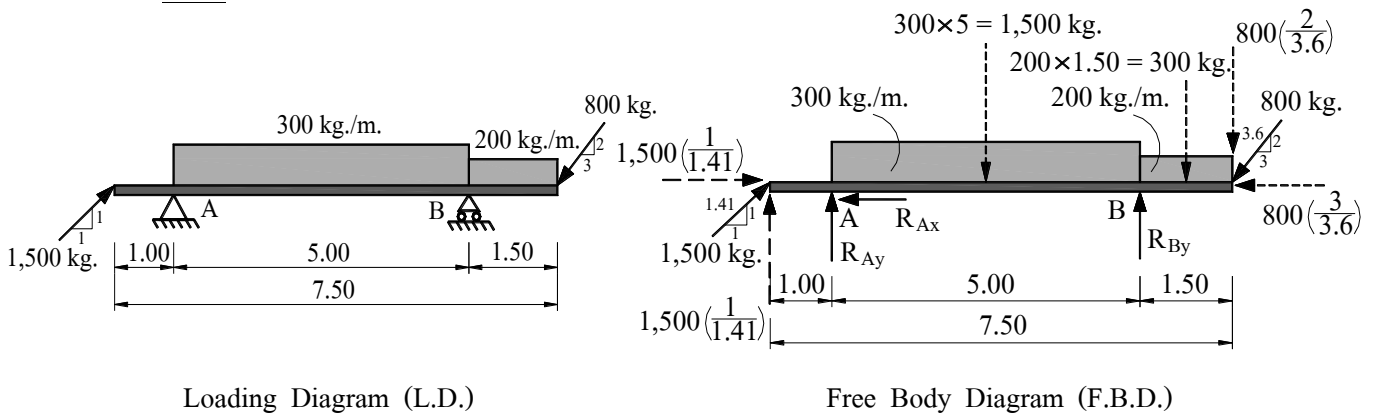
$$1,778.75 + 358.75 - 937.5 - 400 - 800 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.13

จงหาแรงปฏิกิริยาของคาน ปลายยื่นสองข้าง ความยาว 5.00 ม. รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ และรับน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$-(R_{By} \times 5) + \left(\frac{1}{1.41} \times 1,500 \times 1\right) + (300 \times 5 \times 2.5) + (200 \times 1.5 \times 5.75) + \left(\frac{2}{3.6} \times 800 \times 6.5\right) = 0$$

$$-5 R_{By} + 1,063.83 + 3,750 + 1,725 + 2,888.89 = 0$$

$$1,063.83 + 3,750 + 1,725 + 2,888.89 = 5 R_{By}$$

$$\frac{(1,063.83 + 3,750 + 1,725 + 2,888.89)}{5} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 1,885.54 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ay}

$$\Sigma F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} + \left(\frac{1}{1.41} \times 1,500\right) - (300 \times 5) - (200 \times 1.5) - \left(\frac{2}{3.6} \times 800\right) = 0$$

$$R_{Ay} + 1,885.54 + 1,063.83 - 1,500 - 300 - 444.45 = 0$$

$$R_{Ay} = 444.45 + 300 + 1,500 - 1,063.83 - 1,885.54$$

$$R_{Ay} = -704.92 \text{ kg. } \uparrow$$

$$\therefore R_{Ay} = 704.92 \text{ kg. } \downarrow$$

หา R_{Ax}

$$\Sigma F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$-R_{Ax} + \left(\frac{1}{1.41} \times 1,500\right) - \left(\frac{3}{3.6} \times 800\right) = 0$$

$$-R_{Ax} + 1,063.83 - 666.67 = 0$$

$$1,063.83 - 666.67 = R_{Ax}$$

$$\therefore R_{Ax} = 397.16 \text{ kg. } \leftarrow$$

ตรวจสอบ

$$\Sigma F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

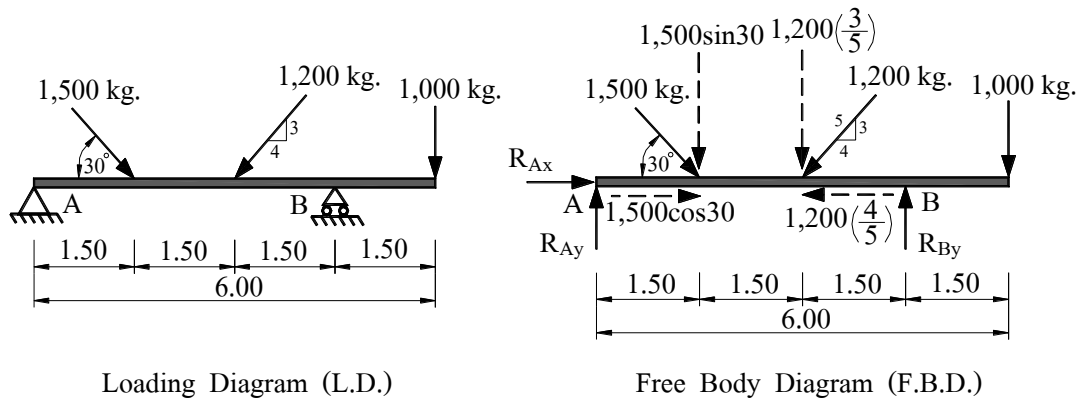
$$-704.92 + 1,885.54 + 1,063.83 - 1,500 - 300 - 444.45 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.14

จงหาแรงปฏิกิริยาของคานปลายยื่นข้างเดียว รับน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

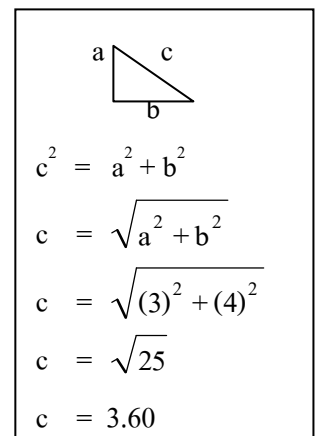
$$-(R_{By} \times 4.5) + (1,500 \sin 30 \times 1.5) + \left(\frac{3}{5} \times 1,200 \times 3\right) + (1,000 \times 6) = 0$$

$$-4.5 R_{By} + 1,125 + 2,160 + 6,000 = 0$$

$$1,125 + 2,160 + 6,000 = 4.5 R_{By}$$

$$\frac{(1,125 + 2,160 + 6,000)}{4.5} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 2,063.33 \text{ kg. } \uparrow$$



หา R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - (1,500 \sin 30) - \left(\frac{3}{5} \times 1,200\right) - 1,000 = 0$$

$$R_{Ay} + 2,063.33 - 750 - 720 - 1,000 = 0$$

$$R_{Ay} = 1,000 + 720 + 750 - 2,063.33$$

$$\therefore R_{Ay} = 406.67 \text{ kg. } \uparrow$$

หาค่า R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$R_{Ax} + \left(\frac{4}{5} \times 1,200\right) - (1,500 \cos 30) = 0$$

$$R_{Ax} + 960 - 1,299.04 = 0$$

$$R_{Ax} = 1,299.04 - 960$$

$$\therefore R_{Ax} = 339.04 \text{ kg. } \rightarrow$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

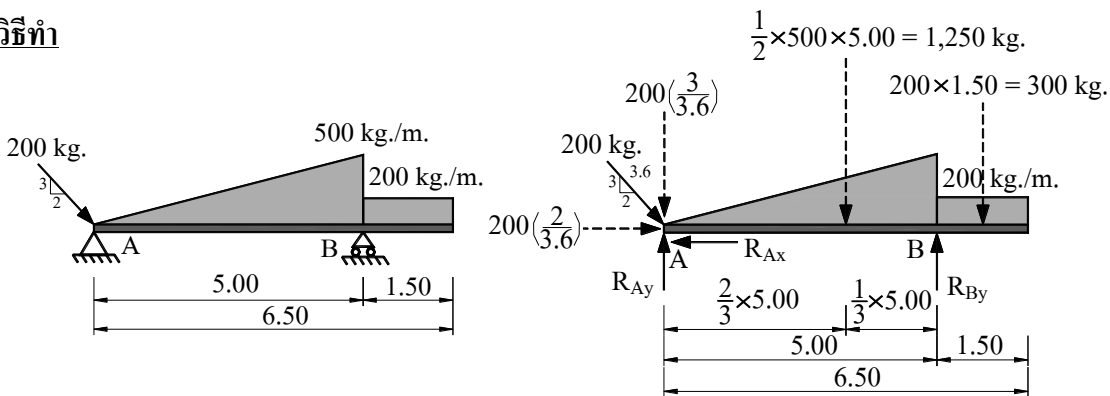
$$406.67 + 2,063.33 - 750 - 720 - 1,000 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.15


จงหาแรงปฏิกิริยาของคาน ปลายยื่นข้างเดียว รับน้ำหนักแผ่กระจาย แบบเพิ่มขึ้น สม่่าเสมอ และรับน้ำหนักกระทำเป็นจุด ดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)

Free Body Diagram (F.B.D.)

a  c
 b

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{(3)^2 + (2)^2}$$

$$c = \sqrt{13}$$

$$c = 3.60$$

หา R_{Ay} ; กำหนดให้จุด B เป็นจุดหมุน

$$\sum M_B = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$(R_{Ay} \times 5) - \left(\frac{1}{2} \times 500 \times 5\right) - \left(\frac{1}{3} \times 5\right) - \left(\frac{3}{3.6} \times 200 \times 5\right) + (200 \times 1.5 \times 0.75) = 0$$

$$5 R_{Ay} = 2,083.33 + 833.33 - 225$$

$$R_{Ay} = \frac{(2,083.33 + 833.33 - 225)}{5}$$

$$\therefore R_{Ay} = 538.33 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{By}

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - \left(\frac{1}{2} \times 500 \times 5\right) - \left(\frac{3}{3.6} \times 200\right) - (200 \times 1.5) = 0$$

$$R_{By} + 538.33 - 1,250 - 166.67 - 300 = 0$$

$$R_{By} = 300 + 166.67 + 1,250 - 538.33$$

$$\therefore R_{By} = 1,178.34 \text{ kg. } \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$R_{Ax} + \left(\frac{2}{3.6} \times 200\right) = 0$$

$$R_{Ax} + 111.11 = 0$$

$$R_{Ax} = -111.1 \text{ kg.}$$

$$\therefore R_{Ax} = 111.11 \text{ kg. } \rightarrow$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$538.33 + 1,178.34 - 1,250 - 166.67 - 300 = 0$$

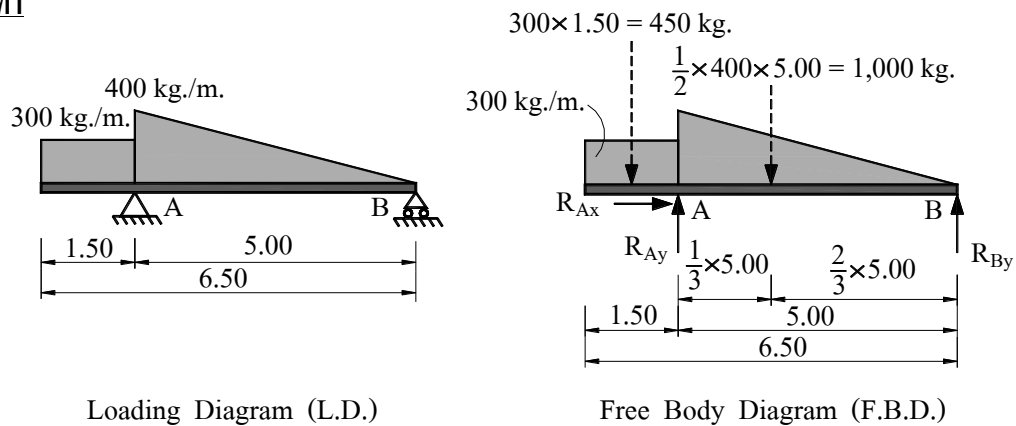
$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.16

จงหาแรงปฏิกิริยาของคาน ปลายอื่นข้างเดียว รับน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ ดังแสดง

ในรูป

วิธีทำ



หา R_{By} ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$-(R_{By} \times 5) - (300 \times 1.5 \times 0.75) + \left(\frac{1}{2} \times 400 \times 5\right) \left(\frac{1}{3} \times 5\right) = 0$$

$$1,666.67 - 337.5 = 4 R_{By}$$

$$\frac{(1,666.67 - 337.5)}{4} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 265.83 \text{ kg.} \uparrow$$

หา R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - (300 \times 1.5) - \left(\frac{1}{2} \times 400 \times 5\right) = 0$$

$$R_{Ay} + 265.83 - 450 - 1,000 = 0$$

$$R_{Ay} = 1,000 + 450 - 265.83$$

$$\therefore R_{Ay} = 1,184.17 \text{ kg.} \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$\therefore R_{Ax} = 0 \text{ kg.}$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$1,184.17 + 265.83 - 450 - 1,000 = 0$$

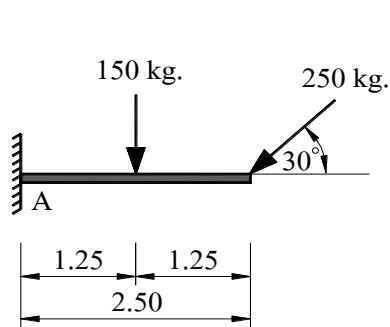
$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

2.3.3 การหาแรงปฏิกิริยาของคานยื่น (Cantilever Beam)

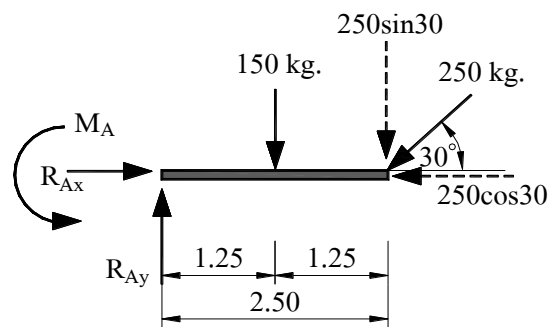
ตัวอย่างที่ 2.17

จงหาค่าแรงปฏิกิริยาของคานยื่น (Cantilever Beam) ซึ่งรับน้ำหนักดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)



Free Body Diagram (F.B.D.)

หา M_A ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\sum M_A = 0 ; \curvearrowright +$$

$$-M_A + (150 \times 1.25) + (250 \sin 30 \times 2.5) = 0$$

$$-M_A + 187.50 + 312.50 = 0$$

$$187.50 + 312.50 = M_A$$

$$\therefore M_A = 500 \text{ kg-m.}$$

หา R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$R_{Ay} - 150 - (250 \sin 30) = 0$$

$$R_{Ay} - 150 - 125 = 0$$

$$R_{Ay} = 125 + 150$$

$$\therefore R_{Ay} = 275 \text{ kg.} \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$R_{Ax} - (250 \cos 30) = 0$$

$$R_{Ax} - 216.51 = 0$$

$$R_{Ax} = 216.51$$

$$\therefore R_{Ax} = 216.51 \text{ kg. } \rightarrow$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

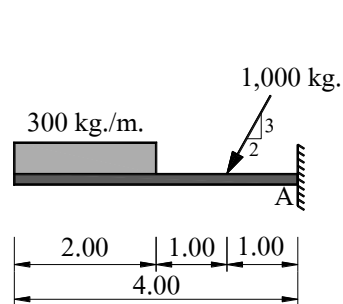
$$275 - 150 - 125 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

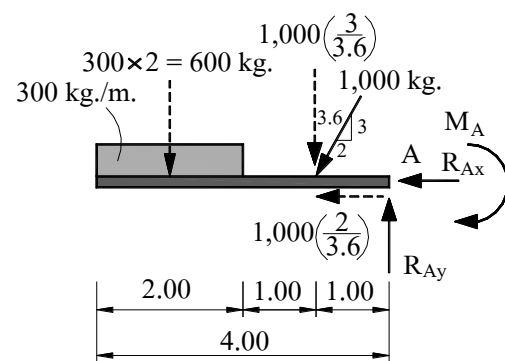
ตัวอย่างที่ 2.18

จงหาค่าแรงปฏิกิริยาของคานยื่น (Cantilever Beam) ซึ่งรับน้ำหนักดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)



Free Body Diagram (F.B.D.)

หา M_A ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

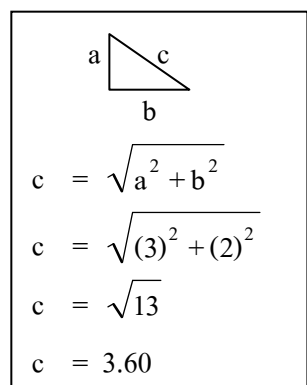
$$\sum M_A = 0 ; \curvearrowright +$$

$$M_A - (300 \times 2 \times 3) - \left(\frac{3}{3.6} \times 1,000 \times 1 \right) = 0$$

$$M_A - 1,800 - 833.33 = 0$$

$$M_A = 833.33 + 1,800$$

$$\therefore M_A = 2,633.33 \text{ kg-m.}$$



หาค่า R_{Ay}

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} - (300 \times 2) - \left(\frac{3}{3.6} \times 1,000\right) = 0$$

$$R_{Ay} - 600 - 833.33 = 0$$

$$R_{Ay} = 833.33 + 600$$

$$\therefore R_{Ay} = 1,433.33 \text{ kg. } \uparrow$$

หาค่า R_{Ax}

$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$-R_{Ax} - \left(\frac{2}{3.6} \times 1,000\right) = 0$$

$$-R_{Ax} - 555.56 = 0$$

$$R_{Ax} = -555.56 \text{ kg.}$$

$$\therefore R_{Ax} = 555.56 \text{ kg. } \rightarrow$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

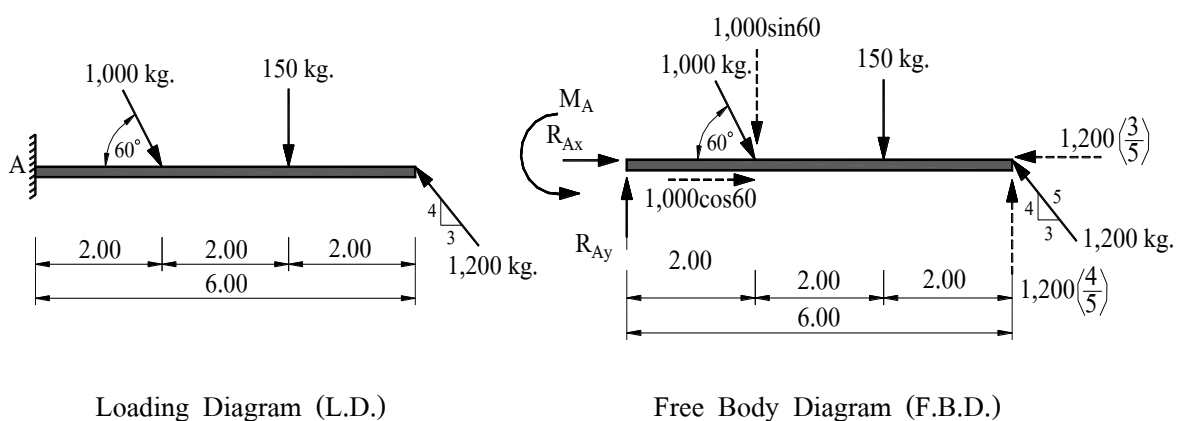
$$1,433.33 - 600 - 833.33 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ตัวอย่างที่ 2.19

จงหาค่าแรงปฏิกิริยาของคานยื่น (Cantilever Beam) ซึ่งรับน้ำหนักดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)

Free Body Diagram (F.B.D.)

หา M_A ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

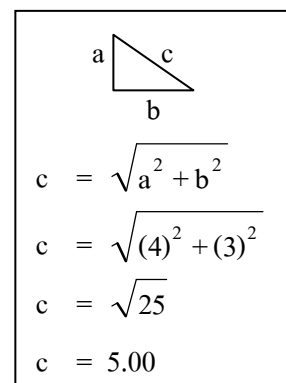
$$-M_A + (1,000\sin 60 \times 2) + (150 \times 4) - \left(\frac{4}{5} \times 1,200 \times 6\right) = 0$$

$$-M_A + 1,732.05 + 600 - 5,760 = 0$$

$$1,732.05 + 600 - 5,760 = M_A$$

$$-3,427.95 = M_A$$

$$\therefore M_A = 3,427.95 \text{ kg-m.}$$



หา R_{Ay}

$$\Sigma F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} - (1,000\sin 60) - 150 + \left(\frac{4}{5} \times 1,200\right) = 0$$

$$R_{Ay} - 866.02 - 150 + 960 = 0$$

$$R_{Ay} = 866.02 + 150 - 960$$

$$\therefore R_{Ay} = 56.02 \text{ kg.} \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\Sigma F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$R_{Ax} + (1,000\cos 60) - \left(\frac{3}{5} \times 1,200\right) = 0$$

$$R_{Ax} + 500 - 720 = 0$$

$$R_{Ax} = 720 - 500$$

$$\therefore R_{Ax} = 220 \text{ kg.} \rightarrow$$

ตรวจสอบ

$$\Sigma F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$56.02 - 866.02 - 150 + 960 = 0$$

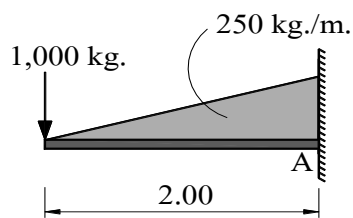
$$0 = 0$$

O.K.

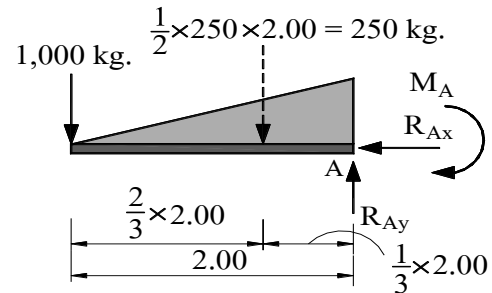
ตัวอย่างที่ 2.20

จงหาค่าแรงปฏิกิริยาของคานยื่น (Cantilever Beam) ซึ่งรับน้ำหนักดังแสดงในรูป

วิธีทำ



Loading Diagram (L.D.)



Free Body Diagram (F.B.D.)

หา M_A ; กำหนดให้จุด A เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$M_A - (1,000 \times 2) - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 250\right) \left(\frac{1}{3} \times 2\right) = 0$$

$$M_A - 2,000 - 166.67 = 0$$

$$M_A = 2,000 + 166.67$$

$$\therefore M_A = 2,166.67 \text{ kg-m.}$$

หา R_{Ay}

$$\Sigma F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} - 1,000 - \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 250\right) = 0$$

$$R_{Ay} - 1,000 - 250 = 0$$

$$R_{Ay} = 1,000 + 250$$

$$\therefore R_{Ay} = 1,250 \text{ kg.} \uparrow$$

หา R_{Ax}

$$\Sigma F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$\therefore R_{Ax} = 0 \text{ kg.}$$

ตรวจสอบ

$$\Sigma F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$1,250 - 1,000 - 250 = 0$$

$$0 = 0$$

O.K.

แบบฝึกหัดท้ายบทหน่วยที่ 2

ตอนที่ 1 จงเติมคำลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1. แรงปฏิกิริยา หมายถึง.....

.....

.....

.....

2. F.B.D. ย่อมาจาก.....
หมายถึง.....

.....

.....

3. F.B.D. มีประโยชน์ คือ.....

.....

.....

.....

4. การหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างแบบง่ายสามารถทำได้.....วิธี
ได้แก่.....

.....

.....

.....

5. ขั้นตอนการคำนวณหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างแบบง่ายหรือแบบดีเทอร์มิเนท คือ

.....

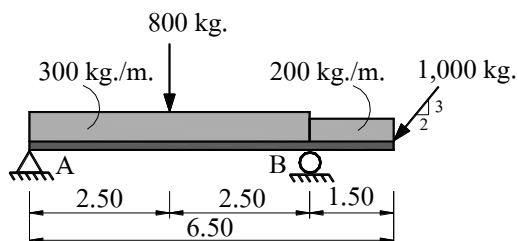
.....

.....

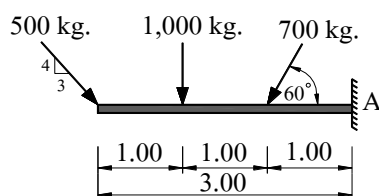
.....

ตอนที่ 2 จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาของ โครงสร้างแบบง่าย ซึ่งรับน้ำหนักดังรูป

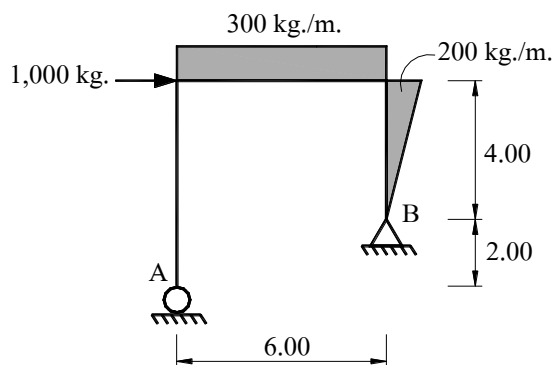
1. จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาของคานปลายยื่นข้างเดียว



2. จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาของคานยื่น



3. จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาของ โครงงข้อแข็ง



หน่วยที่ 3

แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

สาระการเรียนรู้

- เรื่องที่ 3.1 ชนิดของคานาดีเทอร์มิเนท
- เรื่องที่ 3.2 พฤติกรรมการรับแรงของคานาดีเทอร์มิเนท
- เรื่องที่ 3.3 เครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรง
- เรื่องที่ 3.4 การคำนวณหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคานาดีเทอร์มิเนท
- เรื่องที่ 3.5 การเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
- เรื่องที่ 3.6 การเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดอย่างรวดเร็ว

สาระสำคัญ

ค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด มีความสำคัญอย่างยิ่งสำหรับการออกแบบโครงสร้าง ไม่ว่าจะเป็นโครงสร้างไม้ โครงสร้างเหล็ก หรือโครงสร้าง คอนกรีตเสริมเหล็ก เช่น ในการออกแบบคานาคอนกรีตเสริมเหล็ก โมเมนต์ดัดจะเป็นตัวกำหนดขนาดหน้าตัดของคานาและปริมาณเหล็กเสริม ส่วนแรงเฉือนจะเป็นตัวกำหนดขนาดและระยะห่างของเหล็กปลอก เป็นต้น ในการศึกษาเรื่องการหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด จำเป็นจะต้องรู้ถึงชนิดและพฤติกรรมของคานาเมื่อรับน้ำหนักด้วย เพื่อการวิเคราะห์ที่ถูกต้อง

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อศึกษาหน่วยที่ 3 แล้ว สามารถ

1. บอกชนิดของคานาดีเทอร์มิเนทได้
2. อธิบายพฤติกรรมการรับแรงของคานาดีเทอร์มิเนทได้
3. เขียนเครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรงในคานาดีเทอร์มิเนทได้
4. คำนวณหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคานาดีเทอร์มิเนทได้
5. เขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดได้

หน่วยที่ 3

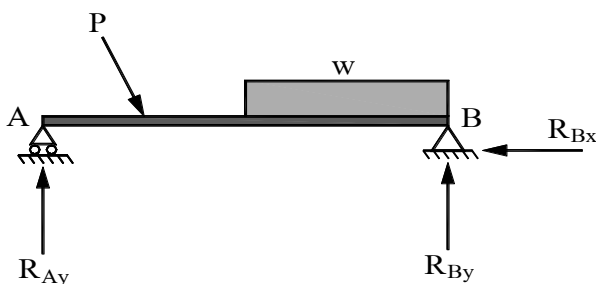
แรงเฉือนและโมเมนต์คัต

3.1 ชนิดของคานดีเทอร์มิเนท

ชนิดของคานมีมากมายหลายชนิดทั้งคานดี เทอร์มิเนทและคานอินดี เทอร์มิเนท ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะคานดี เทอร์มิเนท ซึ่งเป็นคานที่สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์คัตได้ด้วยการใช้สมการสมดุลเพียงสามข้อ อันได้แก่

3.1.1 คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam)

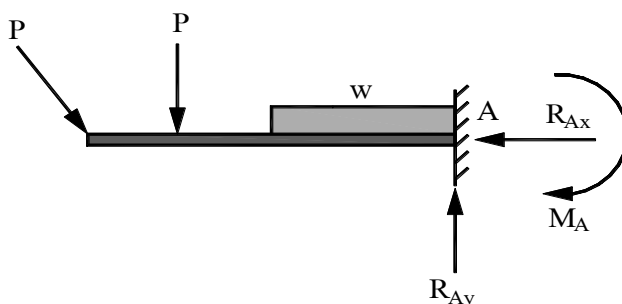
คานช่วงเดียวธรรมดา คือคานช่วงเดียวที่มีฐานรองรับด้านหนึ่งเป็น Roller Supports และอีกด้านหนึ่งเป็น Hinge Supports



รูปที่ 3.1 แสดงคานช่วงเดียวธรรมดา

3.1.2 คานยื่น (Cantilever Beam)

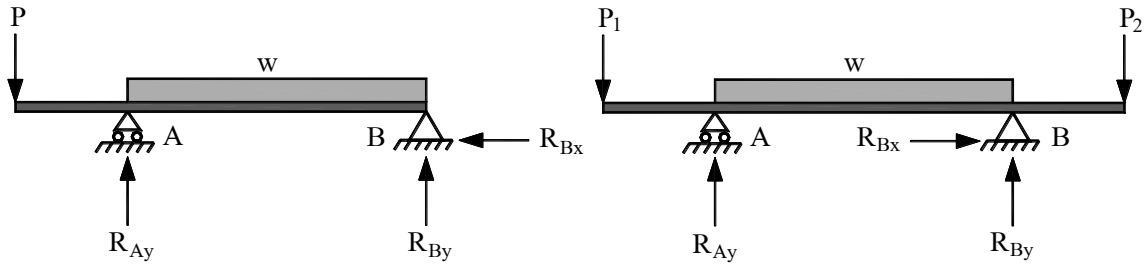
คานยื่น คือคานยื่นที่มีฐานรองรับเพียงด้านเดียว ซึ่งเป็นฐานรองรับแบบยึดแน่น หรือ Fixed Supports ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งจะเป็นอิสระ



รูปที่ 3.2 แสดงคานยื่น

3.1.3 คานช่วงเดียวปลายยื่น (Overhanging Beam)

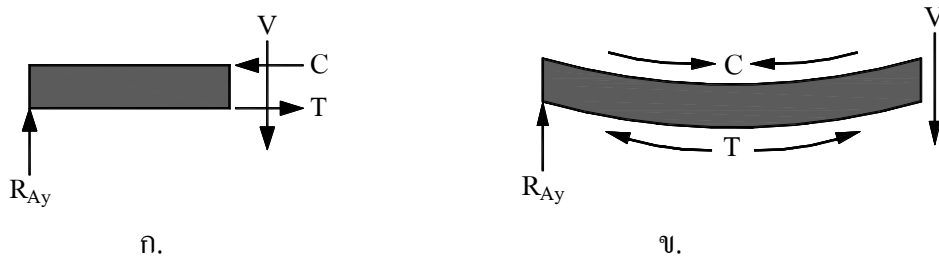
คานช่วงเดียวปลายยื่น คือคานที่มีฐานรองรับสองข้างเหมือนคานช่วงเดียวธรรมดา แต่จะมีปลายยื่นข้างเดียวหรือยื่นทั้งสองข้างก็ได้



รูปที่ 3.3 แสดงคานช่วงเดียวปลายยื่น

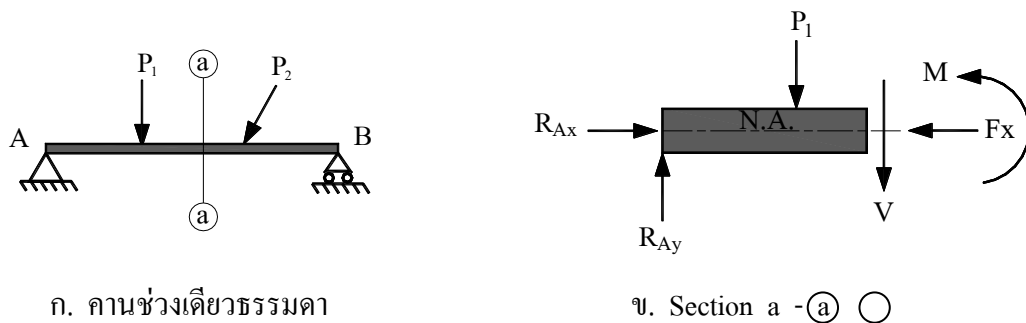
3.2 พฤติกรรมการรับแรงของคานดีเทอร์มิเนท

พฤติกรรมการรับแรงของคานโดยทั่วไปจะรับแรงอัด (Compression ; C) ในส่วนบนสุด และจะรับแรงดึง (Tension ; T) ในส่วนล่างสุด ดังแสดงในรูป



รูปที่ 3.4 แสดงพฤติกรรมการรับแรงของคาน

เมื่อคานถูกแรงและโมเมนต์ตัดกระทำจากภายนอก จะเกิดแรงและโมเมนต์ตัดขึ้นภายในหน้าตัดใดๆ ของคาน ซึ่งเราสามารถคำนวณหาค่าแรงเหล่านั้นได้ด้วยการใช้สมการสมดุล และเมื่อตัดคานที่หน้าตัดใดๆ จะพบแรงที่เกิดขึ้นดังแสดงในรูป



รูปที่ 3.5 แสดงแรงภายในคานดีเทอร์มิเนท

3.2.1 แรงตามแนวแกน (Fx)

แรงตามแนวแกน เป็นแรงที่เกิดขึ้นตามแนวแกนสะเทิน (Natal Axis ; N.A.) ของคาน แต่แรงนี้ไม่มีผลต่อการรับน้ำหนักของคานจึงสามารถตัดออกไปได้

3.2.2 แรงเฉือน (Shearing Force ; V)

แรงเฉือน เป็นแรงที่จะทำให้คานขาดออกจากกันในแนวดิ่ง ซึ่งมีผลมากต่อโครงสร้างอาคาร

3.2.3 โมเมนต์ดัด (Bending Moment ; M)

โมเมนต์ดัด เป็นผลที่เกิดขึ้นจากการที่คานถูกแรงเฉือนพยายามจะเฉือนให้คานขาดออกจากกัน จนเกิดการโค้งงอของคานซึ่งมีผลต่อโครงสร้างของอาคารมากเช่นกัน

3.3 เครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรง

เพื่อการสื่อความหมายและความเข้าใจที่ตรงกันจำเป็นต้องมีการกำหนดเครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรงขึ้น และโดยทั่วไปแล้วเครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรงจะใช้ดังต่อไปนี้

3.3.1 เครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรงในแนวแกน

โดยทั่วไปแรงในแนวแกนจะเป็นแรงอัดและแรงดึง เครื่องหมายแทนแรงอัดจะใช้เครื่องหมายลบ (-) ส่วนแรงดึงจะใช้เครื่องหมาย บวก (+) สัญลักษณ์แทนแรงอัดจะใช้หัวลูกศรวิ่งเข้าหากัน และสัญลักษณ์แทนแรงดึงจะใช้หัวลูกศรวิ่งออกจากกัน ดังรูป



ก. แสดงแรงอัด มีค่าเป็นลบ

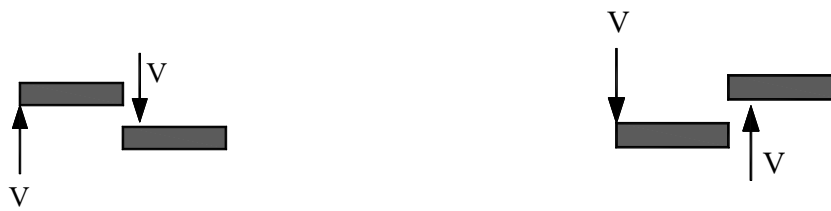


ข. แสดงแรงดึง มีค่าเป็นบวก

รูปที่ 3.6 แสดงเครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรงในแนวแกน

3.3.2 เครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรงเฉือน

สำหรับแรงเฉือนก็จะมีสองค่า คือค่าบวกและค่าลบเหมือนกัน โดยพิจารณาคานจากซ้ายไปขวาและกำหนดให้แรงที่มีทิศทางขึ้นมีค่าเป็นบวก แรงที่มีทิศทางลงมีค่าเป็นลบ ถ้าตัดคานที่หน้าตัดใดๆ แล้วมีแรงที่พยายามเฉือนให้ชิ้นส่วนของคานด้านซ้ายมีทิศทางขึ้นและคานด้านขวา มีทิศทางลงแรงเฉือนตรงนั้นจะมีค่าเป็นบวก และตรงข้ามกัน ถ้าแรงพยายามเฉือนให้ชิ้นส่วนของคานด้านซ้ายมีทิศทางลงและคานด้านขวามีทิศทางขึ้นแรงเฉือนก็จะมีค่าเป็นลบ ดังแสดงในรูป



ก. แสดงแรงเฉือนเป็นบวก

ข. แสดงแรงเฉือนเป็นลบ

รูปที่ 3.7 แสดงเครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนแรงเฉือน

3.3.3 เครื่องหมายและสัญลักษณ์แทนโมเมนต์ดัด

โมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นภายในคานจะมีทั้ง โมเมนต์บวกและ โมเมนต์ลบ โดยทั่วไปจะกำหนดให้ โมเมนต์หมุนตามเข็มนาฬิกามีค่าเป็นบวก และ โมเมนต์หมุนทวน เข็มนาฬิกามีค่าเป็นลบ หรือโมเมนต์ ที่ตัดให้คานแอ่นลงด้านล่างมีค่าเป็นบวก และ โมเมนต์ที่ตัดให้คาน โกงขึ้นข้างบนมีค่าเป็นลบ ดังแสดง ในรูป



ก. แสดงโมเมนต์ดัดเป็นบวก



ข. แสดงโมเมนต์ดัดเป็นลบ

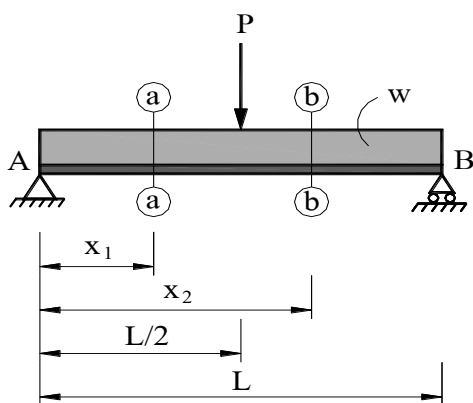
รูปที่ 3.8 แสดงเครื่องหมายและสัญลักษณ์แทน โมเมนต์ดัด

3.4 การคำนวณหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคานดิเทอร์มิเนท

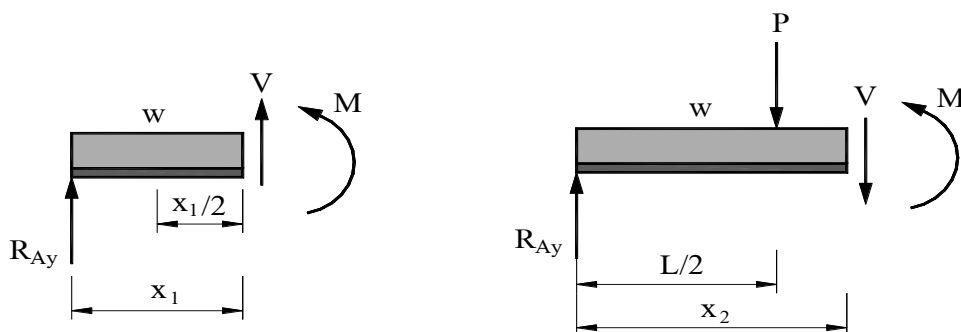
การหาค่าแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดในคานเป็นขั้นตอนสำคัญในการออกแบบ โครงสร้าง ถ้า หาค่าแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดไม่ถูกต้อง การออกแบบก็ย่อมจะผิดพลาด โครงสร้างไม่มีความ ปลอดภัยในการใช้งาน เป็นอันตรายต่อชีวิตและทรัพย์สิน เพราะฉะนั้นจะต้องมีความเข้าใจใน พฤติกรรมการรับแรงของคาน รู้ถึงวิธีการหาค่าแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดอย่างถูกต้อง และสามารถ เขียนแผนภาพของแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดได้อย่างถูกต้อง

3.4.1 สมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

ในการคำนวณหาค่าแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัด โดยทั่วไปจะใช้สมการ สมดุล คือ $\sum F_y = 0$ ใช้ สำหรับหาค่าแรงเฉือน และ $\sum M = 0$ ใช้สำหรับหาค่าโมเมนต์ดัด ซึ่งจะพิจารณาจุดที่ตัดเสมอ และ การพิจารณาตัดส่วนของคานเพื่อสร้างสมการของแรงเฉือนและ โมเมนต์ดัดนั้น จะตัดเป็นช่วง ๆ ที่มี การเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ ซึ่งสมการที่สร้างขึ้นมาใช้เฉพาะช่วงที่พิจารณานั้น ๆ ตัวอย่างเช่น



ก.



ข. หน้าตัด (a) - (a)

ค. หน้าตัด (b) - (b)

รูปที่ 3.9 แสดงลักษณะแรงเฉือนและโมเมนต์ตัด

ที่หน้าตัด a - a (สำหรับ ระยะ 0 - L/2)

สมการของแรงเฉือน

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} - (w \cdot x_1) - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - (w \cdot x_1)$$

สมการของโมเมนต์ตัด

$$\sum M_{cut} = 0$$

$$(R_{Ay} \cdot x_1) - (w \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2}) - M = 0$$

$$M = (R_{Ay} \cdot x_1) - (w \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2})$$

ที่หน้าตัด b - b (สำหรับ ระยะ $L/2 - L$)

สมการของแรงเฉือน

$$\sum F_y = 0$$

$$R_{Ay} - (w \cdot x_2) - P - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - (w \cdot x_2) - P$$

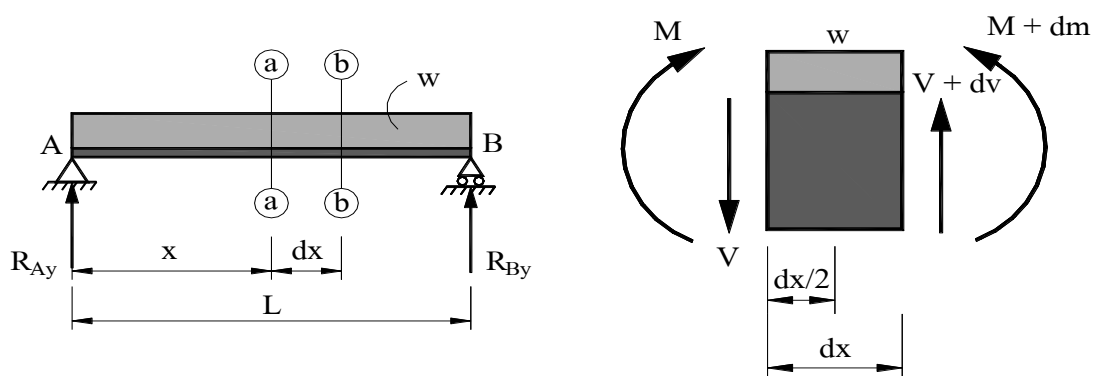
สมการของโมเมนต์ตัด

$$\sum M_{\text{cut}} = 0$$

$$(R_{Ay} \cdot x_2) - (w \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2}) - [P(x_2 - L/2)] - M = 0$$

$$M = (R_{Ay} \cdot x_2) - (w \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2}) - [P(x_2 - L/2)]$$

3.4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก แรงเฉือน และโมเมนต์ตัด



รูปที่ 3.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก แรงเฉือน และโมเมนต์ตัด

จากรูปที่ 3.10 พิจารณาหน้าตัดคานเป็นชิ้นส่วนเล็กๆ ขนาดความยาวเท่ากับ dx ที่หน้าตัด a-a จะได้แรงเฉือนคือ V และโมเมนต์ตัดคือ M ถ้าพิจารณาที่หน้าตัด b-b ซึ่งห่างจากหน้าตัด a-a เท่ากับ dx จะได้ค่าแรงเฉือนเท่ากับ $V + dv$ และค่าโมเมนต์ตัด เท่ากับ $M + dm$ จะได้

สมการของแรงเฉือน

$$\sum F_y = 0$$

$$V + (w \cdot dx) = V + dv$$

$$\therefore dv = w \cdot dx$$

สรุปได้ว่า การเปลี่ยนแปลงค่าของแรงเฉือนระหว่างจุดสองจุด มีค่าเท่ากับน้ำหนักทั้งหมดระหว่างจุดสองจุดนั้น

สมการของโมเมนต์ตัด

$$\Sigma M = 0$$

$$M + (V \cdot dx) + (w \cdot dx \cdot \frac{dx}{2}) = M + dm$$

แต่ $w \cdot dx \cdot \frac{dx}{2}$ มีค่าน้อยมากจึงตัดออกไป

$$\therefore dm = V \cdot dx$$

สรุปได้ว่า ค่าโมเมนต์ตัดที่เกิดขึ้น ณ หน้าตัดใดๆ จะมีค่าเท่ากับผลบวกสะสมของพื้นที่แรงเฉือนระหว่างจุดสองจุดนั้น

ข้อสังเกต การหาค่าโมเมนต์ตัดสามารถทำได้ทั้งสองวิธี คือ การสร้างสมการโมเมนต์ตัดคำนวณหา และโดยวิธีการบวกสะสมของพื้นที่แรงเฉือน

3.5 การเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ตัด

ในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้าง จำเป็นจะต้องทราบค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดที่เกิดขึ้นและเปลี่ยนแปลงไป ณ หน้าตัดต่างๆ ตลอดความยาวของโครงสร้างนั้นๆ ซึ่งการแสดงค่าของแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดด้วยแผนภาพจะช่วยให้มองเห็นภาพได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

3.5.1 แผนภาพของแรงเฉือน (Shearing Force Diagram ; S.F.D.)

แผนภาพของแรงเฉือน คือแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าแรงเฉือน ณ หน้าตัดต่างๆ กับความยาวขององค์อาคาร

3.5.2 แผนภาพของโมเมนต์ตัด (Bending Moment Diagram ; B.M.D.)

แผนภาพของโมเมนต์ตัด คือแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าโมเมนต์ตัด ณ หน้าตัดต่างๆ กับความยาวขององค์อาคาร

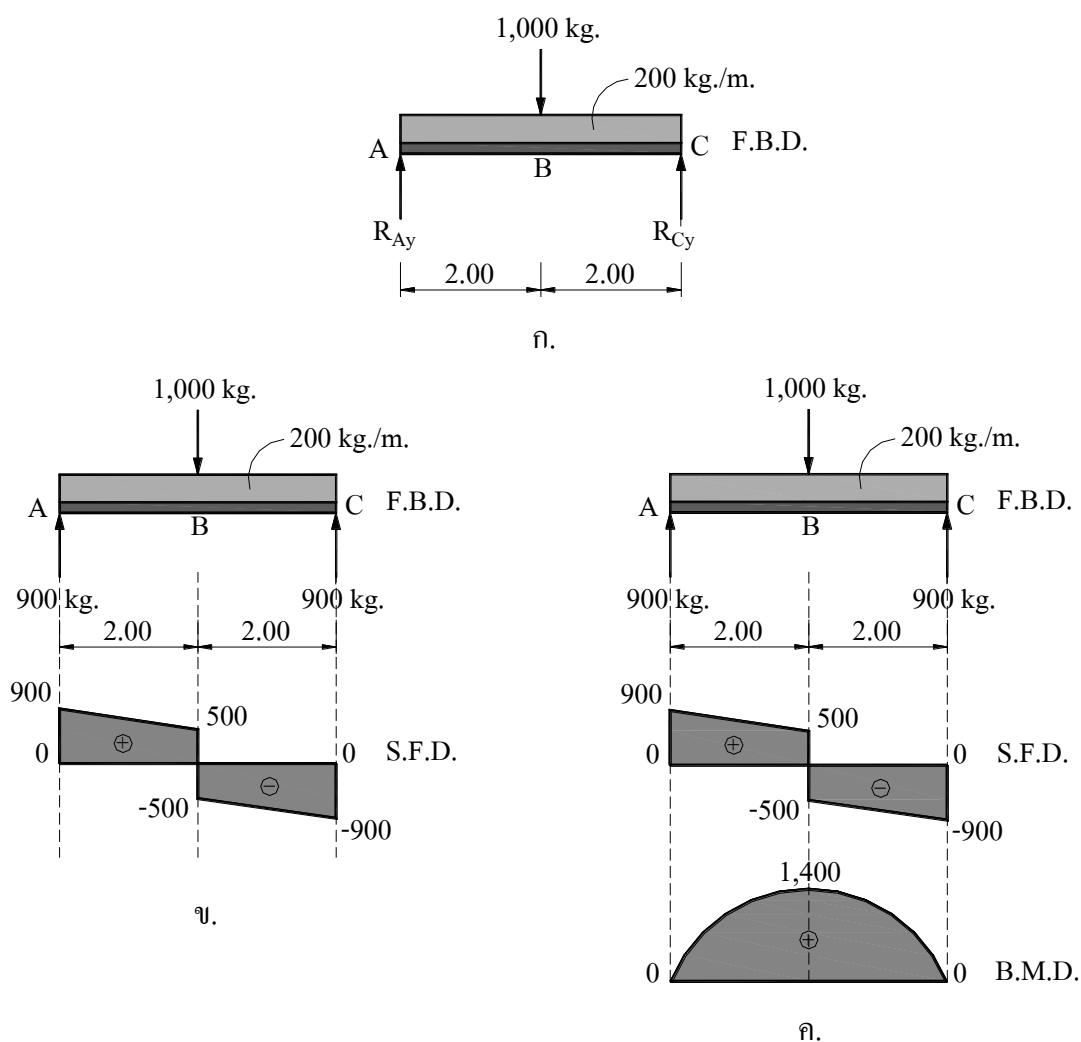
3.5.3 ขั้นตอนการเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ตัด

ก่อนที่จะทำการเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ตัด จะต้องคำนวณหาค่าแรงปฏิกิริยาให้เรียบร้อยก่อน เสร็จแล้วจึงคำนวณหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดโดยการสร้างสมการเป็นช่วงๆ

1) เขียนแผนภาพอิสระของแรง (Free Body Diagram ; F.B.D.) โดยยกโจทย์มาเขียน โดยไม่ต้องใส่สัญลักษณ์ของฐานรองรับแต่ให้ใส่แรงปฏิกิริยาที่คำนวณได้ลงไปแทน

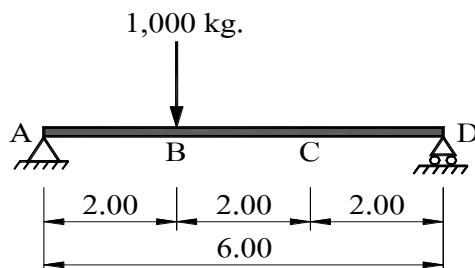
2) เขียนแผนภาพของแรงเฉือน (Shearing Force Diagram ; S.F.D.) ถัดลงไปจาก F.B.D. โดยเริ่มพิจารณาจากจุดซ้ายมือสุด นำค่าแรงเฉือนที่คำนวณได้มาเขียนตามแกนคาน โดยค่าแรงเฉือนที่เป็นบวกจะเขียนเหนือแกนคาน ส่วนค่าแรงเฉือนที่เป็นลบจะเขียนใต้แกนคาน เมื่อเชื่อมจุดต่างๆ ที่เขียน ด้วยเส้นตรงหรือเส้นโค้งตามสมการ ของแรงเฉือนจะได้แผนภาพของแรงเฉือนตามต้องการ

3) เขียนแผนภาพของโมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram ; B.M.D.) ถัดลงไปจาก S.F.D. โดยสร้างเส้นตามแนวอนแทนแกนของคาน ให้ตรงกับ S.F.D. โดยเริ่มพิจารณาจากด้านซ้ายมือสุด นำค่าโมเมนต์ดัดที่คำนวณได้มาเขียนตามแนวแกนคาน โดยค่าโมเมนต์ดัดที่เป็นบวกจะเขียนเหนือแกนคาน ส่วนค่าโมเมนต์ดัด ที่เป็นลบจะเขียนใต้แกนคาน เมื่อเชื่อมจุดต่างๆ ที่เขียนด้วยเส้นตรงหรือเส้นโค้งตามสมการของโมเมนต์ดัดจะได้แผนภาพของโมเมนต์ดัด ตามต้องการ ดังรูปที่ 3.11 ค.



รูปที่ 3.11 แสดงการเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

ตัวอย่างที่ 3.1 จงเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคานช่วงเดียว ซึ่งรับน้ำหนัก ดังแสดงในรูป พร้อมทั้งหาค่าแรงเฉือน (V_a, V_b, V_c, V_d) และ โมเมนต์คัต (M_a, M_b, M_c, M_d)



วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ

$$\Sigma M_D = 0 ; \curvearrowright +$$

$$(R_{Ay} \times 6) - (1,000 \times 4) = 0$$

$$6 R_{Ay} - 4,000 = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{4,000}{6}$$

$$\therefore R_{Ay} = 666.67 \text{ kg.} \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 ; \curvearrowright +$$

$$(1,000 \times 2) - (R_{Dy} \times 6) = 0$$

$$2,000 - 6 R_{Dy} = 0$$

$$\frac{2,000}{6} = R_{Dy}$$

$$\therefore R_{Dy} = 333.33 \text{ kg.} \uparrow$$

ตรวจสอบ

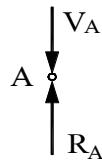
$$\Sigma F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{Dy} - 1,000 = 0$$

$$666.67 + 333.33 - 1,000 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าแรงเฉือน ณ จุดที่พิจารณาโดยใช้สมการ $\Sigma F_y = 0$ ให้แรงที่มีทิศทางขึ้นเป็นบวก และแรงที่มีทิศทางลงเป็นลบ

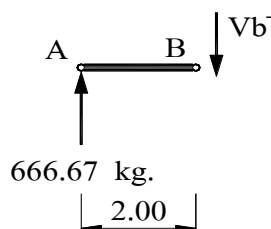
พิจารณาจุด A ; Section $a^+ - a^+$



$$\Sigma F_y = 0$$

$$V_A = R_{Ay} = 666.67 \text{ kg.}$$

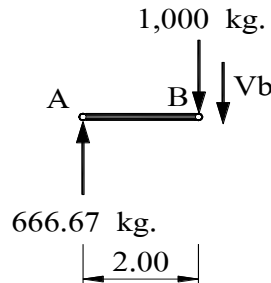
พิจารณาจุด B ; Section $b^- - b^-$ (ก่อนหน้าแรง 1,000 kg. กระทำ)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$V_{b^-} = R_{Ay} = 666.67 \text{ kg.}$$

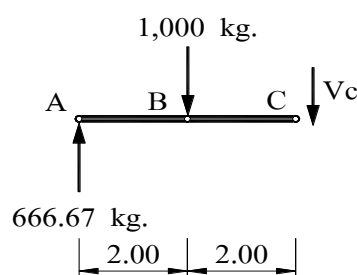
พิจารณาจุด B ; Section $b^+ - b^+$ (หลังแรง 1,000 kg. กระทำ)



$$\Sigma F_y = 0$$

$$V_{b^+} = 666.67 - 1,000 = -333.33 \text{ kg.}$$

พิจารณาจุด C ; Section $c - c$



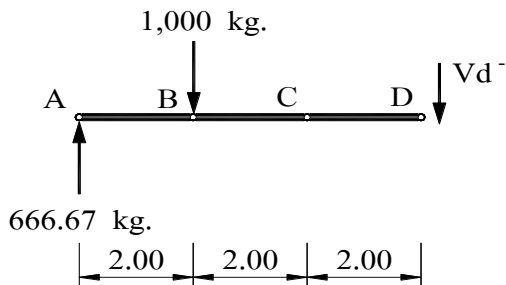
$$\Sigma F_y = 0$$

$$V_C = 666.67 - 1,000 = -333.33 \text{ kg.}$$

พิจารณาจุด D ; Section $d^- - d^-$ (ก่อนหน้าแรง R_{Dy} กระทำ)

$$\sum F_y = 0$$

$$V_{d^-} = 666.67 - 1,000 = -333.33 \text{ kg.}$$

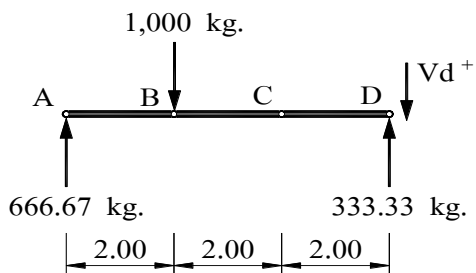


A

พิจารณาจุด D ; Section $d^+ - d^+$ (หลังแรง R_{Dy} กระทำ)

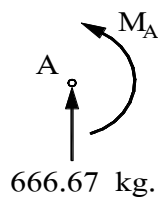
$$\sum F_y = 0$$

$$V_{d^+} = 666.67 - 1,000 + 333.33 = 0 \text{ kg.}$$



ขั้นตอนที่ 3 หาค่าโมเมนต์ตัด ณ จุดที่พิจารณาโดยใช้สมการ $\sum M_{cut} = 0$ และให้โมเมนต์ตามเข็มนาฬิกามีค่าเป็นบวก โมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกามีค่าเป็นลบ

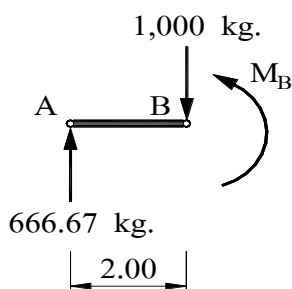
พิจารณาจุด A



$$\sum M_A = 0$$

$$M_A = 0 \text{ kg-m.}$$

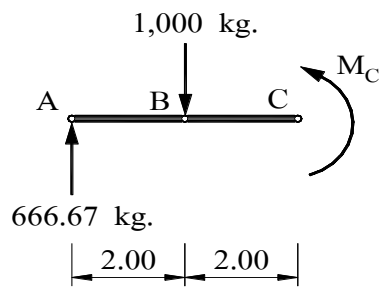
พิจารณาจุด B



$$\sum M_B = 0$$

$$M_B = (666.67 \times 2) = 1,333.34 \text{ kg-m.}$$

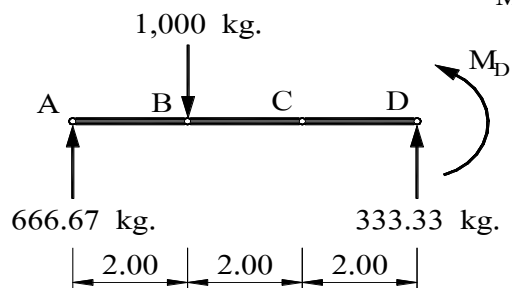
พิจารณาจุด C



$$\sum M_C = 0$$

$$M_C = (666.67 \times 4) - (1,000 \times 2) = 666.68 \text{ kg-m.}$$

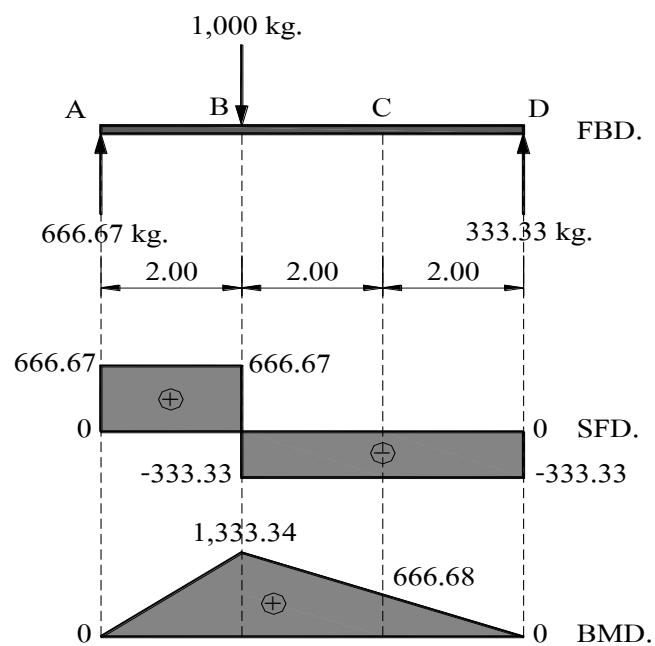
พิจารณาจุด D



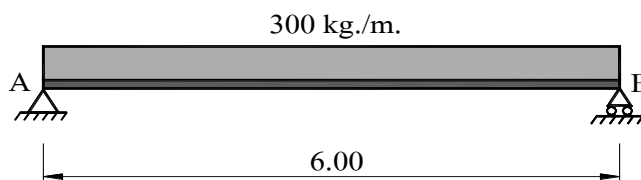
$$\sum M_D = 0$$

$$M_D = (666.67 \times 6) - (1,000 \times 4) = 0 \text{ kg-m.}$$

ขั้นตอนที่ 4 เขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ตัด



ตัวอย่างที่ 3.2 จงเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์คัตของคาน ซึ่งรับน้ำหนักดังแสดง
ในรูป พร้อมทั้งหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์คัตทุกระยะ 1.00 ม.



วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ

$$\Sigma M_B = 0 ; \curvearrowright +$$

$$(R_{Ay} \times 6) - (300 \times 6 \times 3) = 0$$

$$6 R_{Ay} - 5,400 = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{5,400}{6}$$

$$\therefore R_{Ay} = 900 \text{ kg. } \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 ; \curvearrowright +$$

$$(300 \times 6 \times 3) - (R_{By} \times 6) = 0$$

$$5,400 - 6 R_{By} = 0$$

$$\frac{5,400}{6} = R_{By}$$

$$\therefore R_{By} = 900 \text{ kg. } \uparrow$$

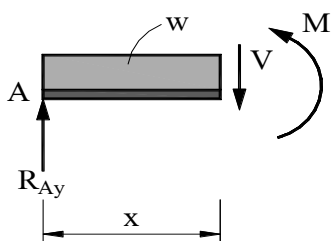
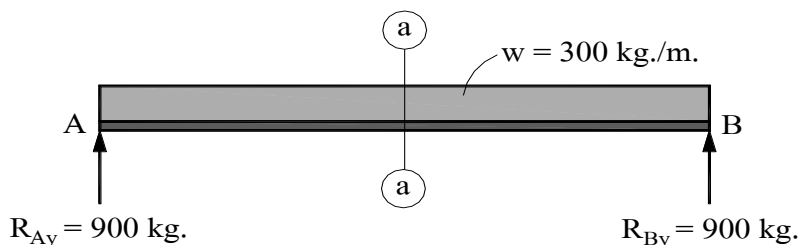
ตรวจสอบ

$$\Sigma F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 1,800 = 0$$

$$900 + 900 - 1,800 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าแรงเฉือนโดยสร้างสมการแรงเฉือนขึ้นมาแล้วแทนค่าตามระยะที่กำหนดให้ลงในสมการ



$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} - (w \cdot x) - V = 0$$

$$V = R_{Ay} - (w \cdot x) \dots\dots\dots(1)$$

แทนค่าระยะ 0.00 – 6.00 ลงในสมการ (1)

V_{A^+}	=	$V_{0.00}$	=	$900 - (300 \times 0)$	=	900	kg.
		$V_{1.00}$	=	$900 - (300 \times 1)$	=	600	kg.
		$V_{2.00}$	=	$900 - (300 \times 2)$	=	300	kg.
		$V_{3.00}$	=	$900 - (300 \times 3)$	=	0	kg.
		$V_{4.00}$	=	$900 - (300 \times 4)$	=	- 300	kg.
		$V_{5.00}$	=	$900 - (300 \times 5)$	=	- 600	kg.
V_{B^-}	=	$V_{6.00^-}$	=	$900 - (300 \times 6)$	=	- 900	kg.
V_{B^+}	=	$V_{6.00^+}$	=	$900 - (300 \times 6) + 900$	=	0	kg.

ขั้นตอนที่ 3 หาค่าโมเมนต์ตัดโดยสร้างสมการโมเมนต์ตัดขึ้นมา แล้วแทนค่าตามระยะที่กำหนดให้ลงในสมการ

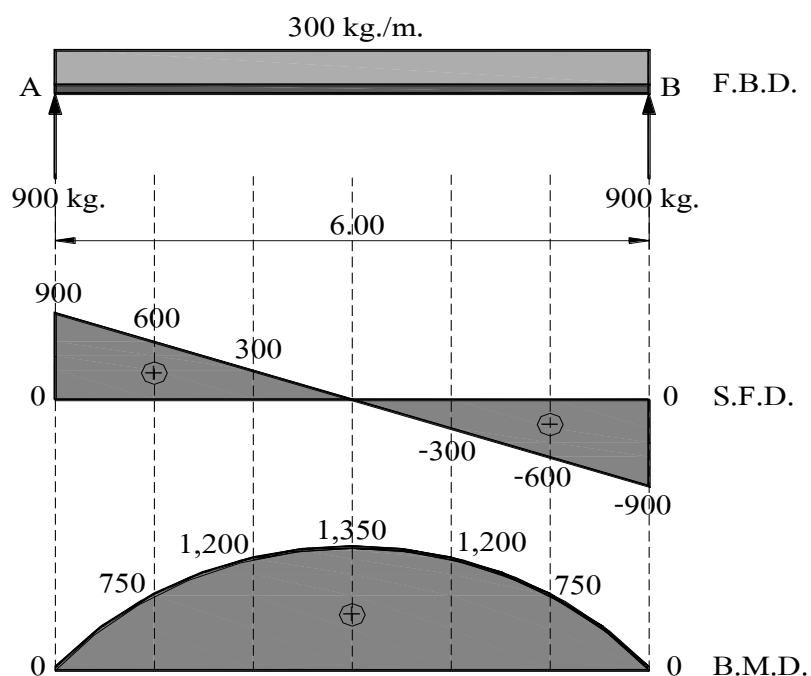
$$\sum M_{cut} = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$(R_{Ay} \cdot x) - (w \cdot x \cdot \frac{x}{2}) - M = 0$$

$$M = (R_{Ay} \cdot x) - (w \cdot x \cdot \frac{x}{2}) \dots\dots\dots(2)$$

$$\begin{aligned}
 M_{0.00} &= 0 \\
 M_{1.00} &= (900 \times 1) - \left(\frac{300 \times 1^2}{2} \right) = 750 \quad \text{kg-m.} \\
 M_{2.00} &= (900 \times 2) - \left(\frac{300 \times 2^2}{2} \right) = 1,200 \quad \text{kg-m.} \\
 M_{3.00} &= (900 \times 3) - \left(\frac{300 \times 3^2}{2} \right) = 1,350 \quad \text{kg-m.} \\
 M_{4.00} &= (900 \times 4) - \left(\frac{300 \times 4^2}{2} \right) = 1,200 \quad \text{kg-m.} \\
 M_{5.00} &= (900 \times 5) - \left(\frac{300 \times 5^2}{2} \right) = 750 \quad \text{kg-m.} \\
 M_{6.00} &= (900 \times 6) - \left(\frac{300 \times 6^2}{2} \right) = 0 \quad \text{kg-m.}
 \end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 4 เขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ด



ข้อสังเกต

- 1) ณ จุดที่แรงเฉือนมีค่าเป็นศูนย์ (0) โมเมนต์คัตจะมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด
- 2) ณ จุดที่โมเมนต์คัตมีค่าเป็นศูนย์ การโก่งตัวของคานจะเปลี่ยนจากโค้งขึ้นเป็นโค้งลง หรือเปลี่ยนจากโค้งลงเป็นโค้งขึ้น ซึ่งจะเรียกว่าจุดคัตกลับ (Inflection Point)
- 3) การเขียนเส้นโค้งของแผนภาพโมเมนต์คัตให้ดูจากพื้นที่แรงเฉือน ด้านที่แรงเฉือนมีค่ามากเส้นโค้งจะมีความชันมาก ด้านที่แรงเฉือนมีค่าน้อยเส้นโค้งจะมีความชันน้อยด้วย

3.6 การเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์คัตอย่างรวดเร็ว

จากหลักการและตัวอย่างการเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์คัตที่ผ่านมาจะเห็นว่า มีขั้นตอนที่ยาวมาก และกว่าที่จะทำตัวอย่างง่ายๆ สักข้อหนึ่งสำเร็จต้องใช้เวลามาก และในการวิเคราะห์โครงสร้างจริงจะมีความซับซ้อนของโจทย์มากกว่านี้ เช่น มีน้ำหนักบรรทุกกระทำหลายชนิด ลักษณะของโครงสร้างมีหลายรูปแบบ ซึ่งจะทำให้การเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์คัตมีความยุ่งยากและซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้นจึงเสนอวิธีการเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์คัตอย่างรวดเร็วโดยอาศัยทฤษฎี หลักการ และข้อสังเกตต่างๆ มาเป็นแนวทาง

3.6.1 เงื่อนไขและหลักการที่ใช้ในการเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์คัต

- 1) แรงกระทำที่มีทิศทางขึ้นให้มีค่าเป็นบวก (+) แรงที่มีทิศทางลงให้มีค่าเป็นลบ (-)
- 2) แรงเฉือนที่อยู่เหนือคานให้มีค่าเป็นบวก (+) แรงเฉือนที่อยู่ใต้คานให้มีค่าเป็นลบ(-)
- 3) ค่าโมเมนต์คัตมีค่าเท่ากับผลบวกสะสมของพื้นที่แรงเฉือน ณ หน้าตัดนั้น
- 4) การเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์คัตจะเริ่มจากซ้ายมือไปขวามือเสมอ ยกเว้นคานยื่น (Cantilever Beam) จะเขียนจากปลายคานไปหาฐานรองรับ
- 5) จุดสุดท้ายของการเขียนแผนภาพ ค่าแรงเฉือนและโมเมนต์คัตจะเป็นศูนย์เสมอ
- 6) กรณีที่แรงกระทำเป็นจุด (Point Load)
 - S.F.D. จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงในแนวตั้ง
 - B.M.D. จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงในแนวเฉียง
- 7) กรณีไม่มีแรงกระทำ
 - S.F.D. จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงในแนวราบ
 - B.M.D. จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงในแนวเฉียง
- 8) กรณีที่แรงกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอ (Uniform Load)
 - S.F.D. จะมีลักษณะเป็นเส้นตรงในแนวเฉียง
 - B.M.D. จะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งพาราโบลาแบบราบเรียบ

9) กรณีที่แรงกระทำแผ่กระจายในทางเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างสม่ำเสมอ (รูปสามเหลี่ยม)

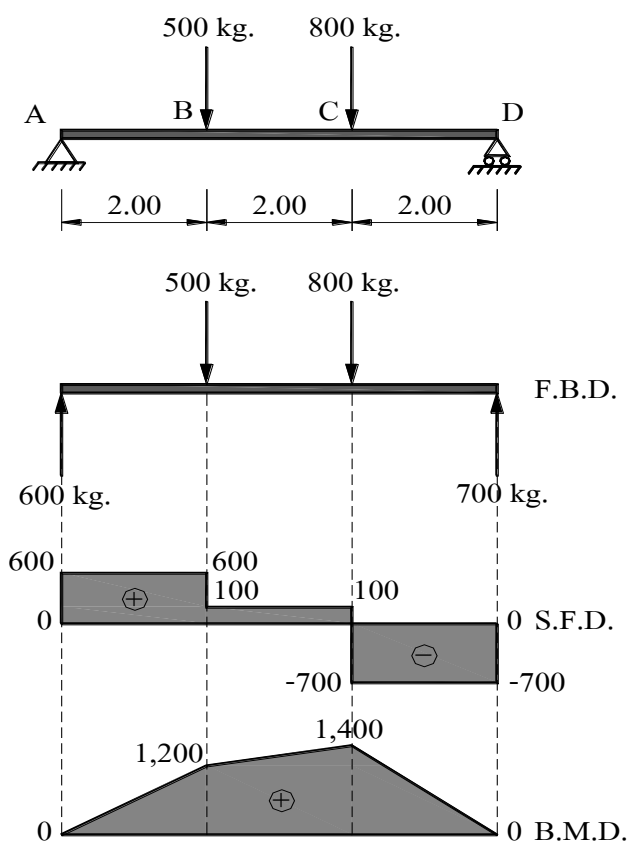
S.F.D. จะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งพาราโบลาแบบราบเรียบ

B.M.D. จะมีลักษณะเป็นเส้นโค้งกำลังสามแบบราบเรียบ

10) ตำแหน่งที่แรงเฉือนเป็นศูนย์ (0) หาได้จากการเอาค่าแรงเฉือนสูงสุดหารด้วยน้ำหนักแผ่กระจาย ณ หน้าตัดนั้น ซึ่งจะเป็นตำแหน่งที่โมเมนต์คัตมีค่าสูงสุดด้วย

$$X = \frac{\text{แรงเฉือนสูงสุด}}{\text{น้ำหนักแผ่กระจาย}} = \frac{V}{w}$$

ตัวอย่างที่ 3.3 จงเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์คัตคัตของคาน ซึ่งรับน้ำหนักดัง แสดงในรูป



ขั้นตอนที่ 1 หาค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ

$$\sum M_D = 0 ; \quad \curvearrowright$$

$$(R_{Ay} \times 6) - (500 \times 4) - (800 \times 2) = 0$$

$$6 R_{Ay} - 2,000 - 1,600 = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{3,600}{6}$$

$$\therefore R_{Ay} = 600 \text{ kg. } \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 ; \quad \curvearrowright$$

$$(500 \times 2) + (800 \times 4) - (R_{Dy} \times 6) = 0$$

$$1,000 + 3,200 - 6 R_{Dy} = 0$$

$$\frac{4,200}{6} = R_{Dy}$$

$$\therefore R_{Dy} = 700 \text{ kg. } \uparrow$$

ตรวจสอบ

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} + R_{Dy} - 500 - 800 = 0$$

$$600 + 700 - 500 - 800 = 0 \quad \text{O.K.}$$

ขั้นตอนที่ 2 เขียนแผนภาพของแรงเฉือน

โดยพิจารณาจาก F.B.D. เริ่มจากด้านซ้ายสุดของคาน ดังนี้

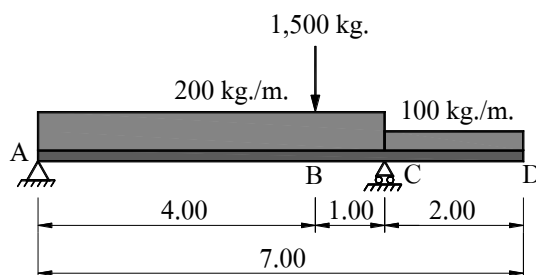
- 1) ที่จุด A มีแรง 600 kg. กระทำในทิศทางขึ้นให้เริ่มลากเส้นจากจุด A ขึ้นไปในแนวตั้งขนาด 600 kg.
- 2) ช่วง A – B ไม่มีแรงกระทำให้ลากเส้นตรงในแนวนอนต่อไปจนถึงจุด B ค่าของแรงเฉือนมีค่าเท่ากับ 600 kg.
- 3) ที่จุด B มีแรง 500 kg. กระทำในทิศทางลง ให้ลากเส้นลงไปขนาด 500 kg. ค่าของแรงเฉือนจะมีค่าเท่ากับ $600 - 500 = 100$ kg.
- 4) ช่วง B – C ไม่มีแรงกระทำให้ลากเส้นตรงในแนวนอนต่อไปจนถึงจุด C ค่าของแรงเฉือนมีค่าเท่ากับ 100 kg.
- 5) ที่จุด C มีแรง 800 kg. กระทำในทิศทางลง ให้ลากเส้นต่อไปขนาด 800 kg. ค่าของแรงเฉือนจะมีค่าเท่ากับ $100 - 800 = -700$ kg.
- 6) ช่วง C – D ไม่มีแรงกระทำให้ลากเส้นตรงในแนวนอนต่อไปจนถึงจุด D ค่าของแรงเฉือนมีค่าเท่ากับ -700 kg.
- 7) ที่จุด D มีแรง 700 kg. กระทำในทิศทางขึ้นให้ลากเส้นต่อไปขนาด 700 kg. ค่าของแรงเฉือนจะมีค่าเท่ากับ $-700 + 700 = 0$ kg. จะได้แผนภาพของแรงเฉือนเป็นรูปปิดพอดี

ขั้นตอนที่ 3 เขียนแผนภาพโมเมนต์ดัด

การเขียนแผนภาพโมเมนต์ดัดจะพิจารณาจาก S.F.D. โดยเริ่มจากด้านซ้ายสุดของคาน ซึ่งค่าโมเมนต์ดัดจะมีค่าเท่ากับผลบวกสะสมของพื้นที่แรงเฉือนจากด้านซ้ายมือไปด้านขวามือ

- 1) ณ จุด A ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นค่าโมเมนต์ดัดมีค่าเท่ากับศูนย์
- 2) ช่วง A – B พื้นที่แรงเฉือนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอยู่เหนือคานมีค่าเป็นบวก
 $A1 = 600 \times 2 = 1,200$ kg-m. ทำเครื่องหมายตรงจุด B เหนือคาน เนื่องจากมีค่าเป็นบวกแล้วลากเส้นตรงในแนวเฉียงเชื่อมจากจุด A ไปยังจุด B
- 3) ช่วง B – C พื้นที่แรงเฉือนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอยู่เหนือคาน มีค่าเป็นบวก
 $A2 = 100 \times 2 = 200$ kg-m. ค่าโมเมนต์ดัดที่จุด C จะมีค่าเท่ากับ $1,200 + 200 = 1,400$ kg-m. ทำเครื่องหมายตรงจุด C เหนือคานเนื่องจากมีค่าเป็นบวกแล้วลากเส้นตรงในแนวเฉียงเชื่อมจากจุด B ไปยังจุด C
- 4) ช่วง C – D พื้นที่แรงเฉือนเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอยู่ใต้คาน มีค่าเป็นลบ
 $A3 = -700 \times 2 = -1,400$ kg-m. ค่าโมเมนต์ดัดที่จุด D จะมีค่าเท่ากับ $1,400 - 1,400 = 0$ kg-m. ลากเส้นตรงในแนวเฉียงเชื่อมจากจุด C ไปยังจุด D จะได้แผนภาพของโมเมนต์ดัดเป็นรูปปิดพอดี

ตัวอย่างที่ 3.4 จงเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดของคานช่วงเดียวปลายยื่น
รับน้ำหนักดังแสดงในรูป



ขั้นตอนที่ 1 หาค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ

$$\Sigma M_C = 0 \quad ; \quad \curvearrowright +$$

$$(R_{Ay} \times 5) - (200 \times 5 \times 2.5) - (1,500 \times 1) + (100 \times 2 \times 1) = 0$$

$$5 R_{Ay} - 2,500 - 1,500 + 200 = 0$$

$$5 R_{Ay} = 2,500 + 1,500 - 200$$

$$R_{Ay} = \frac{3,800}{5}$$

$$\therefore R_{Ay} = 760 \text{ kg. } \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad ; \quad \curvearrowright +$$

$$(200 \times 5 \times 2.5) + (1,500 \times 4) + (100 \times 2 \times 6) - (R_{Cy} \times 5) = 0$$

$$2,500 + 6,000 + 1,200 - 5 R_{Cy} = 0$$

$$2,500 + 6,000 + 1,200 = 5 R_{Cy}$$

$$R_{Cy} = \frac{9,700}{5}$$

$$\therefore R_{Cy} = 1,940 \text{ kg. } \uparrow$$

ตรวจสอบ

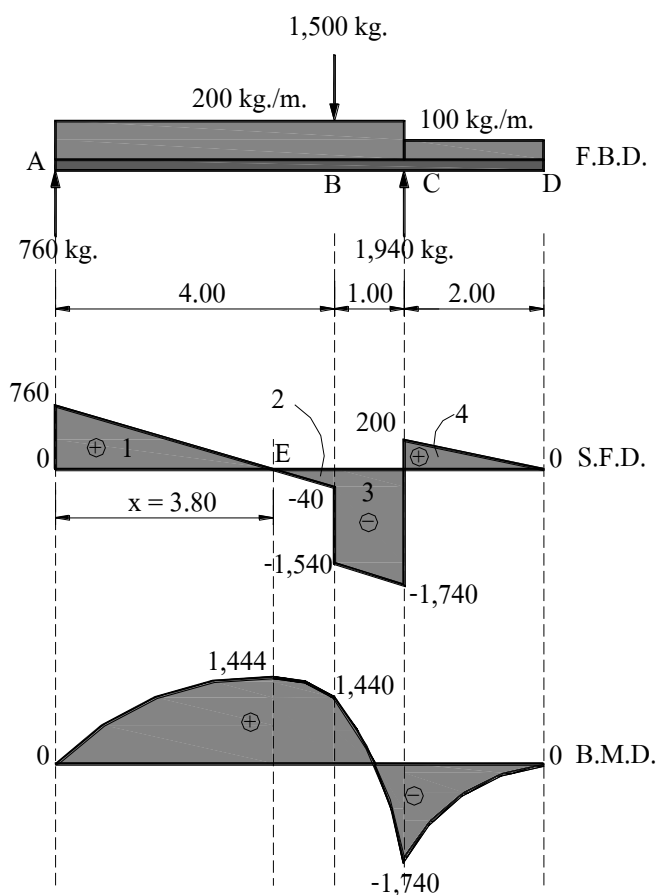
$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad \uparrow +$$

$$760 + 1,940 - 1,000 - 1,500 - 200 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{OK.}$$

ขั้นตอนที่ 2 เขียนแผนภาพของแรงเฉือน

โดยพิจารณาจาก F.B.D. เริ่มจากด้านซ้ายสุดของคาน ดังนี้



1) ที่จุด A มีแรง 760 kg. กระทำในทิศทางขึ้นให้เริ่มลากเส้นจากจุด A ขึ้นไปในแนวตั้งขนาด 760 kg.

2) ช่วง A – B มีแรงแผ่กระจายสม่ำเสมอขนาด 200 kg./m. กระทำ ค่าของแรงเฉือนที่จุด B จะมีค่าเท่ากับ $760 - (200 \times 4) = -40$ kg. ทำเครื่องหมายตรงจุด B ได้คานเนื่องจากมีค่าเป็นลบ ลากเส้นตรงในแนวเฉียงเชื่อมจากจุด A ไปยังจุด B

3) ที่จุด B มีแรง 1,500 kg. กระทำในทิศทางลง ให้ลากเส้นตรงต่อลงไปแนวตั้งจะได้ค่าแรงเฉือนที่จุดนี้เท่ากับ $-40 - 1,500 = -1,540$ kg.

4) ช่วง B – C มีแรงแผ่กระจายสม่ำเสมอขนาด 200 kg./m. กระทำ ค่าของแรงเฉือนที่จุด C จะมีค่าเท่ากับ $-1,540 - (200 \times 1) = -1,740$ kg. ทำเครื่องหมายตรงจุด C ได้คาน แล้วลากเส้นตรงในแนวเฉียงเชื่อมจากจุด B ไปยังจุด C

5) ที่จุด C มีแรง 1,940 kg. กระทำในทิศทางขึ้น ให้ลากเส้นตรงต่อขึ้นไปในแนวตั้ง จะได้ค่าแรงเฉือนที่จุดนี้เท่ากับ $-1,740 + 1,940 = 200$ kg. อยู่เหนือคานเนื่องจากมีค่าเป็นบวก

6) ช่วง C – D มีแรงแผ่กระจายสม่ำเสมอขนาด 100 kg./m. กระทำ ค่าของแรงเฉือนที่จุด D จะมีค่าเท่ากับ $200 - (100 \times 2) = 0$ kg. ให้ลากเส้นตรงในแนวเฉียงเชื่อมจากจุด C ไปยังจุด D จะได้แผนภาพแรงเฉือนเป็นรูปปิดพอดี

ขั้นตอนที่ 3 เขียนแผนภาพของโมเมนต์ตัด

พิจารณาจาก S.F.D. โดยเริ่มจากด้านซ้ายสุดของคาน

- 1) ที่จุด A ค่าโมเมนต์ตัดมีค่าเท่ากับศูนย์
- 2) พื้นที่ที่ 1 เป็นรูปสามเหลี่ยมอยู่เหนือคานมีค่าเป็นบวก ทหาระยะที่แรงเหนือมีค่า

เท่ากับศูนย์

$$X = \frac{760}{200} = 3.80 \text{ m.}$$

$$A1 = \frac{1}{2} \times 3.80 \times 760 = 1,444 \text{ kg-m.}$$

ทำเครื่องหมายตรงจุดท้ายสุดของพื้นที่สามเหลี่ยม (E) เหนือคานเนื่องจากมีค่าเป็นบวก ให้ลากเส้นโค้งพาราโบลาเชื่อมจากจุด A ไปยังจุดท้ายสุดของพื้นที่สามเหลี่ยม

- 3) พื้นที่ที่ 2 เป็นรูปสามเหลี่ยมอยู่ใต้คานมีค่าเป็นลบ

$$4 - X = 4 - 3.80 = 0.20 \text{ m.}$$

$$A2 = -\frac{1}{2} \times 0.20 \times 40 = -4 \text{ kg-m.}$$

ค่าโมเมนต์ตัดที่จุด B จะมีค่าเท่ากับ $1,444 - 4 = 1,440 \text{ kg-m.}$ ทำเครื่องหมายตรงจุด B เหนือคานเนื่องจากมีค่าเป็นบวก ให้ลากเส้นโค้งพาราโบลาเชื่อมจากจุด E ไปยังจุด B

- 4) พื้นที่ที่ 3 เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู อยู่ใต้คานมีค่าเป็นลบ

$$A3 = -\frac{1}{2} \times (1,540 + 1,740) \times 1 = -1,640 \text{ kg-m.}$$

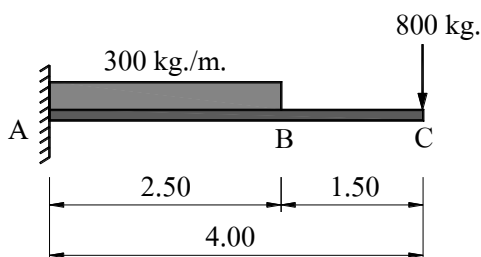
ค่าโมเมนต์ตัดที่จุด C จะมีค่าเท่ากับ $1,440 - 1,640 = -200 \text{ kg-m.}$ ทำเครื่องหมายตรงจุด C ใต้คานเนื่องจากมีค่าเป็นลบ ให้ลากเส้นโค้งพาราโบลาเชื่อมจากจุด B ไปยังจุด C

- 5) พื้นที่ที่ 4 เป็นรูปสามเหลี่ยมอยู่เหนือคานมีค่าเป็นบวก

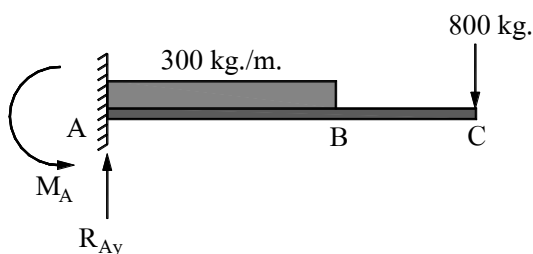
$$A4 = \frac{1}{2} \times 2 \times 200 = 200 \text{ kg-m.}$$

ค่าโมเมนต์ตัดที่จุด D จะมีค่าเท่ากับ $-200 + 200 = 0$ ให้ลากเส้นโค้งพาราโบลาเชื่อมจากจุด C ไปยังจุด D จะได้แผนภาพโมเมนต์ตัดเป็นรูปปิดพอดี

ตัวอย่างที่ 3.5 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดของคานยื่น รับน้ำหนักดัง แสดง
ในรูป



ขั้นตอนที่ 1 หาค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ



$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$R_{Ay} - (300 \times 2.50) - 800 = 0$$

$$R_{Ay} - 750 - 800 = 0$$

$$R_{Ay} = 750 + 800$$

$$\therefore R_{Ay} = 1,550 \text{ kg.} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 ; \quad \curvearrowright +$$

$$(300 \times 2.50 \times 1.25) + (800 \times 4) - M_A = 0$$

$$937.5 + 3,200 - M_A = 0$$

$$\therefore M_A = 4,137.50 \text{ kg-m.}$$

ตรวจสอบ

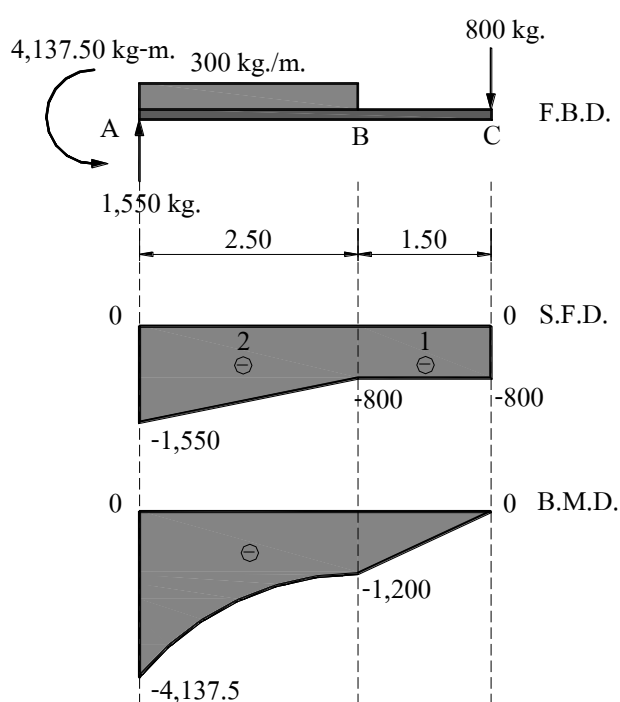
$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$1,550 - 750 - 800 = 0$$

$$0 = 0$$

O.K.

ขั้นตอนที่ 2 เขียนแผนภาพของแรงเฉือน โดยพิจารณาจาก F.B.D. เริ่มจากปลายคานไปยังฐานรองรับ ดังนี้



- 1) ที่จุด C มีแรง 800 kg. กระทำในทิศทางลงให้เริ่มลากเส้นจากจุด C ลงไปในแนวตั้งขนาด -800 kg. อยู่ใต้คานเนื่องจากมีค่าเป็นลบ
- 2) ช่วง C - B ไม่มีแรงกระทำ ให้ลากเส้นตรงในแนวนอนต่อไปจนถึงจุด B
- 3) ช่วง C - B มีแรงแผ่กระจายสม่ำเสมอขนาด 300 kg./m. กระทำ ค่าของแรงเฉือนที่จุด B จะมีค่าเท่ากับ $-800 - (300 \times 2.50) = -1,550$ kg. ทำเครื่องหมายตรงจุด A ใต้คานเนื่องจากมีค่าเป็นลบ แล้วลากเส้นตรงในแนวเฉียงเชื่อมจากจุด B ไปยังจุด A

4) ที่จุด A มีแรง $1,550$ kg. กระทำในทิศทางขึ้น ให้ลากเส้นตรงต่อขึ้นไปในแนวตั้งจะได้ค่าแรงเฉือนที่จุดนี้เท่ากับ $-1,550 + 1,550 = 0$ จะได้แผนภาพแรงเฉือนเป็นรูปปิดพอดี

ขั้นตอนที่ 3 เขียนแผนภาพของโมเมนต์ดัด โดยพิจารณา S.F.D. โดยเริ่มจากปลายคานไปยังฐานรองรับ

- 1) ที่จุด C ค่าโมเมนต์ดัดมีค่าเท่ากับศูนย์
- 2) พื้นที่ที่ 1 เป็นรูปสี่เหลี่ยม อยู่ใต้คานมีค่าเป็นลบ

$A_1 = -1.50 \times 800 = -1,200$ kg - m. ทำเครื่องหมายตรงจุด B ใต้คานเนื่องจากมีค่าเป็นลบ ให้ลากเส้นตรงในแนวเฉียงเชื่อมจากจุด C ไปยังจุด B

- 3) พื้นที่ที่ 2 เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูอยู่ใต้คาน มีค่าเป็นลบ

$$A_2 = -\frac{1}{2} \times (800 + 1,550) \times 2.50 = -2,937.50 \text{ kg - m.}$$

ค่าโมเมนต์ดัดที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ $-1,200 - 2,937.50 = -4,137.50$ kg - m. ให้ลากเส้นโค้งพาราโบลาเชื่อมจากจุด B ไปยังจุด A ซึ่งจะไปบรรจบกับโมเมนต์ดัด M_A ขนาด $4,137.50$ kg - m. ซึ่งหาไว้ก่อนแล้วจะได้แผนภาพโมเมนต์ดัดเป็นรูปปิดพอดี

แบบฝึกหัดท้ายบทหน่วยที่ 3

ตอนที่ 1 จงเติมคำลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1. ชนิดของคานาดีเทอร์มิเนทมี.....ชนิด ได้แก่.....

.....

.....

.....

2. พฤติกรรมการรับแรงของคานาดีเทอร์มิเนท คือ.....

.....

.....

.....

3. สัญลักษณ์และเครื่องหมายแทนแรงที่ใช้แทนแรงอัดและแรงดึง ในคานาดีเทอร์มิเนท ได้แก่.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. การคำนวณหาแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคานาดีเทอร์มิเนท โดยทั่วไปจะใช้สมการ

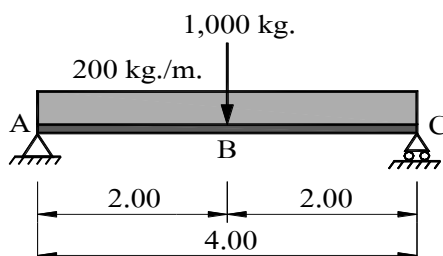
.....

.....

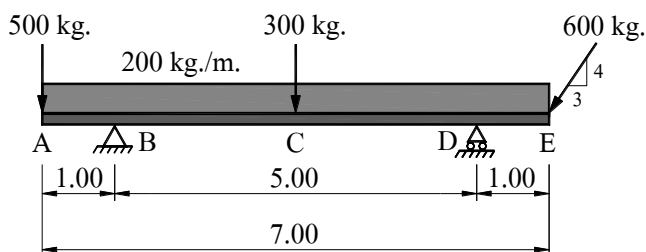
.....

ตอนที่ 2 จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดของคานดีเทอร์มิเนท รับน้้าหนักค้ดรูป

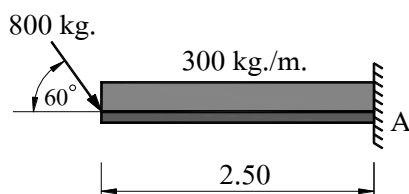
1. จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดของคานช่วงเดียว รับน้้าหนักค้ดรูป



2. จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดของคานช่วงเดียวปลายยื่นสองข้าง รับน้้าหนักค้ดรูป



3. จงเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ค้ดของคานยื่น รับน้้าหนักค้ดรูป



หน่วยที่ 4

การหาแรงภายในโครงถัก

สาระการเรียนรู้

- เรื่องที่ 4.1 ความหมายและส่วนประกอบของโครงถัก
- เรื่องที่ 4.2 ประเภทของโครงถัก
- เรื่องที่ 4.3 สมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงถัก
- เรื่องที่ 4.4 พฤติกรรมของโครงถัก
- เรื่องที่ 4.5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักและเครื่องหมายแทนแรง
- เรื่องที่ 4.6 การหาแรงภายในโครงถัก

สาระสำคัญ

โครงถัก (Truss) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าโครงข้อหมุน เป็นโครงสร้างที่เกิดขึ้นจากการนำเอาชิ้นส่วนหรือว่าองค์อาคารมาประกอบเข้าด้วยกันเป็นรูปทรงเรขาคณิต มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ได้โครงสร้างที่มี น้ำหนักเบาแต่สามารถรับน้ำหนักได้มากและวางพาดช่วงยาวๆ ได้ อย่างเช่น โครงสร้างหลังคาของโรงงาน โรงอาหาร หอประชุม อัฒจรรย์ ฯลฯ รวมทั้งสะพานและอาคารพิเศษอื่นๆ ด้วย โครงถักโดยทั่วไปจะทำจากเหล็ก รูปพ วรรณหรือไม้ ในการออกแบบโครงถักจะต้องทราบแรงที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนแต่ละชิ้นที่นำมาประกอบเป็นโครงถัก ซึ่งการวิเคราะห์หาแรงภายในโครงถักสามารถหาได้สองวิธีใหญ่ๆ คือ วิธีการคำนวณ และวิธีการเขียนรูป ซึ่งในหน่วยเรียนนี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีการคำนวณเท่านั้น

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม เมื่อศึกษาหน่วยที่ 4 แล้ว สามารถ

1. อธิบายความหมายและส่วนประกอบของโครงถักได้
2. อธิบายประเภทของโครงถักได้
3. อธิบายสมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงถักได้
4. อธิบายพฤติกรรมของโครงถักได้
5. บอกชนิดของแรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักและเครื่องหมายแทนแรงได้
6. คำนวณหาแรงภายในโครงถักโดยวิธีคำนวณจุดต่อได้
7. คำนวณหาแรงภายในโครงถักโดยพิจารณาส่วนตัดได้

หน่วยที่ 4

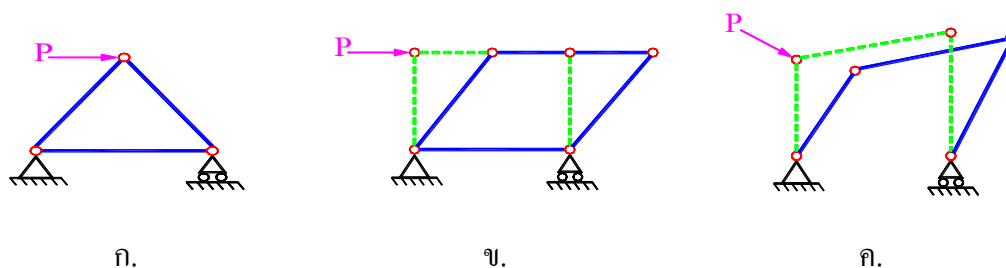
การหาแรงภายในโครงถัก

4.1 ความหมายและส่วนประกอบของโครงถัก (Truss)

4.1.1 ความหมายของโครงถัก

โครงถัก (Truss) คือ การนำเอาชิ้นส่วนมาประกอบขึ้นเป็นรูปโครงสร้างแบบต่างๆ โดยยึดปลายทั้งสองของชิ้นส่วนต่างๆ ให้ยึดติดกันและสามารถถ่ายแรงให้กันได้ด้วยการเชื่อม การใช้หมุดย้ำหรือการใช้น็อต โครงสร้างที่นิยมทำเป็นโครงถัก เช่น โครงสร้างสะพาน โครงหลังคา ฯลฯ

รูปทรงพื้นฐานของโครงถัก คือ รูปสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนอย่างน้อย 3 ชิ้น โดยยึดปลายของชิ้นส่วนด้วยหมุดย้ำ ดังแสดงในรูปที่ 4.1(ก) ซึ่งโครงถักลักษณะแบบนี้จะทำให้ได้รูปทรงสามเหลี่ยมที่ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ แม้ว่าจะมีแรงมากระทำต่อโครงถักนี้ จัดได้ว่าเป็นโครงสร้างที่มี เสถียรภาพมาก ส่วนโครงสร้างตามรูปที่ 4.1(ข) และ 4.1(ค) เป็นโครงสร้างที่มีรูปทรงสี่เหลี่ยมเมื่อมีแรงมากระทำจะทำให้โครงสร้างเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ จัดได้ว่าเป็นโครงสร้างที่ไม่มีเสถียรภาพ

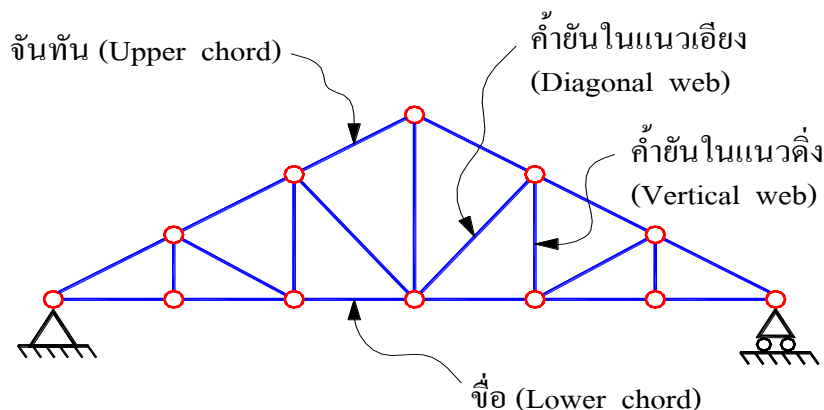


รูปที่ 4.1 แสดง โครงถักแต่ละรูปทรงเมื่อมีแรงกระทำ

4.1.2 ส่วนประกอบของโครงถัก

โครงสร้างที่เป็นโครงถัก (Truss) จะประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายชิ้นมารวมกันเป็นโครงถักรูปแบบต่างๆ ซึ่งสามารถกำหนดชื่อเรียกส่วนประกอบต่างๆ ได้ 4 ชนิด คือ

- 1) จันทัน (Upper Chord)
- 2) ช่อ (Lower Chord)
- 3) ค้ำยันในแนวตั้ง (Vertical Web)
- 4) ค้ำยันในแนวเอียง (Diagonal Web)



รูปที่ 4.2 แสดงส่วนประกอบของโครงถัก

4.2 ประเภทของโครงถัก

4.2.1 ประเภทของโครงถัก (Truss)

ประเภทของโครงถักสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ คือ

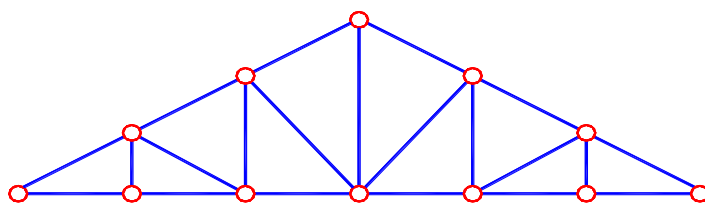
- 1) โครงถักอย่างง่ายหรือแบบดีเทอร์มิเนทสแตติกส์ (Statically Determinate Truss) เป็นโครงถักที่สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงต่างๆ ได้ด้วยสมการสมดุล
- 2) โครงถักอย่างยากหรือแบบอินดีเทอร์มิเนทสแตติกส์ (Statically Indeterminate Truss) เป็นโครงถักที่ไม่สามารถหาค่าแรงต่างๆ ด้วยสมการสมดุลได้ ต้องใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงมาคำนวณหา

สำหรับในหน่วยเรียนนี้จะกล่าวถึงเฉพาะโครงถักอย่างง่ายหรือแบบดีเทอร์มิเนทสแตติกส์เท่านั้น

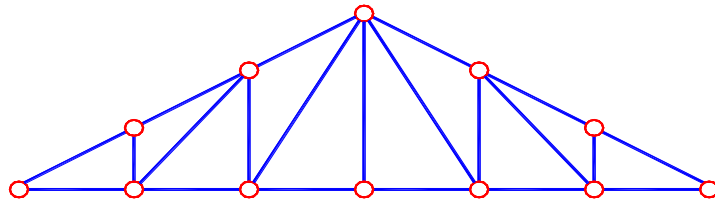
4.2.2 รูปแบบของโครงถัก

รูปแบบของโครงถักอาจแบ่งตามประเภทและลักษณะการใช้งานได้ 2 ประเภท คือ

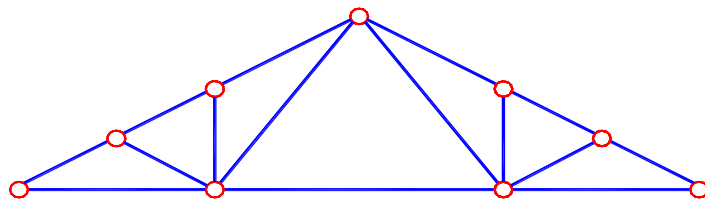
4.2.2.1 โครงถักแบบโครงหลังคา มีรูปแบบที่นิยม ดังนี้



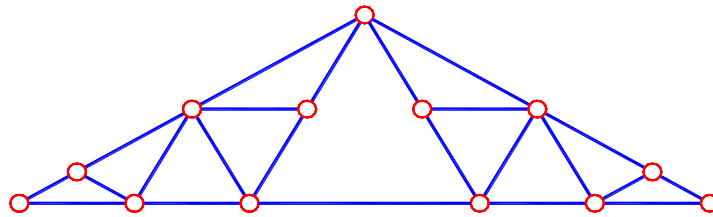
ก. แบบโฮว์ (Howe Truss)



ข. แบบเพรท (Pratt Truss)



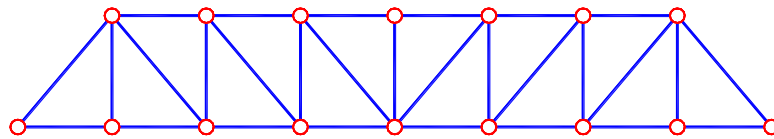
ค. แบบแฟน (Fan Truss)



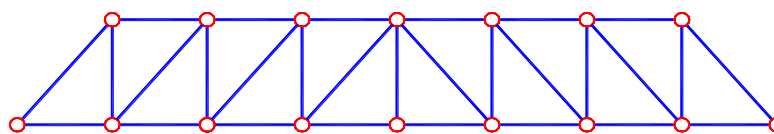
ง. แบบฟิงค์ (Fink Truss)

รูปที่ 4.3 แสดงโครงถักแบบโครงหลังคา

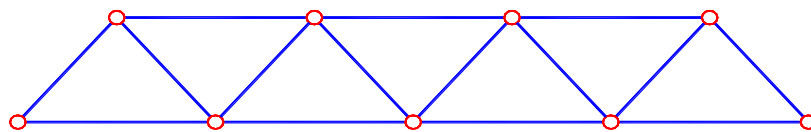
4.2.2.2 โครงถักแบบโครงสะพาน มีรูปแบบที่นิยม ดังนี้



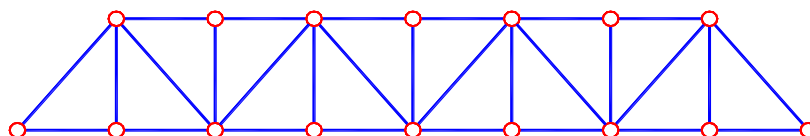
ก. แบบโฮว์ (Howe Truss)



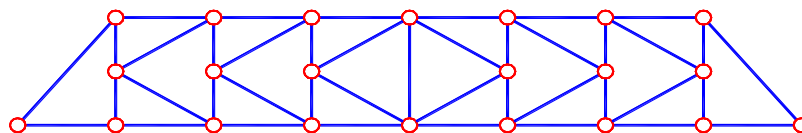
ข. แบบเพรท (Pratt Truss)



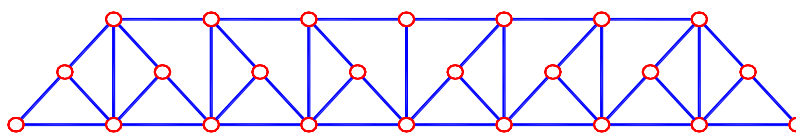
ค. แบบวอร์เรน (Warren Truss)



ง. แบบวอร์เรนมีค้ำยันแนวตั้ง (Warren Truss with Vertical)



จ. แบบเค (K – Truss)



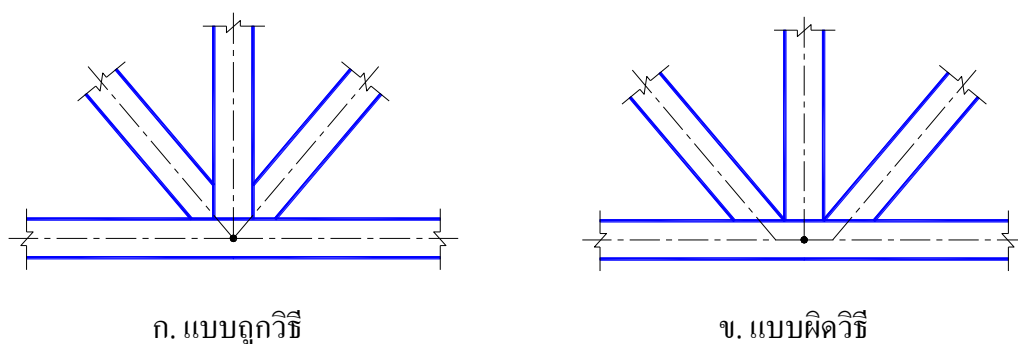
ฉ. แบบบอลติมอร์ (Baltimore)

รูปที่ 4.4 แสดงโครงถักแบบสะพาน

4.3 สมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงถัก

ในการวิเคราะห์หาแรงภายในที่เกิดขึ้นในโครงถัก มีความจำเป็นที่จะต้องมีการตั้งข้อสมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์เพื่อให้ได้ค่าที่ถูกต้องและใกล้เคียงกับความเป็นจริง ให้มากที่สุด โดยมีข้อสมมุติฐานที่สำคัญ ดังนี้

- 1) ชิ้นส่วนทุกชิ้นในโครงถักจะต้องมีความยาวเป็นเส้นตรง
- 2) แนวเส้นทแยงของแต่ละชิ้นส่วนที่ต่อกันจะพบกันที่จุดศูนย์กลางของรอยต่อของชิ้นส่วน

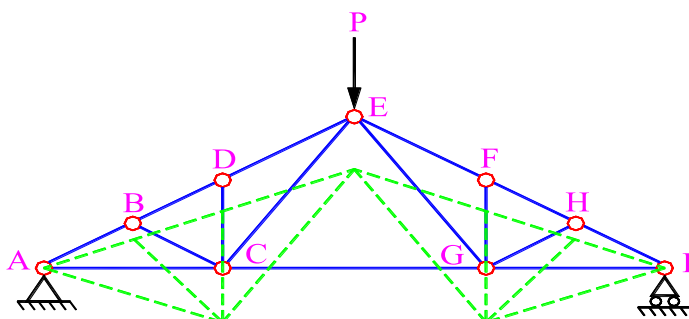


รูปที่ 4.5 แสดงแนวแรงของชิ้นส่วน

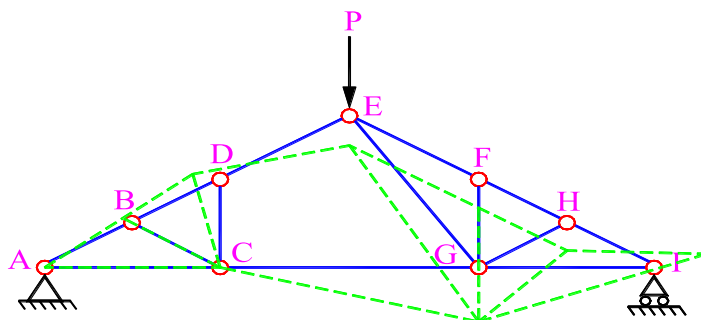
- 3) น้ำหนักของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นมีค่าน้อยมากในการวิเคราะห์จะไม่นำมาเป็นองค์ประกอบในการพิจารณา
- 4) น้ำหนักบรรทุกที่กระทำกับโครงถักจะเป็นน้ำหนักแบบน้ำหนักกระทำเป็นจุด (Point Load) ที่ตำแหน่งของข้อต่อเท่านั้น

4.4 พฤติกรรมของโครงถัก

ในการออกแบบและการวิเคราะห์หาแรงภายในโครงถักจำเป็นต้องออกแบบให้โครงถักมีเสถียรภาพไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือไม่เกิดการบิดเสียรูป ซึ่งรูปทรงทางเรขาคณิตที่ดีที่สุดคือพิจารณาให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหลาย ๆ รูปต่อกัน ตามรูปที่ 4.6 เมื่อมีแรงมากระทำกับโครงถักก็จะเกิดพฤติกรรมการแอ่นตัวตามรูป



รูปที่ 4.6 แสดงพฤติกรรมของโครงถักเมื่อรับแรง



รูปที่ 4.7 แสดงพฤติกรรมของโครงถักกรณีที่ไม่มีชิ้นส่วน CE

จากรูปที่ 4.7 กรณีโครงถักที่ไม่มีชิ้นส่วน CE จะทำให้โครงถักขาดเสถียรภาพ เพราะรูปทรงของโครงถักมีรูปสี่เหลี่ยม CDEG ทำให้โครงถักเมื่อรับแรงจะเกิดการเสียรูปค้ ่อนข้างมาก และพังเสียหายในที่สุด

สรุป หลักการออกแบบโครงถัก กที่ดีและมี เสถียรภาพ จะต้องทำให้โครงถักเป็นรูปสามเหลี่ยม (Triangle) เพื่อให้เกิดการยึดรั้ง (Rigid)

4.5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักและเครื่องหมายแทนแรง

แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถัก โดยทั่วไปเมื่อทำการวิเคราะห์ แรงภายในชิ้นส่วนมี 2 แรง คือ แรงดึง (Tension ; T) และแรงอัด (Compression ; C) และสามารถใช้เครื่องหมายแทนแรงได้ ดังนี้

ตารางที่ 4.1 แสดงสัญลักษณ์และเครื่องหมายที่ใช้แทนแรง

ชนิดแรง	สัญลักษณ์ตัวอักษร	เครื่องหมาย	สัญลักษณ์หัวลูกศร
แรงดึง (Tension)	T	+ (เครื่องหมายบวก)	
แรงอัด (Compression)	C	- (เครื่องหมายลบ)	

4.6 การหาแรงภายในโครงถัก

การวิเคราะห์หาแรงภายในที่เกิดขึ้นในโครงถัก สามารถแบ่งได้เป็น 3 วิธี คือ

- 1) วิธีกราฟฟิก (Graphical Methods)
- 2) วิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Methods)
- 3) วิธีคำนวณส่วนตัด (Section Methods)

สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Methods) และวิธีคำนวณส่วนตัด (Section Methods) เท่านั้น เพราะทั้งสองวิธีจะให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องและใกล้เคียงความจริงมากที่สุด ส่วนวิธีกราฟฟิกเป็นวิธีที่หาค่าแรงภายในโดยประมาณเท่านั้นและมีความคลาดเคลื่อนค่อนข้างมาก

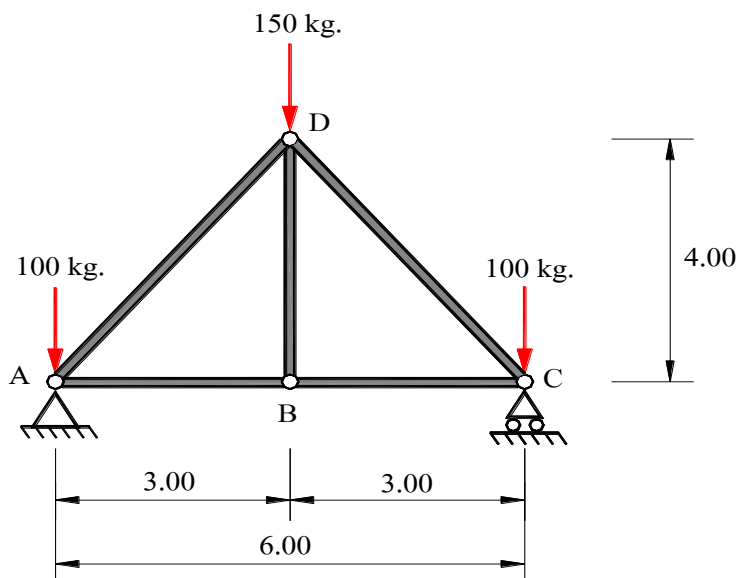
4.6.1 วิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Methods)

การคำนวณหาแรงภายในโดยวิธีคำนวณจุดต่อ มีหลักการคำนวณ คือ ให้พิจารณาจุดต่อที่มีตัวไม่ทราบค่าเพียงสองตัว และใช้สมการสมดุล $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ แก้สมการหาค่าแรงที่ไม่ทราบค่า

ขั้นตอนการคำนวณหาแรงภายในโครงถักโดยวิธีจุดต่อ มีขั้นตอนดังนี้

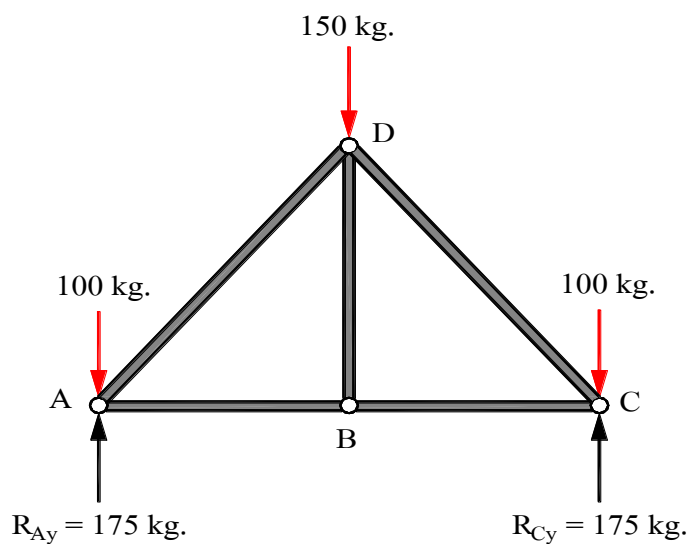
- 1) คำนวณหาค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงถัก
- 2) เขียนผังอิสระของแรง (F.B.D.)
- 3) พิจารณาจุดต่อที่มีตัวไม่ทราบค่าไม่เกินสองตัว โดยสมมติให้แรงที่ยังไม่ทราบค่าเป็นแรงดึงไว้ก่อน
- 4) แยกแรงที่เอียงให้อยู่ในแนวแกน X และแกน Y
- 5) ใช้สมการสมดุล $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ คำนวณหาตัวไม่ทราบค่า โดยกำหนดให้แรงที่มีทิศทางขึ้นและทิศทางไปทางขวามีค่าเป็นบวก และแรงที่มีทิศทางลงและทิศทางไปทางซ้ายมีค่าเป็นลบ ถ้าแรงที่คำนวณได้มีค่าติดลบแสดงว่าสมมติหัวลูกศรผิด ให้กลับหัวลูกศรของแรงนั้นแล้วจึงคำนวณหาค่าแรงต่อไป
- 6) เมื่อทราบค่าแรงภายในที่จุดต่อแรกแล้ว ให้พิจารณาจุดต่อที่สองที่อยู่ติดกัน และมีตัวไม่ทราบค่าไม่เกินสองตัว เพื่อคำนวณหาแรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักที่เหลือให้ครบ

ตัวอย่างที่ 4.1 จงหาแรงภายใน โครงถัก ซึ่งรับแรงดังแสดงในรูป โดยวิธี คำนวณ จุดต่อ (Joint Method)



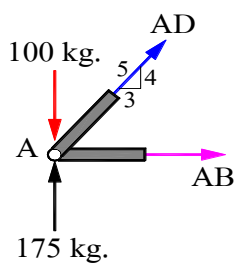
วิธีทำ

หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงถัก จากรูปจะเห็นว่าโครงถักมีลักษณะและการรับแรงสมมาตรทั้ง 2 ข้าง สามารถหาแรงปฏิกิริยาได้ง่ายๆ โดยเอาน้ำหนักกระทำทั้งหมดรวมกันแล้วหารสอง จะได้แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับทั้ง 2 จุด



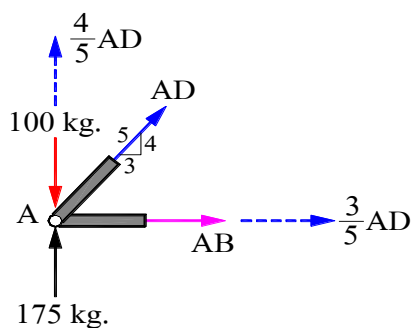
$$R_{Ay} = R_{Cy} = \frac{(100 + 150 + 100)}{2} = 175 \text{ kg. } \uparrow$$

พิจารณา จุด A



$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} 4 \\ \triangle \\ 3 \end{array} \\ c = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} \\ c = \sqrt{25} \\ c = 5.00 \end{array}$$

เลือกพิจารณาแนวที่มีตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวก่อน

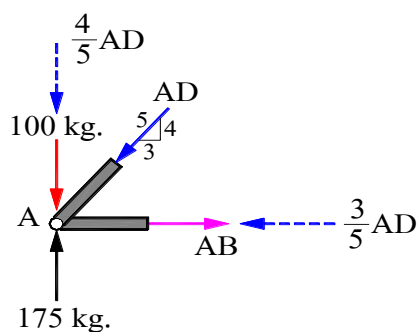


$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 ; \quad \uparrow + \\ 175 - 100 + \frac{4}{5}AD &= 0 \\ \frac{4}{5}AD &= 100 - 175 \\ AD &= -\frac{75 \times 5}{4} \end{aligned}$$

$$AD = -93.75 \text{ kg.}$$

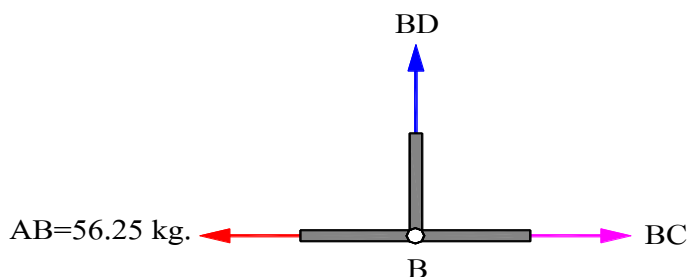
$$\therefore AD = 93.75 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวลูกศรของแรง AD ทั้งหมด



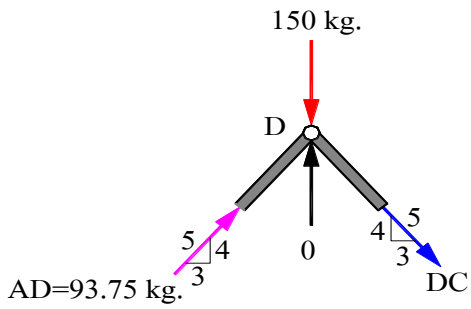
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 ; \quad \rightarrow + \\ AB - \left(\frac{3}{5} \times 93.75\right) &= 0 \\ AB &= \frac{3}{5} \times 93.75 \\ \therefore AB &= 56.25 \text{ kg. (ดึง)} \end{aligned}$$

พิจารณา จุด B



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 ; \quad \rightarrow + \\ BC - 56.25 &= 0 \\ BC &= 56.25 \\ \therefore BC &= 56.25 \text{ kg. (ดึง)} \\ \sum F_y &= 0 ; \quad \uparrow + \\ \therefore BD &= 0 \text{ kg.} \end{aligned}$$

พิจารณา จุด D



$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$\frac{3}{5}DC + 56.25 = 0$$

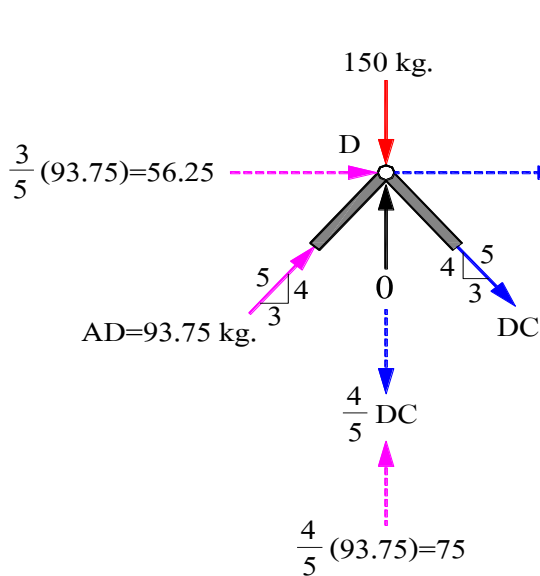
$$\frac{3}{5}DC = -56.25$$

$$DC = -\frac{56.25 \times 5}{3}$$

$$DC = -93.75 \text{ kg.}$$

∴ DC = 93.75 kg. (อัด)

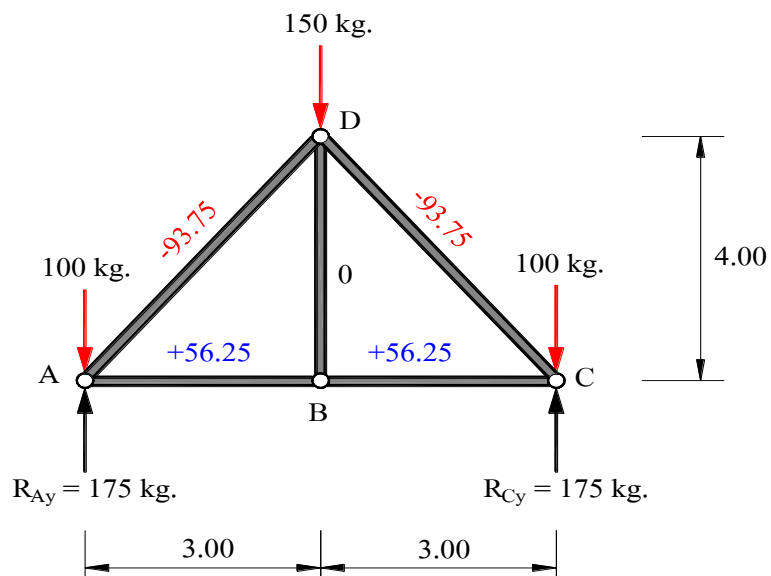
ให้กลับหัวลูกศรของแรง DC



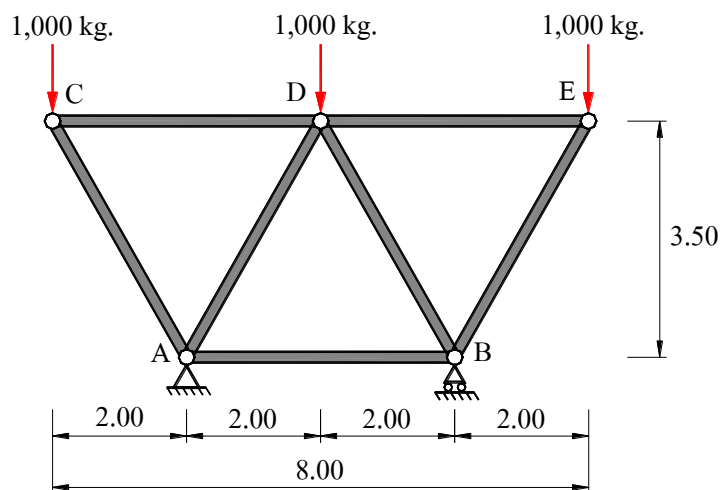
$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$75 + (\frac{4}{5} \times 93.75) - 150 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{O.K.}$$

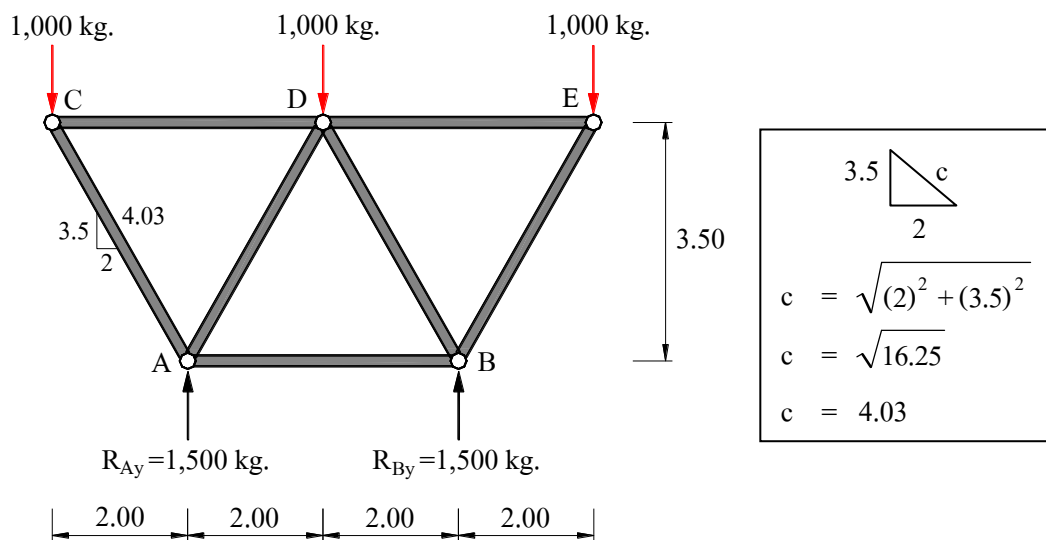


ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาแรงภายในของโครงถัก ซึ่งรับแรงดังแสดงในรูป โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method)



วิธีทำ

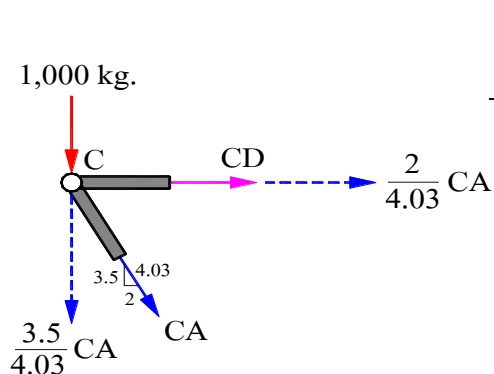
หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงถัก



$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{(1,000 + 1,000 + 1,000)}{2} = 1,500 \text{ kg. } \uparrow$$

พิจารณา จุด C

เลือกพิจารณาแนวที่มีตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวก่อน



$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$-1,000 - \frac{3.5}{4.03} CA = 0$$

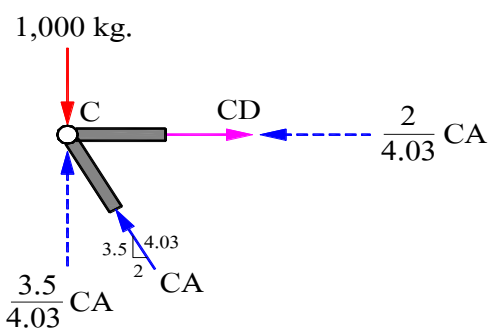
$$-1,000 = \frac{3.5}{4.03} CA$$

$$-\frac{1,000 \times 4.03}{3.5} = CA$$

$$-1,151.43 = CA$$

$$\therefore CA = 1,151.43 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวลูกศรของแรง CA ทั้งหมด



$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$CD - \frac{2}{4.03} CA = 0$$

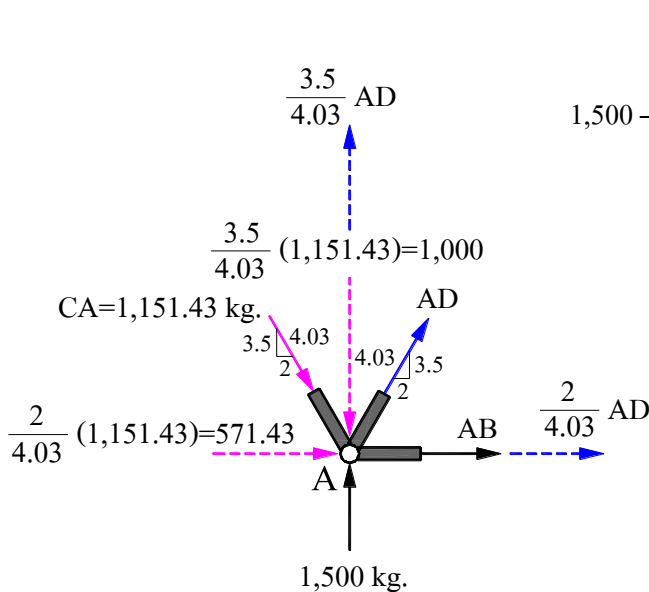
$$CD = \frac{2}{4.03} \times 1,151.43$$

$$CD = 571.43$$

$$\therefore CD = 571.43 \text{ kg. (ดึง)}$$

พิจารณา จุด A

เลือกพิจารณาแนวที่มีตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวก่อน



$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$1,500 - 1,000 + \frac{3.5}{4.03} AD = 0$$

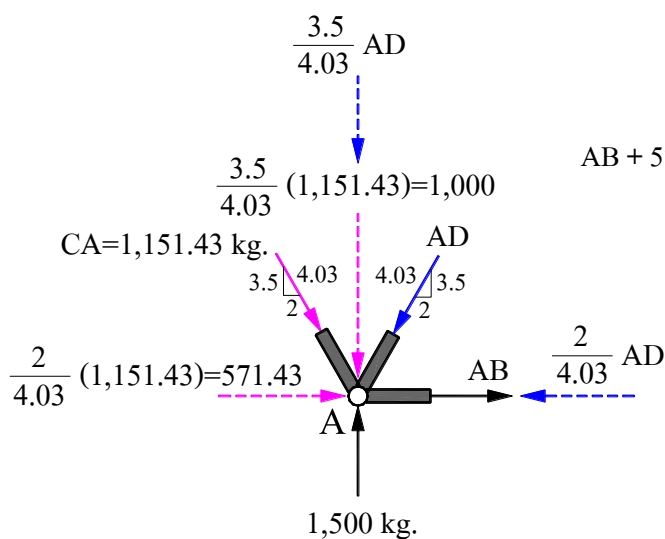
$$\frac{3.5}{4.03} AD = 1,000 - 1,500$$

$$AD = -\frac{500 \times 4.03}{3.5}$$

$$AD = -575.71 \text{ kg.}$$

$$\therefore AD = 575.71 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวลูกศรของแรง AD ทั้งหมด



$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$AB + 571.43 - \frac{2}{4.03} AD = 0$$

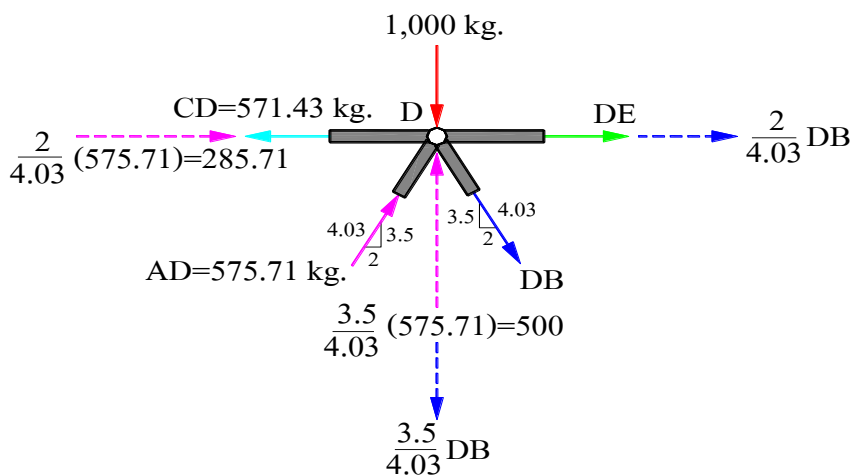
$$AB = \left(\frac{2}{4.03} \times 575.71 \right) - 571.43$$

$$AB = -285.72 \text{ kg.}$$

$$\therefore AB = -285.72 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวตุ๊กตรของแรง AB

พิจารณา จุด D



$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$500 - 1,000 - \frac{3.5}{4.03} DB = 0$$

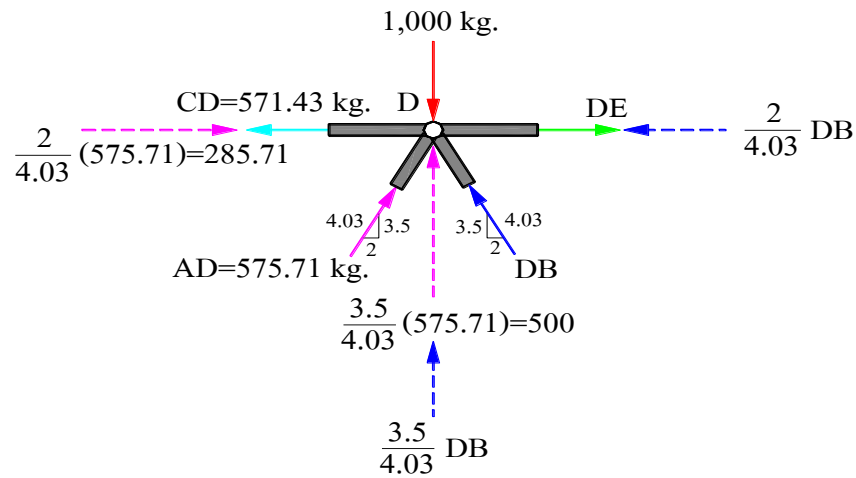
$$-500 = \frac{3.5}{4.03} DB$$

$$-\frac{500 \times 4.03}{3.5} = DB$$

$$-575.71 = DB$$

$$\therefore DB = 575.71 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวตุ๊กตรของแรง DB ทั้งหมด



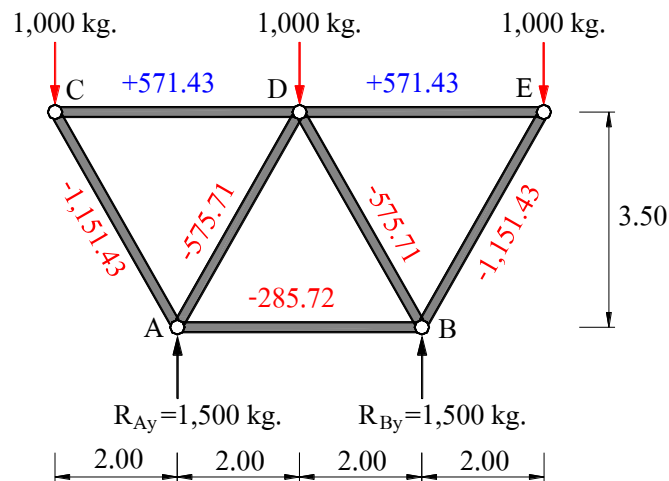
$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$285.71 - 571.43 + DE - \frac{2}{4.03} DB = 0$$

$$DE = 285.72 + \left(\frac{2}{4.03} \times 575.71\right)$$

$$DE = 571.43 \text{ kg.}$$

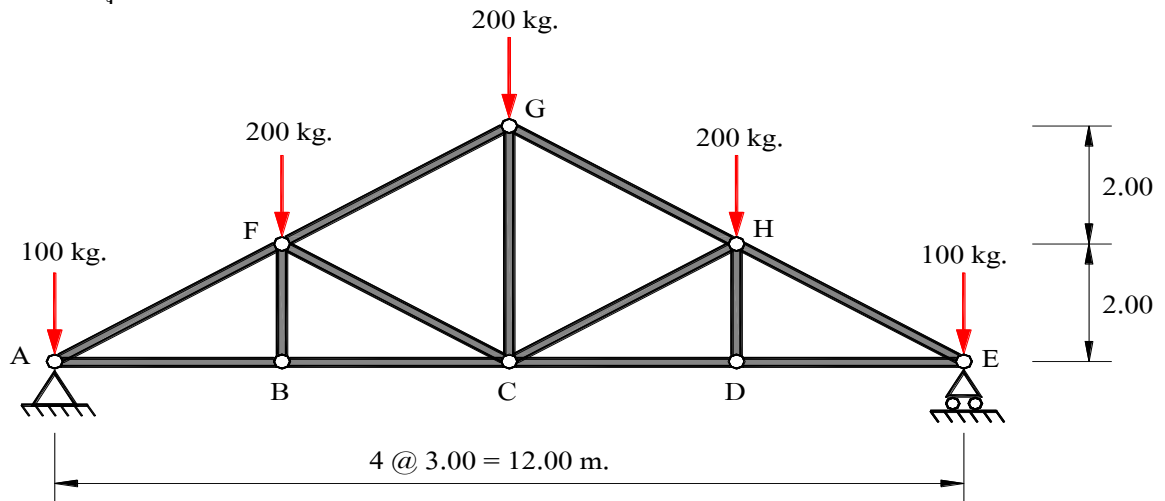
$$\therefore DE = 571.43 \text{ kg. (คิ่ง)}$$



ในโครงถักที่สมมาตร โดยมีลักษณะโครงสร้างและแรงกระทำทั้งซ้าย-ขวาเท่ากัน ดังนั้นแรงภายในของโครงถักจะมีค่าเท่ากันทั้งซ้าย-ขวาเช่นกัน จึงไม่จำเป็นต้องคำนวณหาจนครบทุกจุดต่อ

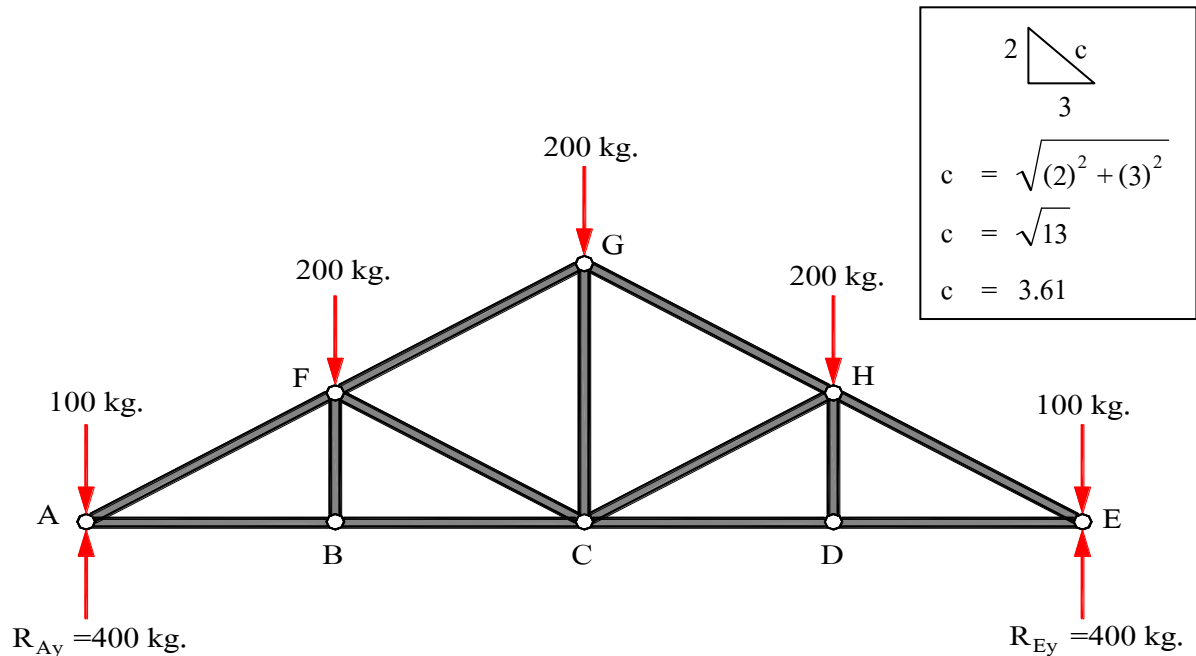
ตัวอย่างที่ 4.3

หาแรงภายในของโครงถัก ณ จุด A, B, C, H, I และ J ซึ่งรับแรงดังแสดงในรูป โดยวิธี
คำนวณจุดต่อ (Joint Method)



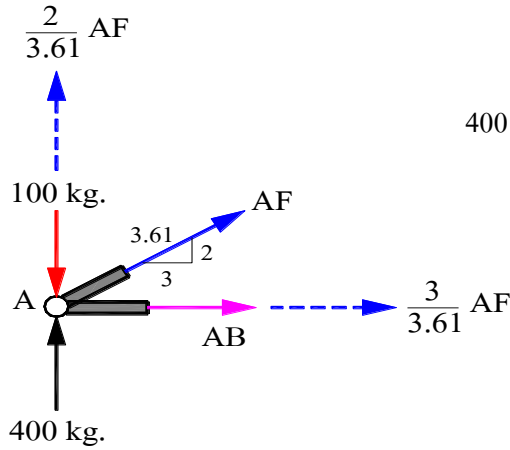
วิธีทำ

หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงสร้าง



$$R_{Ay} = R_{Ey} = \frac{(100 + 200 + 200 + 200 + 100)}{2} = 400 \text{ kg.} \uparrow$$

พิจารณา จุด A



เลือกพิจารณาทิศทางที่มีตัวไม่ทราบค่าเพียง 1 ตัวก่อน

$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$400 - 100 + \frac{2}{3.61} AF = 0$$

$$\frac{2}{3.61} AF = -400 + 100$$

$$AF = -\frac{300 \times 3.61}{2}$$

$$AF = -541.5 \text{ kg.}$$

∴ AF = 541.5 kg. (อัด)

ให้กลับหัวลูกศรของแรง AF ทั้งหมด

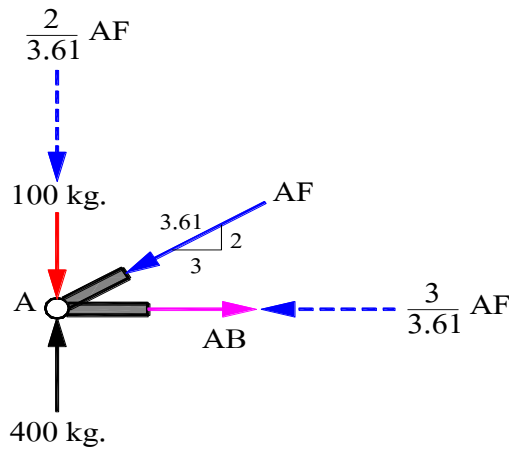
$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$AB - \frac{3}{3.61} AF = 0$$

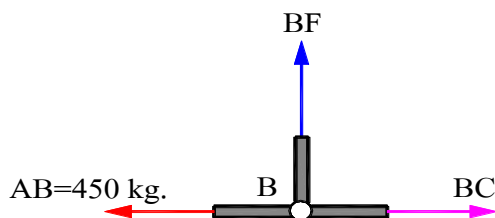
$$AB = \frac{3}{3.61} \times 541.5$$

$$AB = 450 \text{ kg.}$$

∴ AB = 450 kg. (ดึง)



พิจารณา จุด B



$$\sum F_y = 0 ; \uparrow +$$

$$\therefore BF = 0 \text{ kg.}$$

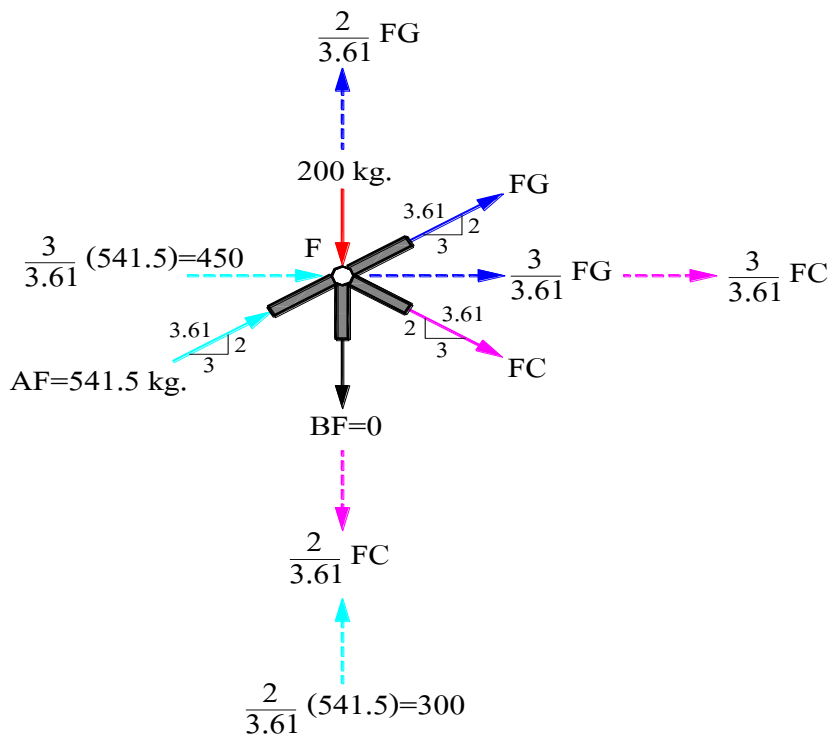
$$\sum F_x = 0 ; \rightarrow +$$

$$BC - 450 = 0$$

$$BC = 450$$

∴ BC = 450 kg. (ดึง)

พิจารณา จุด F



จากรูปจะเห็นว่าทั้งแกน X และแกน Y มีตัวไม่ทราบค่า 2 ตัวเหมือนกัน เพราะฉะนั้นจะต้องสร้างสมการและให้ติดค่าตัวไม่ทราบค่าไว้ก่อนทั้งแกน X และแกน Y แล้วจึงแก้สมการหาค่าที่เหลือ

$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$450 + \frac{3}{3.61} FG + \frac{3}{3.61} FC = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y = 0 ; \quad \uparrow +$$

$$300 - 200 + \frac{2}{3.61} FG - \frac{2}{3.61} FC = 0 \dots\dots\dots(2)$$

ต้องทำให้ตัวไม่ทราบค่าตัวใดตัวหนึ่งหายไปก่อน ในที่นี้จะให้ FG หายไปก่อน ด้วยการหาตัวเลขมาคูณเข้าในสมการ (1) และ (2) เพื่อให้ค่า FG มีค่าเท่ากันและนำมาหักล้างกัน

เอา 2 คูณเข้าในสมการ (1) จะได้

$$900 + \frac{6}{3.61} FG + \frac{6}{3.61} FC = 0 \dots\dots\dots(3)$$

เอา 3 คูณเข้าไปในสมการ (2) จะได้

$$900 - 600 + \frac{6}{3.61} FG - \frac{6}{3.61} FC = 0$$

$$300 + \frac{6}{3.61} FG - \frac{6}{3.61} FC = 0 \dots\dots\dots(4)$$

เอาสมการ (3) - (4) จะได้

$$600 + 0 + \frac{12}{3.61} FC = 0$$

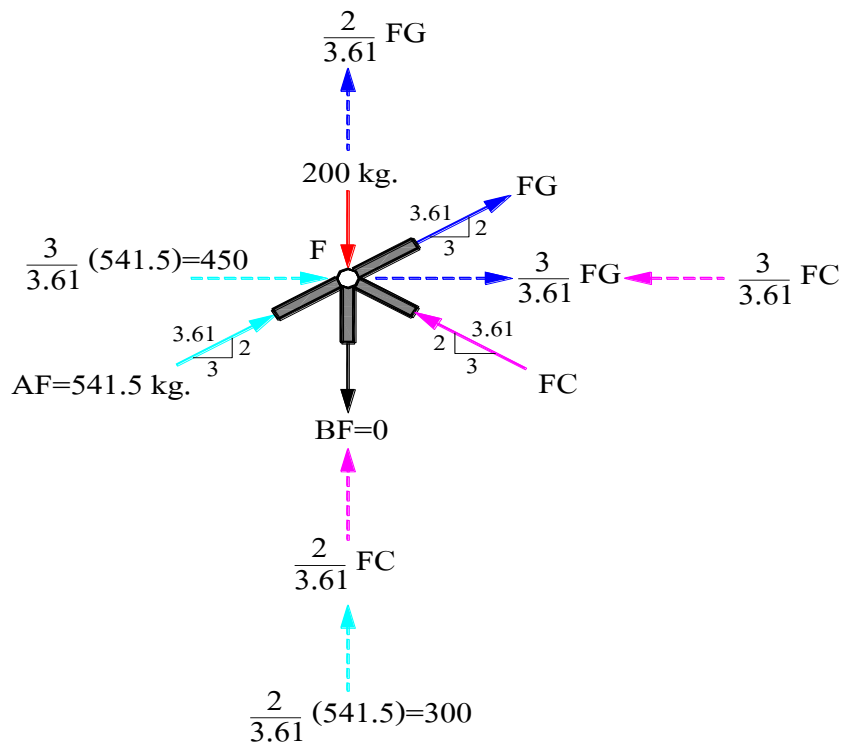
$$\frac{12}{3.61} FC = -600$$

$$FC = -\frac{(600 \times 3.61)}{12}$$

$$FC = -180.5 \text{ kg.}$$

$\therefore FC = 180.5 \text{ kg. (อัด)}$

ให้กลับหัวตุ๊กตรของแรง FC ทั้งหมด



$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$450 + \frac{3}{3.61} FG - \frac{3}{3.61} FC = 0$$

$$\frac{3}{3.61} FG = \left(\frac{3}{3.61} \times 180.5 \right) - 450$$

$$\frac{3}{3.61} FG = 150 - 450$$

$$FG = - \frac{(300 \times 3.61)}{3}$$

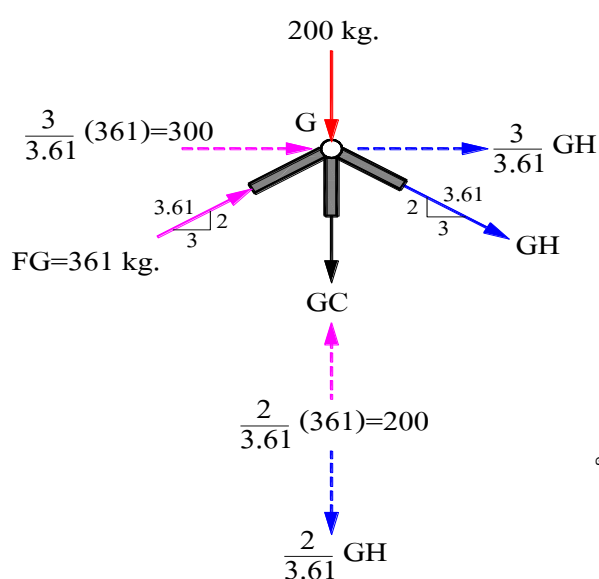
$$FG = -361 \text{ kg.}$$

$$\therefore FG = 361 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวลูกศรของแรง FG

พิจารณา จุด G

เลือกพิจารณาทิศทางที่มีตัวไม่ทราบค่าเพียง 1 ตัวก่อน



$$\sum F_x = 0 ; \quad \rightarrow +$$

$$300 + \frac{3}{3.61} GH = 0$$

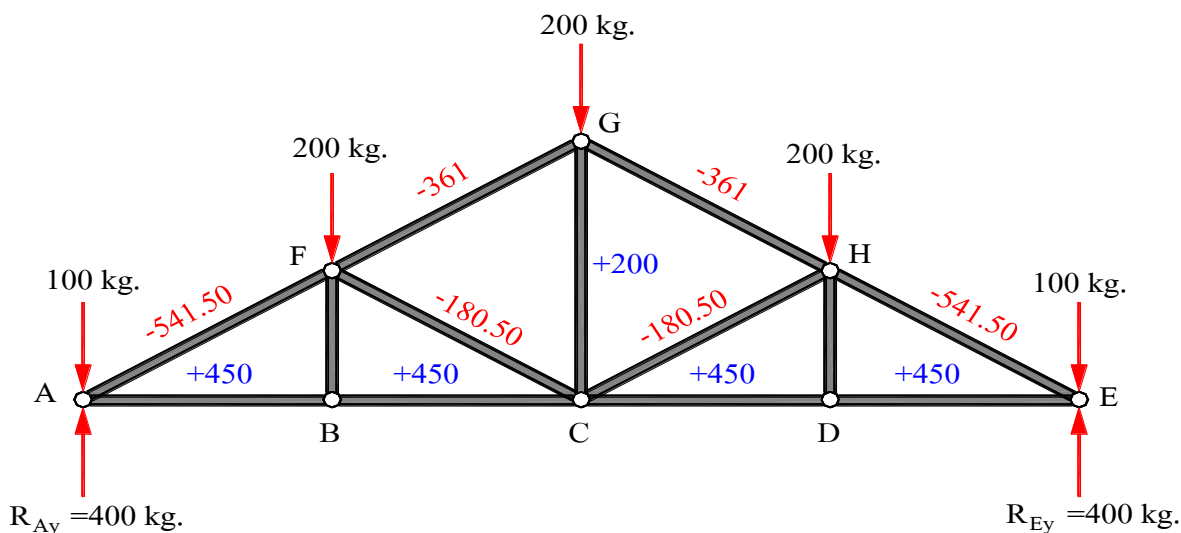
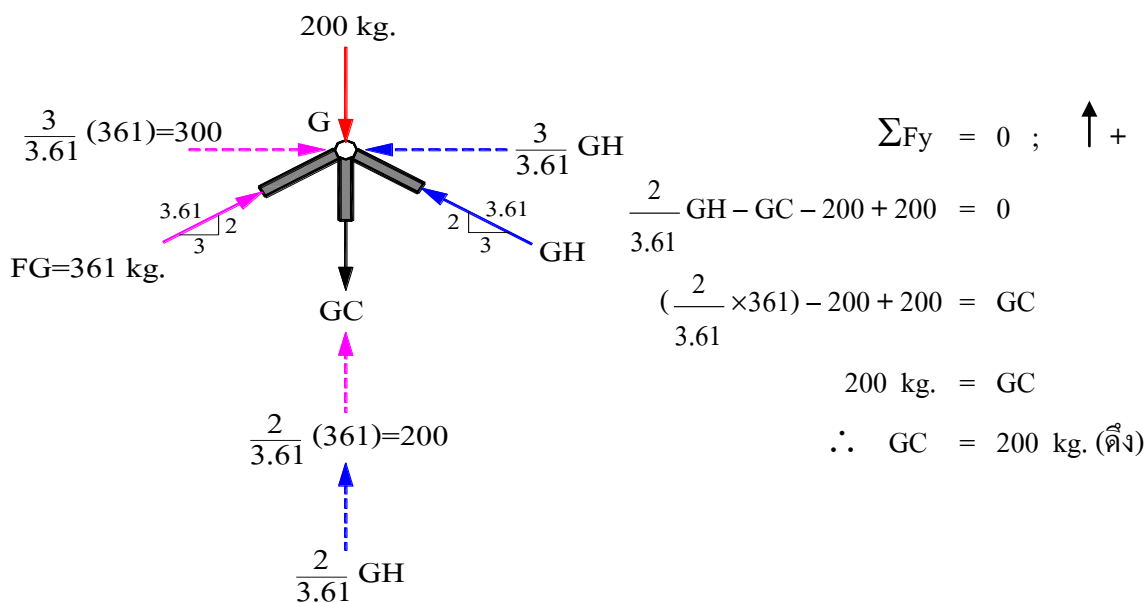
$$\frac{3}{3.61} GH = -300$$

$$GH = - \frac{(300 \times 3.61)}{3}$$

$$GH = -361$$

$$\therefore GH = 361 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวลูกศรของแรง GH ทั้งหมด



4.6.2 วิธีคำนวณส่วนตัด (Section Methods)

การคำนวณหาแรงภายใน โครงถักโดยวิธีคำนวณส่วนตัด เป็นวิธีที่ค่อนข้างทำได้รวดเร็ว เพราะไม่จำเป็นต้องเริ่มที่จุดแรกแล้วไล่จุดถัดไปเรื่อยๆ เหมือนวิธีคำนวณจุดต่อ โดยสามารถเลือกตัด Section ณ ตำแหน่งที่ต้องการทราบค่าได้เลย ซึ่งมีเงื่อนไขคือต้องตัดผ่านตัวไม่ทราบค่าไม่เกิน 3 ตัวเท่านั้น

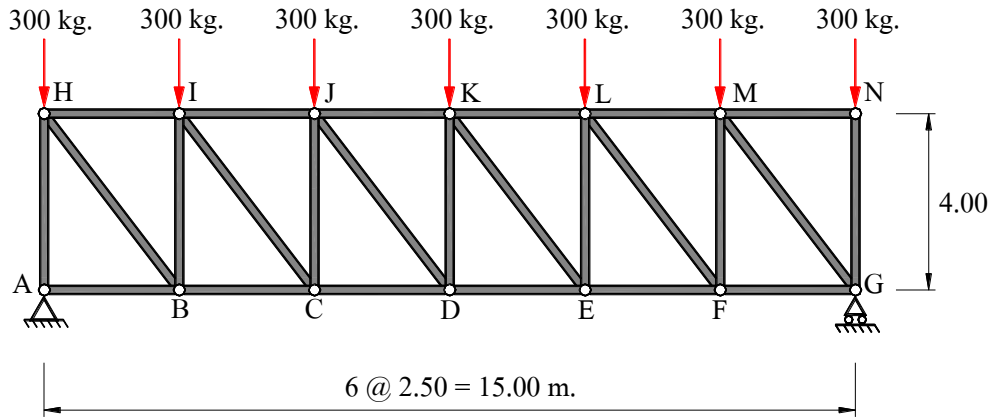
ขั้นตอนการคำนวณหาค่าแรงภายใน โครงถักโดยวิธีคำนวณส่วนตัด

- 1) คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงถัก
- 2) พิจารณาตัด Section ตรงหน้าตัดที่มีตัวไม่ทราบค่าไม่เกิน 3 ตัว
- 3) สมมุติให้แรงที่ยังไม่ทราบค่าให้เป็นแรงดึงไว้ก่อน
- 4) ใช้สมการสมดุล $\sum M = 0$ คำนวณหาตัวไม่ทราบค่าโดยเลือกจุดหมุนให้

เหลือตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียว

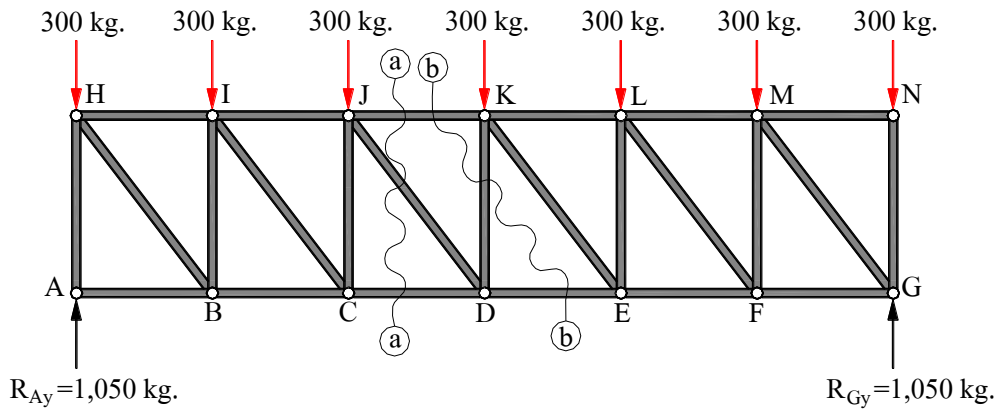
ตัวอย่างที่ 4.4

จงคำนวณหาแรงภายในชิ้นส่วน CD , JK , JD , DK และ DE ของโครงถัก ซึ่งรับน้ำหนักดังรูป โดยวิธีคำนวณส่วนตัด (Section Method)



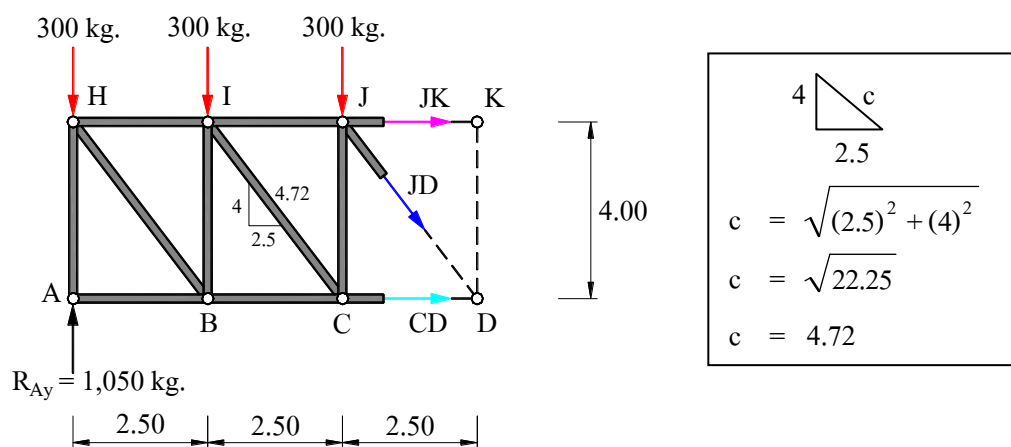
วิธีทำ

หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ



$$R_{Ay} = R_{Gy} = \frac{(300 \times 7)}{2} = 1,050 \text{ kg. } \uparrow$$

พิจารณาตัด Section ที่หน้าตัด a - a



หาแรง CD ; ให้ J เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_J = 0 ; \quad \text{(+)}$$

$$(1,050 \times 5) - (300 \times 5) - (300 \times 2.5) - (CD \times 4) = 0$$

$$5,250 - 1,500 - 750 = 4CD$$

$$\frac{3,000}{4} = CD$$

$$750 \text{ kg.} = CD$$

$$\therefore CD = 750 \text{ kg. (ดึง)}$$

หาแรง JK ; ให้ D เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_D = 0 ; \quad \text{(+)}$$

$$(1,050 \times 7.5) - (300 \times 7.5) - (300 \times 5) - (300 \times 2.5) + (JK \times 4) = 0$$

$$4JK = -7,875 + 2,250 + 1,500 + 750$$

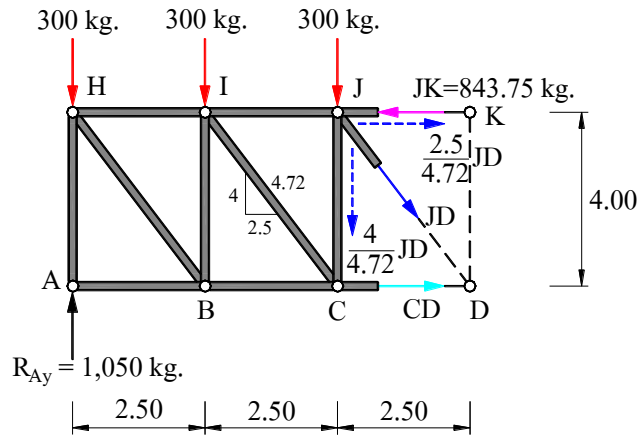
$$JK = -\frac{3,375}{4}$$

$$JK = -843.75 \text{ kg.}$$

$$\therefore JK = 843.75 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวลูกศรของแรง JK

แตกแรง JD ให้อยู่ในแนวแกน X และแกน Y



หาแรง JD ; ให้ C เป็นจุดหมุน

$\Sigma M_C = 0$;

$$(1,050 \times 5) - (300 \times 5) - (300 \times 2.5) - (843.75 \times 4) + \left(\frac{2.5}{4.72} JD \times 4\right) = 0$$

$$5,250 - 1,500 - 750 - 3,375 + \frac{10}{4.72} JD = 0$$

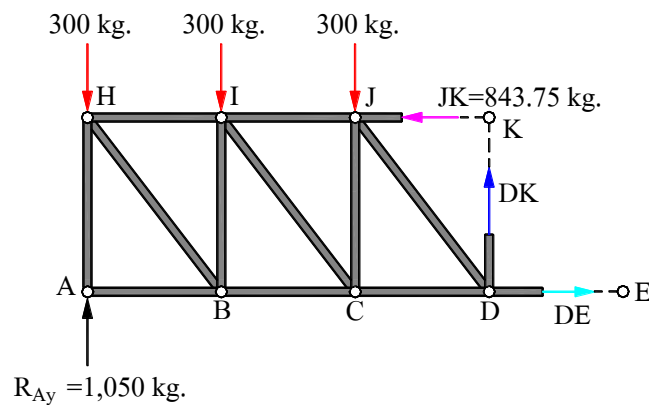
$$\frac{10}{4.72} JD = -5,250 + 1,500 + 750 + 3,375$$

$$JD = \frac{375 \times 4.72}{10}$$

$$JD = 177 \text{ kg.}$$

$\therefore JD = 177 \text{ kg. (ดึง)}$

พิจารณาตัด Section ที่หน้าตัด b - b



หาแรง DK ; ให้ A เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_A = 0 ; \quad \curvearrowright$$

$$(300 \times 2.5) + (300 \times 5) - (843.75 \times 4) - (DK \times 7.5) = 0$$

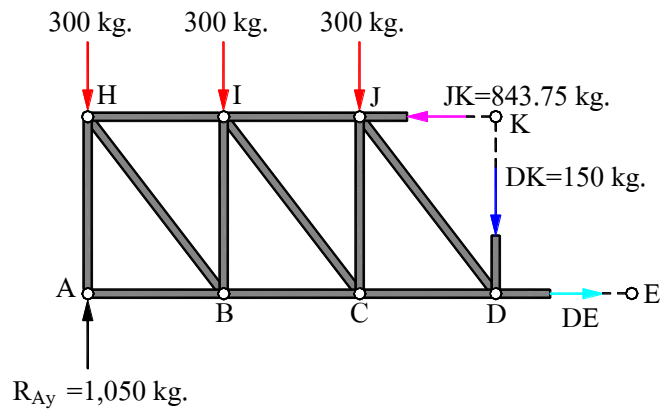
$$750 - 1,500 - 3,375 = 7.5DK$$

$$-\frac{1,125}{7.5} = DK$$

$$-150 \text{ kg.} = DK$$

$$\therefore DK = 150 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวลูกศรของแรง DK



หาแรง DE ; ให้ H เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_H = 0 ; \quad \curvearrowright$$

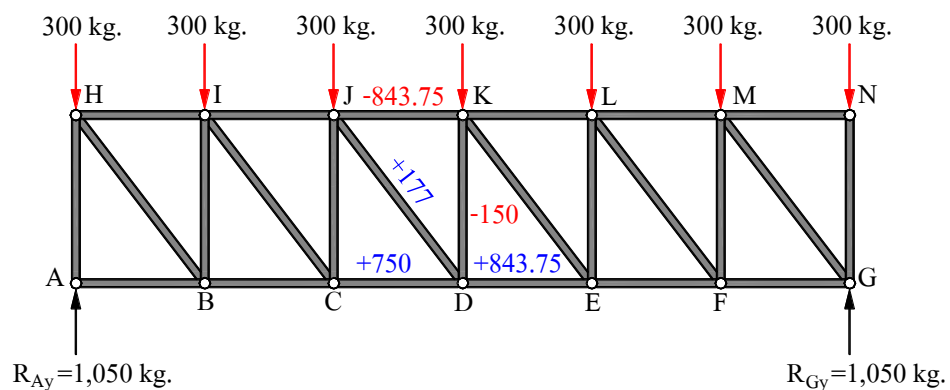
$$(300 \times 2.5) + (300 \times 5) + (150 \times 7.5) - (DE \times 4) = 0$$

$$750 + 1,500 + 1,125 = 4DE$$

$$\frac{3,375}{4} = DE$$

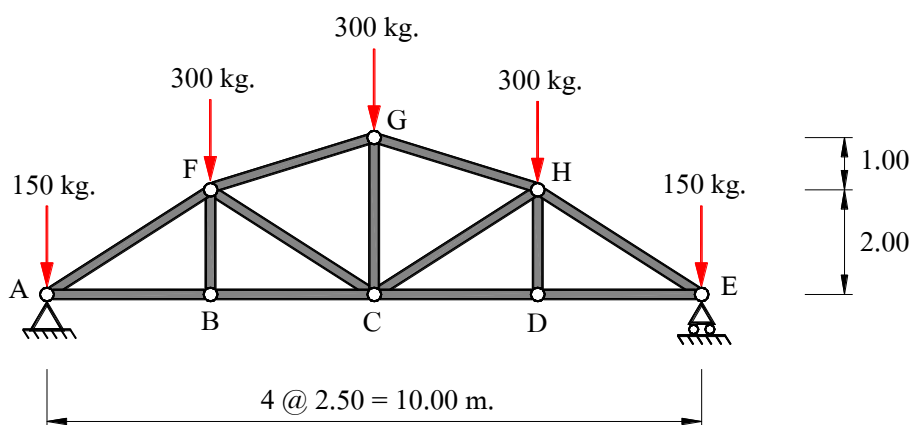
$$843.75 \text{ kg.} = DE$$

$$\therefore DE = 843.75 \text{ kg. (ดึง)}$$



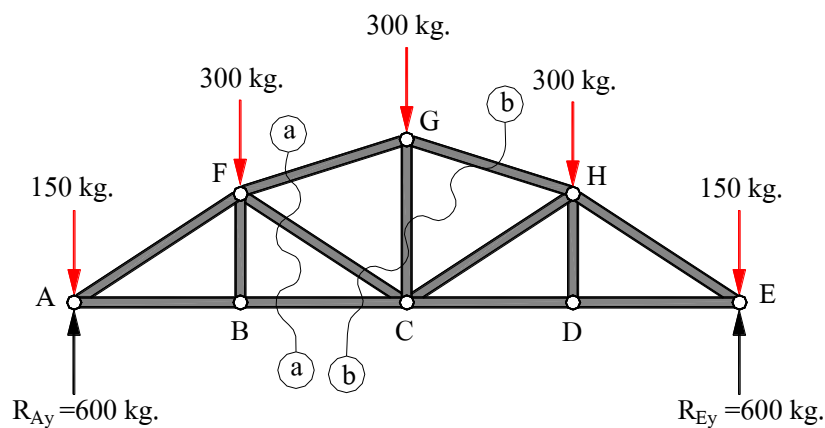
ตัวอย่างที่ 4.5

จงคำนวณหาแรงภายในชิ้นส่วน BC , FC , FG และ GC ของโครงถัก ซึ่งรับน้ำหนักดังรูป โดยวิธีคำนวณส่วนตัด (Section Method)



วิธีทำ

หาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ

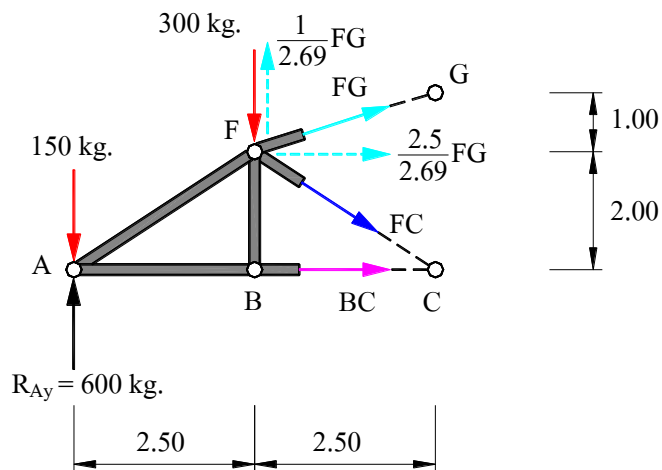


$$R_{Ay} = R_{Ey} = \frac{150 + 300 + 300 + 300 + 150}{2} = 600 \text{ kg.} \uparrow$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2.5 \end{array} \\ c = \sqrt{(1)^2 + (2.5)^2} \\ c = \sqrt{7.25} \\ c = 2.69 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 2.5 \end{array} \\ c = \sqrt{(2)^2 + (2.5)^2} \\ c = \sqrt{10.25} \\ c = 3.20 \end{array}$$

พิจารณาตัด Section ที่หน้าตัด a - a



หาแรง BC ; ให้ F เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_F = 0 ; \quad \curvearrowright$$

$$(600 \times 2.5) - (150 \times 2.5) - (BC \times 2) = 0$$

$$1,500 - 375 = 2BC$$

$$\frac{1,125}{2} = BC$$

$$562.5 \text{ kg.} = BC$$

$$\therefore BC = 562.5 \text{ kg. (ดึง)}$$

แตกแรง FG ให้อยู่ในแนวแกน X และแกน Y

หาแรง FG ; ให้ C เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_C = 0 ; \quad \curvearrowright$$

$$(600 \times 5) - (150 \times 5) - (300 \times 2.5) + \left(\frac{1}{2.69} FG \times 2.5\right) + \left(\frac{2.5}{2.69} FG \times 2\right) = 0$$

$$3,000 - 750 - 750 + 0.93FG + 1.86FG = 0$$

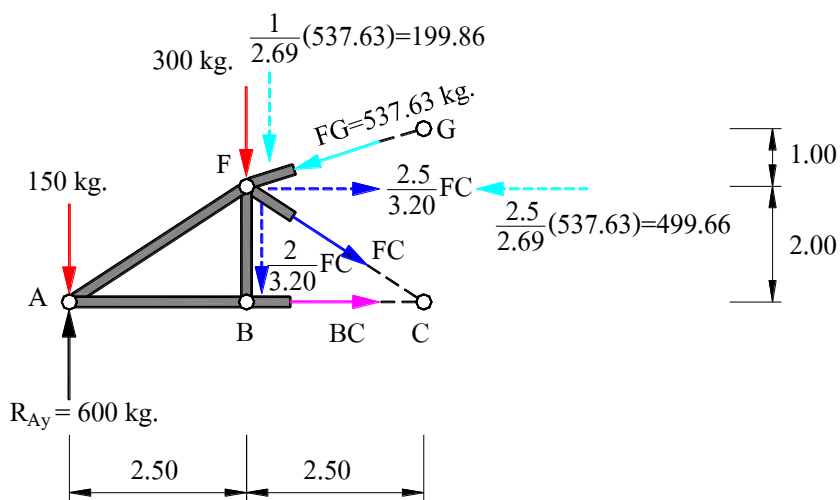
$$2.79FG = -3,000 + 750 + 750$$

$$FG = -\frac{1,500}{2.79}$$

$$FG = -537.63 \text{ kg.}$$

$$\therefore FG = 537.63 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวลูกศรของแรง FG ทั้งหมด



แตกแรง FC ให้อยู่ในแนวแกน X และแกน Y

หาแรง FC ; ให้ B เป็นจุดหมุน

$$\sum M_B = 0 ; \quad \text{⌚}$$

$$(600 \times 2.5) - (150 \times 2.5) - (499.66 \times 2) + \left(\frac{2.5}{3.2} FC \times 2\right) = 0$$

$$1,500 - 375 - 999.32 + 1.56FC = 0$$

$$1.56FC = -1,500 + 375 + 999.32$$

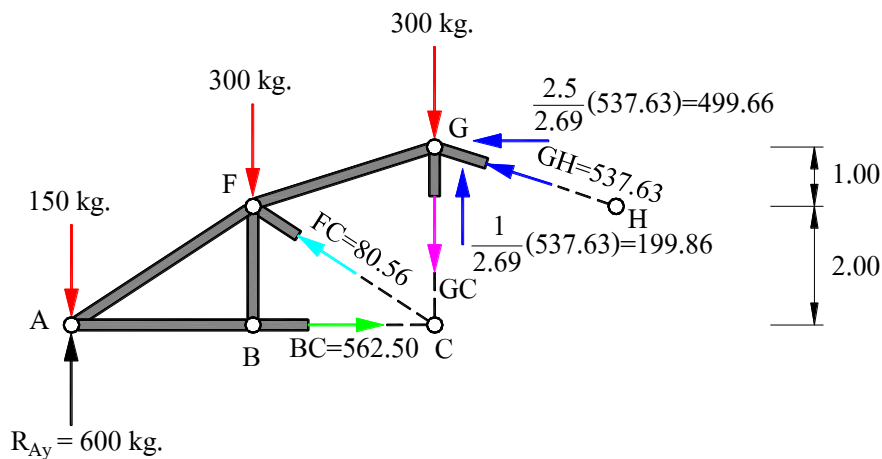
$$FC = -\frac{125.68}{1.56}$$

$$FC = -80.56 \text{ kg.}$$

$$\therefore FC = 80.56 \text{ kg. (อัด)}$$

ให้กลับหัวลูกศรของแรง FC

พิจารณาตัด Section ที่หน้าตัด b - b



หาแรง GC ; ให้ F เป็นจุดหมุน

$$\Sigma M_F = 0 ; \quad \curvearrowright$$

$$(600 \times 2.5) - (150 \times 2.5) + (300 \times 2.5) - (562.5 \times 2) + (GC \times 2.5) - \left(\frac{1}{2.69} \times 537.63 \times 2.5\right) - \left(\frac{2.5}{2.69} \times 537.63 \times 1\right) = 0$$

$$1,500 - 375 + 750 - 1,125 + 2.5GC - 499.66 - 499.66 = 0$$

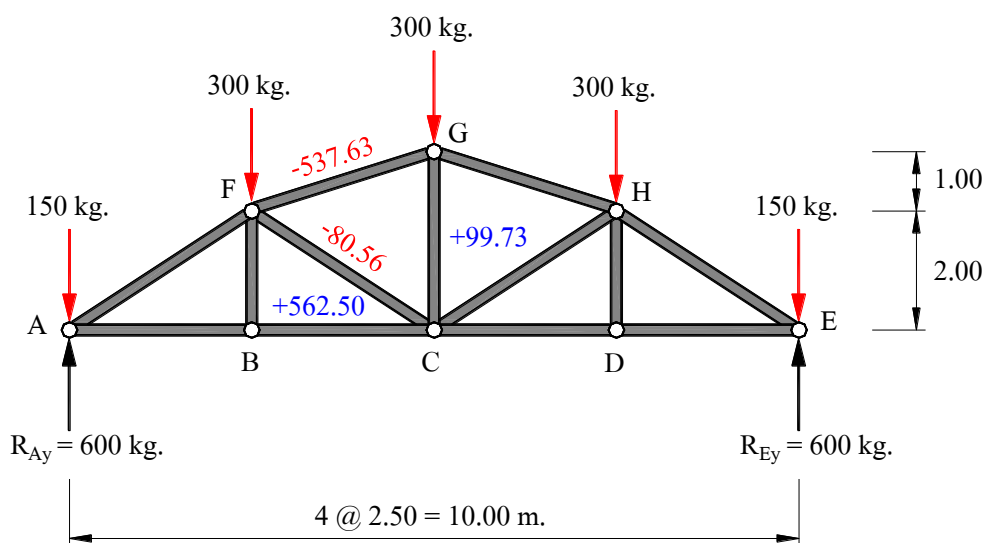
$$2.5GC - 249.32 = 0$$

$$2.5GC = 249.32$$

$$GC = \frac{249.32}{2.5}$$

$$GC = 99.73 \text{ kg.}$$

$$\therefore GC = 99.73 \text{ kg. (ตั้ง)}$$



ข้อสังเกต การเลือกจุดหมุนเพื่อคำนวณหาตัวไม่ทราบค่า ควรเลือกจุดที่มีแรงทราบค่าแล้วและไม่ทราบค่าผ่านหลายๆ แรง โดยให้เหลือแรงที่ไม่ทราบค่าที่ต้องการคำนวณเพียงแรงเดียว เพื่อจะได้ลดภาระในการคำนวณลง

แบบฝึกหัดท้ายบทหน่วยที่ 4

ตอนที่ 1 จงเติมคำลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1. โครงถัก (Truss) หมายถึง.....

.....

2. รูปทรงพื้นฐานของโครงถัก คือ รูปทรง.....

.....

3. ชื่อของชิ้นส่วนที่ประกอบขึ้นเป็นโครงถัก ได้แก่.....

.....

4. โครงถักแบบโครงสะพานที่นิยมใช้งานมี.....แบบ ได้แก่.....

.....

5. แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักโดยทั่วไปมี.....แรง
ได้แก่.....

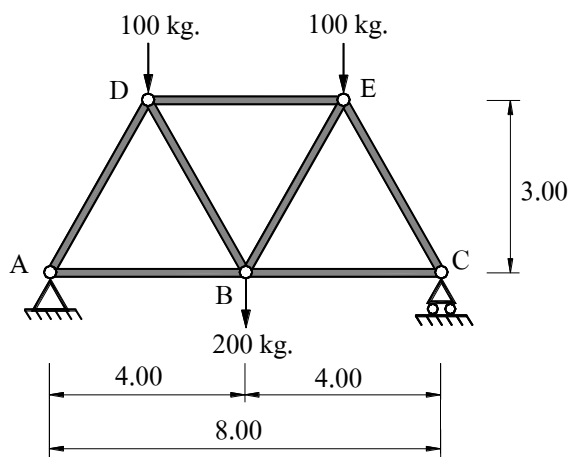
.....

6. การหาแรงภายในโครงถักสามารถแบ่งได้เป็น.....วิธี
ได้แก่.....

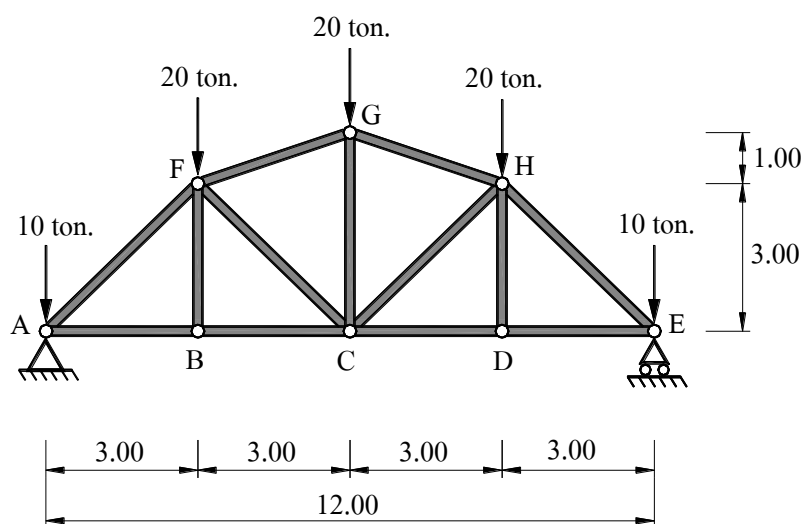
.....

ตอนที่ 2 จงคำนวณหาแรงภายในโครงถักแบบดีเทอร์มินาท

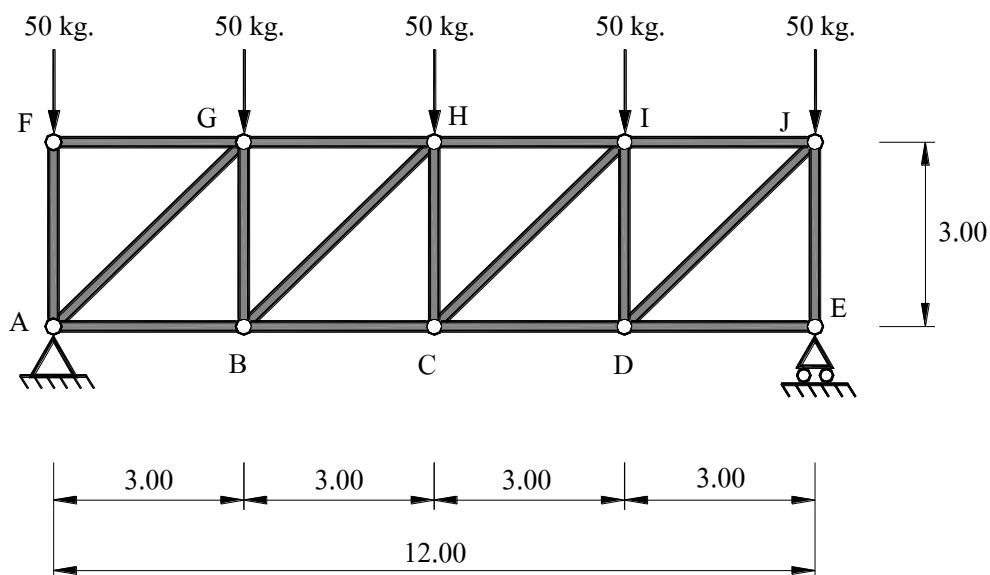
1. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถักซึ่งรับน้ำหนักดังรูป โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method)



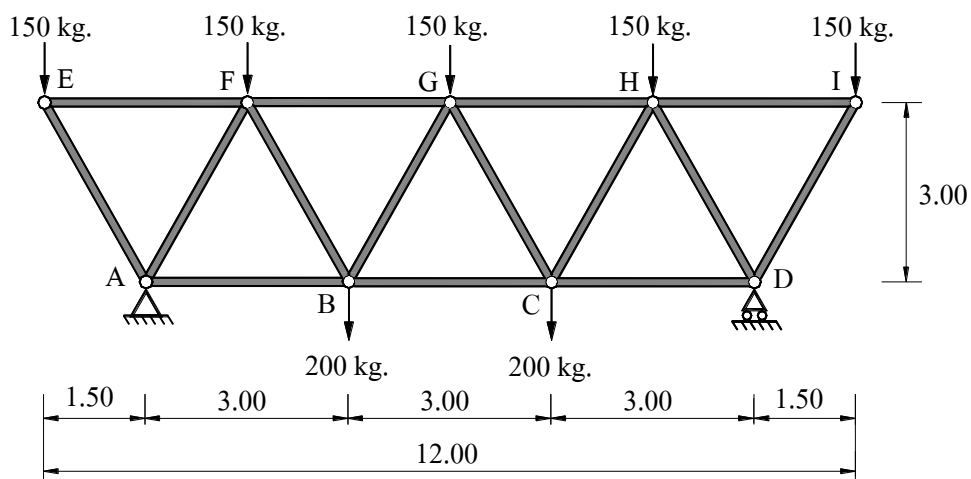
2. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถักซึ่งรับน้ำหนักดังรูป โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method)



3. จงคำนวณหาแรงภายในชิ้นส่วน BC , GC , GH , HI , HC , CI และ CD ของโครงถัก ซึ่งรับน้ำหนักดังรูป โดยวิธีคำนวณส่วนตัด (Section Method)



4. จงคำนวณหาแรงภายในชิ้นส่วน FG , FB , AB , BG และ BC ของโครงถัก ซึ่งรับน้ำหนักดังรูป โดยวิธีคำนวณส่วนตัด (Section Method)



บรรณานุกรม

เฉลิมศักดิ์ นามเชียงใต้. **โครงสร้าง 1 - 2**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ กราฟิกอาร์ต, 2527.

ชาญชัย จารุจินดา. **ทฤษฎีโครงสร้าง**. กรุงเทพมหานคร : บุญเลิศการพิมพ์.

เทิดศักดิ์ สายสุทธิ และอวยชัย สุภาพจน์. **กลศาสตร์งานโครงสร้าง**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

สุทธิ ผลสวัสดิ์และคณะ. **ความแข็งแรงของวัสดุสำหรับช่างเทคนิค**. กรุงเทพมหานคร : อำนวยการพิมพ์, 2530.

สุระเชษฐ รุ่งวัฒนพงษ์. **กลศาสตร์ของแข็ง**. กรุงเทพมหานคร : บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด, 2538.

สมปอง สว่างแสง. **ทฤษฎีโครงสร้าง**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์การศาสนา กรมการศาสนา, 2537.

โสภณ วงศ์มีทรัพย์ และเกษม จารุปาน. **กลศาสตร์วิศวกรรม, ภาคลดศาสตร์**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

Andrew Pytel, Jaan Kiusalass. **Engineering Mechanics, Statics & Dynamics**, SI Edition, 1996.

Ferdinand and Fowler. **Engineering Mechanics, Statics & Dynamics** : Harper & Row Publishers, 1975.