กลศาสตร์วัสดุ
Mechanics of Materials

เรียบเรียงโดย

ผศ.ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สารบัญ

บทที่ 1
หน่วยแรง (Stress)

เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

1.1 บทนำ

วิชากลศาสตร์เป็นสาขาหนึ่งของวิทยาศาสตร์ทางกายภาพ (physical sciences) ที่ศึกษาเกี่ยวกับสภาวะที่อยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ (motions) ของวัตถุต่างๆ (bodies) ซึ่งถูกกระทำโดยแรง (forces)

โดยทั่วไปแล้ว วิชากลศาสตร์จะถูกแยกออกได้เป็น 3 สาขาวิชาคือ กลศาสตร์ของวัตถุแกร่ง (rigid-body mechanics) กลศาสตร์ของวัตถุที่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ (deformable-body mechanics) และกลศาสตร์ของไหล (fluid mechanic)

กลศาสตร์ของวัตถุแกร่งสามารถที่จะถูกแบ่งออกได้เป็นอีก 2 แขนงวิชาคือ สถิตยศาสตร์ (statics) ซึ่งจะศึกษาเกี่ยวกับสมดุลของวัตถุ (equilibrium of bodies) ที่อยู่นิ่งกับที่หรือมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่คงที่ และพลศาสตร์ (dynamics) ซึ่งจะศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุอย่างมีความเร่ง (acceleration) โดยที่**วัตถุแกร่ง** (rigid body) หมายถึงองค์อาคารของโครงสร้าง (structural member) หรือโครงสร้าง (structure) ที่ทำด้วยวัสดุที่มีความแกร่ง (rigidity) สูงมาก ซึ่งจะถูกพิจารณาว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (deformation) ภายใต้แรงกระทำ

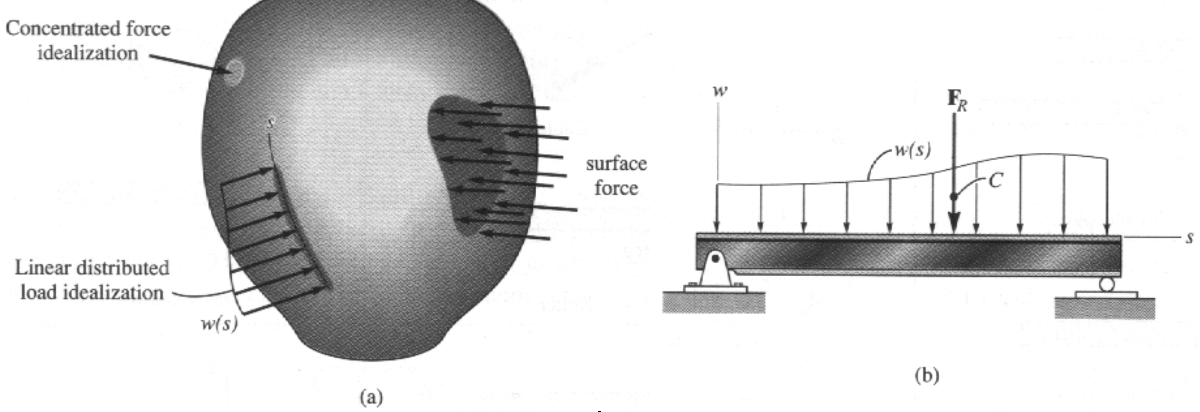
ส่วนกลศาสตร์ของวัตถุที่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้จะศึกษาเกี่ยวกับพฤติกรรมการตอบสนองภายในและภายนอกของ**วัตถุแข็ง** (solid body) ภายใต้การกระทำของแรง (forces) หรือน้ำหนักบรรทุก (loads) กลศาสตร์ของวัสดุ (mechanics of materials) เป็นส่วนหนึ่งของกลศาสตร์ของวัตถุที่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ซึ่งศึกษาเกี่ยวกับหน่วยแรง (stress) การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (deformation) ความเครียด (strain) และเสถียรภาพ (stability) ของวัตถุแข็ง โดยที่วัตถุแข็งหมายถึงองค์อาคารของโครงสร้างหรือโครงสร้างที่ทำด้วยวัสดุที่มีความแข็งและสามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ภายใต้แรงกระทำ เช่น คานเหล็ก เสาไม้ และโครงข้อแข็งเหล็ก เป็นต้น

1.2 สมดุลของวัตถุที่เปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ (Equilibrium of a Deformable Body)

แรงภายนอก (External Loads)

แรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุจะถูกแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทคือ แรงกระทำที่ผิว (surface force) และแรงกระทำในตัววัตถุ (body force)

Surface force เป็นแรงที่เกิดจากการสัมผัสกันโดยตรงของผิวของวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 1-1a ซึ่งจะถูกแบ่งออกได้เป็น 2 แบบคือ แรงกระทำเป็นจุด (concentrated force หรือ point load) และแรงแผ่กระจาย (distributed load)



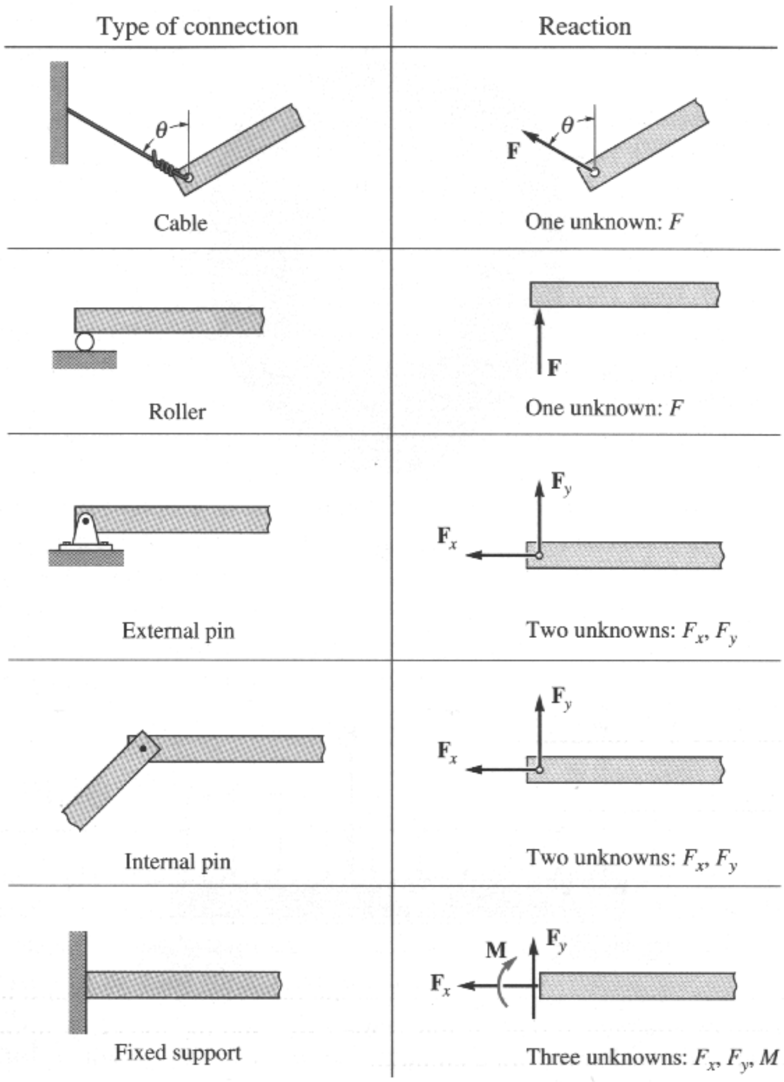
รูปที่ 1-1

- แรงกระทำเป็นจุดคือ surface force ซึ่งกระทำอยู่บนพื้นผิวที่มีขนาดเล็กเมื่อเปรียบเทียบกับพื้นผิวทั้งหมดของวัตถุ เช่น แรงปฏิกริยา (reactions) ซึ่งเกิดขึ้นที่จุดรองรับ เป็นต้น
- แรงแผ่กระจายคือ surface force ที่กระทำต่อพื้นผิวที่มีลักษณะแคบและยาว เช่น น้ำหนักของผนังอิฐที่กระทำต่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-1b เป็นต้น จากวิชา statics ขนาดของแรงลัพธ์ F_R ของแรงแผ่กระจายดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับพื้นที่ทั้งหมดใต้แรงแผ่กระจาย $w(s)$ และจะกระทำผ่านจุด centroid C ของแรงแผ่กระจาย

Body force เป็นแรงที่เกิดขึ้นเมื่อวัตถุๆ หนึ่งส่งแรงไปกระทำกับวัตถุอีกวัตถุหนึ่งโดยไม่มีการสัมผัสกันโดยตรง เช่น น้ำหนักของวัตถุที่เกิดจากแรงดึงดูดของโลก เป็นต้น

ตารางที่ 1-1 แสดงจุดรองรับ (supports) ชนิดต่างๆ และแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ (support reactions) ที่มักจะพบเห็นโดยทั่วไป จากตาราง เราจะเห็นได้ว่า

ตารางที่ 1-1

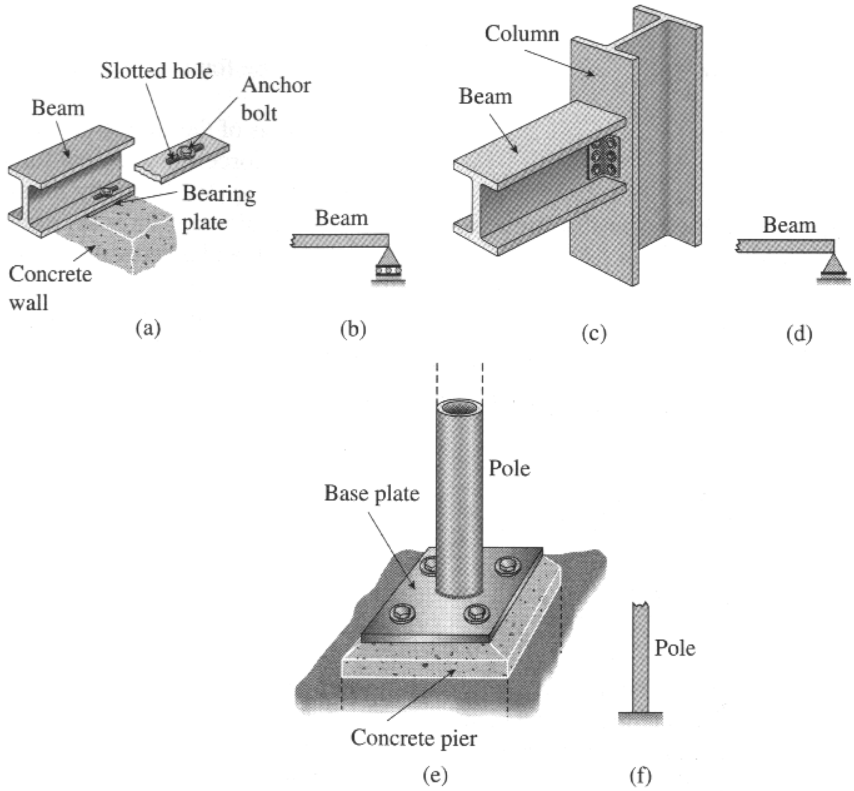


- เมื่อจุดรองรับป้องกันไม่ให้เกิดการเลื่อน (translation) ขึ้นในทิศทางใดแล้ว จุดรองรับนั้นจะทำให้เกิดแรงปฏิกริยา (reaction force) ขึ้นในทิศทางนั้น

- ถ้าจุดรองรับป้องกันไม่ให้เกิดการหมุน (rotation) รอบแกนใดๆ แล้ว จุดรองรับนั้นจะทำให้เกิดโมเมนต์ปฏิกิริยา (reaction moment) ขึ้นรอบแกนนั้น

ยกตัวอย่างเช่น จุดรองรับแบบล้อเลื่อน (roller) ซึ่งป้องกันไม่ให้เกิดการเลื่อนขององค์อาคารของโครงสร้างในแนวดิ่งจะทำให้เกิดแรงปฏิกริยา F ในแนวดิ่งเท่านั้น ส่วนจุดรองรับแบบยึดแน่น (fixed support) ซึ่งป้องกันไม่ให้เกิดการเลื่อนและการหมุนใดๆ ขึ้นบนองค์อาคารของโครงสร้างจะทำให้เกิดแรงปฏิกริยาซึ่งประกอบด้วยแรง F_x และ F_y และโมเมนต์ M เป็นต้น

สัญลักษณ์ของจุดรองรับประเภทต่างๆ ดังที่แสดงในตารางที่ 1-1 เป็นเพียงแบบจำลองของจุดรองรับเพื่อใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างเท่านั้น ในความเป็นจริงแล้ว จุดรองรับแบบล้อเลื่อน, จุดรองรับแบบหมุด (pin support), และจุดรองรับแบบยึดแน่นจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 1-2



รูปที่ 1-2

สมการความสมดุล (Equations of equilibrium)

ในการที่วัตถุจะอยู่ในสภาวะความสมดุลได้นั้น วัตถุดังกล่าวจะต้องมีความสมดุลของแรง (balance of force) เพื่อป้องกันการเคลื่อนที่ของวัตถุอย่างมีความเร่ง (acceleration) และจะต้องมีความสมดุลของโมเมนต์ (balance of moment) รอบจุดใดๆ เพื่อป้องกันการหมุนของวัตถุรอบจุดดังกล่าวอย่างมีความเร่ง ดังนั้น เราจะเขียนสมการความสมดุล (equilibrium equations) ของวัตถุดังกล่าวได้ในรูป

$$\sum F = 0 \qquad \sum M_O = 0 \tag{1-1}$$

โดยทั่วไปแล้ว สมการความสมดุลของโครงสร้างหรือวัตถุจะเขียนอยู่ในระบบแกนตั้งฉาก x, y, และ z ซึ่งจะประกอบด้วย 6 สมการคือ

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

โดยที่สามสมการแรกแสดงให้เห็นถึงความสมดุลของแรงในแกน x, y, และ z ตามลำดับ และสามสมการที่เหลือแสดงให้เห็นถึงความสมดุลของโมเมนต์รอบแกน x, y, และ z ตามลำดับ ซึ่งป้องกันไม่ให้มีการเคลื่อนที่และการหมุนของวัตถุอย่างมีความเร่งรอบแกน x, y, และ z ตามลำดับ

ในกรณีที่โครงสร้างและแรงกระทำอยู่ในระนาบเดียวกัน (coplanar) แล้ว สมการที่ 1-2 จะลดรูปลงเหลือเพียงแค่ 3 สมการ เช่น เมื่อโครงสร้างอยู่ในระนาบ $x-y$ แล้ว สมการความสมดุลของโครงสร้างจะอยู่ในรูป

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$
$$\sum M_O = 0 \qquad (1\text{-}3)$$

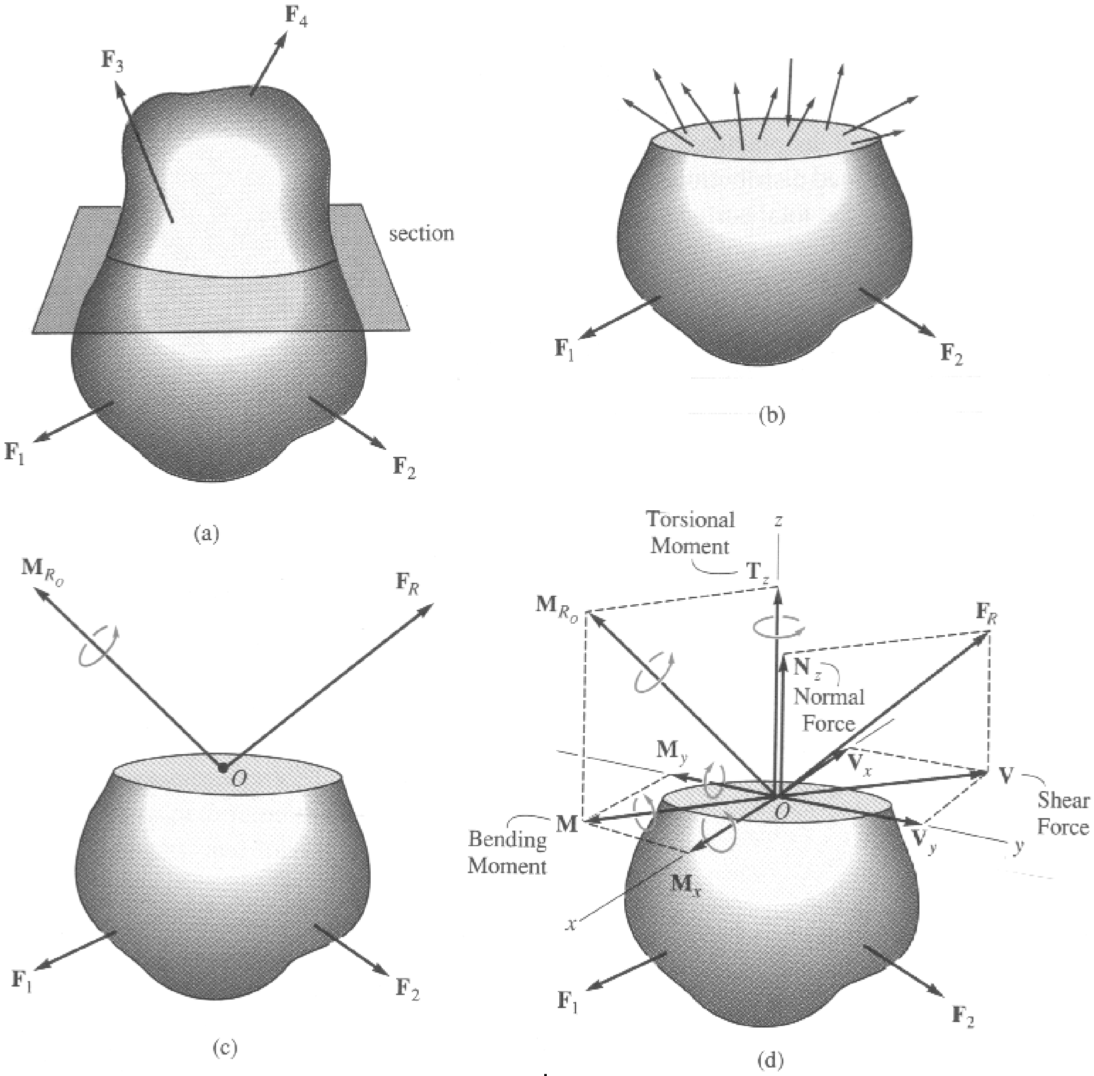
เมื่อ $\sum F_x$ และ $\sum F_y$ แทนผลรวมทางพีชคณิตขององค์ประกอบต่างๆ ของแรง ซึ่งกระทำอยู่บนโครงสร้างหรือองค์อาคารของโครงสร้างในแนวแกน x และแนวแกน y ตามลำดับ และ $\sum M_O$ แทนผลรวมทางพีชคณิตของ โมเมนต์ขององค์ประกอบของแรงเหล่านั้นรอบแกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบ $x-y$ (รอบแกนz) ที่ผ่านจุด O

แรงลัพธ์ภายใน (Internal Resultant Loading)

พิจารณาวัตถุใดๆ ซึ่งถูกกระทำโดยแรงภายนอกและอยู่ในสภาวะสมดุล ดังที่แสดงในรูปที่ 1-3a เราจะหาแรงลัพธ์ภายใน (internal force) ที่เกิดขึ้นในวัตถุนี้ได้โดยใช้วิธีตัดหน้าตัด (method of sections) โดยวิธีการนี้ เราจะตัดวัตถุผ่านจุดที่เราสนใจออกเป็น 2 ชิ้นส่วน (segments) โดยทั่วไปแล้ว เรามักจะไม่ทราบการกระจายของแรงภายในที่จุดดังกล่าว ดังที่แสดงในรูปที่ 1-3b แต่เราจะหาแรงลัพธ์ F_R และโมเมนต์ลัพธ์ M_{RO} ที่กระทำอยู่ที่จุด O ได้โดยใช้สมการความสมดุลดังที่แสดงในรูปที่ 1-3c ซึ่งจุด O มักจะเป็นจุด centroid ของหน้าตัด

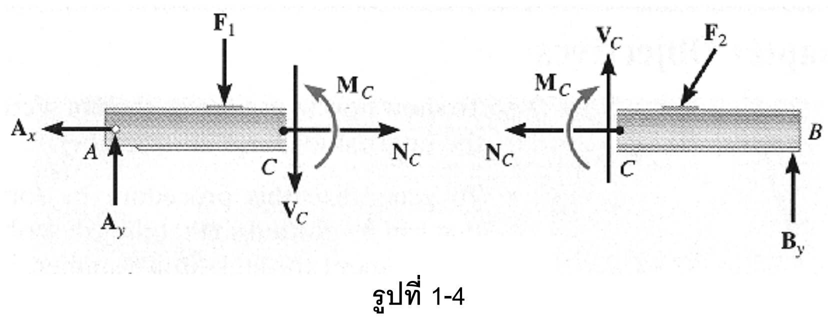
ถ้าเราให้จุด O เป็นจุดกำเนิดของระบบแกนตั้งฉาก x, y, และ z ดังที่แสดงในรูปที่ 1-3d แล้ว เราจะแตกแรงลัพธ์ F_R ออกเป็นองค์ประกอบได้ 3 องค์ประกอบคือ V_x, V_y, และ N_z และเราจะแตก โมเมนต์ ลัพธ์ M_{RO} ออกเป็นองค์ประกอบได้ 3 องค์ประกอบคือ M_x, M_y, และ T_z ซึ่งแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ดังกล่าวจะถูกจัดกลุ่มโดยใช้ลักษณะการกระทำของแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ได้เป็นแรงลัพธ์ 2 กลุ่มและโมเมนต์ลัพธ์ 2 กลุ่มคือ

1. N_z หรือแรงตั้งฉาก (normal force) เป็นแรงที่กระทำตั้งฉากกับหน้าตัดของวัตถุ ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อวัตถุถูกกระทำโดยแรงภายนอกในลักษณะดึงชิ้นส่วนทั้งสองของวัตถุออกจากกันหรือกดอัดชิ้นส่วนทั้งสองของวัตถุเข้าหากัน
2. V หรือแรงเฉือน (shear force) เป็นแรงซึ่งกระทำขนานกับระนาบของหน้าตัดของวัตถุ ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อแรงภายนอกพยายามที่จะเลื่อนชิ้นส่วนอันหนึ่งของวัตถุไปบนชิ้นส่วนอีกอันหนึ่ง โดยที่
$$V = V_x + V_y$$
3. T_z หรือโมเมนต์บิด (torque) เป็นโมเมนต์ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อแรงภายนอกจะพยายามที่จะบิด (twist) วัตถุรอบแกนๆ หนึ่งซึ่งตั้งฉากกับระนาบของหน้าตัดของวัตถุ
4. M หรือโมเมนต์ดัด (bending moment) เป็นโมเมนต์ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อแรงภายนอกพยายามที่จะดัด (bend) วัตถุรอบแกนๆ หนึ่ง ซึ่งอยู่บนระนาบของหน้าตัดของวัตถุ โดยที่
$$M = M_x + M_y$$



รูปที่ 1-3

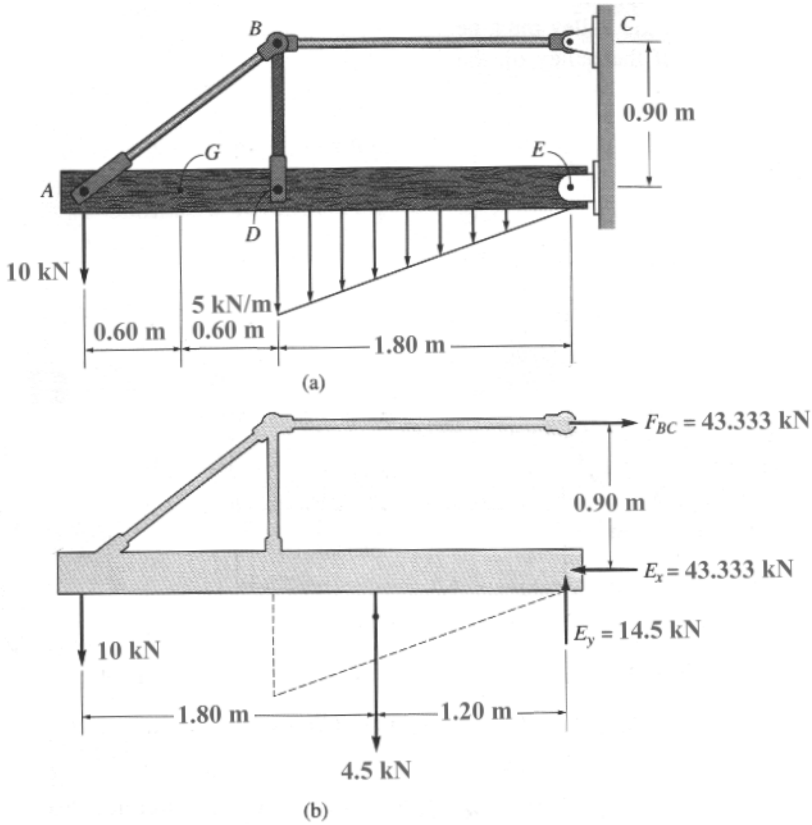
ถ้าวัตถุถูกกระทำโดยแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกันกับระนาบของวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 1-4 แล้ว องค์ประกอบของแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ข้างต้นจะลดลงเหลือเพียงแรงตั้งฉาก N แรงเฉือน V และโมเมนต์ดัด M เท่านั้น และเมื่อเราทราบค่าแรงและโมเมนต์ลัพธ์ภายในข้างต้นที่กระทำอยู่บนชิ้นส่วนใดชิ้นส่วนหนึ่งของโครงสร้างแล้ว เราจะทราบค่าแรงและโมเมนต์ลัพธ์ภายในที่กระทำต่อชิ้นส่วนที่เหลือได้โดยใช้กฎข้อที่ 3 ของ Newton ซึ่งกล่าวว่า แรงและโมเมนต์ลัพธ์ภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนทั้งสองจะต้องมีขนาดที่เท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม



รูปที่ 1-4

ตัวอย่างที่ 1-1

จงหาค่าแรงและโมเมนต์ลัพธ์ภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด G ของคานไม้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-1a กำหนดให้ joint A, B, C, D, และ E เป็นหมุด (pin)



รูปที่ Ex 1-1

รูปที่ Ex 1-1b แสดงแผนภาพ free-body diagram ของโครงสร้าง เนื่องจากชิ้นส่วน BC เป็น two-force member ดังนั้น จุด C จะมีแรงปฏิกริยาเฉพาะในแนวนอนเท่านั้น และเนื่องจากจุด E เป็น pin ดังนั้น จุด E จะมีแรงปฏิกริยา E_x และ E_y กระทำ

หาแรงปฏิกริยา

$$\sum M_E = 0; \qquad F_{BC}(0.9\text{ m}) = 10\text{ kN}(3\text{ m}) + 4.5\text{ kN}(2\text{ m})$$

$$F_{BC} = 43.333\text{ kN} \rightarrow$$

$$\sum F_x = 0; \qquad E_x = F_{BC} = 43.333\text{ kN} \leftarrow$$

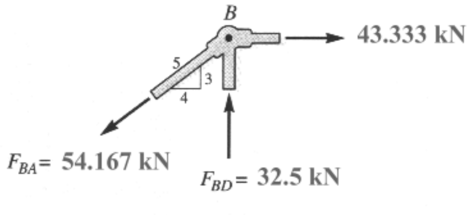
$$\sum F_y = 0; \qquad E_y = 10\text{ kN} + 4.5\text{ kN} = 14.5\text{ kN} \uparrow$$

เขียนแผนภาพ free-body diagram **ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง**

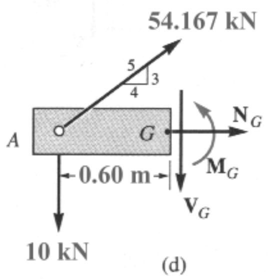
ค่าแรงและโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด G จะหาได้โดยใช้ free-body diagram ของชิ้นส่วน AG ของคานไม้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-1d โดยที่ค่าแรง F_{BA} จะหาได้จากแผนภาพ free-body diagram ของ joint B ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-1c

$\sum F_x = 0;$ $\quad F_{BA}(\frac{4}{5}) = 43.333\,\text{kN}$

$$F_{BA} = 54.167\,\text{kN}$$



(c)



(d)

Equilibrium Equation

จากแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน AG ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-1d

$\sum F_x = 0;$ $\quad N_G + 54.167\,\text{kN}(\frac{4}{5}) = 0$

$$N_G = -43.333\,\text{kN}$$ <u>Ans.</u>

$\sum F_y = 0;$ $\quad -V_G - 10\,\text{kN} + 54.167\,\text{kN}(\frac{3}{5}) = 0$

$$V_G = 22.5\,\text{kN}$$ <u>Ans.</u>

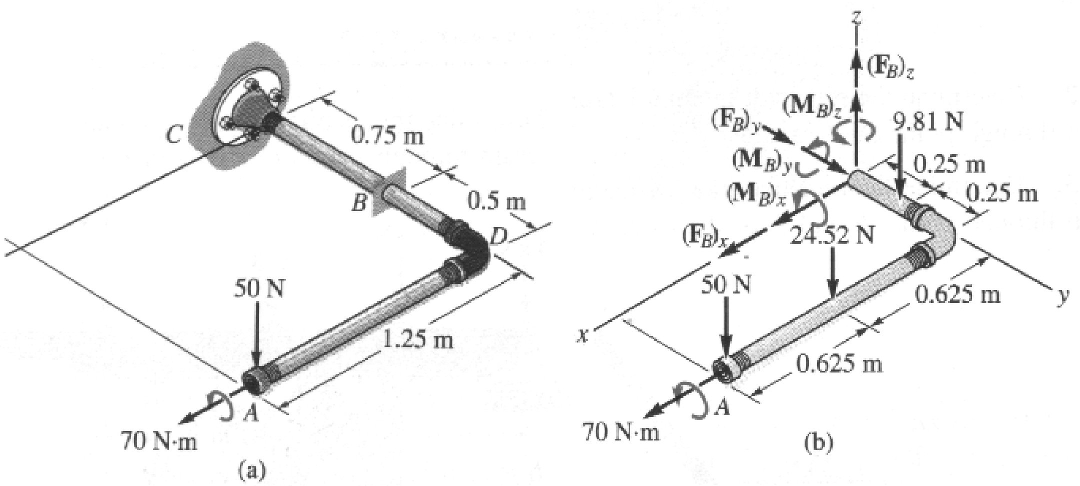
$\sum M_G = 0;$ $\quad M_G - (54.167\,\text{lb})(\frac{3}{5})(0.6\,\text{m}) + (10\,\text{kN})(0.6\,\text{m}) = 0$

$$M_G = 13.5\,\text{kN - m}$$ <u>Ans.</u>

ค่าของ N_G มีเครื่องหมายเป็นลบแสดงว่า N_G มีทิศทางที่ตรงกันข้ามกับที่เราสมมุติไว้ในแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน AG

ตัวอย่างที่ 1-2

จงหาค่าแรงและโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด B ของท่อเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-2a กำหนดให้ ท่อเหล็กมีมวลเท่ากับ 2 $\mathrm{kg/m}$ และถูกกระทำโดยแรงขนาด 50 N และ couple moment ขนาด 70 $\mathrm{N\text{-}m}$ ที่ปลาย A โดยที่จุดรองรับ C ถูกยึดแน่นกับกำแพง



รูปที่ Ex 1-2a

เขียนแผนภาพ free-body diagram

จากรูปรูปที่ Ex 1-2a ทำการตัดท่อเหล็กที่จุด B และแผนภาพ free-body diagram ของส่วนของท่อเหล็กจะมีลักษณะ ดังที่แสดงในรูปรูปที่ Ex 1-2b โดยที่กำหนดให้จุด B เป็นจุดเริ่มต้นของแกนอ้างอิง x, y, และ z และให้องค์ประกอบของแรงและโมเมนต์ลัพธ์กระทำผ่านจุด centroid ของหน้าตัดและมีทิศทางไปตามแนวแกนที่เป็นบวก

หาน้ำหนักของแต่ละชิ้นส่วนของท่อเหล็ก

$$W_{BD} = (2\ \mathrm{kg/m})(0.5\ \mathrm{m})(9.81\ \mathrm{N/kg}) = 9.81\ \mathrm{N}$$

$$W_{BD} = (2\ \mathrm{kg/m})(1.25\ \mathrm{m})(9.81\ \mathrm{N/kg}) = 24.525\ \mathrm{N}$$

น้ำหนักทั้งสองนี้จะกระทำผ่านจุด center of gravity ของชิ้นส่วนทั้งสองของท่อเหล็ก

Equilibrium Equation

เนื่องจากท่อเหล็กดังกล่าวเป็นโครงสร้างที่อยู่ใน 3 มิติ ดังนั้น องค์ประกอบของแรงและโมเมนต์ลัพธ์ทั้งหมดจะหาได้โดยใช้สมการสมดุล 6 สมการ

$\sum F_x = 0;$ $\qquad (F_B)_x = 0$ Ans.

$\sum F_y = 0;$ $\qquad (F_B)_y = 0$ Ans.

$\sum F_z = 0;$ $\qquad (F_B)_z - 9.81\ \mathrm{N} - 24.525\ \mathrm{N} - 50\ \mathrm{N} = 0$

$(F_B)_z = 84.3\ \mathrm{N}$ Ans.

$\sum (M_B)_x = 0;$

$(M_B)_x + 70\ \mathrm{N\text{-}m} - 50\ \mathrm{N}(0.5\ \mathrm{m}) - 24.525\ \mathrm{N}(0.5\ \mathrm{m}) - 9.81\ \mathrm{N}(0.25\ \mathrm{m}) = 0$

$(M_B)_x = -30.3\ \mathrm{N\text{-}m}$ Ans.

$\sum (M_B)_y = 0;$ $\qquad (M_B)_y + 24.525\ \mathrm{N}(0.625\ \mathrm{m}) + 50\ \mathrm{N}(1.25\ \mathrm{m}) = 0$

$(M_B)_y = -77.8\ \mathrm{N\text{-}m}$ Ans.

$\sum (M_B)_z = 0;$ $\qquad (M_B)_z = 0$ <u>Ans.</u>

ค่าของ $(M_B)_x$ และ $(M_B)_y$ มีเครื่องหมายเป็นลบแสดงว่า $(M_B)_x$ และ $(M_B)_y$ มีทิศทางที่เกิดขึ้นตรงกันข้ามกับที่เราสมมุติไว้ในตอนต้น

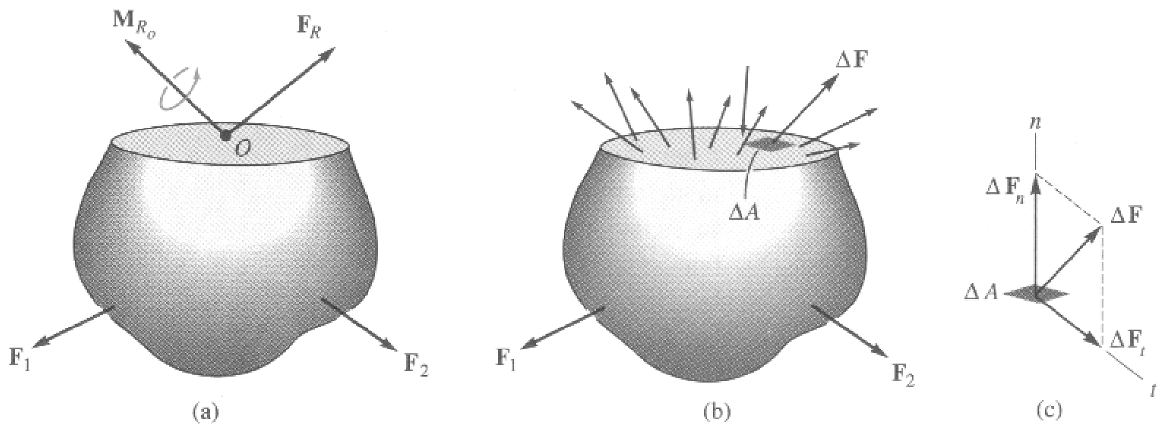
1.3 หน่วยแรง (Stress)

ในการศึกษาเรื่องหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในวัตถุ เราจะสมมุติให้วัสดุมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. วัสดุเป็นวัสดุที่มีเนื้อต่อเนื่อง (continuous) กระจายอย่างสม่ำเสมอ (uniform distribution) และไม่มีช่องว่าง
2. วัสดุเป็นวัสดุที่มีเนื้อที่ยึดเหนี่ยวกันแน่น (cohesive) โดยปราศจากรอยแตก (break) และรอยร้าว (crack)

หน่วยแรง (stress) ที่เกิดขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งบนวัตถุ เช่น จุด O ดังที่แสดงในรูปที่ 1-5a เป็นต้น จะบ่งบอกถึง **ความเข้มข้น** (intensity) ของแรงภายใน (internal force) ΔF ที่กระทำอยู่บนพื้นที่เล็กๆ ΔA ดังที่แสดงในรูปที่ 1-5b

เมื่อพื้นที่เล็กๆ ΔA มีค่าลดลงเรื่อยๆ จนเข้าใกล้ศูนย์ (เกือบจะเป็นจุด) แล้ว แรง ΔF ก็จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ด้วย แต่ค่า limit ของอัตราส่วนของแรง ΔF ต่อพื้นที่เล็กๆ ΔA ดังกล่าวจะมีค่าคงที่ค่าหนึ่งที่มีค่าไม่เป็นศูนย์ โดยนิยามของความเข้มข้น ค่าคงที่ดังกล่าวจะถูกเรียกว่า หน่วยแรง



รูปที่ 1-5

โดยทั่วไปแล้ว แรง ΔF จะถูกแตกออกเป็นองค์ประกอบในแนวตั้งฉากและในแนวขนานกับพื้นที่เล็กๆ ΔA ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 1-5c ดังนั้น หน่วยแรงจึงถูกแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท ซึ่งขึ้นอยู่กับทิศทางของแรงที่กระทำต่อพื้นที่ดังกล่าวคือ หน่วยแรงตั้งฉาก (normal stress) และหน่วยแรงเฉือน (shear stress)

หน่วยแรงตั้งฉาก (normal stress) หรือ σ คือความเข้มข้นของแรงภายในที่กระทำตั้งฉากกับพื้นที่เล็กๆ ΔA ถ้าหน่วยแรงตั้งฉากกระทำกับพื้นที่ ΔA ในลักษณะดึงออกแล้ว หน่วยแรงดังกล่าวจะถูกเรียกว่า หน่วยแรงดึง (tensile stress) ถ้าหน่วยแรงตั้งฉากกระทำกับพื้นที่ ΔA ในลักษณะกดอัดแล้ว หน่วยแรงดังกล่าวจะถูกเรียกว่า หน่วยแรงกดอัด (compressive stress) ซึ่งจากนิยามของหน่วยแรง สมการของหน่วยแรงตั้งฉากจะอยู่ในรูป

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \tag{1-4}$$

หน่วยแรงเฉือน (shear stress) หรือ τ คือความเข้มข้นของแรงภายในที่กระทำขนานกับพื้นที่ ΔA ซึ่งจากนิยามของหน่วยแรง สมการของหน่วยแรงเฉือนจะอยู่ในรูป

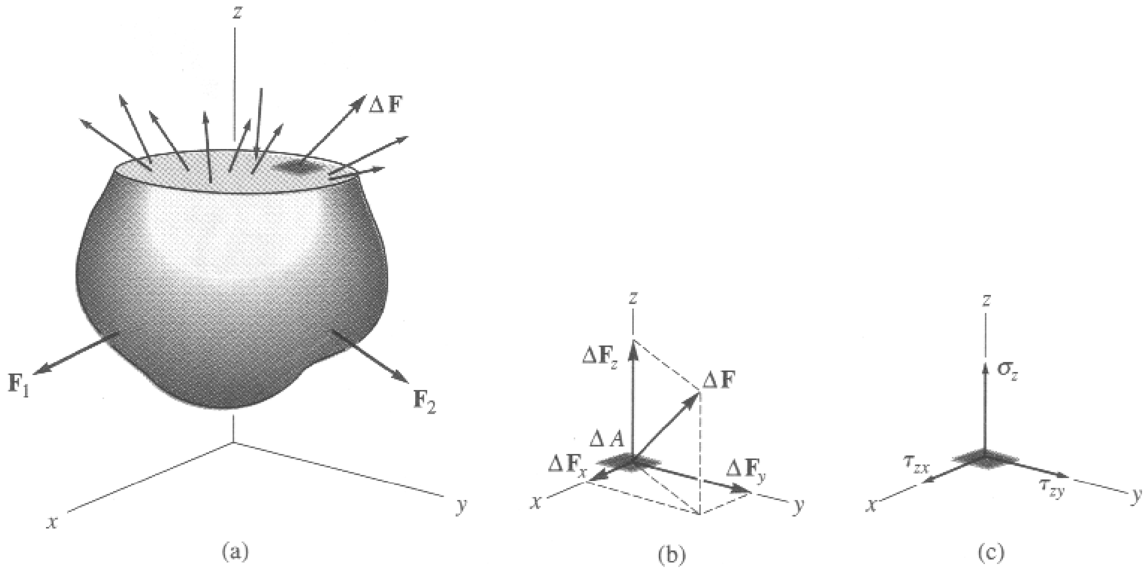
$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} \tag{1-5}$$

หน่วยแรงในระบบแกนตั้งฉากที่จุดใดๆ บนวัตถุ

สภาวะของหน่วยแรง (state of stress) ที่เกิดขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งในวัตถุจะหาได้โดยการตัดวัตถุรอบๆ จุดดังกล่าวให้เป็นสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ โดยให้ด้านของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ขนานไปกับระนาบต่างๆ ของระบบแกนตั้งฉาก x, y, และ z จากนั้น ใช้นิยามของหน่วยแรง เขียนสมการของหน่วยแรงที่กระทำที่ด้านต่างๆ ของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

เมื่อทำการตัดวัตถุให้ขนานไปกับระนาบ $x-y$ เหนือจุดดังกล่าวเพียงเล็กน้อย ดังที่แสดงในรูปที่ 1-6a และกำหนดให้แรงที่กระทำอยู่บนพื้นที่เล็กๆ $\Delta A = \Delta x \Delta y$ มีค่าเป็น ΔF ดังที่แสดงในรูปที่ 1-6b โดยที่แรง ΔF นี้มีองค์ประกอบในระบบแกนตั้งฉาก x , y , และ z เป็น ΔF_x , ΔF_y , และ ΔF_z ตามลำดับ แล้ว จากนิยามของหน่วยแรง สมการของหน่วยแรง σ_z , τ_{zx} , and τ_{zy} ที่เกิดจากแรง ΔF_x , ΔF_y , และ ΔF_z ที่กระทำอยู่บนพื้นที่เล็กๆ ΔA ดังที่แสดงในรูปที่ 1-6c จะเขียนได้ในรูป

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$
$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$
$$\tau_{zy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$



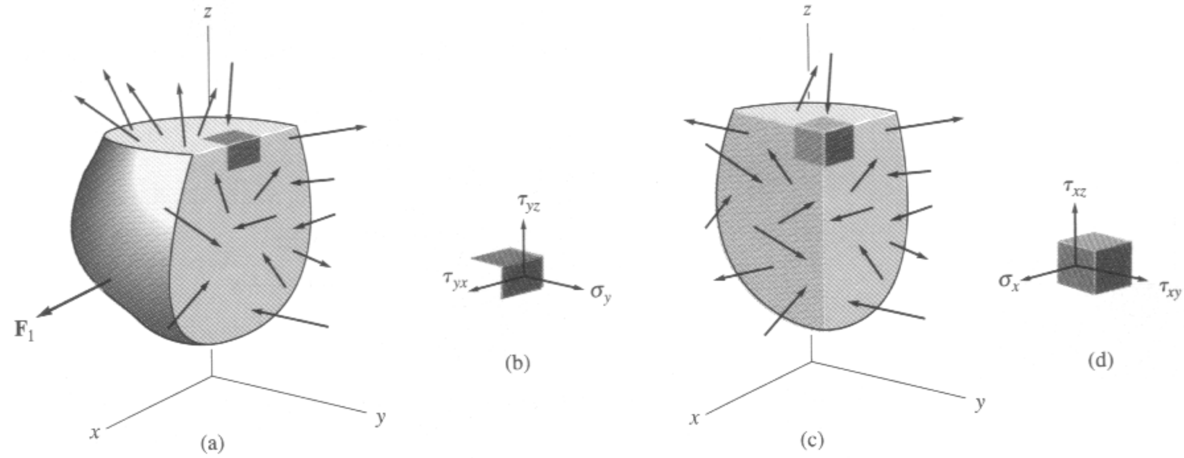
รูปที่ 1-6

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนหน่วยแรงดังกล่าวมีความหมายดังนี้

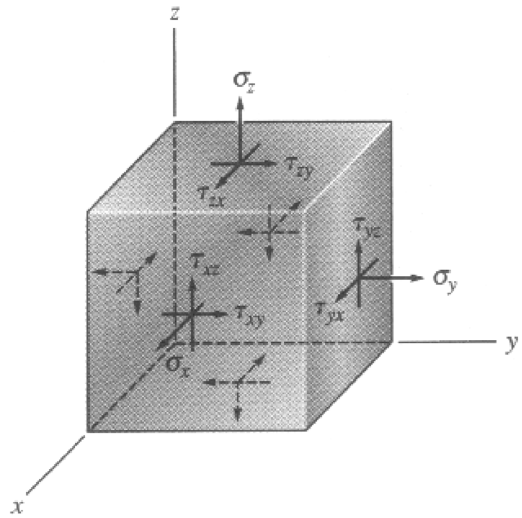
- ในกรณีของหน่วยแรงตั้งฉาก σ_z สัญลักษณ์ subscript “z” จะระบุถึงแกนที่ตั้งฉากกับระนาบที่หน่วยแรงตั้งฉากกระทำและทิศทางของหน่วยแรงตั้งฉาก
- ในกรณีของหน่วยแรงเฉือน τ_{zx} สัญลักษณ์ subscript ตัวแรก (z) จะระบุถึงแกนที่ตั้งฉากกับระนาบที่หน่วยแรงเฉือนกระทำ และสัญลักษณ์ subscript ตัวที่สอง (x) จะระบุถึงทิศทางของหน่วยแรงเฉือนดังกล่าว

เมื่อทำการตัดวัตถุให้ขนานไปกับระนาบ $x-z$ และ $y-z$ โดยให้ห่างจากจุดที่กำลังพิจารณาอยู่เพียงเล็กน้อย ดังที่แสดงในรูปที่ 1-7a และ 1-7c ตามลำดับแล้ว หน่วยแรงที่กระทำอยู่บนพื้นที่เล็กๆ $\Delta x \Delta z$ และ $\Delta y \Delta z$ บนระนาบทั้งสองดังกล่าวจะอยู่ในรูป σ_y , τ_{yx} , τ_{yz} และ σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 1-7b และ 1-7d และเราจะเขียนสมการของหน่วยแรงดังกล่าวได้โดยใช้นิยามของหน่วยแรง

สุดท้าย เมื่อทำการตัดวัตถุในลักษณะที่ได้กล่าวมาแล้วอีก 3 ครั้ง โดยให้ระนาบที่ตัดขนานไปกับระนาบทั้งสามระนาบที่เราตัดไปแล้ว เราจะได้ส่วนของวัตถุที่ถูกตัดออกมามีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ ซึ่งจะเรียกว่า cubic volume element และจะมีหน่วยแรงทั้งหมด 9 หน่วยแรงกระทำอยู่บน cubic volume element ดังกล่าว โดยที่หน่วยแรงเหล่านี้จะแสดงถึงสภาวะของหน่วยแรง (state of stresses) ที่กระทำอยู่รอบๆ จุดที่เรากำลังพิจารณาอยู่ ดังที่แสดงในรูปที่ 1-8



รูปที่ 1-7



รูปที่ 1-8

ข้อกำหนดของความสมดุล (equilibrium requirements) **ของสภาวะของหน่วยแรง**

ถ้าหน่วยแรงที่กระทำอยู่บน cubic volume element มี**ค่าคงที่**แล้ว หน่วยแรงบางส่วนจะมีค่าเท่ากัน ซึ่งจะทำให้หน่วยแรงมีจำนวนลดลงจาก 9 หน่วยแรงเหลือเพียง 6 หน่วยแรง ซึ่งจะพิสูจน์ได้โดยการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ เนื่องจากหน่วยแรงต่างๆ บน cubic volume element ดังที่แสดงในรูปที่ 1-9

หน่วยแรงตั้งฉาก (Normal Stress Components)

จากรูปที่ 1-9 ในกรณีที่หน่วยแรงตั้งฉากมีค่าคงที่หรือ $\sigma_x = \sigma'_x$, $\sigma_y = \sigma'_y$, $\sigma_z = \sigma'_z$ (เครื่องหมาย prime แสดงหน่วยแรงที่อยู่ในด้านตรงกันข้ามของ cubic volume element) แล้ว หน่วยแรงตั้งฉากในแต่ละแกนจะต้องมีค่าเท่ากัน แต่จะมีทิศทางตรงกันข้าม

หน่วยแรงเฉือน (Shear Stress Components)

จากรูปที่ 1-9 ในกรณีที่หน่วยแรงเฉือนมีค่าคงที่หรือ $\tau_{yx} = \tau'_{yx}$, $\tau_{xy} = \tau'_{xy}$, $\tau_{xz} = \tau'_{xz}$ แล้ว หน่วยแรงเฉือนที่อยู่บนหน้าตัดของ cubic volume element ที่ติดกันจะต้องมีค่าเท่ากัน แต่มีทิศทางพุ่งเข้าหาหรือพุ่งออกจากมุมของ cubic volume element นั้น ซึ่งจะพิสูจน์ได้โดยการพิจารณาสมดุลของ โมเมนต์ รอบแกน x, y, และ z

จากสมการความสมดุลของ โมเมนต์ รอบแกน z เราจะได้ว่า

$$\sum M_z = 0;$$

$$\tau_{xy}(\Delta y\Delta z)\Delta x - \tau_{yx}(\Delta x\Delta z)\Delta y - \sigma_x(\Delta y\Delta z)\frac{\Delta y}{2} + \sigma_{x'}(\Delta y\Delta z)\frac{\Delta y}{2} + \sigma_y(\Delta x\Delta z)\frac{\Delta x}{2} - \sigma_{y'}(\Delta x\Delta z)\frac{\Delta x}{2}$$

$$-\tau_{zx}(\Delta x\Delta y)\frac{\Delta y}{2} + \tau'_{zx}(\Delta x\Delta y)\frac{\Delta y}{2} + \tau_{zy}(\Delta x\Delta y)\frac{\Delta x}{2} - \tau'_{zy}(\Delta x\Delta y)\frac{\Delta x}{2} = 0$$

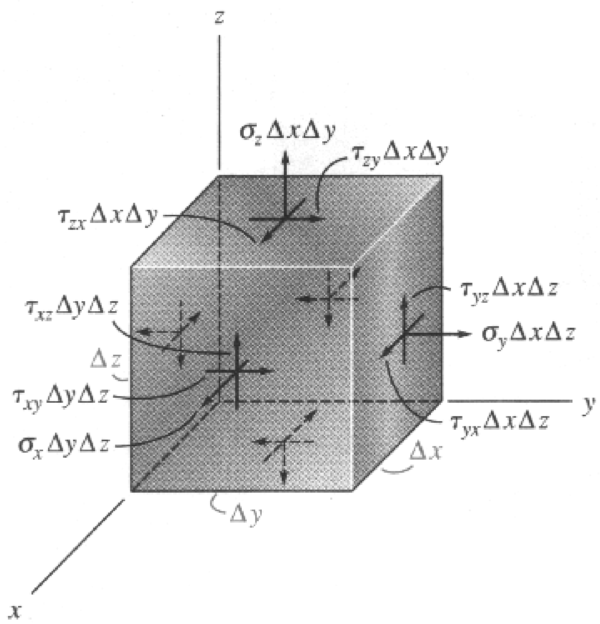
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการความสมดุลของ โมเมนต์ รอบแกน x และแกน y เราจะได้ว่า

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

ตามลำดับ ซึ่งคุณสมบัติของแรงเฉือนนี้มักจะถูกเรียกว่า *complementary property of shear* ดังนั้น สภาวะของหน่วยแรงบน cubic volume element ในกรณีที่หน่วยแรงมี**ค่าคงที่** จะมีหน่วยแรงเพียง 6 หน่วยแรงเท่านั้นคือ σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, และ τ_{xz}



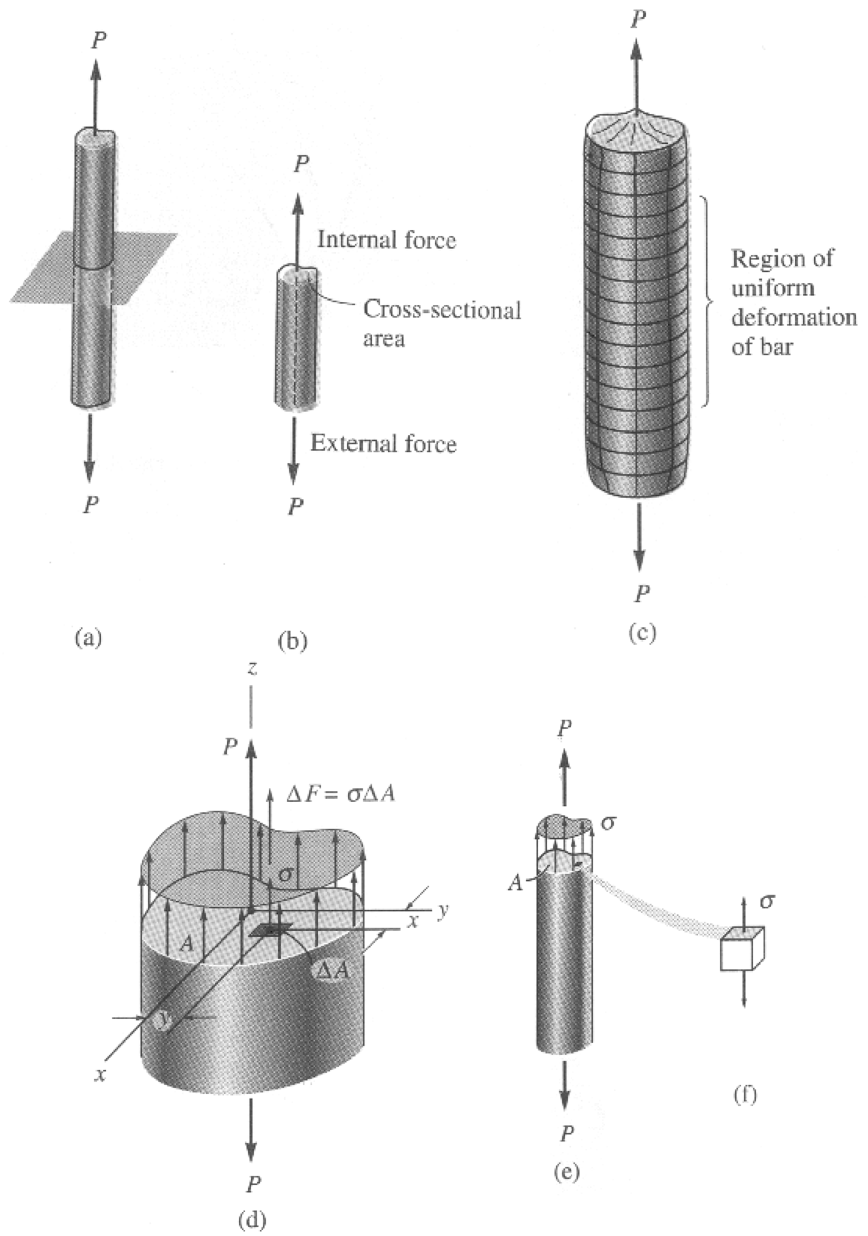
รูปที่ 1-9

1.4 **ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากบนแท่งวัตถุที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน** (Average Normal Stress in an Axially Loaded Bar)

แรงในแนวแกน (axial load) เป็นแรงตั้งฉากซึ่งมีทิศทางของแรงในแนวแกนของแท่งวัตถุและจะทำให้เกิดการดึง (tension) หรือการกดอัด (compression) ในแท่งวัตถุดังกล่าว แท่งวัตถุที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนที่ปลายของแท่งวัตถุดังที่แสดงในรูปที่ 1-10a มักจะเป็นองค์อาคารของโครงสร้างที่มีลักษณะตรงยาว เช่น ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน (truss members) เป็นต้น โดยทั่วไปแล้ว แท่งวัตถุดังกล่าวจะมีหน้าตัดที่คงที่ตลอดความยาวของแท่งวัตถุ ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า *prismatic bar*

ถ้าน้ำหนักของแท่งวัตถุมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับค่าของแรงกระทำแล้ว แผนภาพ free body diagram ของแท่งวัตถุดังกล่าวจะเขียนได้ดังที่แสดงในรูปที่ 1-10b เนื่องจากชิ้นส่วนด้านล่างของแท่งวัตถุอยู่ในความสมดุล ดังนั้น แรงลัพธ์

ภายใน (internal resultant force) ที่กระทำอยู่บนพื้นที่หน้าตัดของแท่งวัตถุจะต้องมีค่าเท่ากับและอยู่ในแนวเดียวกันกับแรงภายนอก (external force) P แต่จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับแรง P



รูปที่ 1-10

ข้อสมมุติฐาน (Assumptions)

ข้อสมมุติฐานที่ใช้ในการหาค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากบนแท่งวัตถุที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนมีดังนี้

1. แท่งวัตถุยังคงมีลักษณะตรงทั้งก่อนและหลังจากที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน
2. ระนาบของหน้าตัดของแท่งวัตถุยังคงเป็นระนาบเหมือนเดิม เมื่อแท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน ซึ่งทำให้แท่งวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างอย่างสม่ำเสมอ (uniform deformation) ดังที่แสดงในรูปที่ 1-10c

ข้อสมมุติฐานทั้งสองนี้จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

1. แรงในแนวแกนกระทำผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของแท่งวัตถุ

2. วัสดุที่ใช้ทำแท่งวัตถุเป็นวัสดุที่มีเนื้อเดียวกัน (homogenous material) และมีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic material) เช่น เหล็กเหนียว (steel) และ อลูมิเนียม (aluminum) เป็นต้น

ขอให้สังเกตด้วยว่า ไม้ (wood) เป็นตัวอย่างของวัสดุที่ไม่เป็นไปตามสมมุติฐานข้อที่สองข้างต้น เนื่องจากไม้ประกอบด้วยเสี้ยนไม้ (grains) ที่วางอยู่ในทิศทางต่างๆ กัน (ไม้เป็น anisotropic material) อย่างไรก็ตาม ถ้าเสี้ยนไม้วางเรียงตัวตามแนวแกนของแท่งไม้เป็นส่วนใหญ่แล้ว แท่งไม้ดังกล่าวจะมีการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างอย่างสม่ำเสมอ ซึ่งทำให้เราสามารถวิเคราะห์แท่งไม้ดังกล่าวได้

การกระจายของค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉาก (Average Normal Stress Distribution)

ตามข้อสมมุติฐานดังที่ได้กล่าวไปนั้น หน่วยแรงตั้งฉากลัพธ์ (resultant normal stress) หรือ σ บนหน้าตัดของแท่งวัตถุ (ในช่วงที่มีการการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างอย่างสม่ำเสมอ) จะมีการกระจายอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้น

$+\uparrow F_{Rz} = \sum F_z$;
$$\int dF = \int_A \sigma \, dA$$
$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1-6}$$

เมื่อ σ = ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากบนหน้าตัดของแท่งวัตถุ

P = แรงตั้งฉากลัพธ์ที่กระทำอยู่บนหน้าตัดของแท่งวัตถุ

A = พื้นที่หน้าตัดของแท่งวัตถุ

ในกรณีนี้ แรงในแนวแกน P จะต้องเป็นแรงที่ผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของแท่งวัตถุ เพื่อที่จะป้องกันไม่ให้เกิดโมเมนต์รอบแกน x และแกน y จากรูปที่ 1-10d

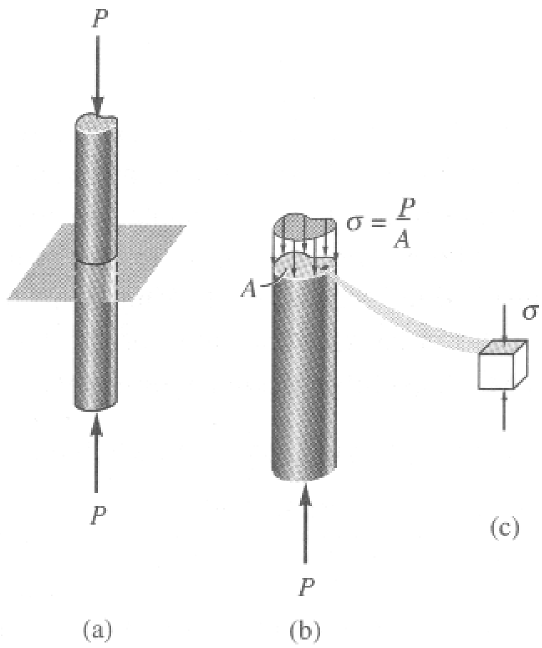
$(M_R)_x = \sum M_x$;
$$0 = \int_A y\, dF = \int_A y\sigma dA = \sigma \int_A y\, dA$$
$(M_R)_y = \sum M_y$;
$$0 = \int_A x\, dF = \int_A x\sigma dA = \sigma \int_A x\, dA$$

เนื่องจากภายใต้การกระทำของแรง P ค่าของหน่วยแรงตั้งฉาก σ จะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น สมการทั้งสองนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ก็ต่อเมื่อ

$$\int_A y\, dA = 0$$
$$\int_A x\, dA = 0$$

จากวิชา statics เราทราบมาแล้วว่า จุดที่ $\int_A y\, dA = 0$ และ $\int_A x\, dA = 0$ นั้นคือจุด centroid ของหน้าตัดของแท่งวัตถุ ดังนั้น เราจะสรุปได้ว่า เพื่อที่จะป้องกันไม่ให้เกิด โมเมนต์ รอบแกน x และแกน y แล้ว แรงในแนวแกน P จะต้องเป็นแรงที่ผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของแท่งวัตถุ

สมการที่ใช้หาค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากนี้อาจจะนำมาใช้ในการวิเคราะห์เสาสั้น (short column) ดังที่แสดงในรูปที่ 1-11 ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกดอัดในแนวแกน (axially compressive force) ได้ และใช้ในการวิเคราะห์องค์อาคารของโครงสร้างที่ด้านทั้งสองขององค์อาคารสอบทำมุมกันเล็กน้อยได้ ถ้าองค์อาคารของโครงสร้างสอบเป็นมุม 15% แล้ว สมการ $\sigma = P/A$ จะให้คำตอบที่มีความผิดพลาดเพียง 2.2% เท่านั้น เมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบที่ถูกต้องที่ได้มาจาก theory of elasticity



รูปที่ 1-11

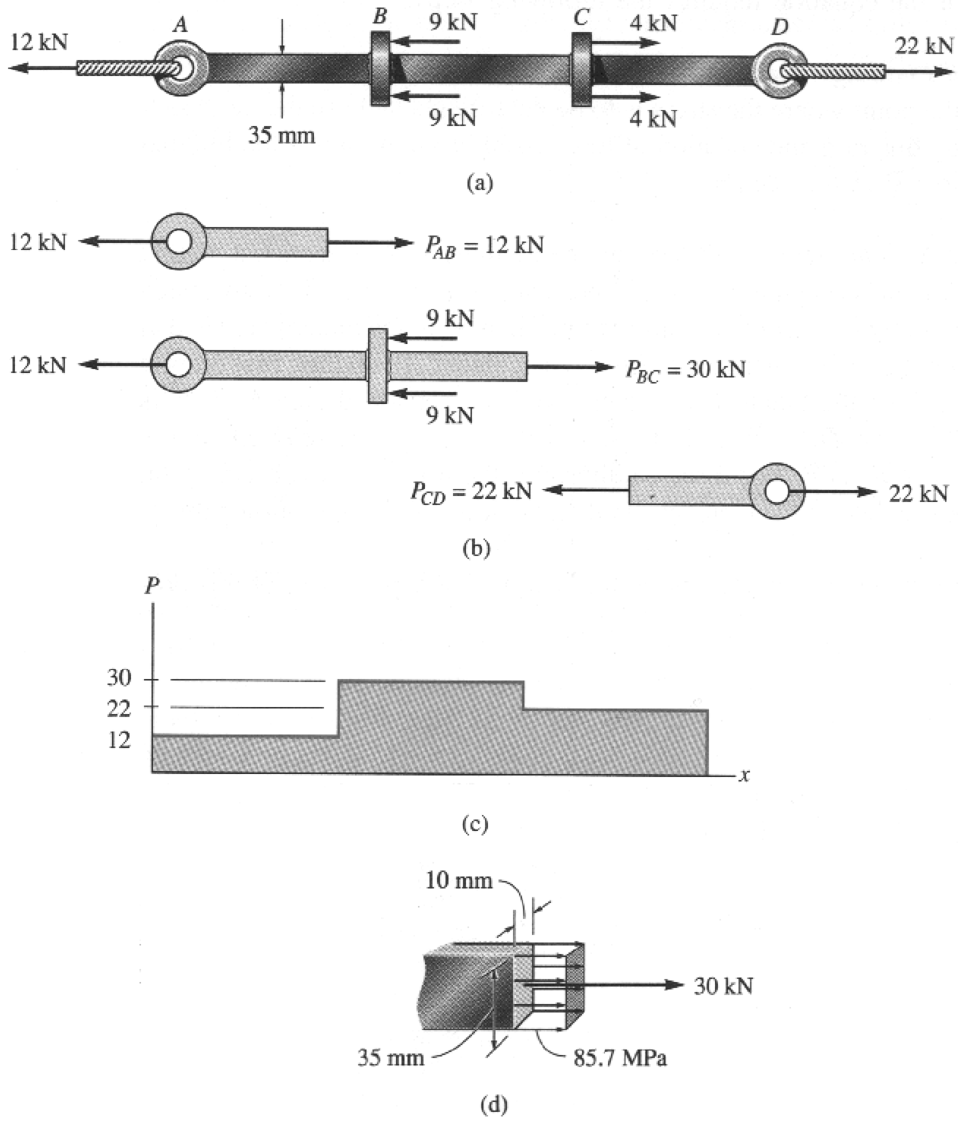
ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากสูงสุด (Maximum Average Normal Stress)

ในกรณีที่แท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนจำนวนหลายๆ แรง ที่ตำแหน่งต่างๆ ตามแนวแกนของแท่งวัตถุ และในกรณีที่หน้าตัดของแท่งวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงเป็นช่วงๆ ตามแนวแกนของแท่งวัตถุนั้น ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากจะมีค่าแตกต่างกันตามแนวแกนของแท่งวัตถุ ซึ่งเราจะออกแบบแท่งวัตถุดังกล่าวได้โดย

1. เขียนแผนภาพ axial force diagram ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงของแรง P เทียบกับระยะ x ในแนวแกนของแท่งวัตถุดังกล่าว โดยกำหนดให้แรงดึงมีค่าเป็นบวกและแรงกดอัดมีค่าเป็นลบ
2. หาค่าของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแต่ละส่วนของแท่งวัตถุ
3. เปรียบเทียบค่าหน่วยแรงที่ได้ เพื่อหาค่าหน่วยแรงตั้งฉากสูงสุด
4. หาขนาดของแท่งวัตถุโดยใช้ค่าหน่วยแรงตั้งฉากสูงสุด

ตัวอย่างที่ 1-3

จงหาค่าหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยสูงสุด (max. average normal stress) ที่เกิดขึ้นในแท่งเหล็ก ซึ่งถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-3a กำหนดให้แท่งเหล็กมีหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 35 mm และหนา 10 mm



รูปที่ Ex 1-3

หา Internal Loading

จากโจทย์ แท่งเหล็กมีหน้าตัดที่คงที่ในช่วง AB, BC, และ CD แต่เนื่องจากว่าค่าของแรงที่หน้าตัดในช่วงเหล่านี้มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น ค่าหน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นจะมีค่าไม่เท่ากัน

โดยใช้ method of section และแผนภาพ free-body diagram เราจะหาค่าของแรงในแนวแกนในช่วงต่างๆ ของแท่งเหล็กได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-3b จากนั้น เมื่อนำค่าของแรงในแนวแกนที่ได้มาเขียนแผนภาพ axial force diagram เราจะได้แผนภาพ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-3c

หา Average Normal Stress

จากแผนภาพ axial force diagram เราจะเห็นว่า ค่าสูงสุดของแรงในแนวแกนมีค่าเท่ากับ 30 kN ซึ่งเกิดขึ้นในช่วง BC ดังนั้น ค่าหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยสูงสุดจะเกิดขึ้นในช่วง BC จะมีค่าเท่ากับ

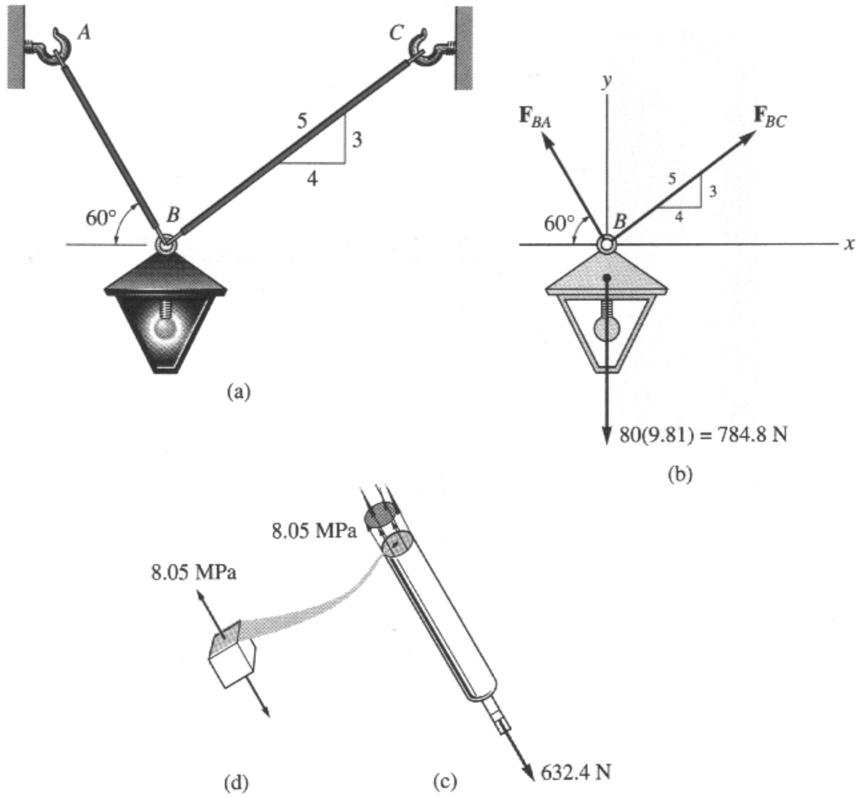
$$\sigma_{BC} = \frac{P_{BC}}{A} = \frac{30(10^3)\,\mathrm{N}}{(0.035\,\mathrm{m})(0.010\,\mathrm{m})} = 85.7\,\mathrm{MPa}$$ <u>Ans.</u>

ซึ่งเป็นหน่วยแรงดึง

รูปที่ Ex 1-3d แสดงการกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากดังกล่าวในช่วง BC ของแท่งเหล็ก

ตัวอย่างที่ 1-4

โคมไฟ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-4a มีน้ำหนัก 80 kg และถูกแขวนด้วย rod AB และ BC ถ้ากำหนดให้ rod AB และ BC มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 10 mm และ 8 mm ตามลำดับ จงหาหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยที่เกิดขึ้นใน rod ทั้งสอง



รูปที่ Ex 1-4

หา Internal Loading

รูปที่ Ex 1-4b แสดงแผนภาพ free-body diagram ของโคมไฟดังกล่าว โดยใช้สมการความสมดุลของอนุภาค เราจะหาแรงที่เกิดขึ้นใน rod AB และ BC ได้ดังนี้

$$\sum F_x = 0; \qquad F_{BC}(\frac{4}{5}) - F_{BA}\cos 60^o = 0$$

$$\sum F_y = 0; \qquad F_{BC}(\frac{3}{5}) - F_{BA}\sin 60^o - 784.8\ \mathrm{N} = 0$$

เมื่อทำการแก้สมการ 2 ชั้นแล้ว เราจะได้

$$F_{BC} = 395.2\ \mathrm{N}$$

$$F_{BA} = 632.4\ \mathrm{N}$$

จากกฎข้อที่ 3 ของ Newton แรง F_{BA} และ F_{BC} ที่กระทำต่อ rod AB และ BC จะเป็นแรงดึงและจะมีค่าคงที่ตลอดความยาวของ rod

หา Average Normal Stress

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395.2\ \mathrm{N}}{\pi(0.004\ \mathrm{m})^2} = 7.86\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{632.4\ \mathrm{N}}{\pi (0.005\ \mathrm{m})^2} = 8.05\ \mathrm{MPa}$$ Ans.

เราจะเห็นว่า หน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยเกิดขึ้นใน rod AB มีค่าสูงกว่าที่เกิดขึ้นใน rod BC และการกระจายของหน่วยแรงดังกล่าวที่หน้าตัดใดๆ ของ rod AB จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-4c

รูปที่ Ex 1-4d แสดงถึงสภาวะของหน่วยแรงที่กระทำอยู่บน element ของวัสดุ

1.5 ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงเฉือนบนแท่งวัตถุ (Average Shear Stress in a Bar)

พิจารณาแท่งวัตถุที่ถูกกระทำโดยแรง P ดังที่แสดงในรูปที่ 1-12a ถ้าจุดรองรับ (support) ของแท่งวัตถุมีความแกร่ง (rigidity) สูงมากและเมื่อแรง P มีค่าเพิ่มมากขึ้นถึงจุดๆ หนึ่งแล้ว แท่งวัตถุจะเกิดการวิบัติ (failure) โดยการเฉือนตามระนาบ AB และระนาบ CD ดังที่แสดงในรูป ซึ่งจากแผนภาพ free-body diagram ของแท่งวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 1-12b เราจะได้ว่า ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงเฉือนที่กระจายอยู่บนหน้าตัดทั้งสองจะมีค่าเท่ากับ

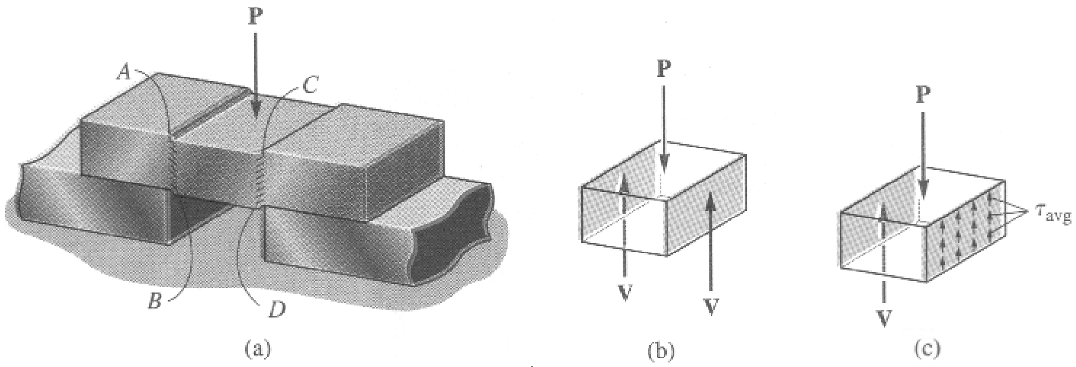
$$\tau_{avg} = \frac{V}{A} \tag{1-7}$$

เมื่อ τ_{avg} = ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงเฉือน

V = แรงเฉือนลัพธ์ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด (internal resultant shear force)

A = พื้นที่หน้าตัดของแท่งวัตถุที่ถูกกระทำโดยแรงเฉือน V

การเฉือนที่เกิดขึ้นในลักษณะนี้มักจะถูกเรียกว่า *simple* หรือ *direct shear* เนื่องจากเป็นการเฉือนที่เกิดจากการกระทำของแรง P ต่อแท่งวัตถุโดยตรง



รูปที่ 1-12

โดยทั่วไปแล้ว simple shear มักจะเกิดขึ้นที่จุดเชื่อมต่อแบบใช้สลักเกลียว จุดเชื่อมต่อแบบใช้หมุด และจุดเชื่อมต่อแบบใช้กาว ซึ่งเราจะแบ่งแรงเฉือนบนจุดเชื่อมต่อดังกล่าวได้เป็น 2 ประเภทคือ single shear และ double shear

Single Shear

เมื่อแผ่นเหล็กสองแผ่นถูกเชื่อมต่อกันโดยสลักเกลียวและกาว ดังที่แสดงในรูปที่ 1-13a และ 1-13b ตามลำดับแล้ว เราจะเรียกจุดเชื่อมต่อนี้ว่า single shear connections หรือจุดเชื่อมต่อทาบ (lap joint)

ถ้าแผ่นเหล็กมีความหนาน้อยมากแล้ว moment ที่เกิดจากแรง P ก็จะมีค่าน้อยมากด้วย จากแผนภาพ free-body diagram ในรูปที่ 1-13c และ 1-13d และจากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกนของแผ่นเหล็ก เราจะได้ว่า แรงเฉือน V ที่เกิดขึ้นที่จุดเชื่อมต่อ (connections) ดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับแรงกระทำ P หรือ

$$V = P$$

และหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยที่เกิดขึ้นที่สลักเกลียวหรือที่กาวจะหาได้จากสมการ

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A} = \frac{P}{A}$$

เมื่อ $A =$ พื้นที่หน้าตัดของสลักเกลียวหรือพื้นที่ผิวของกาว

Double shear

ในกรณีที่แผ่นเหล็กสามแผ่นถูกเชื่อมต่อกันโดยสลักเกลียวและกาว ดังที่แสดงตามรูปที่ 1-14a และ 1-14b ตามลำดับแล้ว เราจะเรียกจุดเชื่อมต่อนี้ว่า double shear connections จากแผนภาพ free-body diagram ในรูปที่ 1-14c และ

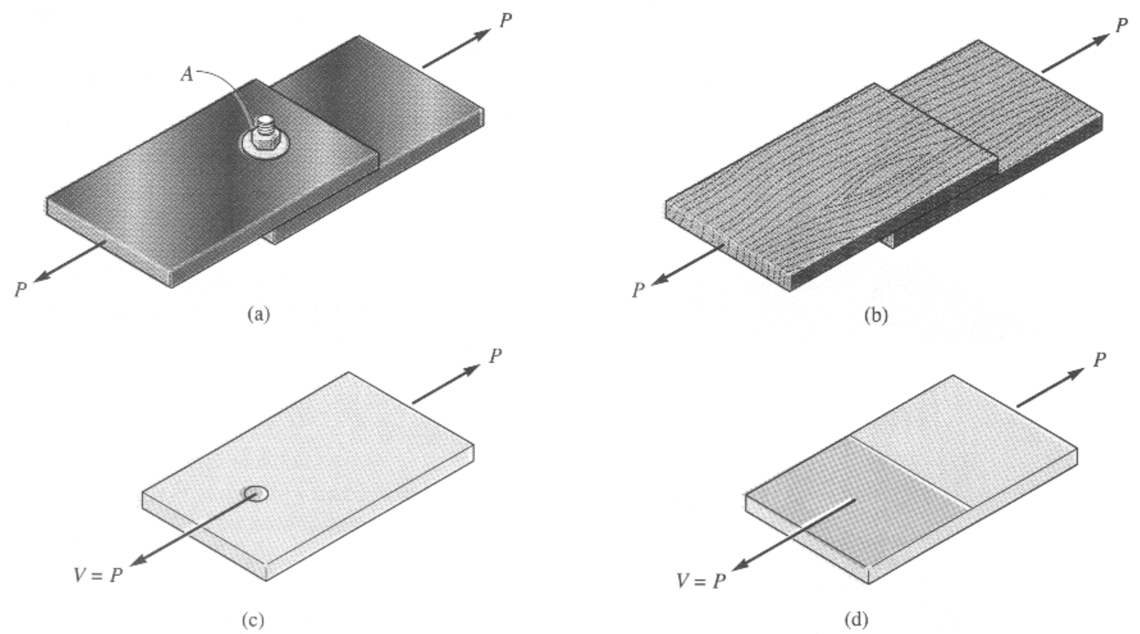
1-14d จุดเชื่อมต่อนี้จะถูกกระทำโดยแรงเฉือนในสองระนาบ (พื้นผิวด้านบนและด้านล่าง ดังนั้น แรงเฉือน V ที่เกิดขึ้นที่จุดเชื่อมต่อจะมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของแรงกระทำ P หรือ

$$V = P/2$$

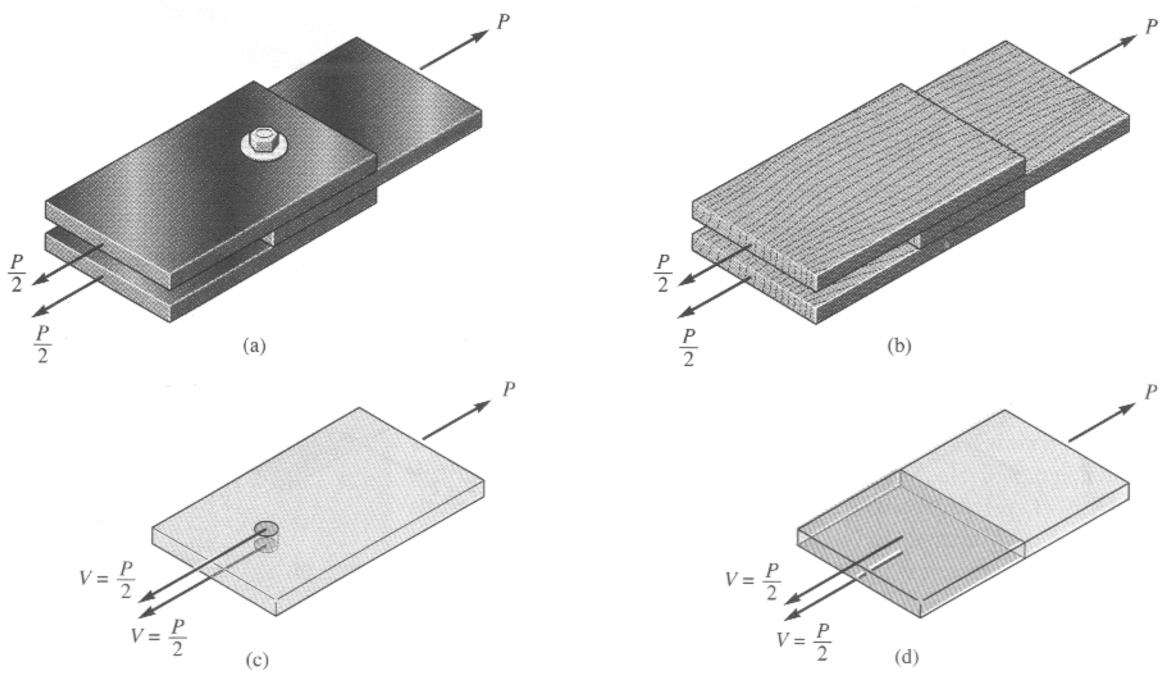
และหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยที่เกิดขึ้นที่สลักเกลียวหรือที่กาวจะหาได้จาก

$$\tau_{avg} = \frac{P}{2A}$$

เมื่อ $A =$ พื้นที่หน้าตัดของสลักเกลียวหรือพื้นที่ผิวของกาว



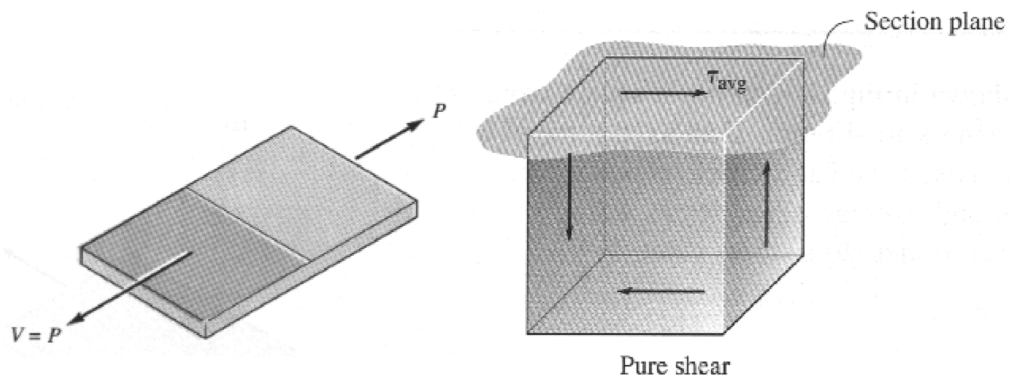
รูปที่ 1-13



รูปที่ 1-14

Pure Shear

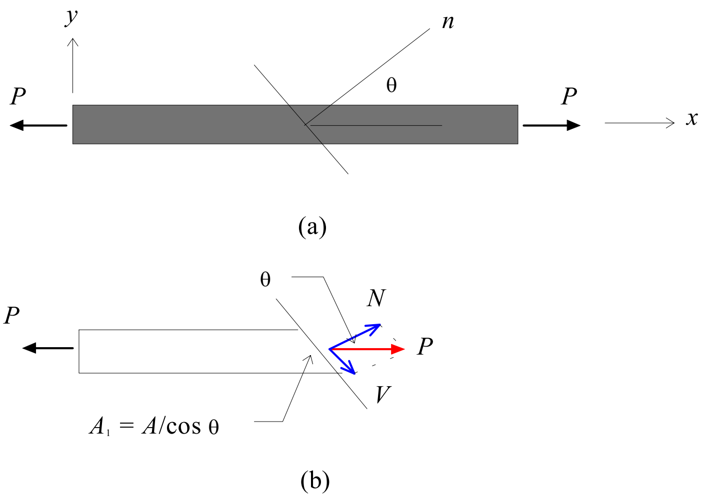
พิจารณา cubic volume element ของแผ่นเหล็ก ซึ่งถูกตัดออกมาจากรอยเชื่อมต่อแบบใช้กาวและอยู่บนพื้นผิวของหน้าตัดที่มีหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ 1-15 จากรูป เมื่อผิวด้านบนของ cubic volume element นั้นถูกกระทำโดย τ_{avg} เนื่องจากแรงในแนวแกน P แล้ว ผิวด้านข้างอีกสามด้านของ cubic volume element จะต้องมีหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยกระทำอยู่ด้วย เพื่อก่อให้เกิดสมดุลของแรงและโมเมนต์บน element ดังกล่าว แรงเฉือนที่เกิดขึ้นในลักษณะนี้มักจะถูกเรียกว่า *pure shear*



รูปที่ 1-15

Stresses on Inclined Section

ใน section ที่ผ่านมาเราได้ศึกษาเกี่ยวกับหน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของแท่งวัตถุ ซึ่งถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน โดยที่หน้าตัดดังกล่าวจะตั้งฉากกับแนวแกนของแท่งวัตถุ อย่างไรก็ตาม ถ้าหน้าตัดของแท่งวัตถุทำมุม θ กับแนวแกนของแท่งวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 1-16a แล้ว หน่วยแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดดังกล่าวจะมีทั้งหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือน



รูปที่ 1-16

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของแท่งวัตถุ ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด A และถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน P ดังที่แสดงในรูปที่ 1-16b โดยใช้สมการความสมดุลและการแตก vector เราจะหาแรงตั้งฉาก N และแรงเฉือน V ที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของแท่งวัตถุทำมุม θ กับแนวแกนของแท่งวัตถุได้ในรูป

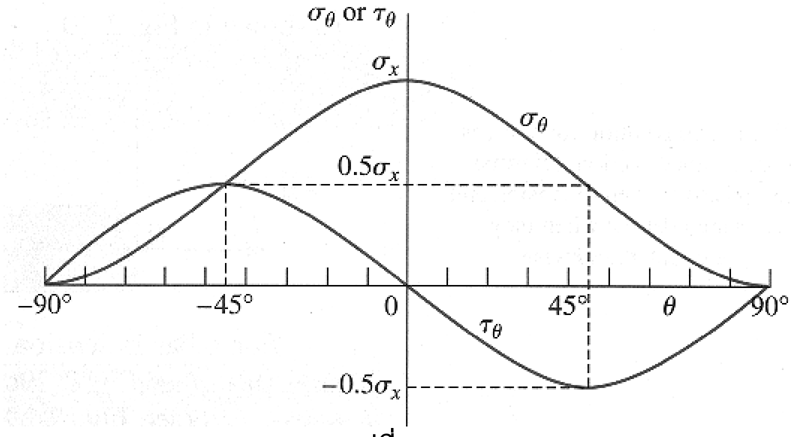
$$N = P\cos\theta$$

$$V = P\sin\theta$$

และหน่วยแรงตั้งฉาก σ_θ และหน่วยแรงเฉือน τ_θ ที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดดังกล่าว ซึ่งพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ $A/\cos\theta$ จะอยู่ในรูปของสมการ

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A/\cos\theta} = \frac{P}{A}\cos^2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{V}{A/\cos\theta} = \frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta$$



รูปที่ 1-17

จาก trigonometry เราทราบมาแล้วว่า $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ และ $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(\sin 2\theta)$ และกำหนดให้ $\sigma_x = P/A$ ซึ่งเป็นหน่วยแรงตั้งฉากในแนวแกนของแท่งวัตถุ ดังนั้น เราจะเขียนสมการของหน่วยแรงตั้งฉาก σ_θ และหน่วยแรงเฉือน τ_θ ได้ใหม่เป็น

$$\sigma_\theta = \sigma_x\cos^2\theta = \frac{\sigma_x}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$\tau_\theta = \sigma_x\sin\theta\cos\theta = \sigma_x\sin 2\theta$$

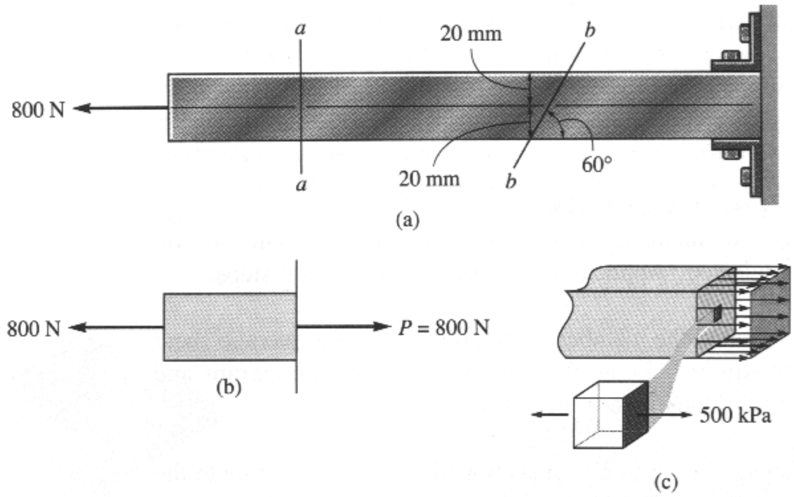
จากสมการทั้งสอง เราจะเห็นได้ว่า ค่าของ σ_θ และ τ_θ จะเป็น function ของมุม θ โดยที่ค่าสูงสุดของ σ_θ จะเกิดขึ้นเมื่อมุม $\theta = 0^o$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ σ_x และค่าสูงสุดของ τ_θ จะเกิดขึ้นเมื่อมุม $\theta = 45^o$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\sigma_x/2$

ตัวอย่างที่ 1-5

กำหนดให้แท่งเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-5a มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าและมีความกว้างและความหนาเท่ากับ 40 mm เมื่อแท่งเหล็กถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนขนาด 800 N ผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของแท่งเหล็กแล้ว จงหาค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากและค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงเฉือนที่

a.) หน้าตัด $a-a$

b.) หน้าตัด $b-b$



รูปที่ Ex 1-5

a.) หาค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากและค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงเฉือนที่หน้าตัด $a-a$

หา Internal Loading

จากแผนภาพ free-body diagram ของแท่งเหล็กที่หน้าตัด $a-a$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-5b เราจะได้ว่า แรงภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดดังกล่าวเป็นแรงตั้งฉากซึ่งมีค่าเท่ากับ 800 N

หา Average Stresses

ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉาก

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{800\text{ N}}{(0.04\text{ m})(0.04\text{ m})} = 500\text{ kPa}$$ <u>Ans.</u>

เนื่องจากหน่วยแรงตั้งฉากที่หน้าตัด $a-a$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\tau_{avg} = 0$$ <u>Ans.</u>

การกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากบนหน้าตัด $a-a$ มีลักษณะดังที่แสดงในรูป (c)

a.) หาค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากและค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงเฉือนที่หน้าตัด $b-b$

หา Internal Loading

จากแผนภาพ free-body diagram ของ bar ที่หน้าตัด $b-b$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-5d เราจะหาค่าของแรงตั้งฉาก (N) และแรงเฉือน (V) ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดดังกล่าวได้จากสมการความสมดุล

$\sum F_x = 0;$

$$N\sin 60^o + V\cos 60^o - 800\text{ N} = 0$$

$\sum F_y = 0;$

$$-N\cos 60^o + V\sin 60^o = 0$$

เมื่อทำการแก้สมการสองชั้นแล้ว

$$N = 692.8\ \mathrm{N} \qquad V = 400\ \mathrm{N}$$

หา Average Stresses

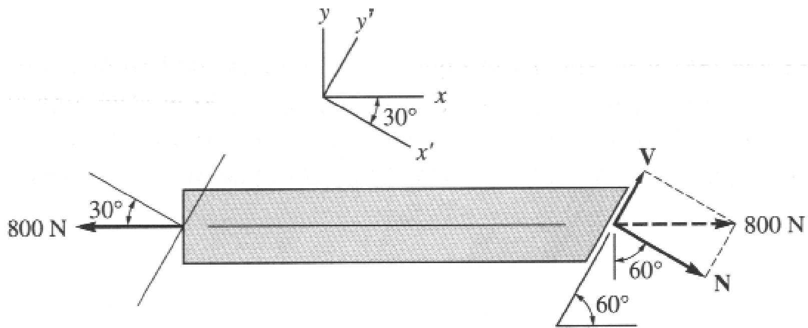
ในกรณีนี้ หน้าตัด $b-b$ จะมีความลึกเท่ากับ $40\ \mathrm{mm}/\sin 60^o = 46.19\ \mathrm{mm}$ ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากจะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{692.8\ \mathrm{N}}{(0.04\ \mathrm{m})(0.04619\ \mathrm{m})} = 375\ \mathrm{kPa}$$ Ans.

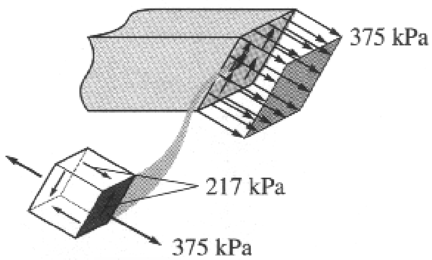
และค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าเท่ากับ

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A} = \frac{400\ \mathrm{N}}{(0.04\ \mathrm{m})(0.04619\ \mathrm{m})} = 217\ \mathrm{kPa}$$ Ans.

การกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากบนหน้าตัด $b-b$ มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-5e



(d)



(e)

1.6 แรงที่ยอมให้และหน่วยแรงที่ยอมให้ (Allowable Load and Allowable Stress)

โดยทั่วไปแล้ว เราจะต้องพิจารณาถึงปัจจัยต่างๆ ต่อไปนี้ในการออกแบบโครงสร้าง: กำลัง (strength) ของโครงสร้าง; หน้าที่และการใช้งาน (functionality) ของโครงสร้าง; รูปร่างและลักษณะ (appearance) ของโครงสร้าง; ความประหยัด (economics) ในการก่อสร้างและบำรุงรักษา; และสิ่งแวดล้อม (environment)

ในวิชานี้ กำลังของโครงสร้างจะเป็นปัจจัยหลักในการออกแบบโครงสร้าง โดยโครงสร้างจะถูกออกแบบให้มีกำลังหรือหน่วยแรงที่ยอมให้ (allowable stress) **มากกว่า** หน่วยแรงที่คาดว่าจะเกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำต่อโครงสร้าง

โดยทั่วไปแล้ว หน่วยแรงที่ยอมให้ (allowable stress) คือ ค่าของหน่วยแรงที่ทำให้วัสดุของโครงสร้างเกิดการวิบัติ (failure stress) หารด้วยส่วนความปลอดภัย $\mathrm{F.S.}$ (factor of safety) หรือ

$$\sigma_{allow} = \frac{\sigma_{fail}}{\mathrm{F.S.}} \tag{1-8}$$

$$\tau_{allow} = \frac{\tau_{fail}}{\mathrm{F.S.}} \tag{1-9}$$

ถ้าแรงที่กระทำต่อโครงสร้างมีความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง (linear relationship) กับหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในโครงสร้างแล้ว เราจะหาแรงที่ยอมให้ (allowable load) กระทำต่อโครงสร้างได้โดยใช้ค่าของ allowable stress ยกตัวอย่างเช่น เมื่อ $P = \sigma A$ และ $V = \tau_{avg} A$ เป็นต้น แล้ว จากสมการที่ 1.8 และ 1.9 แรงที่ยอมให้ (allowable load) จะอยู่ในรูป

$$P_{allow} = \frac{P_{fail}}{\mathrm{F.S.}} \tag{1-10}$$

เหตุผลที่ต้องใช้ค่า allowable stress หรือ allowable load ในการออกแบบโครงสร้างแทนค่าแรงและค่าหน่วยแรงที่ทำให้วัสดุเกิดการวิบัติมีดังนี้

1. เพื่อป้องกันการวิบัติโครงสร้าง เมื่อโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงที่มีค่ามากกว่าที่ใช้ในการออกแบบ เช่น แรงที่เกิดจากแผ่นดินไหว เป็นต้น
2. เพื่อทดแทนความผิดพลาดที่อาจจะเกิดขึ้นในการก่อสร้าง (construction)
3. เพื่อชดเชยส่วนของโครงสร้างที่อาจจะเกิดการเสื่อมสภาพเนื่องจากการกัดเซาะ (weathering) การผุกร่อน (corrosion) และการย่อยสลาย ในช่วงอายุการใช้งานของโครงสร้าง
4. เพื่อทดแทนต่อความแปรผัน (variations) ของคุณสมบัติทางกล (mechanical properties) ของวัสดุที่ใช้ทำโครงสร้าง เช่น เมื่อวัสดุที่ใช้มีความบกพร่อง (defects) ขนาดเล็กๆ ภายในวัสดุ ซึ่งทำให้มีคุณสมบัติทางกลของวัสดุมีค่าต่ำกว่าที่ใช้ในการออกแบบ เป็นต้น

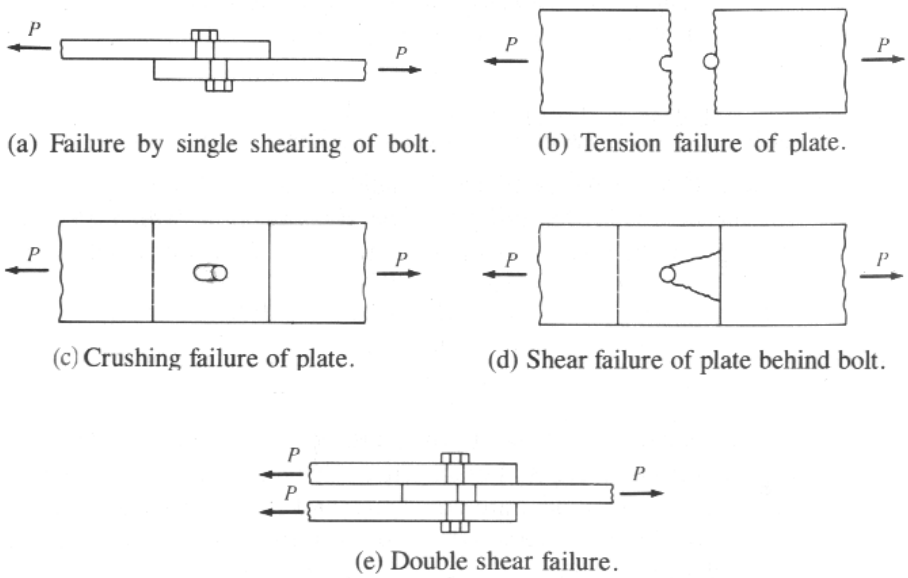
ค่าของส่วนความปลอดภัยที่จะนำมาใช้นั้นจะขึ้นอยู่กับประสบการณ์ที่ได้เรียนรู้โดยตรงหรือโดยอ้อมจากพฤติกรรมของโครงสร้างที่มีลักษณะเดียวกันหรือคล้ายคลึงกันกับโครงสร้างที่กำลังออกแบบอยู่ ค่าที่เลือกใช้นั้นต้องมีค่ามากพอที่จะป้องกันไม่ให้เกิดการวิบัติของโครงสร้างเนื่องจากสาเหตุต่างๆ ตามที่ได้กล่าวไปแล้ว และจะต้องมีค่าที่ไม่สูงมากจนเกินไปเพราะจะทำให้โครงสร้างมีราคาแพงจนเกินไป โดยทั่วไปแล้ว ค่าส่วนความปลอดภัยมักจะถูกกำหนดไว้ในมาตรฐานการออกแบบต่างๆ โดยที่ค่าส่วนความปลอดภัยที่ใช้การออกแบบอาคารที่พักอาศัยจะมีค่าประมาณ 2.0 ในการออกแบบเครื่องบินจะมีค่าประมาณ 1.1 ถึง 1.3 และในการออกแบบโรงงานที่ใช้พลังงานนิวเคลียร์จะมีค่าประมาณ 3.0

1.7 การออกแบบจุดเชื่อมต่ออย่างง่าย (Design of Simple Connection)

รูปที่ 1-18 แสดงลักษณะต่างๆ ของการวิบัติที่อาจจะเกิดขึ้นได้ในจุดเชื่อมต่ออย่างง่าย ซึ่งจะแบ่งออกได้เป็น 4 แบบคือ

1. การวิบัติที่สลักเกลียวแบบ single shear ดังที่แสดงในรูปที่ 1-18a และการวิบัติที่สลักเกลียวแบบ double shear ดังที่แสดงในรูปที่ 1-18e
2. การวิบัติที่แผ่นเหล็กเนื่องจากแรงดึง ดังที่แสดงในรูปที่ 1-18b
3. การวิบัติที่แผ่นเหล็กเนื่องจากหน่วยแรงแบกทาน (bearing stress) ซึ่งจะทำให้เกิดการยู่ขึ้นที่จุดเชื่อมต่อ ดังที่แสดงในรูปที่ 1-18c
4. การวิบัติที่แผ่นเหล็กเนื่องจากการเฉือน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-18d

ในการออกแบบจุดเชื่อมต่อดังกล่าว เราจะต้องป้องกันไม่ให้เกิดการวิบัติข้างต้น ภายใต้การกระทำของแรงที่ใช้ในการออกแบบ



(a) Failure by single shearing of bolt. (b) Tension failure of plate.
(c) Crushing failure of plate. (d) Shear failure of plate behind bolt.
(e) Double shear failure.

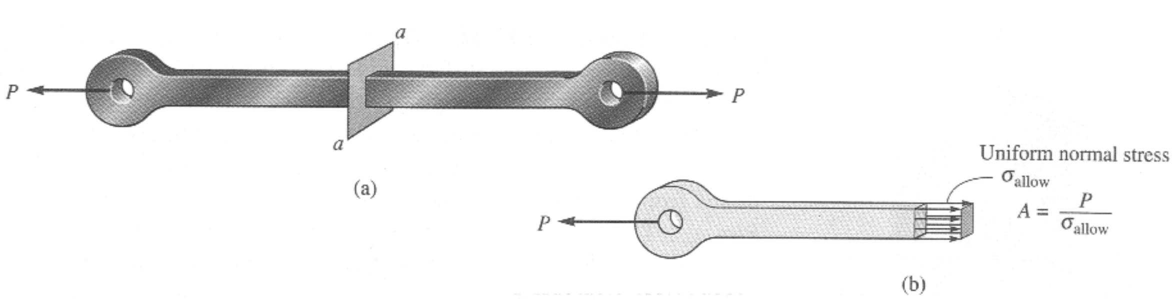
รูปที่ 1-18

จากสมการของค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่เราได้ศึกษามาแล้วนั้น เราจะทำการออกแบบจุดเชื่อมต่อได้ ดังต่อไปนี้

ในการออกแบบองค์อาคารของโครงสร้างที่รับแรงดึง P เช่น tow bar และชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน เป็นต้น ดังที่แสดงตามรูปที่ 1-19 นั้น พื้นที่หน้าตัดขององค์อาคารดังกล่าวจะหาได้จากสมการ

$$A = \frac{P}{\sigma_{allow}} \tag{1-11}$$

เมื่อ σ_{allow} เป็น allowable normal stress ของชิ้นส่วนของโครงสร้างดังกล่าว

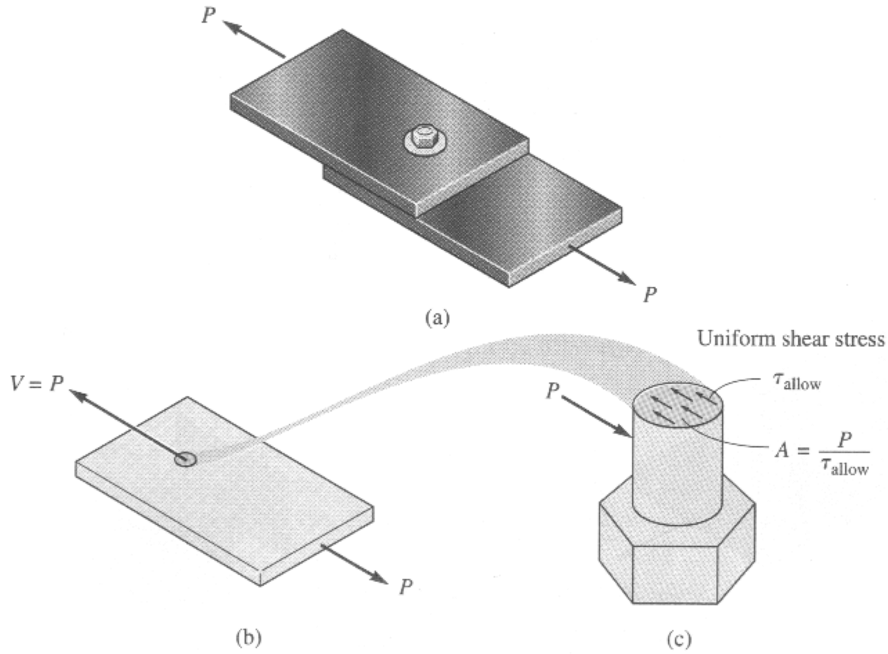


รูปที่ 1-19

ในการออกแบบองค์อาคารของโครงสร้างที่ถูกเชื่อมต่อโดยสลักเกลียว (bolt) และถูกกระทำโดยแรงดึงหรือแรงกดอัดในแนวแกนผ่านจุดศูนย์กลางของสลักเกลียว เช่น single shear connection ดังที่แสดงตามรูปที่ 1-20a เป็นต้น นั้น เริ่มต้น เราจะทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแผ่นเหล็กและสลักเกลียว ดังที่แสดงตามรูปที่ 1-20b จากนั้น พื้นที่หน้าตัดของสลักเกลียวที่จะต้องใช้ในการรับแรงเฉือน V ที่เกิดจากแรงดึง P จะหาได้จากสมการ

$$A = \frac{V}{\tau_{allow}} \tag{1-12}$$

เมื่อ τ_{allow} เป็น allowable shear stress ของสลักเกลียวดังกล่าว



รูปที่ 1-20

สลักเกลียวในจุดเชื่อมต่อนี้ทำหน้าที่เป็นตัวถ่ายแรงจากแผ่นเหล็กแผ่นหนึ่งไปยังแผ่นเหล็กอีกแผ่นหนึ่ง ซึ่งในการถ่ายแรงนี้ สลักเกลียวจะกดอัดแผ่นเหล็กและจะทำให้ให้เกิดแรง P กระทำต่อรูเจาะของแผ่นเหล็ก โดยที่หน่วยแรงที่เกิดจากแรงดังกล่าวจะถูกเรียกว่า หน่วยแรงแบกทาน (bearing stress) หรือ σ_b ดังที่แสดงในรูปที่ 1-21 และพื้นที่สัมผัสของสลักเกลียวกับแผ่นเหล็กจะมีค่าเท่ากับความหนาของแผ่นวัตถุ (t) คูณกับเส้นผ่าศูนย์กลางของสลักเกลียว (d_b) ถ้าสมมุติให้ bearing stress มีการกระจายอย่างสม่ำเสมอแล้ว ความหนาของแผ่นวัตถุที่จะใช้ในการรองรับ bearing stress จะหาได้จากสมการ

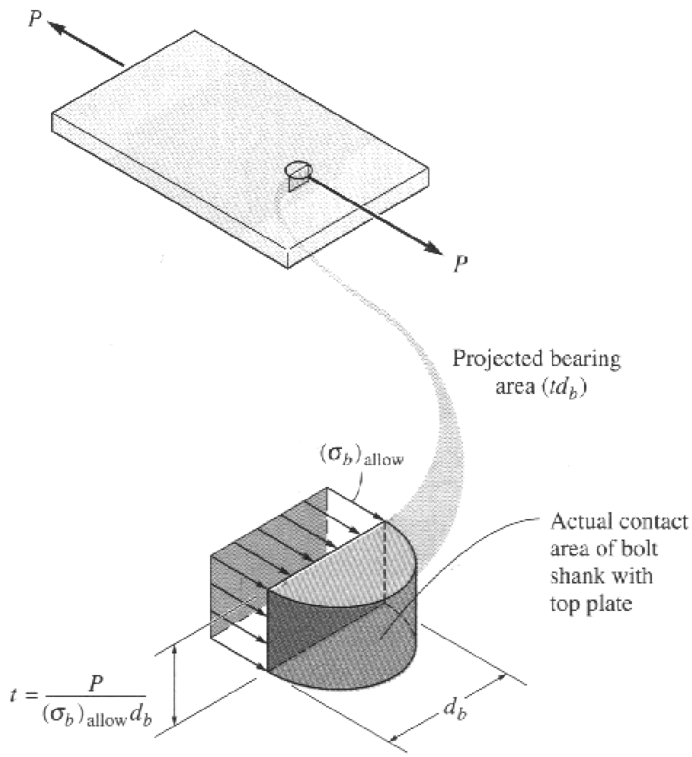
$$t = \frac{P}{d_b(\sigma_b)_{allow}}$$

เมื่อ $(\sigma_b)_{allow}$ เป็น allowable bearing stress ของแผ่นวัตถุ

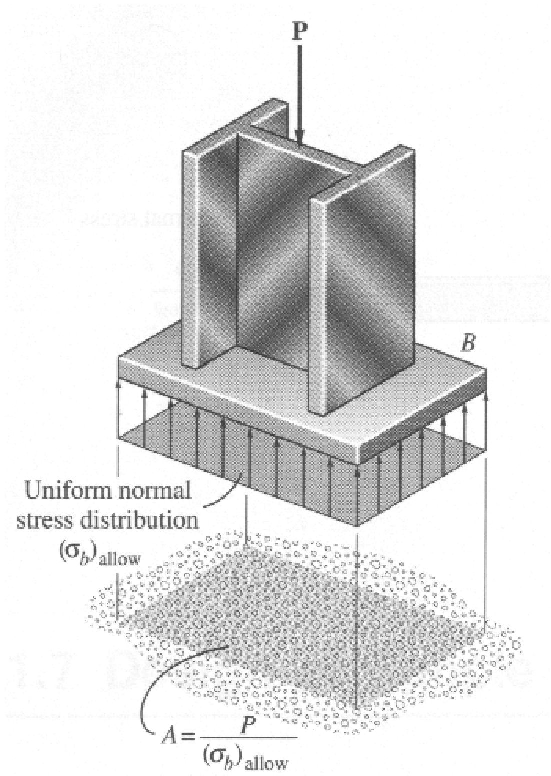
Bearing stress นอกจากจะเกิดขึ้นในจุดเชื่อมต่อแบบใช้สลักเกลียวแล้ว ยังเกิดขึ้นที่จุดที่โครงสร้างเชื่อมต่อเข้ากับฐานรากด้วย ดังที่แสดงในรูปที่ 1-22 จากรูป เราจะเห็นได้ว่า แรงกดอัดที่กระทำต่อเสาจะถ่ายลงมาสู่แผ่นเหล็กที่รองรับเสาและแผ่นเหล็กดังกล่าวจะทำหน้าที่เป็นตัวถ่ายและกระจายแรงให้กระทำต่อฐานรากคอนกรีต (concrete) อีกชั้นหนึ่ง ถ้าสมมุติให้ bearing stress ที่เกิดขึ้นที่ฐานรากคอนกรีตและแผ่นเหล็กมีการกระจายอย่างสม่ำเสมอแล้ว พื้นที่ของแผ่นเหล็กที่จะใช้ในการรองรับ bearing stress จะหาได้จากสมการ

$$A = \frac{P}{(\sigma_b)_{allow}}$$

เมื่อ $(\sigma_b)_{allow}$ เป็น allowable bearing stress ของฐานรากคอนกรีต



รูปที่ 1-21



รูปที่ 1-22

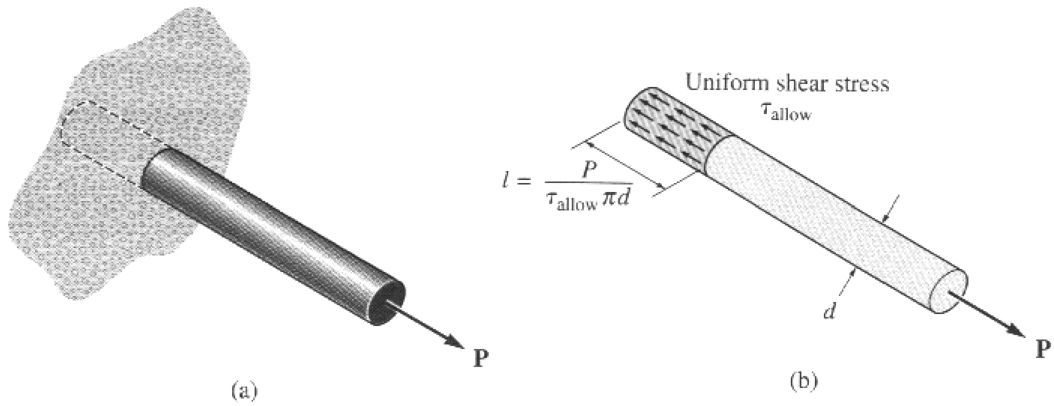
ในการออกแบบองค์อาคารของโครงสร้างที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนซึ่งทำให้เกิดแรงเฉือนที่จุดเชื่อมต่อ เช่น แท่งเหล็กที่ฝังอยู่ในผนังคอนกรีตและถูกกระทำโดยแรงดึงในแนวแกน P ดังที่แสดงตามรูปที่ 1-23a เป็นต้น นั้น เริ่มต้นเราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแท่งเหล็กดังกล่าว ดังที่แสดงในรูปที่ 1-23b จากนั้น พื้นที่ซึ่งจะต้องใช้ในการรับแรงเฉือนที่เกิดขึ้นจากแรงดึง P บนแท่งเหล็กจะหาได้จากสมการ

$$A = \frac{P}{\tau_{allow}}$$

$$\pi(d)l = \frac{P}{\tau_{allow}}$$

และความยาวต่ำสุดของแท่งเหล็กที่จะต้องฝังอยู่ในกำแพงหาได้จากสมการ

$$l = \frac{P}{\pi d \tau_{allow}}$$



รูปที่ 1-23

ตัวอย่างที่ 1-6

กำหนดให้ hanger มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-6 โดยที่ชิ้นส่วนด้านบนของ link ABC มีความหนา 9 mm และชิ้นส่วนด้านล่าง (ซึ่งมีความหนาแผ่นละ 6 mm) ถูกยึดติดเข้ากับชิ้นส่วนด้านบนของ link โดยใช้ epoxy resin เป็นความยาว 40 mm ที่จุด B นอกจากนั้นแล้ว กำหนดให้หมุดที่ A มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 9 mm และหมุดที่ B มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 6 mm จงหา

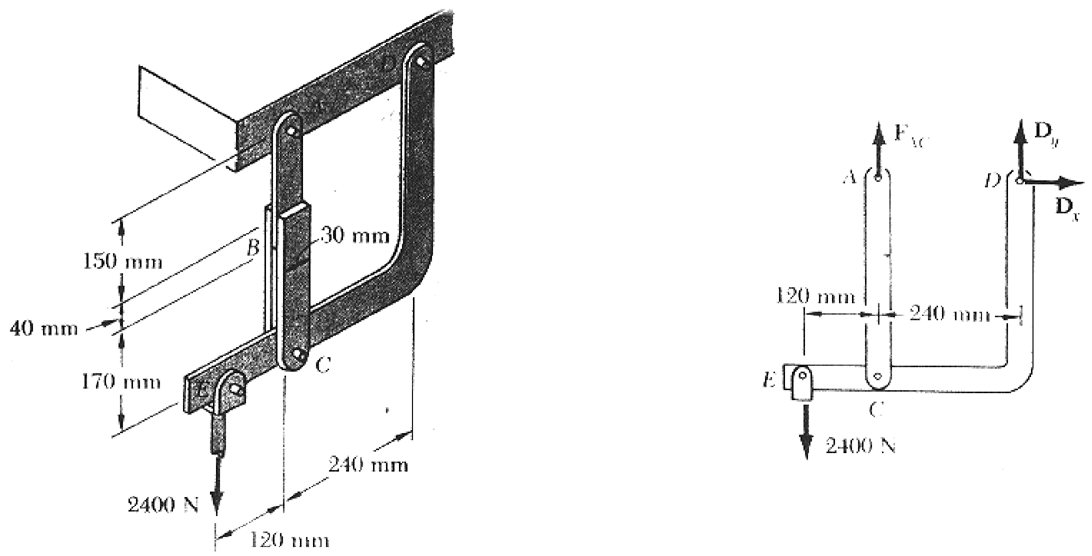
a.) หน่วยแรงเฉือนที่หมุด A

b.) หน่วยแรงเฉือนที่หมุด C

c.) หน่วยแรงตั้งฉากสูงสุดที่เกิดขึ้นใน link ABC

d.) หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยที่เกิดขึ้นที่พื้นผิวที่ชิ้นส่วนด้านบนของ link ABC ถูกยึดติดกับชิ้นส่วนด้านล่าง โดย epoxy resin

e.) bearing stress ที่เกิดขึ้นใน link ที่จุด C



รูปที่ Ex 1-6

หาขนาดของแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นใน link

จากรูปของ hanger เราจะเห็นได้ว่า link ABC เป็น two-force member และจุดรองรับ D เป็นหมุด ดังนั้น เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของ hanger ได้ดังที่แสดง จากสมการความสมดุลของ moment ที่จุด D เราจะได้

$$\sum M_D = 0; \qquad F_{AC}(240\text{ mm}) - 2400\text{ N}(360\text{ mm}) = 0$$

$$F_{AC} = 3600\text{ N}$$

a.) หาหน่วยแรงเฉือนที่หมุด A

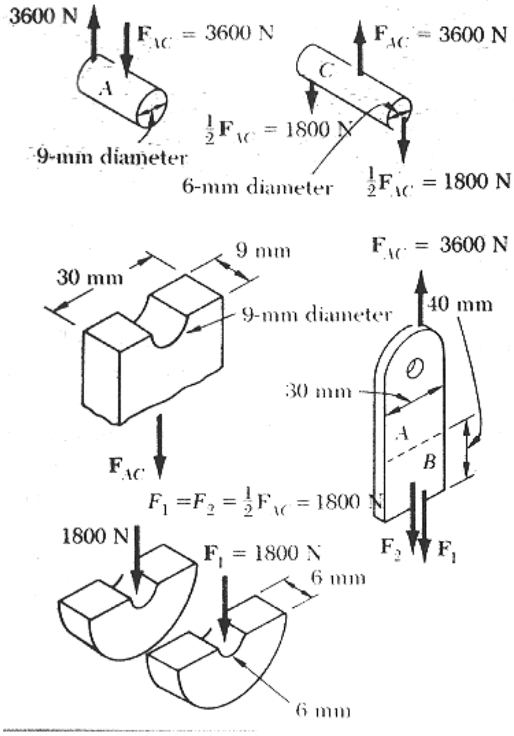
เนื่องจากหมุด A ซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 9 mm ถูกกระทำโดย single shear ดังนั้น

$$\tau_A = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{3600\text{ N}}{\pi(9/2\text{ mm})^2} = 56.6\text{ MPa} \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

b.) **หาหน่วยแรงเฉือนที่หมุด C**

เนื่องจากหมุด C ซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง 6 mm ถูกกระทำโดย double shear ดังนั้น

$$\tau_C = \frac{(F_{AC}/2)}{A} = \frac{1800\ \mathrm{N}}{\pi(6/2\ \mathrm{mm})^2} = 63.7\ \mathrm{MPa}$$ Ans.



c.) **หาหน่วยแรงตั้งฉากสูงสุดที่เกิดขึ้นใน** link ABC

หน่วยแรงตั้งฉากสูงสุดจะเกิดขึ้นที่หน้าตัดที่มีพื้นที่น้อยที่สุดใน link ABC ซึ่งคือหน้าตัดที่จุด A ที่มีรูหมุดขนาด 9 mm ดังนั้น

$$\sigma_A = \frac{F_{AC}}{A_{net}} = \frac{3600\ \mathrm{N}}{(9\ \mathrm{mm})(30\ \mathrm{mm} - 9\ \mathrm{mm})} = \frac{3600\ \mathrm{N}}{189\ \mathrm{mm}^2} = 19.05\ \mathrm{MPa}$$ Ans.

d.) **หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยที่จุดเชื่อมต่อโดย** epoxy resin

เนื่องจาก epoxy resin ยึดชิ้นส่วนด้านบนของ link ทั้งสองด้าน ดังนั้น แรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนแต่ละด้านมีค่าเท่ากับ $(3600\ \mathrm{N})/2 = 1800\ \mathrm{N}$ และ

$$\tau_B = \frac{F_1}{A} = \frac{1800\ \mathrm{N}}{(30\ \mathrm{mm})(40\ \mathrm{mm})} = 1.50\ \mathrm{MPa}$$ Ans.

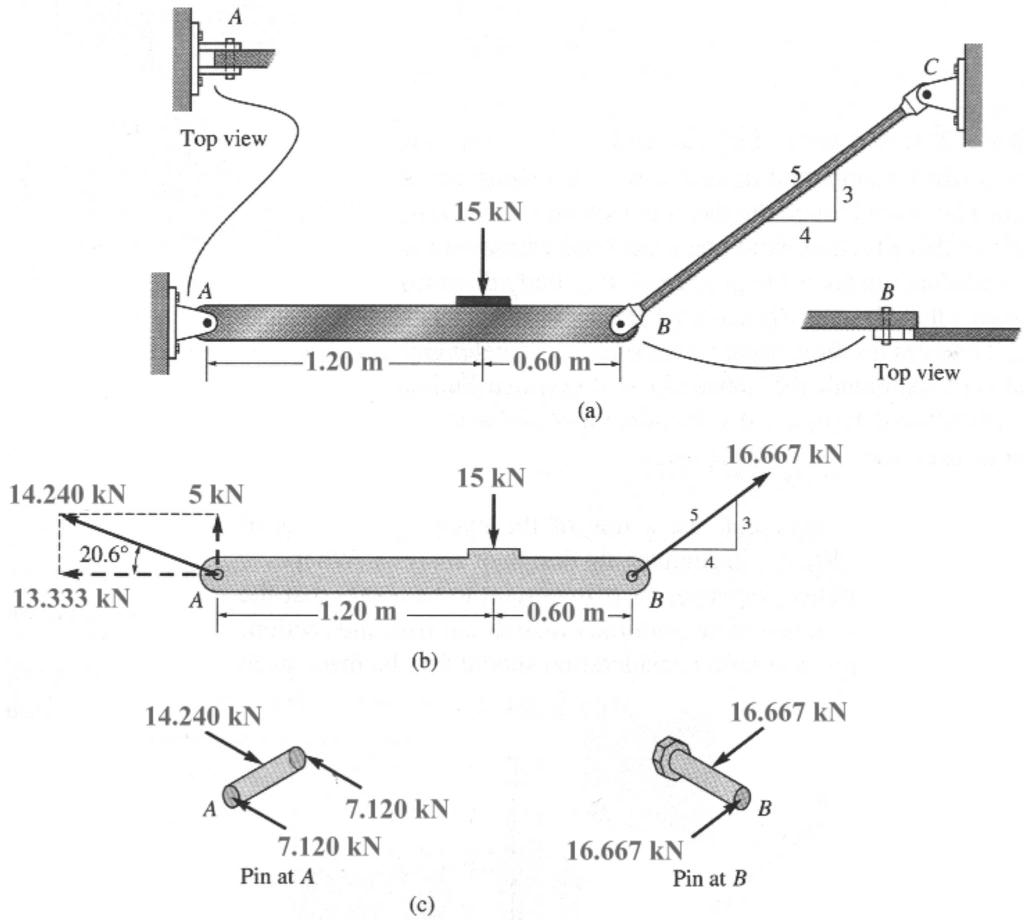
e.) bearing stress **ที่เกิดขึ้นใน** link **ที่จุด** C

แต่ละส่วนของชิ้นส่วนด้านล่างของ link จะรองรับแรง $F_1 = 1800\ \mathrm{N}$ และ nominal bearing area ของแต่ละส่วนของชิ้นส่วนมีค่าเท่ากับ $(6\ \mathrm{mm})(6\ \mathrm{mm}) = 36\ \mathrm{mm}^2$

$$\sigma_b = \frac{F_1}{A} = \frac{1800\ \mathrm{N}}{36\ \mathrm{mm}^2} = 50.0\ \mathrm{MPa}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 1-7

คาน AB ซึ่งมีความแกร่งสูงมากถูกเชื่อมต่อกับ rod ที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-7a และมีจุดรองรับอีกด้านหนึ่งที่ A จุดรองรับที่ A เป็นหมุดแบบ double shear connection และจุดเชื่อมต่อที่ B เป็นหมุดแบบ single shear connection ถ้ากำหนดให้หมุดมี allowable shear stress $\tau_{allow} = 85\,\text{MPa}$ และให้ rod BC มี allowable tensile stress $(\sigma_t)_{allow} = 110\,\text{MPa}$ จงหาเส้นผ่าศูนย์กลางของหมุดที่จุด A และจุด B และเส้นผ่าศูนย์กลางของ rod BC



รูปที่ Ex 1-7

จากรูปที่ Ex 1-7a เราจะเห็นได้ว่า rod BC เป็น two-force member ดังนั้น เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของคาน AB ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-7b

โดยใช้สมการความสมดุล เราจะหาค่าของแรงปฏิกริยาที่จุด A และจุด B ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-7b และแรงปฏิกริยาลัพธ์ที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(13.333\,\text{kN})^2 + (5\,\text{kN})^2} = 14.240\,\text{kN}$$

หาเส้นผ่าศูนย์กลางที่มีค่าน้อยที่สุดของหมุดที่จุด A และจุด B

รูปที่ Ex 1-7c แสดงแผนภาพ free-body diagram ของหมุดที่จุด A และจุด B โดยที่หมุดที่จุด A เป็น double shear connection

$$V_A = \frac{R_A}{2} = \frac{14.240\text{ kN}}{2} = 7.120\text{ kN}$$

และหมุดที่จุด B เป็น single shear connection

$$V_B = R_B = 16.667\text{ kN}$$

ดังนั้น

$$A_A = \frac{V_A}{\tau_{allow}} = \frac{7.120\text{ kN}}{85(10^3)\text{ kN/m}^2} = 83.76(10^{-6})\text{ m}^2 = \pi(\frac{d_A^2}{4})$$

$$d_A = 10.4\text{ mm}$$ Ans.

$$A_B = \frac{V_B}{\tau_{allow}} = \frac{16.667\text{ kN}}{85(10^3)\text{ kN/m}^2} = 196.1(10^{-6})\text{ m}^2 = \pi(\frac{d_B^2}{4})$$

$$d_B = 15.8\text{ mm}$$ Ans.

หาเส้นผ่าศูนย์กลางที่มีค่าน้อยที่สุดของ rod BC

$$A_{BC} = \frac{P}{(\sigma_t)_{allow}} = \frac{16.667\text{ kN}}{110(10^3)\text{ kN/m}^2} = 151.52(10^{-6})\text{ m}^2 = \pi(\frac{d_{BC}^2}{4})$$

$$d_{BC} = 13.9\text{ mm}$$ Ans.

โดยทั่วไปแล้ว ค่าเส้นผ่าศูนย์กลางของหมุดที่หามาได้จะไม่มีขายในท้องตลาด ดังนั้น เราจะต้องเลือกใช้หมุดที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางที่ใหญ่กว่าที่คำนวณได้ เช่น

$$d_A = 12\text{ mm}$$

$$d_B = 16\text{ mm}$$

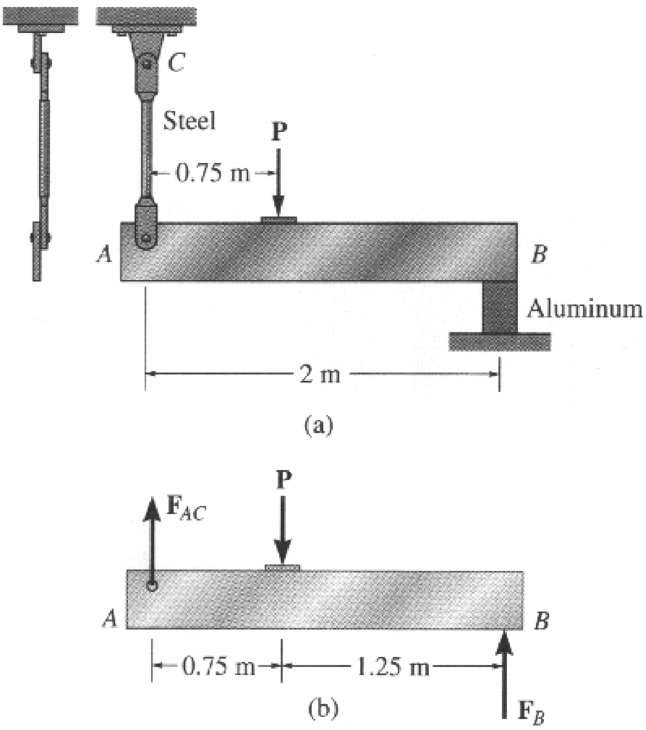
$$d_{BC} = 14\text{ mm}$$

เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1-8

กำหนดให้ bar AB ซึ่งมีความแกร่งสูงมากถูกรองรับโดย steel rod ที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 20 mm ที่จุด A และ aluminum block ที่มีพื้นที่หน้าตัด 1800 mm^2 ที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-8a นอกจากนั้นแล้ว กำหนดให้หมุดที่จุด A และ C เป็นหมุดแบบ single shear connection มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 18 mm และถ้าให้หน่วยแรงวิบัติ (failure stress) ของ steel และ aluminum มีค่าเท่ากับ $(\sigma_{st})_{fail} = 680\ \mathrm{MPa}$ และ $(\sigma_{al})_{fail} = 70\ \mathrm{MPa}$ ตามลำดับ และให้หน่วยแรงเฉือนวิบัติ (failure shear stress) ของหมุนแต่ละตัวมีค่าเท่ากับ $\tau_{fail} = 900\ \mathrm{MPa}$ จงหาค่าแรง P ที่มากที่สุดที่สามารถกระทำต่อโครงสร้างโดยไม่เกิดการวิบัติ เมื่อส่วนความปลอดภัย (factor of safety) มีค่าเท่ากับ

$\mathrm{F.S.} = 2.0$



รูปที่ Ex 1-8

หาค่าของหน่วยแรงที่ยอมให้ (allowable stresses)

$$(\sigma_{st})_{allow} = \frac{(\sigma_{st})_{fail}}{\mathrm{F.S.}} = \frac{680\ \mathrm{MPa}}{2} = 340\ \mathrm{MPa}$$

$$(\sigma_{al})_{allow} = \frac{(\sigma_{al})_{fail}}{\mathrm{F.S.}} = \frac{70\ \mathrm{MPa}}{2} = 35\ \mathrm{MPa}$$

$$\tau_{allow} = \frac{\tau_{fail}}{\mathrm{F.S.}} = \frac{900\ \mathrm{MPa}}{2} = 450\ \mathrm{MPa}$$

หาค่าแรง P ที่มากที่สุดที่สามารถกระทำต่อโครงสร้างโดยไม่เกิดการวิบัติ

เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของ bar AB ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 1-8b และเราจะหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำ P กับแรงปฏิกริยา F_{AC} และ F_B ได้โดยใช้สมการความสมดุล

$$\sum M_B = 0; \qquad P(1.25\ \mathrm{m}) - F_{AC}(2\ \mathrm{m}) = 0 \tag{1}$$

$$\sum M_A = 0; \qquad F_B(2\text{ m}) - P(0.75\text{ m}) = 0 \qquad (2)$$

แรง P ที่มากที่สุดที่ rod AC จะสามารถรับได้โดยไม่เกิดการวิบัติ

$$\begin{aligned} F_{AC} &= (\sigma_{st})_{allow}(A_{AC}) \\ &= 340(10^6)\text{ N/m}^2[\pi(0.01\text{ m})^2] \\ &= 106.8\text{ kN} \end{aligned}$$

จากสมการ (1) เราจะได้

$$P = \frac{(106.8\text{ kN})(2\text{ m})}{1.25\text{ m}} = 171\text{ kN}$$

แรง P ที่มากที่สุดที่ aluminum block จะสามารถรับได้โดยไม่เกิดการวิบัติ

$$\begin{aligned} F_B &= (\sigma_{al})_{allow}(A_B) \\ &= 35(10^6)\text{ N/m}^2[1800\text{ mm}^2(10^{-6})\text{ m}^2/\text{mm}^2] \\ &= 63.0\text{ kN} \end{aligned}$$

จากสมการ (2) เราจะได้

$$P = \frac{(63.0\text{ kN})(2\text{ m})}{0.75\text{ m}} = 168\text{ kN}$$

แรง P ที่มากที่สุดที่หมุดที่จุด A หรือ C จะสามารถรับได้โดยไม่เกิดการวิบัติ

$$V = F_{AC} = \tau_{allow}A = 450(10^6)\text{ N/m}^2[\pi(0.009\text{ m})^2] = 114.5\text{ kN}$$

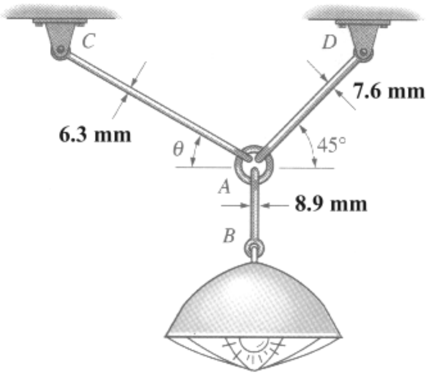
จากสมการ (1) เราจะได้

$$P = \frac{(114.5\text{ kN})(2\text{ m})}{1.25\text{ m}} = 183\text{ kN}$$

โดยการเปรียบเทียบ เราจะเห็นได้ว่า เมื่อแรง P มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จากศูนย์แล้ว aluminum block จะเกิดการวิบัติก่อน rod AC และหมุดที่จุด A และจุด C ดังนั้น ค่าแรง P ที่มากที่สุดที่กระทำต่อโครงสร้างโดยที่โครงสร้างไม่เกิดการวิบัติจะมีค่าเท่ากับ 168 kN **Ans.**

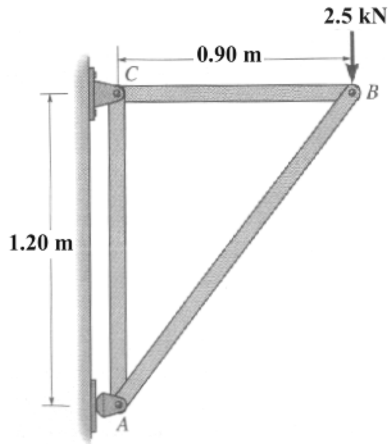
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1-1 กำหนดให้โคมไฟมีน้ำหนัก $220\ \mathrm{N}$ ถูกแขวนโดยเส้นลวด 3 เส้น ซึ่งเชื่อมต่อกันโดยใช้แหวนที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-1 จงหาค่ามุม θ ที่ทำให้หน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ย (average normal stress) ในเส้นลวด AC เป็นสองเท่าของหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยในเส้นลวด AD และจงหาค่าหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยที่เกิดขึ้นในเส้นลวดทั้งสอง



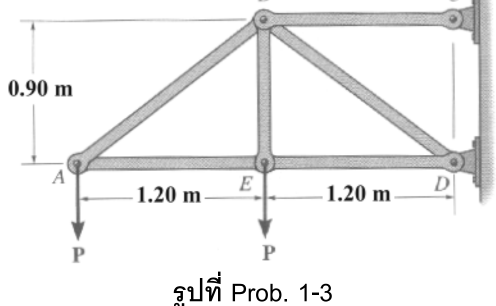
รูปที่ Prob. 1-1

1-2 กำหนดให้โครงข้อหมุน (truss) มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-2 จงหาหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนพร้อมทั้งระบุด้วยว่าเป็นหน่วยแรงดึงหรือหน่วยแรงกดอัด เมื่อโครงข้อหมุนมีพื้นที่หน้าตัดดังต่อไปนี้ $A_{AB} = 960\ \mathrm{mm}^2$, $A_{BC} = 516\ \mathrm{mm}^2$, และ $A_{AC} = 385\ \mathrm{mm}^2$



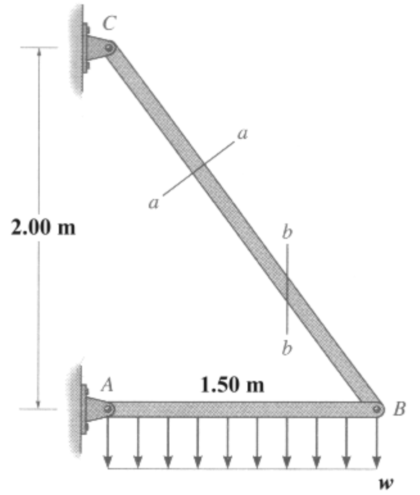
รูปที่ Prob. 1-2

1-3 ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-3 มีพื้นที่หน้าตัดเท่ากับ $806\ \mathrm{mm}^2$ ถ้ากำหนดให้หน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนใดๆ ของโครงข้อหมุนมีค่าได้ไม่เกิน $140\ \mathrm{MPa}$ จงหาค่าแรง P สูงสุด



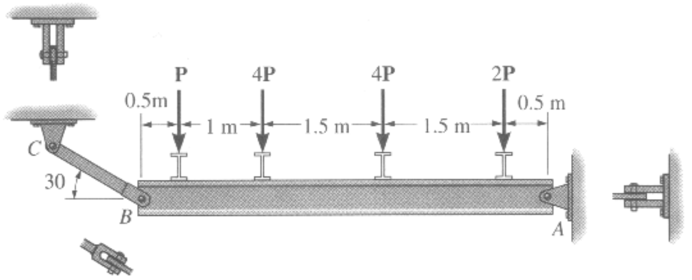
รูปที่ Prob. 1-3

1-4 กำหนดให้ frame ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-4 จงหาค่าน้ำหนักบรรทุกแผ่กระจาย w สูงสุดที่ไม่ทำให้หน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ย (average normal stress) และหน่วยแรงเฉือนเฉลี่ย (average shear stress) ที่หน้าตัด $b-b$ มีค่าได้ไม่เกิน $15\,\mathrm{MPa}$ และ $16\,\mathrm{MPa}$ ตามลำดับ ถ้าชิ้นส่วน CB มีหน้าตัดสี่เหลี่ยมจตุรัสขนาด $35\,\mathrm{mm}$



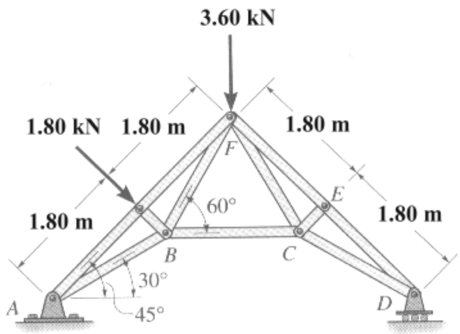
รูปที่ Prob. 1-4

1-5 คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-5 ถูกรองรับโดยหมุดที่ A และแท่งเหล็ก BC จงหาค่าของแรง P สูงสุดที่ทำให้หน่วยแรงเฉือนเฉลี่ยในหมุดที่จุดเชื่อมต่อมีค่าไม่เกิน $80\,\mathrm{MPa}$ ถ้าหมุดมีเส้นผ่าศูนย์กลาง $18\,\mathrm{mm}$



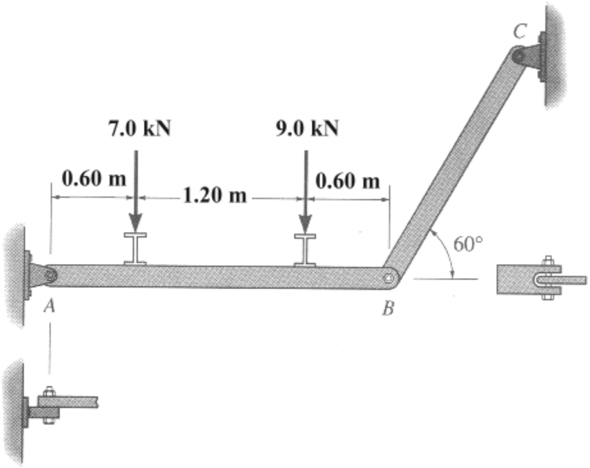
รูปที่ Prob. 1-5

1-6 กำหนดให้โครงข้อหมุนถูกแรงกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-6 จงหาพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน BC ถ้าหน่วยแรงตั้งฉากที่ยอมให้ (allowable normal stress) มีค่าเท่ากับ $165\,\mathrm{MPa}$



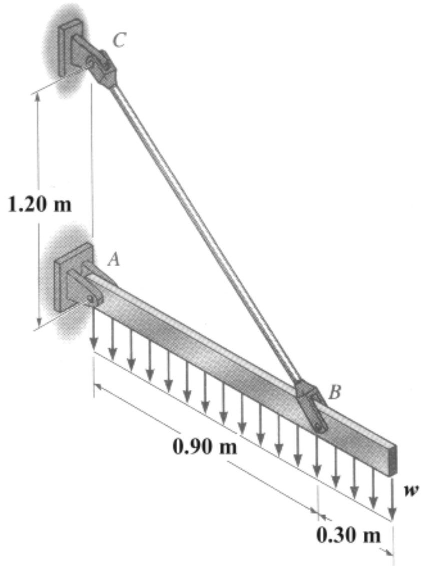
รูปที่ Prob. 1-6

1-7 จงหาพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน BC และเส้นผ่าศูนย์กลางของหมุด A และหมุด B ของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-7 ถ้า $\sigma_{allow} = 21\ \mathrm{MPa}$ และ $\tau_{allow} = 28\ \mathrm{MPa}$



รูปที่ Prob. 1-7

1-8 โครงสร้างเหล็กดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-8 รองรับน้ำหนักบรรทุกแผ่กระจายคงที่ (uniformly distributed load) $w = 750\ \mathrm{N/m}$ จงหาส่วนความปลอดภัย (factor of safety) ของแท่งเหล็ก BC หมุดที่จุด B และหมุดที่จุด C ถ้าเหล็กมี $\sigma_y = 250\ \mathrm{MPa}$ และ $\tau_y = 125\ \mathrm{MPa}$ กำหนดให้แท่งเหล็ก BC มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $10\ \mathrm{mm}$ และหมุดที่จุด B และหมุดที่จุด C มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $7.5\ \mathrm{mm}$



รูปที่ Prob. 1-8

1-9 ถ้าหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ (allowable shear stress) ของหมุดเหล็กขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $7.5\ \mathrm{mm}$ ที่จุด A จุด B และจุด C ของโครงสร้างเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-8 มีค่าเท่ากับ $\tau_{allow} = 85\ \mathrm{MPa}$ และหน่วยแรงตั้งฉากที่ยอมให้ (allowable normal stress) ของแท่งเหล็ก BC ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $10\ \mathrm{mm}$ มีค่าเท่ากับ $\sigma_{allow} = 150\ \mathrm{MPa}$ จงหาค่าน้ำหนักบรรทุกแผ่กระจายคงที่สูงสุดที่ยอมให้กระทำกับโครงสร้าง

1-10 โครงสร้างเหล็กดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 1-8 รองรับน้ำหนักบรรทุกแผ่กระจายคงที่ (uniformly distributed load) $w = 1.0\ \mathrm{kN/m}$ ถ้าเหล็กมี $\sigma_y = 250\ \mathrm{MPa}$ และ $\tau_y = 125\ \mathrm{MPa}$ จงหาเส้นผ่าศูนย์กลางของแท่งเหล็ก BC และสลักที่จุด B และจุด C เมื่อส่วนความปลอดภัย (factor of safety) มีค่าเท่ากับ 2.0

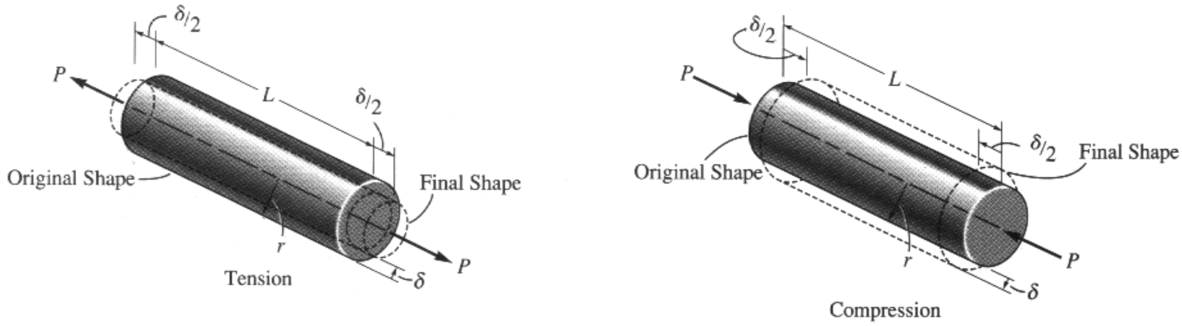
บทที่ 2
ความเครียด (Strain)

เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

2.1 การเปลี่ยนรูปร่าง (Deformation)

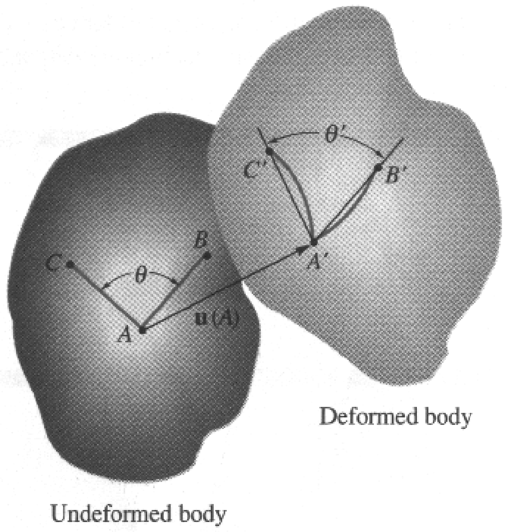
วัตถุจะถูกเรียกว่า วัตถุที่สามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ (deformable body) เมื่ออนุภาคในวัตถุนั้นมีการเปลี่ยนตำแหน่งเกิดขึ้นภายใต้การกระทำของแรง ในทางตรงกันข้าม วัตถุจะถูกเรียกว่า วัตถุแกร่ง (rigid body) เมื่ออนุภาคในวัตถุนั้น**ไม่มี**การเปลี่ยนตำแหน่งเกิดขึ้นเลย ภายใต้การกระทำของแรง

เมื่อ deformable body ถูกกระทำโดยแรงแล้ว วัตถุนั้นจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (deformation) ขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 2-1 ขนาดของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะขึ้นอยู่กับค่าความแกร่งของวัสดุที่ใช้ทำวัตถุนั้น ซึ่งอาจจะมีค่าสูงมากในกรณีของแผ่นยางหรืออาจจะมีค่าน้อยมากในกรณีของแท่ง concrete หรือแท่งเหล็ก



รูปที่ 2-1

การเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ของอนุภาคสองอนุภาคในวัตถุจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นปริมาณ vector ดังนั้น ในการหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาค เราจะต้องทำการวัดทั้งการเปลี่ยนแปลงของความยาวของเส้นที่เชื่อมระหว่างอนุภาคที่เราสนใจและมุมที่เส้นนั้นเปลี่ยนไปจากเดิม ดังที่แสดงตามรูปที่ 2-2



รูปที่ 2-2

2.2 ความเครียด (Strain)

เช่นเดียวกับในกรณีของหน่วยแรง (stress) ความเครียด (strain) จะถูกแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทคือ ความเครียดตั้งฉาก (normal strain) และความเครียดเฉือน (shear strain) ตามลักษณะการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุ

ความเครียดตั้งฉาก (normal strain) **หรือ** ε

ความเครียดตั้งฉากเป็นการยืดตัว (elongation) หรือการหดตัว (contraction) ของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมอนุภาค 2 อนุภาคที่เราสนใจบนวัตถุต่อหนึ่งหน่วยความยาวของส่วนของเส้นตรงนั้น ภายใต้การกระทำของแรง

พิจารณาเส้นตรง AB บนวัตถุที่ยังไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-3 เส้นตรงนี้อยู่ในแนวแกน n และมีความยาวเริ่มต้น Δs ภายหลังจากที่วัตถุถูกกระทำโดยแรงและมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเกิดขึ้นแล้ว จุด A และจุด B จะเคลื่อนที่ไปอยู่ที่จุด A' และจุด B' ตามลำดับ และเส้นตรงดังกล่าวจะกลายเป็นเส้นโค้งที่มีความยาว $\Delta s'$ จากนิยามของความเครียดตั้งฉาก สมการของค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉากจะเขียนได้ในรูป

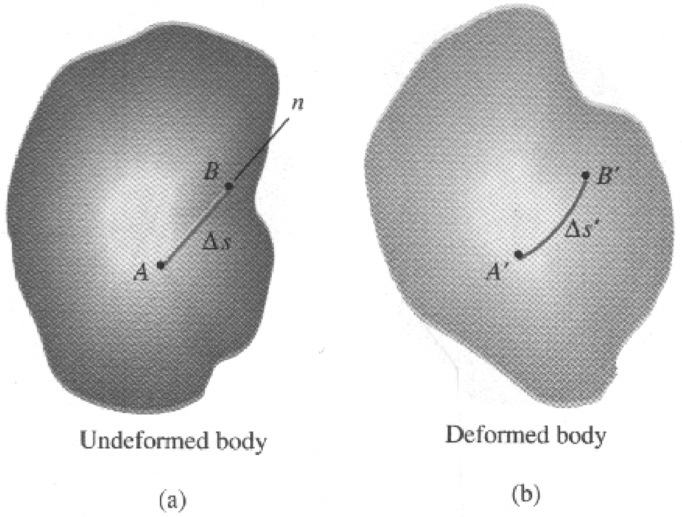
$$\varepsilon_{avg} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \tag{2-1}$$

ถ้าตำแหน่งของจุด B เลื่อนเข้ามาชิดจุด A เรื่อยๆ จนกระทั่งความยาวเริ่มต้น Δs ระหว่างจุดทั้งสองนี้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์แล้ว ความยาวระหว่างจุด A' และจุด B' ก็จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ด้วย แต่ค่า limit ของอัตราส่วนของการเปลี่ยนแปลงความยาวต่อความยาวเริ่มต้นจะมีค่าคงที่ค่าหนึ่ง ดังนั้น ค่าของความเครียดตั้งฉากที่จุด A ในทิศทางของแกน n จะอยู่ในรูป

$$\varepsilon = \lim_{B \to A \text{ along } n} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \tag{2-2}$$

ถ้าเราทราบค่าของความเครียดตั้งฉากแล้ว เราจะหาค่าโดยประมาณของความยาวของส่วนของเส้นตรงในทิศทางของแกน n หลังจากที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุแล้ว ได้จากสมการ

$$\Delta s' \approx (1+\varepsilon)\Delta s \tag{2-3}$$



รูปที่ 2-3

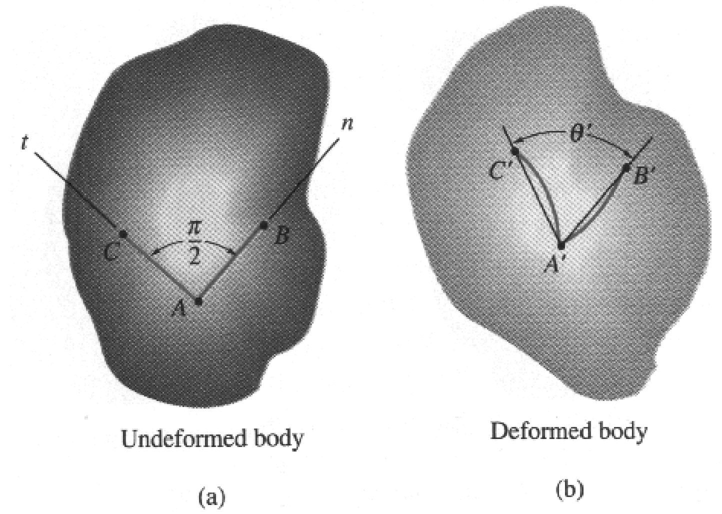
ความเครียดเฉือน (shear strain) **หรือ** γ

ความเครียดเฉือน (shear strain) เป็นการเปลี่ยนแปลงของมุมที่เกิดขึ้นระหว่างส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่เริ่มต้นทำมุมตั้งฉากซึ่งกันและกัน และมีหน่วยเป็น radians

จากคำจำกัดความของความเครียดเฉือนและจากรูปที่ 2-4 สมการของค่าเฉลี่ยของความเครียดเฉือนที่จุด A ในระบบแกนอ้างอิง $n-t$ จะเขียนได้ในรูป

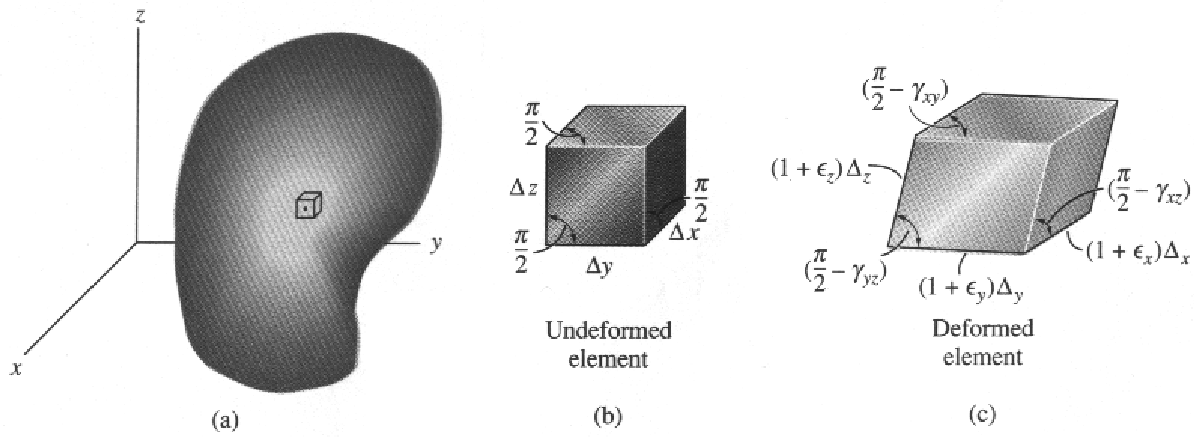
$$\gamma_{nt} = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{B \to A \text{ along } n \\ C \to A \text{ along } t}} \theta' \tag{2-4}$$

จากสมการเราจะเห็นว่า เมื่อ $\theta' < \pi / 2$ แล้ว γ จะมีค่าเป็นบวก และถ้า $\theta' > \pi / 2$ แล้ว γ จะมีค่าเป็นลบ



รูปที่ 2-4

องค์ประกอบของความเครียดในระบบแกนตั้งฉาก (Cartesian Strain Components)



รูปที่ 2-5

พิจารณา cubic volume element ที่มีขนาดเล็กมากและถูกตัดออกมาจากวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-5a ก่อนที่วัตถุจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (deformation) cubic volume element นี้มีขนาดในแนวแกน x, y, และ z เท่ากับ Δx, Δy, และ Δz ตามลำดับ

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้นบน cubic volume element นี้มีขนาดที่เล็กมากๆ ดังนั้น หลังจากที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแล้ว กำหนดให้รูปร่างของ cubic volume element ดังกล่าว มีรูปร่างเป็นลูกบาศก์ที่มีด้านขนานกัน (parallelepiped) (ส่วนของเส้นตรงบนวัตถุที่มีความยาวเริ่มต้นที่น้อยมากๆ จะยังคงเป็นเส้นตรง โดยประมาณ หลังจากที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุเกิดขึ้นแล้ว)

จากสมการที่ 2-3 เราจะเขียนสมการของความยาวของด้านต่างๆ บน parallelepiped volume element ซึ่งสอดคล้องกับความยาวเริ่มต้น Δx, Δy, และ Δz ได้เป็น

$$(1+\varepsilon_x)\Delta x$$
$$(1+\varepsilon_y)\Delta y$$
$$(1+\varepsilon_z)\Delta z$$

และมุมระหว่างด้านต่างๆ สองด้านที่อยู่บน parallelepiped volume element ซึ่งสอดคล้องกับด้านเริ่มต้น Δx , Δy , และ Δz จะอยู่ในรูป

$$\frac{\pi}{2}-\gamma_{xy}$$

$$\frac{\pi}{2}-\gamma_{yz}$$

$$\frac{\pi}{2}-\gamma_{xz}$$

จากสมการดังกล่าว เราจะเห็นได้ว่า

- ความเครียดตั้งฉากจะก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของ cubic volume element เท่านั้น
- ความเครียดเฉือนจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ cubic volume element เท่านั้น

อย่างไรก็ตาม โดยทั่วไปแล้ว การเปลี่ยนแปลงรูปร่างทั้งหมดนี้มักจะเกิดขึ้นพร้อมๆ กัน เช่นเดียวกับในกรณีของหน่วยแรง (stress) ดังนั้น สภาวะความเครียด (strain) ที่จุดใดจุดหนึ่งบนวัตถุจะประกอบด้วยความเครียดตั้งฉาก 3 ค่าคือ ε_x , ε_y , และ ε_z และความเครียดเฉือน 3 ค่าคือ γ_{xy} , γ_{yz} , และ γ_{zx}

Small Strain Analysis

โดยส่วนใหญ่แล้ว โครงสร้างจะถูกออกแบบให้มีค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่น้อยมากๆ ภายใต้การกระทำของแรงที่ใช้ในการออกแบบ ดังนั้น ในการศึกษาวิชานี้ ค่าของความเครียดที่เกิดขึ้นในวัตถุจะมีค่าที่น้อยกว่า 1 มากๆ หรือ ε << 1 เมื่อ ε << 1 แล้ว เราจะไม่นำผลคูณของค่าของความเครียดหรือค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง หรือผลคูณของค่าใดๆ ที่ทำให้ค่าของความเครียดหรือค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีกำลังมากกว่าหนึ่งมาคิด เนื่องจากผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าน้อยกว่าค่าของความเครียดหรือค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมาก ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราให้ค่า $\varepsilon = 0.0001$ m/m แล้ว ค่า ε^2 จะมีค่าเท่ากับ $0.0000001\,\mathrm{m^2/m^2}$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าค่าของ ε เท่ากับ 1000 เท่า เป็นต้น เรามักจะเรียกการประมาณในลักษณะนี้ว่า first order approximation ซึ่งจะทำให้การคำนวณหาค่าของความเครียดหรือค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีความง่ายขึ้นเป็นอย่างมาก อย่างไรก็ตาม คำตอบที่ได้จะยังคงอยู่ในขอบเขตที่เชื่อถือได้ในทางวิศวกรรม

สมการต่อไปนี้เป็นสมการที่มีความสำคัญในการทำ first order approximation

$$(1+\Delta)^n \approx 1+n\Delta$$

$$(\Delta+1)(\Delta'+1) \approx \Delta+\Delta'+1$$

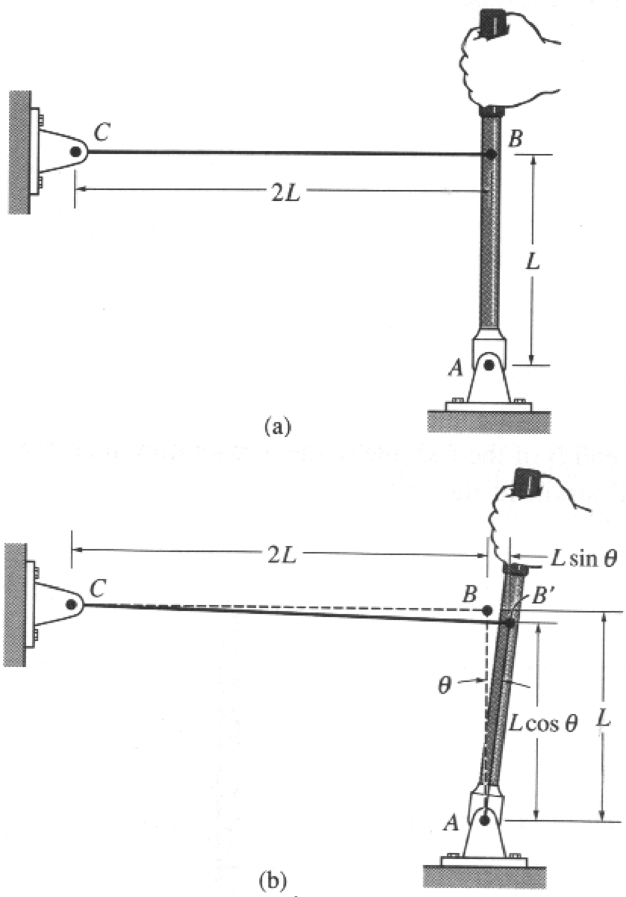
$$\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$$

$$\cos\Delta\theta \approx 1$$

$$\tan\Delta\theta \approx \Delta\theta/1 \approx \Delta\theta$$

ตัวอย่างที่ 2-1

กำหนดให้แรงกระทำต่อ lever arm ดังแสดงในรูปที่ EX 2-1a ซึ่งทำให้ lever arm เกิดการหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\theta = 0.002$ rad. จงหาค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉากที่เกิดขึ้นในเส้นลวด BC



รูปที่ EX 2-1

เราจะหาความยาวของเส้นลวดหลังจากที่เกิดการหมุนแล้ว ได้จากแผนภาพ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 2-1b โดยที่

$$
\begin{aligned}
CB' &= \sqrt{(2L + L\sin\theta)^2 + (L - L\cos\theta)^2} \\
&= L\sqrt{(2+\sin\theta)^2 + (1-\cos\theta)^2} \\
&= L\sqrt{4 + 4\sin\theta + \sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ดังนั้น

$$CB' = L\sqrt{6 + 4\sin\theta - 2\cos\theta}$$

ในกรณีนี้ มุม θ มีค่าน้อยมาก ซึ่งโดย first-order approximation เราจะได้ว่า $\sin\theta \approx \theta$ และ $\cos\theta \approx 1$ ดังนั้น

$$CB' \approx 2L\sqrt{1+\theta} = 2L(1+\theta)^2$$

จากความสัมพันธ์ $(1+\Delta)^n = 1 + n\Delta$ เราจะได้

$$CB' \approx 2L(1 + \frac{1}{2}\theta) = 2.002L$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉากที่เกิดขึ้นในเส้นลวด BC

$$\varepsilon_{avg} = \frac{CB' - CB}{CB} = \frac{2.002L - 2L}{2L} = 0.001$$ Ans.

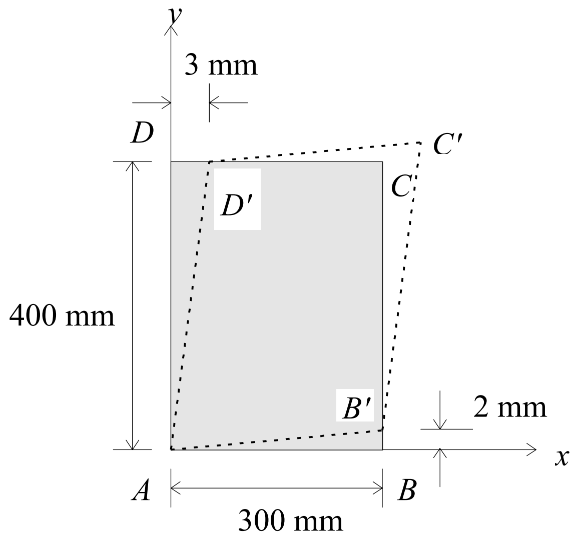
ตัวอย่างที่ 2-2

แผ่นยางที่มีรูปร่างเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-2 ถูกทำให้เกิดการเปลี่ยนรูปร่างดังที่แสดงโดยเส้นประ จงหา

a.) ค่าเฉลี่ยของความเครียดเฉือน γ_{xy}

b.) ค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉากบนด้าน AD

c.) ค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉากในแนวเส้นทแยง DB



รูปที่ Ex 2-2

a.) **ค่าเฉลี่ยของความเครียดเฉือน** γ_{xy}

จากคำนิยามของความเครียดเฉือน เราจะหาค่าเฉลี่ยของความเครียดเฉือน γ_{xy} ได้จากผลรวมของมุม DAD' และมุม BAB' ดังนั้น

$$\gamma_{xy} = \tan^{-1}\frac{3}{400} + \tan^{-1}\frac{2}{300}$$ <u>Ans.</u>

$$= 0.0075 \text{ rad.} + 0.006667 \text{ rad.} = 0.0142 \text{ rad.}$$

b.) **ค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉากบนด้าน** $\boldsymbol{AD}$

ความยาวของด้าน AD ก่อนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีค่าเท่ากับ $AD = 400 \text{ mm}$

ความยาวของด้าน AD หลังเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีค่าเท่ากับ

$$AD' = \sqrt{400^2 + 3^2} = 400.01125 \text{ mm}$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉากบนด้าน AD จะมีค่าเท่ากับ

$$(\varepsilon_{AD})_{avg} = \frac{AD' - AD}{AD} = \frac{400.01125 \text{ mm} - 400 \text{ mm}}{400 \text{ mm}}$$ <u>Ans.</u>

$$= 28.1(10^{-6}) \text{ mm/mm}$$

c.) **ค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉากในแนวเส้นทแยง** $\boldsymbol{DB}$

ความยาวของด้าน AB หลังเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีค่าเท่ากับ

$$AB' = \sqrt{300^2 + 2^2} = 300.00667 \text{ mm}$$

มุมของสามเหลี่ยม $D'AB'$ หลังเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีค่าเท่ากับ

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - 0.0142 = 1.5566 \text{ rad.} = 89.18832^o$$

ความยาวของเส้นทแยงมุม DB ก่อนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีค่าเท่ากับ

$$DB = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ mm}$$

ความยาวของเส้นทแยงมุม DB หลังเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะหาได้จาก cosine law ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ

$$D'B' = \sqrt{(400.01125)^2 + (300.00667)^2 - 2(400.01125)(300.00667)\cos(89.1883)^o}$$

$$= 496.6014 \text{ mm}$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉากในแนวเส้นทแยง DB จะมีค่าเท่ากับ

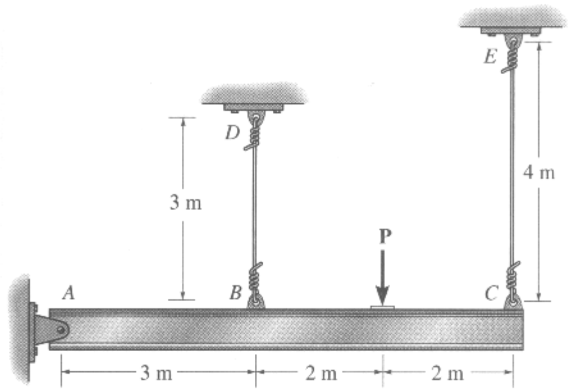
$$(\varepsilon_{DB})_{avg} = \frac{D'B' - DB}{DB} = \frac{496.6014 \text{ mm} - 500 \text{ mm}}{500 \text{ mm}}$$

<u>Ans.</u>

$$= -6.80(10^{-3}) \text{ mm/mm}$$

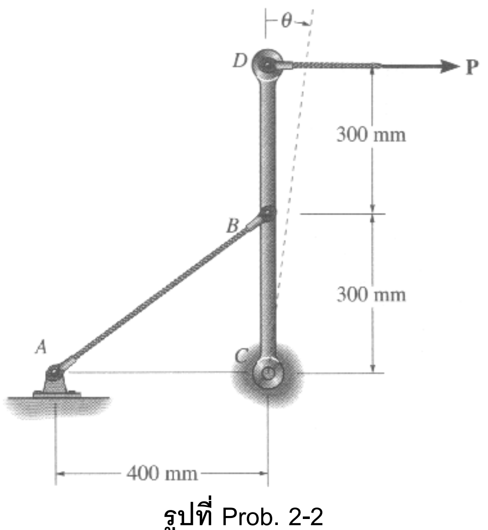
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

2-1 คานซึ่งมีความแกร่งมากถูกรองรับโดยหมุดที่จุด A และเส้นลวด BD และ CE ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-1 ถ้าแรง P ทำให้ปลาย A ของคานเคลื่อนที่ลง $10\,\mathrm{mm}$ จงหาความเครียดตั้งฉาก (normal strain) ที่เกิดขึ้นในเส้นลวด BD และ CE



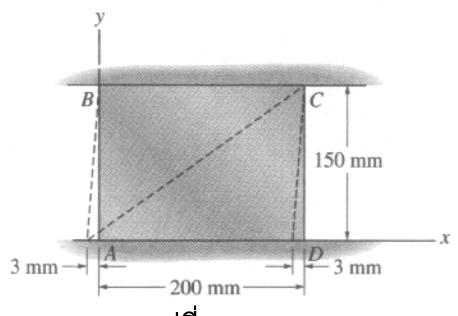
รูปที่ Prob. 2-1

2-2 กำหนดให้ชิ้นส่วน CBD ของเครื่องจักรกล ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-2 มีความแกร่งสูงมาก และเคเบิล AB มีความเครียดตั้งฉากเกิดขึ้น $0.0035\,\mathrm{mm/mm}$ ภายใต้แรง P จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุด D



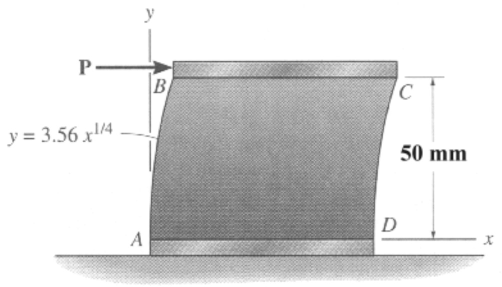
รูปที่ Prob. 2-2

2-3 แผ่นเหล็กรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกทำให้เปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-3 จงหาค่าความเครียดเฉือนเฉลี่ย (average shear strain) ของแผ่นเหล็ก และค่าความเครียดตั้งฉากเฉลี่ยในแนว AC และ AB



รูปที่ Prob. 2-3

2-4 แท่ง polysulfone ถูกยึดติดกับแผ่นเหล็กที่มีความแกร่งมากที่ผิวด้านบนและด้านล่างและถูกทำให้เปลี่ยนแปลงรูปร่างดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-4 โดยการเปลี่ยนแปลงรูปร่างทางด้านข้างอยู่ในรูปของสมการ $y = 3.56x^{1/4}$ จงหาค่าความเครียดเฉือน (shear strain) ที่จุด A และจุด B



รูปที่ Prob. 2-4

บทที่ 3

คุณสมบัติทางกลของวัสดุ (Mechanical Properties of Materials)

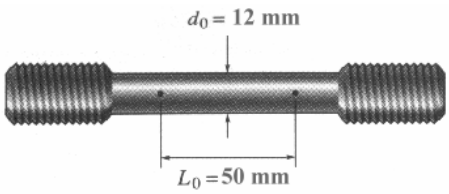
เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

3.1 การทดสอบวัสดุ (Material Testings)

คุณสมบัติทางกลของวัสดุ (mechanical properties of materials) ดังเช่นที่แสดงในภาคผนวกที่ 1 จะหามาได้จากการทดสอบตัวอย่างทดสอบ (specimen) ของวัสดุในห้องปฏิบัติการ โดยการทดสอบวัสดุจะต้องทำตามมาตรฐาน (standard) ที่ได้รับการยอมรับโดยทั่วไป เช่น มาตรฐานของ American Society for Testing and Materials (ASTM) และมาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม กระทรวงอุตสาหกรรม (มอก.) เป็นต้น เพื่อที่เราจะสามารถเปรียบเทียบผลการทดสอบที่ได้กับผลการทดสอบที่ได้จากการทดสอบโดยบุคคลอื่น

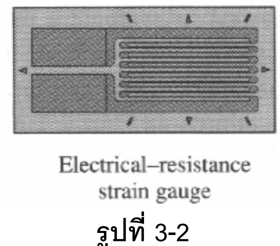
การทดสอบวัสดุที่มีความสำคัญมากในงานวิศวกรรมคือ การทดสอบแรงดึง (tension test) ซึ่งมักจะใช้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงดึง (tensile stress) กับความเครียดดึง (tensile strain) ของวัสดุ โดยทั่วไปแล้ว ขั้นตอนการทดสอบแรงดึงจะมีดังนี้

1. เตรียมตัวอย่างทดสอบให้มีรูปร่างและขนาดตามที่มาตรฐานกำหนด จากนั้น ทำเครื่องหมายบนตัวอย่างทดสอบเป็นจุด 2 จุด เพื่อใช้เป็นความยาวเริ่มต้น (gauge-length) โดยให้เส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุดนั้นขนานไปกับแนวแกนของตัวอย่างทดสอบ ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 3-1



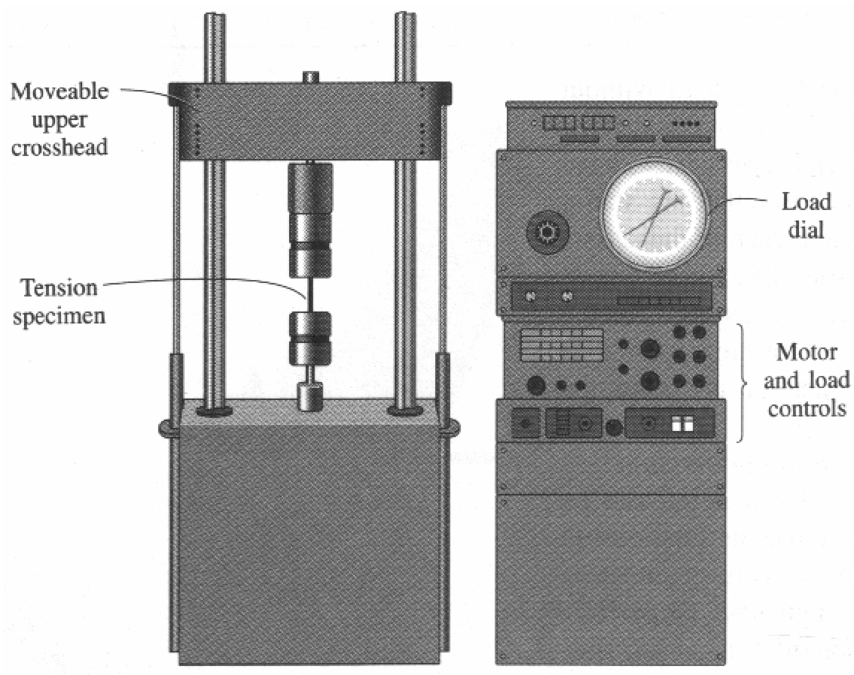
รูปที่ 3-1

2. วัดเส้นผ่านศูนย์กลางของตัวอย่างทดสอบ เพื่อหาพื้นที่หน้าตัดเริ่มต้นของตัวอย่างทดสอบ A_o และวัดความยาวของ gauge-length L_o ในกรณีที่ใช้ electrical-resistance strain gauge ดังที่แสดงในรูปที่ 3-2 เราจะไม่ทำเครื่องหมายและวัดความยาวของ gauge-length ดังกล่าว แต่จะทำการติดตั้ง strain gauge แทน



รูปที่ 3-2

3. ติดตั้งตัวอย่างทดสอบเข้ากับเครื่องทดสอบ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-3 จากนั้น ทำการติดตั้งเครื่องมือที่ใช้วัดการยืดตัวของตัวอย่างทดสอบ เช่น extensometer เป็นต้น เข้ากับตัวอย่างทดสอบ ในกรณีที่ใช้ strain gauge เราจะต่อวงจรไฟฟ้าจาก strain gauge เข้ากับ strain indicator
4. เพิ่มแรง (load) ให้กับตัวอย่างทดสอบอย่างช้าๆ ด้วยความเร็วที่คงที่ ตามมาตรฐานการทดสอบ
5. ทำการอ่านค่าของแรง P และค่าการยืดตัว (elongation) δ หรือค่าของความเครียดอย่างสม่ำเสมอและจดบันทึกค่าต่างๆ ที่อ่านได้ จนกระทั่ง ตัวอย่างทดสอบเกิดการวิบัติ



รูปที่ 3-3

การทดสอบอีกอย่างหนึ่งที่มีความสำคัญมากในงานวิศวกรรมคือ การทดสอบแรงกดอัด (compression test) ซึ่งขั้นตอนในการทำการทดสอบจะมีลักษณะที่คล้ายกับการทดสอบแรงดึง แต่แรงที่กระทำกับตัวอย่างทดสอบจะเป็นแรงกดอัด ตัวแปรที่เราต้องการวัดคือค่าของแรงกดอัด P และค่าการหดตัว δ (contraction) หรือค่าของความเครียดของตัวอย่างทดสอบ

3.2 **แผนภาพหน่วยแรง-ความเครียด** (Stress-Strain Diagram)

ข้อมูลของแรงดึงและการยืดตัวที่ได้มาจากการทดสอบแรงดึงหรือข้อมูลของแรงกดอัดและการหดตัวที่ได้มาจากการทดสอบแรงกดอัดจะถูกนำมาคำนวณเพื่อเขียนแผนภาพ *stress-strain diagram* ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 3-4 ซึ่งเป็น stress-strain diagram ที่ได้จากการทดสอบแรงดึงของเหล็กกล้าคาร์บอนต่ำ (mild steel) โดยทั่วไปแล้ว เราจะแบ่ง stress-strain diagram ออกได้เป็น 2 ประเภทคือ engineering stress-strain diagram และ true stress-strain diagram

Engineering Stress-Strain Diagram

ค่าของหน่วยแรงและความเครียดที่ใช้ในการเขียนแผนภาพ stress-strain diagram ชนิดนี้จะหามาได้โดยการใช้ค่าเริ่มต้นของพื้นที่หน้าตัด A_o และค่าเริ่มต้นของความยาว L_o ของตัวอย่างทดสอบ (specimen) ซึ่งสมการของหน่วยแรงและความเครียดจะอยู่ในรูป

$$\sigma = \frac{P}{A_o} \tag{3-1}$$

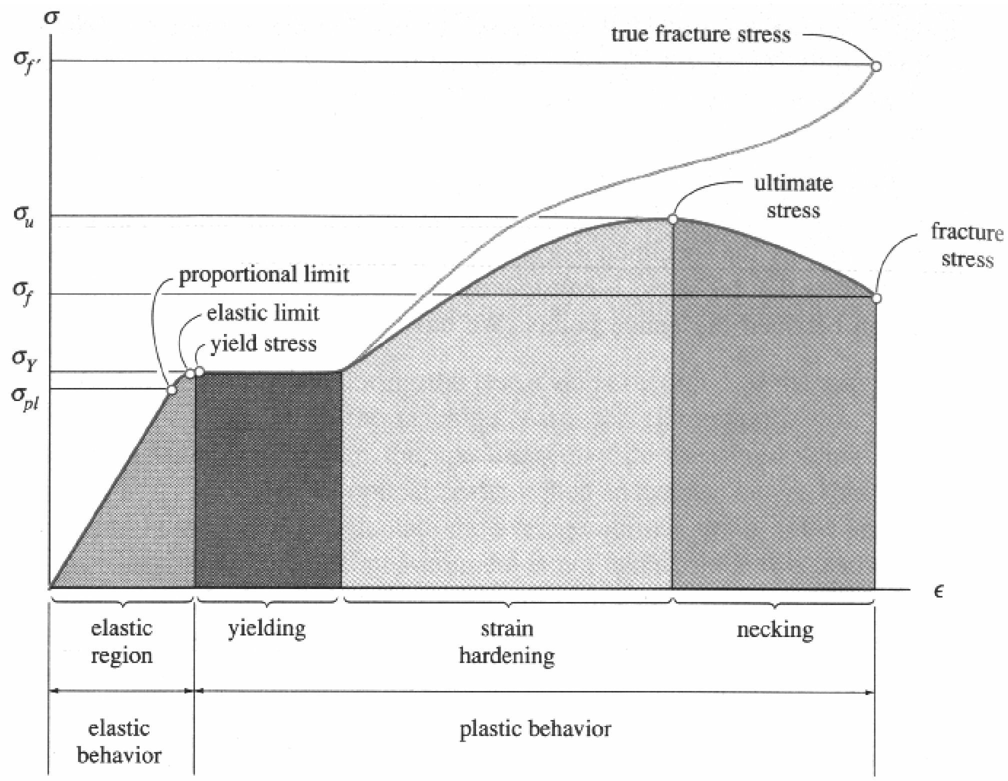
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_o} \tag{3-2}$$

True Stress-Strain Diagram

ค่าของหน่วยแรงและความเครียดที่ใช้ในการเขียนแผนภาพ true stress-strain diagram จะหามาได้โดยการใช้ค่าของพื้นที่หน้าตัด A และความยาวของตัวอย่างทดสอบ (specimen) L ในขณะที่เราอ่านค่าของแรงดึง P และการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง δ โดยที่

$$\widetilde{\sigma} = \frac{P}{A} = \sigma\left(\frac{A_o}{A}\right)$$

$$\widetilde{\varepsilon} = \int_{L_o}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\frac{L}{L_o} = \ln(1+\varepsilon)$$



รูปที่ 3-4

โดยทั่วไปแล้ว โครงสร้างทางด้านวิศวกรรมจะถูกออกแบบให้มีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่น (elastic) ภายใต้การกระทำของแรงหรือน้ำหนักบรรทุกที่ใช้ในการออกแบบ ซึ่งในช่วงนี้ วัสดุจะยังคงมีความแกร่ง (stiffness) ที่สูงและความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียดของ engineering stress-strain diagram และ true stress-strain diagram แทบจะไม่มีความแตกต่างกันเลย ดังนั้น โดยทั่วไปแล้ว เราจะใช้ engineering stress-strain diagram มากกว่า true stress-strain diagram เพราะว่าเราเขียน engineering stress-strain diagram ได้ง่ายกว่า true stress-strain diagram

จากรูปที่ 3-4 พฤติกรรมของเหล็กกล้าคาร์บอนต่ำจะถูกแบ่งออกได้เป็น 4 ช่วง ดังต่อไปนี้

Elastic behavior (1^{st} region)

ในช่วงนี้ วัสดุที่ใช้ทำตัวอย่างทดสอบจะตอบสนองต่อแรงกระทำแบบยืดหยุ่นคือ เมื่อเอาแรงที่กระทำออกจากตัวอย่างทดสอบแล้ว ตัวอย่างทดสอบก็จะคืนตัวกลับไปที่รูปร่างและความยาวเริ่มต้น ซึ่งในช่วงนี้ ค่าของหน่วยแรง (stress) จะแปรผันโดยตรงกับความเครียด (strain) จนถึงค่าของหน่วยแรงค่าหนึ่ง ซึ่งถูกเรียกว่า พิกัดปฏิภาคหรือ proportional limit (σ_{pl})

เมื่อค่าของ stress ที่เกิดขึ้นมีค่ามากกว่าค่า σ_{pl} แล้ว วัสดุจะยังคงมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นอยู่ จุดสุดท้ายบน stress-strain diagram ที่วัสดุยังคงมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นนี้จะถูกเรียกว่า พิกัดยืดหยุ่นหรือ elastic limit โดยทั่วไปแล้ว ค่าความชันของ stress-strain curve จากจุด proportional limit จนถึงจุด elastic limit จะมีค่าลดลงเรื่อยๆ

ในการทดสอบแรงดึงของเหล็กนี้ เราจะหาจุด elastic limit ได้ยากมาก ซึ่งเราจะทำได้โดยการดึงตัวอย่างทดสอบให้ค่าของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นมีค่ามากกว่า σ_{pl} เล็กน้อย แล้วเอาแรงดึงดังกล่าวออก จากนั้น ตรวจสอบดูว่าตัวอย่างทดสอบดังกล่าวยังคงมีความยาวเท่าเดิมหรือไม่ ถ้ายังคงเท่าเดิม เราจะทำการดึงตัวอย่างทดสอบอีกครั้ง โดยให้แรงดึงในครั้งนี้มีค่ามากกว่าค่าแรงดึงก่อนหน้านี้เล็กน้อย แล้วทำการตรวจสอบเช่นเดิม กระทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งตัวอย่างทดสอบเริ่มไม่มีการคืนตัวกลับมาเท่าเดิม ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงที่เกิดจากแรงดึงดังกล่าวกับแรงดึงก่อนที่ตัวอย่างทดสอบเริ่มไม่มีการคืนตัวกลับมาเท่าเดิมจะเป็นค่า elastic limit ของวัสดุที่ใช้ทำตัวอย่างทดสอบนั้น

Yielding (2^{nd} region)

ช่วงการคราก (yielding) จะเริ่มเมื่อวัสดุมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างถาวรเกิดขึ้น ซึ่งค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในตัวอย่างทดสอบที่จุดนี้มีค่าเท่ากับหน่วยแรงครากหรือ yielding stress (σ_y) หลังจากผ่านจุดนี้ไปแล้ว ตัวอย่างทดสอบจะเกิดการยืดอย่างต่อเนื่องโดยไม่มีการเพิ่มขึ้นของแรงดึงเลย ซึ่งพฤติกรรมของวัสดุในลักษณะนี้เราจะเรียกว่า พฤติกรรมแบบพลาสติกอย่างสมบูรณ์ (perfectly plastic) ซึ่งเกิดขึ้นจากการที่ระนาบของผลึกของเหล็กมีการจัดเรียงตัวกันใหม่อย่างเป็นระเบียบมากขึ้นเรื่อยๆ

Strain Hardening (3^{rd} region)

เมื่อสิ้นสุดการ yielding ของวัสดุแล้ว ตัวอย่างทดสอบจะมีความสามารถในการต้านทานต่อแรงดึงเพิ่มมากขึ้นอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งจะเห็นได้จากการที่ stress-strain curve เริ่มที่มีความชันเพิ่มขึ้นอีกครั้งหนึ่ง แต่ความชันของ curve นี้จะมีค่าน้อยลงเรื่อยๆ จนกระทั่งสุดท้ายความชันของ curve นี้ก็จะมีค่าเป็นศูนย์ที่หน่วยแรงประลัยหรือ ultimate stress (σ_u) (จุดที่วัสดุมีความสามารถในการรับหน่วยแรงสูงสุด) เรามักจะเรียกพฤติกรรมของวัสดุในช่วงนี้ว่า strain hardening

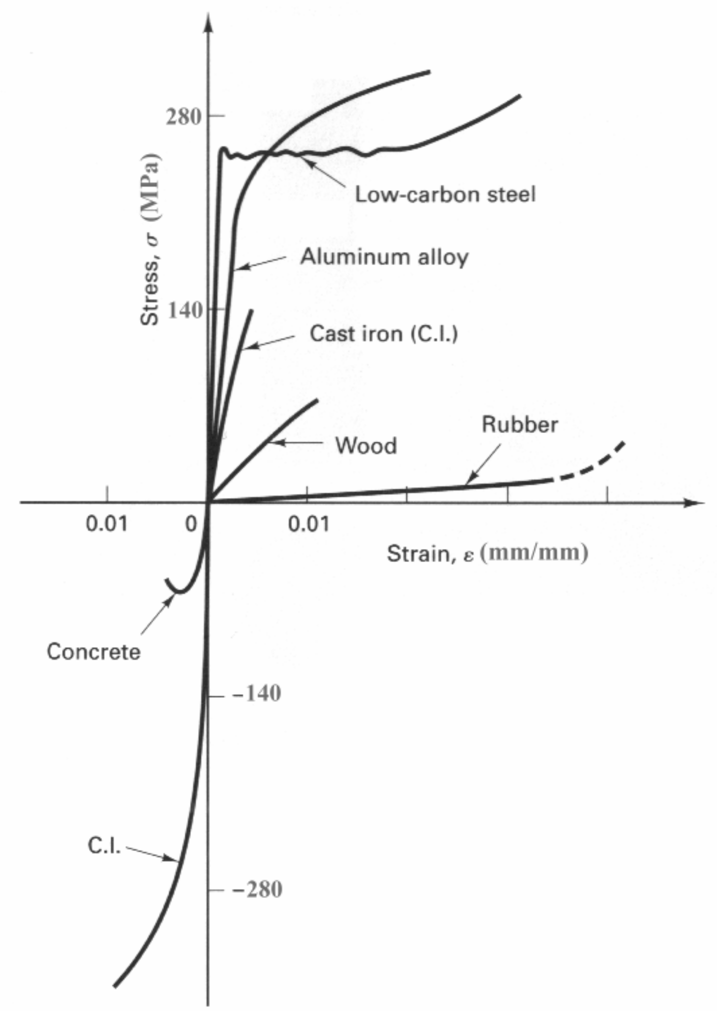
Necking (4^{th} region)

หลังจากที่หน่วยแรงในตัวอย่างทดสอบมีค่าเท่ากับ σ_u แล้ว พื้นที่หน้าตัดของตัวอย่างทดสอบ ในบริเวณ gauge-length จะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็วหรือที่เรียกกันว่า necking ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5a ซึ่งเป็นผลมาจากการเลื่อน (slip) ของระนาบของผลึกของเหล็กและจะทำให้พื้นที่หน้าตัดของตัวอย่างทดสอบก็จะมีค่าลดลงเรื่อยๆ ซึ่งจะเป็นผลทำให้ค่าแรงดึงและค่าความชันของ stress strain curve มีค่าลดลงตามไปด้วย จนกระทั่งถึงจุดที่วัสดุมีการแตกหักเกิดขึ้น ค่าของหน่วยแรงที่จุดนี้มักจะถูกเรียกว่า หน่วยแรงแตกหักหรือ fracture stress (σ_f)

รูปที่ 3-5

3.3 พฤติกรรมของวัสดุเหนียวและวัสดุเปราะ (Behavior of Ductile and Brittle Materials)

รูปที่ 3-6 แสดงตัวอย่างของ stress-strain diagram ของวัสดุชนิดต่างๆ ที่มักพบในงานวิศวกรรม จากรูป เราจะเห็นได้ว่า stress-strain diagram ของวัสดุแต่ละประเภทมีลักษณะที่แตกต่างกัน โดยทั่วไปแล้ว วัสดุจะถูกแบ่งออกเป็น 2 ประเภท ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะของ stress-strain diagram ของวัสดุ คือ วัสดุเหนียว (ductile materials) และวัสดุเปราะ (brittle materials)



รูปที่ 3-6

วัสดุเหนียว (ductile materials)

วัสดุเหนียว (ductile materials) เป็นวัสดุที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างสูงก่อนที่จะเกิดการวิบัติ (failure) เช่น เหล็กกล้าคาร์บอนต่ำและ aluminum alloys ดังที่แสดงในรูปที่ 3-6 เป็นต้น วัสดุประเภทนี้จะมีความสามารถในการดูดซึมพลังงานได้มาก

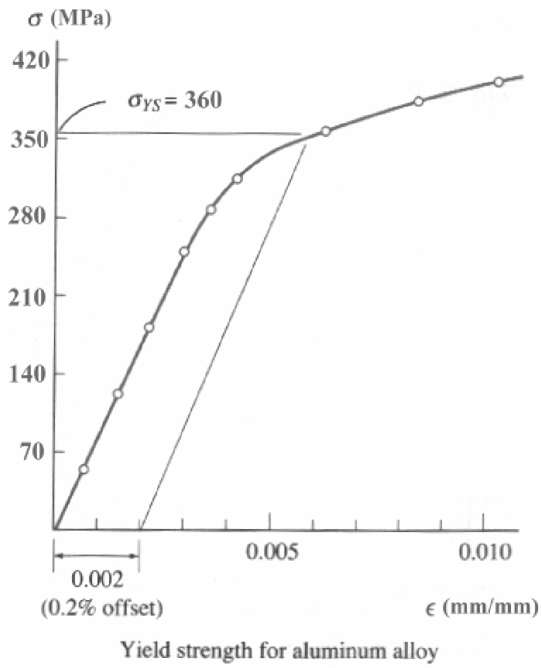
คุณสมบัติความเหนียว (ductility) ของวัสดุจะวัดจากค่าเปอร์เซ็นของการยืดตัว (percent elongation) หรือค่าเปอร์เซ็นของการลดลงของพื้นที่หน้าตัด (percent reduction of area) ของตัวอย่างทดสอบ ถ้ากำหนดให้ความยาว gauge length เริ่มต้นของตัวอย่างทดสอบมีค่าเท่ากับ L_o และความยาว gauge length ที่จุดที่ตัวอย่างทดสอบเกิดการแตกหักมีค่าเท่ากับ L_f แล้ว

$$\text{Percent elongation} = \frac{(L_f - L_o)}{L_o} 100\% \tag{3-3}$$

ถ้ากำหนดให้พื้นที่หน้าตัดเริ่มต้นของตัวอย่างทดสอบเท่ากับ A_o และพื้นที่หน้าตัดของตัวอย่างทดสอบที่จุดที่ตัวอย่างทดสอบเกิดการแตกหักเท่ากับ A_f แล้ว

$$\text{Percent reduction of area} = \frac{(A_f - A_o)}{A_o} 100\% \tag{3-4}$$

โลหะโดยส่วนใหญ่ เช่น aluminum alloy เป็นต้น จะไม่มีจุดคราก (yielding point) ของวัสดุที่ชัดเจน ดังที่แสดงในรูปที่ 3-7 ในทางปฏิบัติ เราจะหาค่าหน่วยแรงคราก (yielding stress) ของวัสดุดังกล่าวได้โดยใช้วิธี *offset method* ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีของ aluminum เราจะหาจุดครากได้โดยการกำหนดค่าความเครียดที่ 0.2% strain (0.002 mm/mm) บนแกนของ strain จากนั้น ทำการลากเส้นตรงให้ขนานไปกับส่วนของ stress-strain curve ที่เป็นเส้นตรง จุดที่เส้นตรงดังกล่าวตัดกับ stress-strain curve จะเป็น yielding point และค่าหน่วยแรงที่สอดคล้องกับจุดนี้จะเป็นค่า yielding stress ของ aluminum



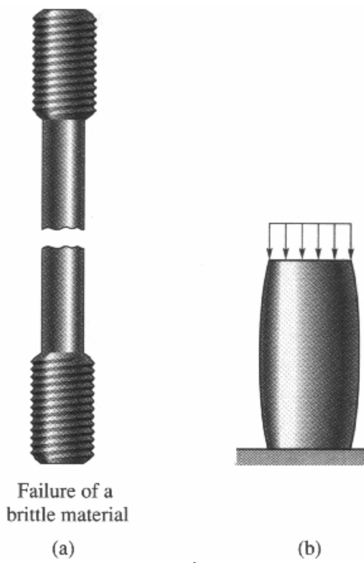
รูปที่ 3-7

วัสดุเปราะ (brittle materials)

วัสดุเปราะ (brittle materials) เป็นวัสดุที่ไม่มีการ yielding เกิดขึ้นหรือมีแต่น้อยมากก่อนที่วัสดุจะเกิดการวิบัติ เช่น เหล็กหล่อ (cast iron) และ concrete ดังที่แสดงในรูปที่ 3-6 เป็นต้น

วัสดุเปราะมักจะเป็นวัสดุที่มีค่าหน่วยแรงดึงประลัย (ultimate tensile stress) ที่ต่ำมากเมื่อเทียบกับค่าหน่วยแรงกดอัดประลัย (compressive ultimate stress) ทั้งนี้เนื่องจากว่า เมื่อวัสดุเปราะถูกกระทำโดยแรงดึงแล้ว รอยแตกขนาดเล็กมากบนผิวของตัวอย่างทดสอบ (เนื่องจากความไม่สมบูรณ์ของวัสดุ) จะถูกทำให้ขยายตัวอย่างรวดเร็ว จนถึงจุดๆ หนึ่งเมื่อค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นมีค่ามากกว่ากำลังของวัสดุแล้ว ตัวอย่างทดสอบก็จะเกิดการแตกหักอย่างทันทีทันใดและการวิบัติจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 3-8a

ในทางกลับกัน รอยแตกดังกล่าวจะถูกปิดลงภายใต้แรงกดอัดและตัวอย่างทดสอบจะมีพฤติกรรมที่คล้ายกับวัสดุเหนียว โดยทั่วไปแล้ว ภายใต้แรงกดอัดนี้ ตัวอย่างทดสอบจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างโดยมีการโป่งออกทางด้านข้างที่มีลักษณะคล้ายถัง barrel ก่อนที่จะเกิดการวิบัติ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-8b



รูปที่ 3-8

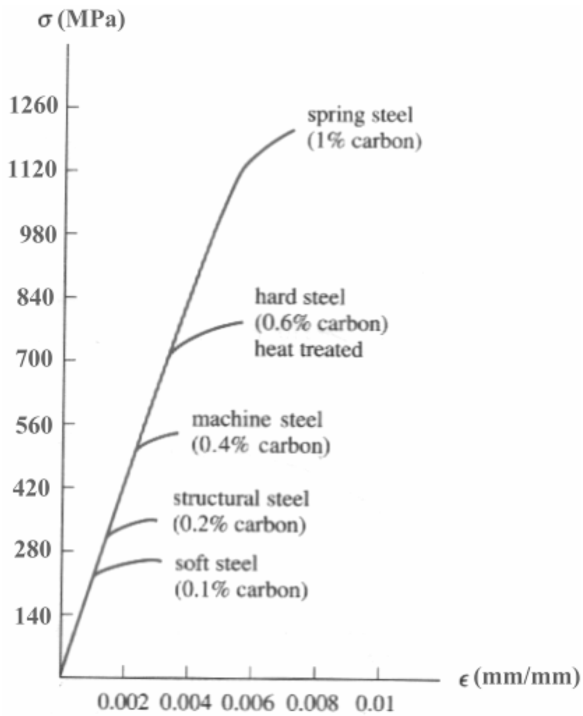
3.4 กฎของฮุค (Hooke's Law)

ในปี ค.ศ. 1676 Robert Hooke ได้พบว่า เมื่อวัสดุมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) ค่าหน่วยแรง (stress) จะแปรผันโดยตรงกับค่าความเครียด (strain) ซึ่งเรียกว่า Hooke's Law โดยที่

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (3\text{-}5)$$

เมื่อ $E =$ ค่า modulus of elasticity หรือ Young's modulus ของวัสดุ ซึ่งเป็นค่าความชันของ stress-strain curve ในช่วงดังกล่าว ค่า E นี้จะมีหน่วยเช่นเดียวกับหน่วยแรง เช่น GPa เป็นต้น ภาคผนวกที่ 1 แสดงค่า modulus of elasticity ของวัสดุชนิดต่างๆ ในทางวิศวกรรม

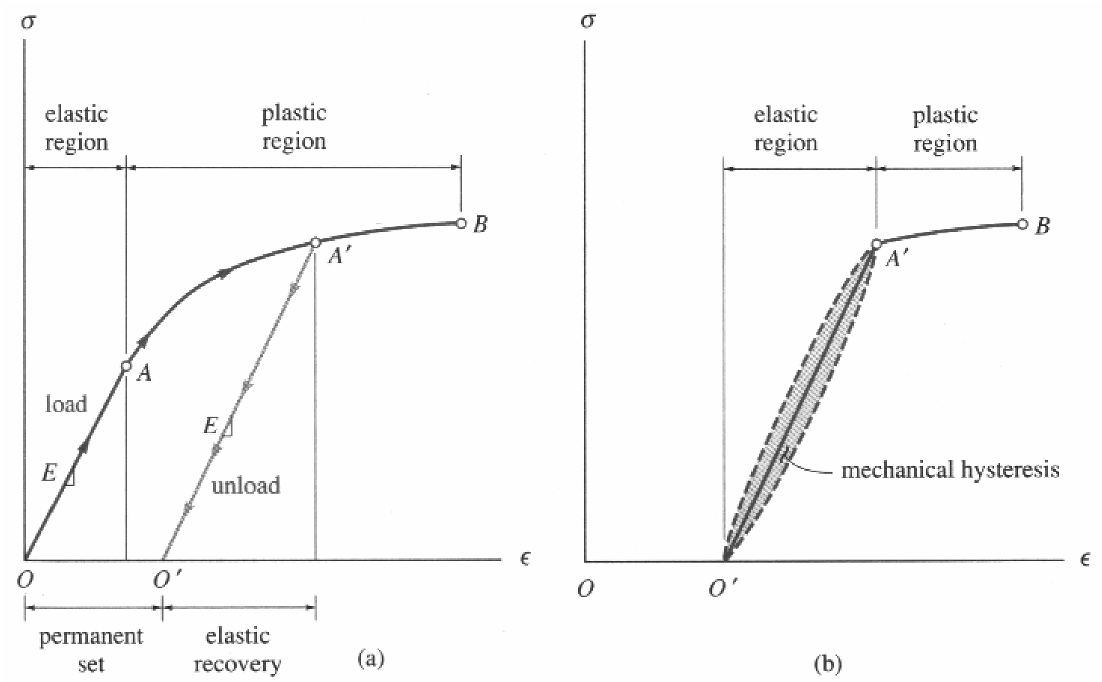
ค่า E เป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของวัสดุ ซึ่งจะไม่ขึ้นอยู่กับกำลังของวัสดุ จากรูปที่ 3-9 เราจะเห็นได้ว่า เหล็กแต่ละชนิดจะมีค่า proportional limit ที่แตกต่างกัน แต่ค่า E ของเหล็กเหล่านั้นจะมีค่าที่เท่ากันคือ $\cong$ 200 GPa



รูปที่ 3-9

Strain Hardening

พิจารณารูปที่ 3-10a ซึ่งเป็น stress-strain curve ของวัสดุเหนียว เช่น เหล็กกล้าและทองเหลือง (brass) เป็นต้น เมื่อตัวอย่างทดสอบของวัสดุดังกล่าวถูกกระทำโดยแรงผ่านจุดคราก (yielding point) A ไปสู่ช่วงพลาสติก (plastic) ที่จุด A' แล้วเอาแรงกระทำนั้นออก วัสดุจะมีการคืนตัวสู่สภาวะสมดุลจากจุด A' ไปยังจุด O' โดยที่การคืนตัวนี้จะเป็นการคืนตัวแบบยืดหยุ่น (elastic) และวัสดุจะยังคงมีความเครียดพลาสติก (plastic strain) คงเหลืออยู่ในตัววัสดุเท่ากับ OO' ซึ่งเรามักเรียกความเครียดพลาสติกนี้ว่า permanent set



รูปที่ 3-10

ถ้าเราทำการให้แรงกระทำกับตัวอย่างทดสอบอีกครั้ง วัสดุก็จะเกิดการตอบสนองตามแนวการคืนตัวแบบยืดหยุ่นตามเส้น $O'A'$ จนถึงจุด yielding อีกครั้งหนึ่งที่จุด A' จากนั้น stress-strain curve ของวัสดุจะไปตามแนวทางเดิมจนถึงจุด B ซึ่งการที่วัสดุมีจุด yielding ที่เปลี่ยนไปนี้เกิดจาก strain hardening และจะทำให้วัสดุมีช่วงยืดหยุ่นที่ใหญ่ขึ้น แต่ความเหนียว (ductility) ของวัสดุจะมีค่าน้อยลง (สังเกตได้จากการที่พื้นที่ใต้ stress-strain curve มีค่าน้อยลง)

โดยทั่วไปแล้ว พลังงานความร้อนบางส่วนจะสูญเสียไปจากตัวอย่างทดสอบ เมื่อให้แรงกระทำกับตัวอย่างทดสอบซ้ำไปซ้ำมา ซึ่งจะเป็นผลให้ unloaded curve และ loaded curve ของตัวอย่างทดสอบมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 3-10b โดยที่พื้นที่ที่อยู่ระหว่าง unloaded curve และ loaded curve จะเป็นค่าของพลังงานที่สูญเสียไปและมักจะถูกเรียกว่า hysteresis loop ซึ่งมีความสำคัญมากในการเลือกวัสดุที่จะใช้ทำ damper เพื่อรองรับการสั่นของโครงสร้างหรือเครื่องจักรกล

3-5 พลังงานความเครียดเนื่องจากหน่วยแรงในแนวแกนเดียว (Strain Energy Caused by Uniaxial Stress)

พลังงานความเครียด (strain energy) คือ พลังงานที่ถูกเก็บกักไว้ในวัสดุเมื่อวัสดุถูกทำให้เปลี่ยนแปลงรูปร่างภายใต้การกระทำของแรงภายนอก ในกรณีของตัวอย่างทดสอบที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนเพียงแกนเดียว (uniaxial force) แล้ว cubic volume element ที่ตัดออกมาจากตัวอย่างทดสอบจะถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงแบบ uniaxial stress ดังที่แสดงในรูปที่ 3-11a โดยที่

ค่าของแรงภายในที่เกิดจาก uniaxial stress จะมีค่าเท่ากับ

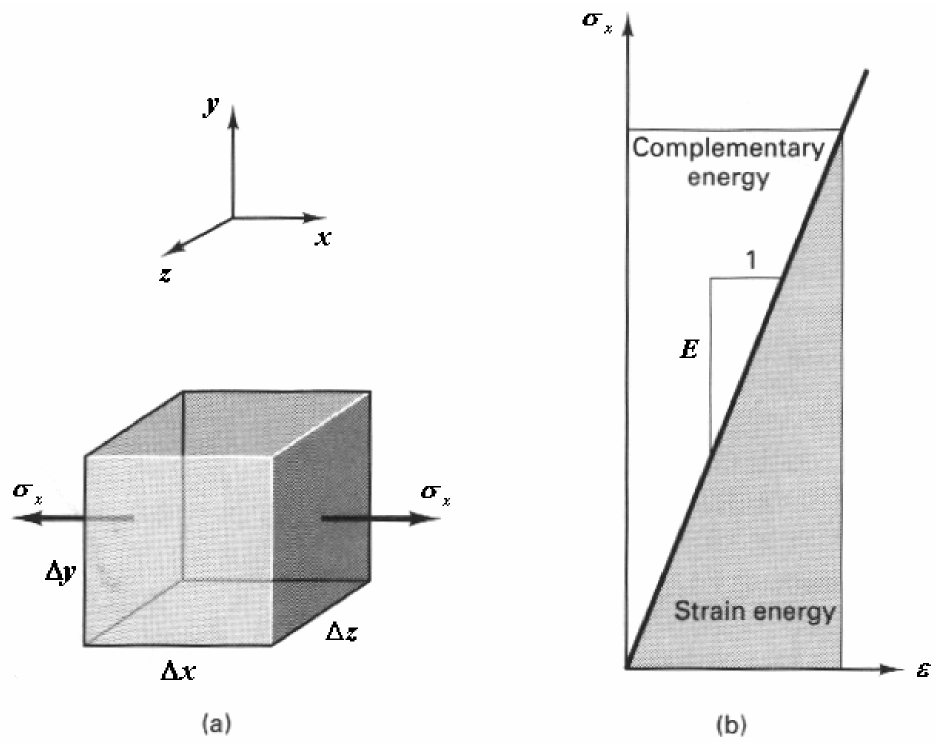
$$\Delta P = \sigma \Delta A = \sigma(\Delta y \Delta z)$$

ค่าของการยืดตัวที่เกิดจาก uniaxial stress จะมีค่าเท่ากับ

$$\delta = \varepsilon \Delta x$$

เมื่อวัสดุยังคงมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic และค่าของแรงมีการเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอจากศูนย์ถึงค่า ΔP ซึ่งทำให้ตัวอย่างทดสอบเกิดการยืดตัวมีค่าเพิ่มขึ้นจากศูนย์ถึง $\delta = \varepsilon \Delta z$ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-11b แล้ว ค่าของงานภายนอกที่เกิดขึ้นบน cubic volume element ดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้แผนภาพ load-displacement diagram ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\frac{\Delta P}{2}(\delta)$$



รูปที่ 3-11

สำหรับระบบที่ไม่มีการสูญเสียพลังงาน (conservative energy system) งานภายนอกจะมีค่าเท่ากับงานภายใน (internal work) ที่สะสมอยู่ในวัสดุ ดังนั้น เราจะได้ว่า strain energy ΔU จะอยู่ในรูป

$$\Delta U = \frac{\Delta P}{2}\varepsilon \Delta z = \frac{1}{2}(\sigma\ \Delta x \Delta y)\ \varepsilon \Delta z = \frac{1}{2}(\sigma\varepsilon)\Delta V$$

เมื่อ ΔV เป็นปริมาตรของ cubic volume element และมีค่าเท่ากับ $\Delta x \Delta y \Delta z$ ดังนั้น strain energy density หรือ strain energy ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรจะหาได้จากสมการ

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{3-6}$$

ถ้าวัสดุมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic แล้ว จาก Hooke's Law เราจะเขียนสมการที่ 3-6 ได้ใหม่ในรูป

$$u = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} \tag{3-7}$$

Modulus of Resilience

ค่า modulus of resilience เป็นค่า strain energy density ของวัสดุ เมื่อวัสดุมีค่าหน่วยแรงเท่ากับ proportional limit ดังที่แสดงโดยสามเหลี่ยมสีทึบภายใต้ stress-strain diagram ในรูปที่ 3-12a ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$u_r = \frac{1}{2}\sigma_{pl}\varepsilon_{pl} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{pl}^2}{E} \tag{3-8}$$

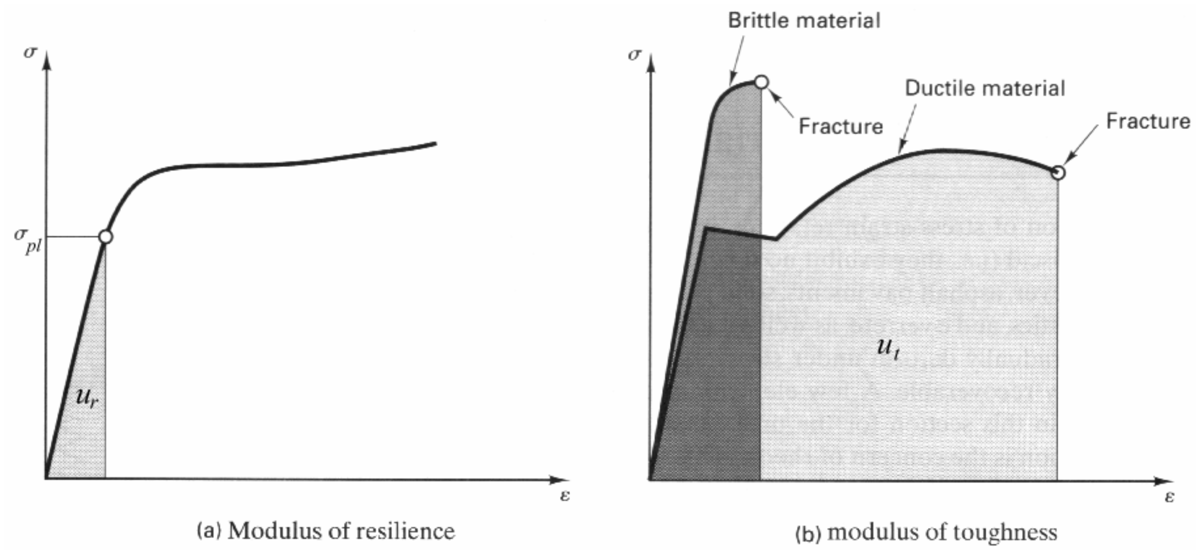
ซึ่งค่า modulus of resilience นี้จะบ่งบอกถึงความสามารถของวัสดุในการดูดซึมพลังงานโดยไม่มีการเสียรูปอย่างถาวร (permanent deformation)

Modulus of Toughness

ค่า modulus of toughness หรือ u_t เป็นค่า strain energy density ทั้งหมดที่วัสดุเก็บกักไว้ก่อนที่วัสดุจะเกิดการวิบัติ ดังที่แสดงโดยพื้นที่ใต้ stress-strain diagram ที่ระบายด้วยสีทึบ ในรูปที่ 3-12b ซึ่งค่า modulus of toughness นี้มีความสำคัญมากในการที่จะป้องกันการพังทลายของโครงสร้าง เมื่อโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงที่มีค่าสูงมากๆ โดยที่ไม่ได้ออกแบบให้รองรับไว้ (accidentally overloaded) เช่น แรงจากแผ่นดินไหว เป็นต้น นอกจากนั้นแล้ว เนื่องจากวัสดุที่มีค่า modulus of toughness สูงมักจะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่สูงมากก่อนที่จะเกิดการวิบัติ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวจะเป็นเครื่องเตือนการวิบัติของโครงสร้าง

สำหรับวัสดุเหนียว เราจะประมาณค่า modulus of toughness ได้จากสมการ

$$u_t \approx \varepsilon_f\left(\frac{\sigma_y + \sigma_u}{2}\right)$$



รูปที่ 3-12

ตัวอย่างที่ 3-1

จากการทดสอบแรงดึงของตัวอย่างทดสอบที่ทำด้วย steel alloy ซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางเมื่อตอนเริ่มต้น 12.5 mm และมีความยาวของ gauge length เท่ากับ 50 mm เราได้ข้อมูลของ loads และ elongation ดังที่แสดงโดยตารางข้างล่างนี้ จงเขียน stress-strain diagram และจงหาค่าของ

a.) Modulus of elasticity

b.) Proportional stress, Modulus of resilience, และ Yielding stress

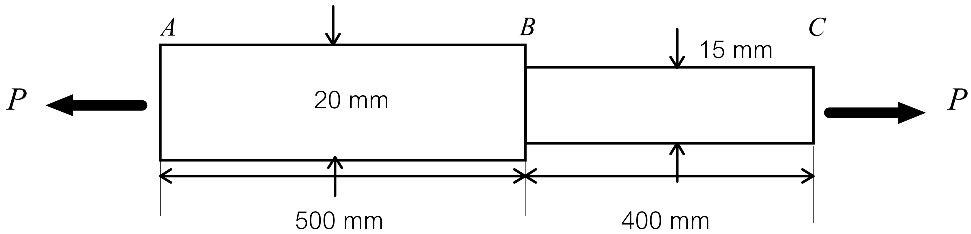
c.) Ultimate stress และ Fracture stress

ตารางที่ EX 3-1

Load (kN)	Elongation (mm)	Area (m^2)	Stress(MPa)	Strain ($\mathrm{mm/mm}$)
0	0	1.227E-04	0	0
11.1	0.0175	1.227E-04	90.45	0.00035
31.9	0.0600	1.227E-04	259.94	0.00120
37.8	0.1020	1.227E-04	308.02	0.00204
40.9	0.1650	1.227E-04	333.28	0.00330
43.6	0.2490	1.227E-04	355.28	0.00498
53.4	1.0160	1.227E-04	435.14	0.02032
62.3	3.0480	1.227E-04	507.66	0.06096
64.5	6.3500	1.227E-04	525.59	0.12700
62.3	8.8900	1.227E-04	507.66	0.17780
58.8	11.9380	1.227E-04	479.14	0.23876

d.) ถ้าแท่งเหล็กทรงกลมซึ่งทำด้วยเหล็กดังกล่าว ถูกกระทำโดยแรงดึง $P = 68\ \mathrm{kN}$ ดังที่แสดงในรูป (a) จงหาค่าการยืดตัวของแท่งเหล็ก

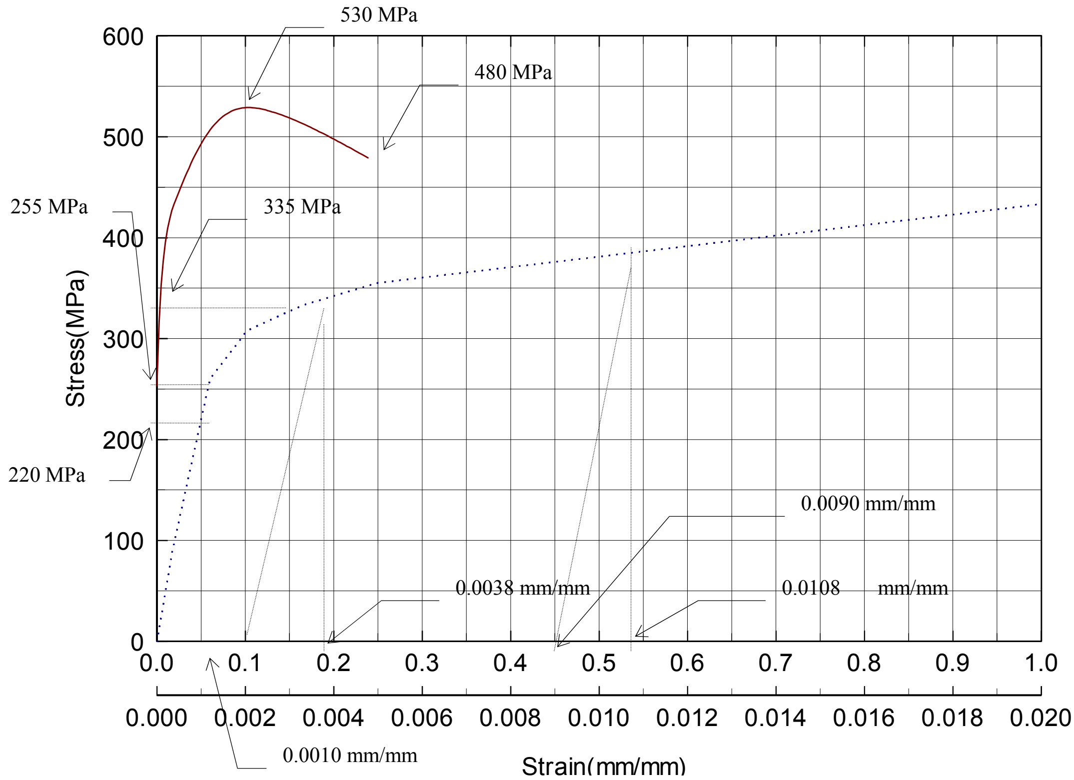
e.) ถ้าเอาแรงดึงออก จงหาว่าแท่งเหล็กจะคืนรูปสู่รูปร่างเดิมหรือไม่ ถ้าไม่คืนรูปสู่รูปร่างเดิม แท่งเหล็กดังกล่าวจะมีการยืดถาวรเหลือเท่าไร



(a)

รูปที่ Ex 3-1

จากข้อมูลที่กำหนดมาให้ เราสามารถหาค่าของ stress และ strain ที่เกิดขึ้นบนตัวอย่างทดสอบได้ ดังที่แสดงในตาราง และเมื่อนำค่า stress และ strain มาเขียน graph เราจะได้แผนภาพ stress-strain diagram ตามที่แสดงโดยเส้นทึบ และ graph เส้นประจะเป็น graph ที่ขยายออกมาจาก graph เส้นทึบ โดยขยายขึ้นมาจากเดิม 50 เท่า



a.) **หาค่า** Modulus of elasticity

ในการหาค่า modulus of elasticity นั้น เราจะหาค่าของ slope ของ stress-strain curve ในส่วนที่เป็นเส้นตรงส่วนแรก จาก graph เส้นประ เมื่อ strain มีค่า 0.001 $\mathrm{mm/mm}$ แล้ว stress จะมีค่าประมาณ 220 MPa ดังนั้น

$$E = \frac{220\ \mathrm{MPa}}{0.001\ \mathrm{mm/mm}} = 220\ \mathrm{GPa}$$ <u>Ans.</u>

b.) **หาค่า** Proportional stress, Modulus of resilience, **และ** Yielding stress

เราจะเห็นได้จาก graph เส้นประว่า จุดสุดท้ายที่ stress-strain curve เป็นเส้นตรงอยู่ที่ค่าของ stress เท่ากับ $255\ \mathrm{MPa}$ โดยประมาณและ strain มีค่าเท่ากับ $0.0012\ \mathrm{mm/mm}$ ดังนั้น

$$\sigma_{pl} = 255\ \mathrm{MPa}$$ <u>Ans.</u>

จากสมการของ modulus of resilience เราจะได้ว่า

$$u_r = \frac{1}{2}\sigma_{pl}\varepsilon_{pl} = \frac{1}{2}(255\ \mathrm{MPa})(0.0012\ \mathrm{mm/mm}) = 0.153\ \mathrm{MJ/m^3}$$ <u>Ans.</u>

นอกจากนั้นแล้ว เราจะเห็นได้ว่า stress-strain curve ไม่มีจุด yielding point ที่ชัดเจน ดังนั้น เราจะต้องใช้วิธี 0.2% offset ในการหาค่า yielding stress ซึ่งเมื่อเราทำการลากเส้นตรงจากจุดที่ strain มีค่าเท่ากับ 0.0020 ให้ขนานไปกับส่วนที่เป็นเส้นตรงส่วนแรกของ stress-strain curve จนไปตัดกับ stress-strain curve แล้ว เราจะได้ค่าของ stress ที่จุดตัดนั้นมีค่าเท่ากับ $335\ \mathrm{MPa}$ โดยประมาณ ดังนั้น

$$\sigma_y = 335\ \mathrm{MPa}$$ <u>Ans.</u>

c.) **หาค่า** Ultimate stress **และ** Fracture stress

จาก stress-strain curve เราจะเห็นได้ว่า ค่าสูงสุดของ stress มีค่าเท่ากับ $530\ \mathrm{MPa}$ โดยประมาณ ดังนั้น

$$\sigma_u = 530\,\mathrm{MPa} \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

และจุดสุดท้ายของ stress-strain curve มีค่า stress เท่ากับ $480\ \mathrm{MPa}$ โดยประมาณ ดังนั้น

$$\sigma_f = 480\,\mathrm{MPa} \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

d.) **หาค่าการยืดตัวของแท่งเหล็ก**

ค่าของหน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นในช่วง AB และ BC มีค่าเท่ากับ

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{68(10^3)\mathrm{N}}{\pi(0.01\,\mathrm{m})^2} = 216.5\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{68(10^3)\mathrm{N}}{\pi(0.0075\,\mathrm{m})^2} = 384.8\,\mathrm{MPa}$$

จากแผนภาพ stress-strain diagram เราจะเห็นได้ว่า ชิ้นส่วน AB ยังคงมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง elastic เนื่องจาก $\sigma_{AB} < \sigma_y = 335\,\mathrm{MPa}$ โดยใช้ Hooke's law เราจะได้ว่า

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} = \frac{216.5(10^6)\mathrm{Pa}}{220(10^9)\mathrm{Pa}} = 0.0009841\,\mathrm{mm/mm}$$

และชิ้นส่วน BC จะมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง plastic เนื่องจาก $\sigma_{BC} > \sigma_y = 335\,\mathrm{MPa}$ จากแผนภาพ stress-strain diagram เมื่อ $\sigma_{BC} = 384.8\,\mathrm{MPa}$ แล้ว $\varepsilon_{BC} \approx 0.0108\,\mathrm{mm/mm}$ ดังนั้น ค่าการยืดตัวของแท่งเหล็กจะมีค่าเท่ากับ

$$\delta = \sum \varepsilon L = 0.0009841(500\,\mathrm{mm}) + 0.0108(400\,\mathrm{mm}) = 4.8\,\mathrm{mm} \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

e.) **หาว่าแท่งเหล็กจะคืนรูปสู่รูปร่างเดิมหรือไม่ ถ้าเอาแรงดึงออก และถ้าไม่คืนรูปสู่รูปร่างเดิมแล้ว แท่งเหล็กดังกล่าวจะมีการยืดถาวรเหลือเท่าไร**

เมื่อเอาแรงดึง P ออก ชิ้นส่วน AB จะคืนรูปกลับสู่ที่รูปร่างเดิมเนื่องจากมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง elastic แต่ชิ้นส่วน BC จะมีการคืนตัวแค่บางส่วนเท่านั้น เดิมเนื่องจากมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง plastic โดยที่ ค่า strain เนื่องจากการคืนตัวบางส่วนจะมีค่าเท่ากับ

$$\varepsilon_{\mathrm{rec}} = \frac{\sigma_{BC}}{E} = \frac{384.8(10^6)\ \mathrm{Pa}}{220(10^9)\ \mathrm{Pa}} = 0.00175\,\mathrm{mm/mm}$$

ดังนั้น ค่า plastic strain ที่ยังคงอยู่จะมีค่าเท่ากับ

$$\varepsilon_{\mathrm{remain}} = 0.0108 - 0.00175 = 0.00905\,\mathrm{mm/mm}$$

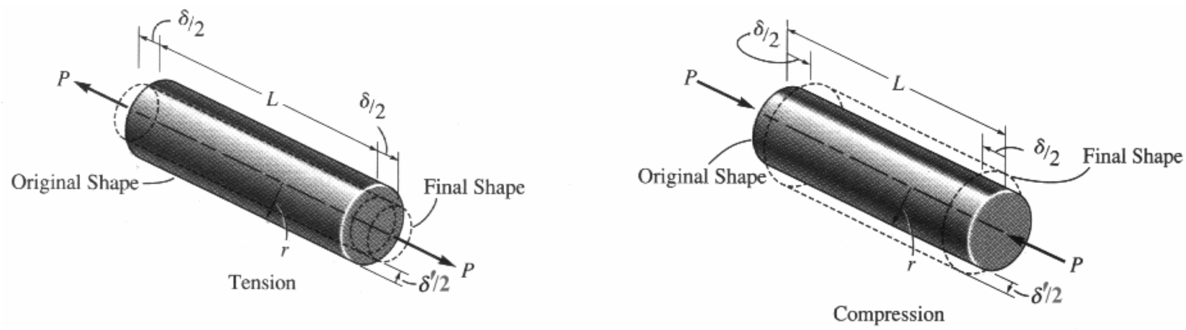
และแท่งเหล็กจะมีการยืดถาวรคงเหลืออยู่เท่ากับ

$$\delta' = \varepsilon_{\mathrm{remain}} L_{BC} = 0.00905(400\,\mathrm{mm}) = 3.6\,\mathrm{mm} \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

3.6 อัตราส่วนโพซอง (Poisson's Ratio)

เมื่อแท่งวัตถุ ซึ่งมีความยาวเริ่มต้น L และมีเส้นผ่านศูนย์กลางเริ่มต้น d ถูกกระทำโดยแรงดึงในแนวแกน (axial tensile force) ดังที่แสดงในรูปที่ 3-13 แล้ว แท่งวัตถุดังกล่าวจะเกิดการยืดตัว (elongation) δ ในแนวแกน (longitudinal direction) และจะเกิดการหดตัว (contraction) δ' ในแนวขวาง (lateral direction) ของแท่งวัตถุ ในทางตรงกันข้าม เมื่อแท่งวัตถุดังกล่าวถูกกระทำโดยแรงกดอัดในแนวแกน (axial compression force) แล้ว แท่งวัตถุจะเกิดการหดตัว δ ในแนวแกนและจะเกิดการยืดตัว δ' ในแนวขวาง ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 3-13 ดังนั้น จากนิยามของความเครียดตั้งฉาก สมการของ strain ในแนวแกน ε_{long} และในแนวขวาง ε_{lat} เนื่องจากแรงดึงจะอยู่ในรูป

$$\varepsilon_{long} = \frac{\delta}{L} \qquad \text{และ} \qquad \varepsilon_{lat} = -\frac{\delta'}{d}$$



รูปที่ 3-13

ในช่วงต้นคริสตศักราช 1800 S.D. Poisson ได้พบว่า เมื่อวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่น (elastic) แล้ว อัตราส่วนของ ε_{lat} ต่อ ε_{long} จะมีค่าที่คงที่และจะเป็นค่าเฉพาะตัวของวัสดุแบบ homogenous และ isotropic ซึ่งค่าอัตราส่วนดังกล่าวได้ถูกเรียกว่า Poisson's ratio และจะเขียนได้ในรูป

$$\nu = -\frac{\text{lateral strain}}{\text{axial strain}} = -\frac{\varepsilon_{lat}}{\varepsilon_{long}} \tag{3-9}$$

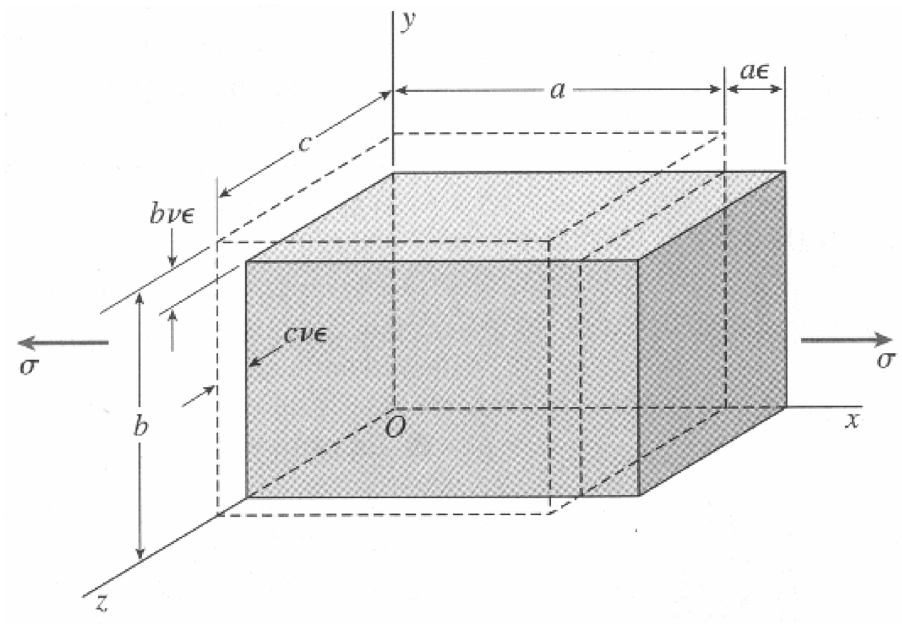
Poisson's ratio นี้จะไม่มีหน่วยและวัสดุในทางวิศวกรรมมักจะมีค่า Poisson's ratio อยู่ระหว่าง 0.25 ถึง 0.33 ดังที่แสดงในภาคผนวกที่ 1 แต่ในทางทฤษฎีแล้ว ค่า Poisson's ratio จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 0.5 ซึ่งจะพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

จากสมการที่ 3-9 เมื่อ Poisson's ratio มีค่าเท่ากับศูนย์ แสดงว่าเมื่อแท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนแล้ว วัสดุจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างทางด้านข้างเกิดขึ้นเลย และเมื่อ Poisson's ratio มีค่าน้อยกว่า 0 แล้ว แสดงว่าเมื่อแท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงดึงแล้ว แท่งวัตถุจะเกิดการยืดตัวทั้งในแนวแกนและในแนวขวางขวาง หรือถ้าแท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงกดอัดแล้ว แท่งวัตถุจะเกิดการหดตัวทั้งในแนวแกนและในแนวขวาง ซึ่งพฤติกรรมเช่นนี้จะขัดกับหลักความเป็นจริง ดังนั้น Poisson's ratio จะมีค่าน้อยกว่า 0 ไม่ได้

ส่วนในกรณีที่ค่า Poisson's ratio จะมีค่ามากกว่า 0.5 ไม่ได้นั้น เราจะพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

พิจารณา cubic volume element ของแท่งวัตถุที่ถูกกระทำโดยหน่วยแรงดึง σ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-14 กำหนดให้ ก่อนที่แท่งวัตถุจะถูกกระทำโดยแรงดึง ความยาวของด้านต่างๆ ของ cubic volume element ในแนวแกน x, y, และ z มีค่าเป็น a, b, และ c ตามลำดับ ดังนั้น ปริมาตรของ cubic volume element ก่อนที่แท่งวัตถุจะถูกกระทำโดยแรงดึงจะมีค่าเท่ากับ

$$V_o = abc$$



รูปที่ 3-14

หลังจากที่แท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงดึงในแนวแกนแล้ว แท่งวัตถุดังกล่าวจะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเกิดขึ้น ดังที่แสดงโดยเส้นทึบในรูปที่ 3-14 ซึ่งจะทำให้ความยาวของด้านต่างๆ ของ cubic volume element ในแนวแกน x, y, และ z มีค่าเป็น $a(1+\varepsilon_{long})$, $b(1-\nu\varepsilon_{long})$, และ $c(1-\nu\varepsilon_{long})$ ตามลำดับ ดังนั้น ปริมาตรของ cubic volume element หลังจากที่แท่งวัตถุจะถูกกระทำโดยแรงดึงจะหาได้จากสมการ

$$V_f = abc(1+\varepsilon_{long})\,(1-\nu\varepsilon_{long})\,(1-\nu\varepsilon_{long})$$

ถ้าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีค่าน้อยมากๆ แล้ว เราจะสามารถลดรูปเทอม V_f ลงได้เป็น

$$V_f = V_o(1+\varepsilon_{long} - 2\nu\varepsilon_{long})$$

ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงปริมาตรของ cubic volume element หรือ $\Delta V = V_f - V_o$ จะหาได้จากสมการ

$$\Delta V = V_o \varepsilon_{long}(1-2\nu)$$

และการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของ cubic volume element ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของ cubic volume element หรือที่มักจะถูกเรียกว่า Dilatation, e, จะมีค่าเท่ากับ

$$e = \frac{\Delta V}{V_o} = \varepsilon_{long}(1-2\nu)$$

เมื่อวัสดุของแท่งวัตถุยังคงมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic แล้ว จาก Hooke's law, $\sigma = E\varepsilon$, เราจะได้ว่า

$$e = \frac{\sigma}{\varepsilon}(1-2\nu)$$

จากสมการ เราจะเห็นได้ว่า ถ้า ν มีค่ามากกว่า 0.5 แล้วค่า dilatation e จะมีค่าเป็นลบ หรือปริมาตรของ cubic volume element จะมีค่าลดลง เมื่อแท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงดึง ซึ่งเป็นไปไม่ได้ในทางกายภาพ

เมื่อแท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงกดอัดแล้ว การพิสูจน์ที่กล่าวมาจะมีลักษณะที่เหมือนเดิม แต่ค่าของความเครียดในแนวแกนจะมีค่าเป็นลบ และปริมาตรของ cubic volume element จะมีค่าลดลง

ตัวอย่างที่ 3-2

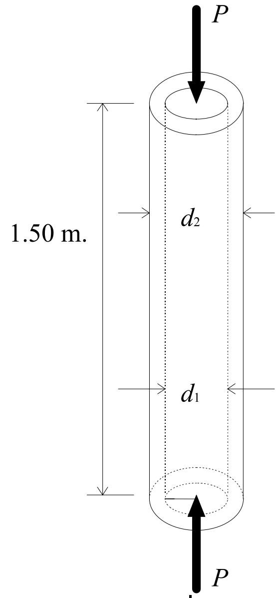
เสาเหล็กกลวง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-2 มีความยาวเท่ากับ 1.500 m. และมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก d_2 และมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายภายใน d_1 เท่ากับ 0.150 m. และ 0.125 m. ตามลำดับ กำหนดให้เสาถูกกระทำโดยแรงกดอัดในแนวแกน $P = 1000 \text{ kN}$ และเหล็กที่ใช้ทำเสามีค่า modulus of elasticity, $E = 200 \text{ GPa}$, yielding stress, $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$, และ Poisson's ratio, $\nu = 0.30$ จงหา

a.) ค่าการหดตัวของเสาเหล็ก

b.) lateral strain, ε_{lat}

c.) ค่าของเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกและภายในที่เพิ่มขึ้น

d.) ค่าความหนาของผนังของเสากลวงที่เพิ่มขึ้น



รูปที่ Ex 3-2

พื้นที่หน้าตัดของเสา

$$A = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) = \frac{\pi}{4}[(0.15 \text{ m.})^2 - (0.125 \text{ m.})^2]$$
$$= 0.00540 \text{ m}^2$$

หน่วยแรงตั้งฉากในแนวแกน

$$\sigma = -\frac{P}{A} = -\frac{1000000 \text{ N}}{0.00540 \text{ m}^2} = -185.2 \text{ MPa}$$

เครื่องหมายลบแสดงว่า หน่วยแรงที่เกิดขึ้นเป็นหน่วยแรงกดอัด

เนื่องจาก $\sigma < \sigma_y$ ดังนั้น วัสดุยังคงมีพฤติกรรมแบบ linear elastic และค่า strain ที่เกิดขึ้นได้จาก

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{-185.2 \text{ MPa}}{200000 \text{ MPa}} = -926(10^{-6}) \text{ m/m}$$

a.) **ค่าการหดตัวของเสาเหล็ก**

$$\delta = \varepsilon L = -926(10^{-6})(1.50 \text{ m.}) = -139\,(10^{-6})\text{m.}$$ Ans.

b.) lateral strain

จากสมการของ Poisson's ratio เราจะได้ว่า

$$\varepsilon_{lat} = -\nu\varepsilon = -0.30(-926(10^{-6})) = 278(10^{-6})\text{ m/m}$$ Ans.

เครื่องหมายเป็นบวก แสดงว่าเส้นผ่านศูนย์กลางของเสามีขนาดเพิ่มขึ้น

c.) **ค่าของเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกและภายในที่เพิ่มขึ้น**

จากสมการของ strain เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกของเสาจะเพิ่มขึ้นเท่ากับ

$$\Delta d_2 = \varepsilon_{lat} d_2 = 278(10^{-6})0.150\text{ m.} = 42(10^{-6})\text{ m.}$$ Ans.

และเส้นผ่านศูนย์กลางภายในของเสาจะเพิ่มขึ้นเท่ากับ

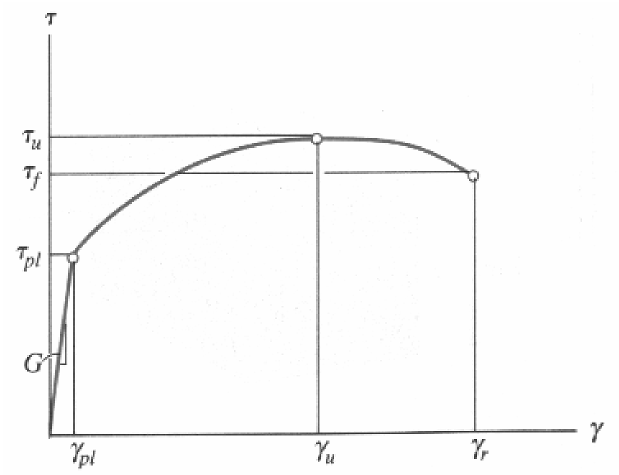
$$\Delta d_1 = \varepsilon_{lat} d_1 = 278(10^{-6})0.125\text{ m.} = 35(10^{-6})\text{ m.}$$ Ans.

d.) **ค่าความหนาของผนังของเสากลวงที่เพิ่มขึ้น**

$$\Delta t = \varepsilon_{lat} t = 278(10^{-6})\frac{(0.150\text{ m.} - 0.125\text{ m.})}{2} = 3.5(10^{-6})\text{ m.}$$ Ans.

3.7 แผนภาพหน่วยแรงเฉือน-ความเครียดเฉือน (Shear Stress-Strain Diagram)

พฤติกรรมของวัสดุที่ถูกกระทำโดย pure shear จะถูกศึกษาได้จากการทดสอบตัวอย่างทดสอบที่มีลักษณะเป็นท่อกลวงบาง (thin tube) ภายใต้การกระทำของแรงบิด (torque) จากการทดสอบ ค่าแรงบิดและมุมบิด (angle of twist) ที่ได้จะถูกนำไปคำนวณหาค่าหน่วยแรงเฉือนและความเครียดเฉือน จากนั้น นำค่าหน่วยแรงเฉือนและความเครียดเฉือนที่ได้ไปเขียนแผนภาพ shear stress-strain diagram ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 3-15 ซึ่ง shear stress-strain diagram ที่ได้มักจะมีลักษณะคล้ายคลึงกับ tension stress-strain diagram ที่ได้กล่าวถึงไปแล้ว



รูปที่ 3-15

โดยทั่วไปแล้ว วัสดุในทางวิศวกรรมจะมี shear stress-strain curve ในช่วง elastic ที่เป็นเส้นตรง ดังนั้น จาก Hooke's law เราจะเขียนความสัมพันธ์ของหน่วยแรงเฉือนและความเครียดเฉือนได้ในรูป

$$\tau = G\gamma \tag{3-10}$$

เมื่อ $G =$ shear modulus of elasticity ของวัสดุ ซึ่งมีหน่วยเช่นเดียวกับหน่วยแรงเฉือน เช่น GPa เป็นต้น ภาคผนวกที่ 1 แสดงค่าของ shear modulus of elasticity ของวัสดุชนิดต่างๆ ในทางวิศวกรรม

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าวัสดุเป็นแบบ isotropic และ homogeneous แล้ว เราจะคำนวณหาค่า shear modulus of elasticity ได้โดยใช้สัมพันธ์

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3-11}$$

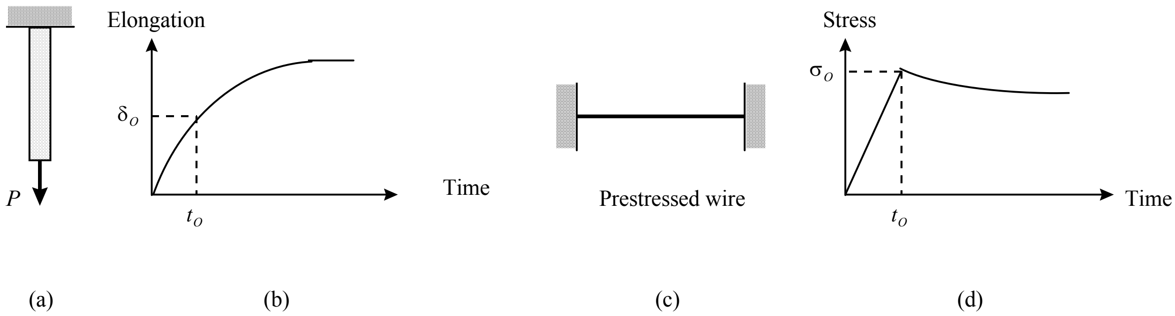
3.8 **การวิบัติของวัสดุเนื่องจากการคืบและการล้า** (Failure of Materials due to Creep and Fatigue)

Creep

การคืบ (creep) เป็นการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างถาวรซึ่งขึ้นอยู่กับเวลาของวัสดุบางชนิด เช่น คอนกรีตและไม้ เป็นต้น ซึ่งจะทำให้วัสดุดังกล่าวเกิดการวิบัติได้

พิจารณาแท่งวัตถุซึ่งถูกกระทำโดยแรงดึงในแนวแกน P (ที่มีค่าค่อนข้างสูง แต่น้อยกว่าค่าแรงที่ทำให้แท่งวัตถุเกิดการวิบัติ) ดังที่แสดงในรูปที่ 3-16a ภายใต้การกระทำของแรง P แท่งวัตถุจะเกิดการยืดตัว δ_o ในช่วงเวลา t_o หลังจากนั้น ถ้าให้แรง P กระทำต่อแท่งวัตถุเป็นเวลานานพอสมควรแล้ว แท่งวัตถุดังกล่าวจะมีการเปลี่ยนรูปร่างที่ต่อเนื่องต่อไป ดังที่แสดงในรูปที่ 3-16b ซึ่งการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ต่อเนื่องนี้จะถูกเรียกว่า creep และ creep อาจจะมีค่าสูงมากจนกระทั่งแท่งวัตถุเกิดการวิบัติหรือหมดประโยชน์ในการใช้งานได้

โดยทั่วไปแล้ว creep ที่เกิดขึ้นนี้จะขึ้นอยู่กับระยะเวลาที่วัสดุถูกกระทำโดยแรงและขนาดของแรง ถ้าแรงมีค่าสูงและกระทำเป็นเวลานานแล้ว creep ที่เกิดขึ้นจะมีค่ามากกว่า creep ที่เกิดขึ้นเมื่อวัสดุนั้นถูกกระทำโดยแรงที่มีค่าต่ำกว่าและกระทำเป็นระยะเวลาที่สั้นกว่า



รูปที่ 3-16

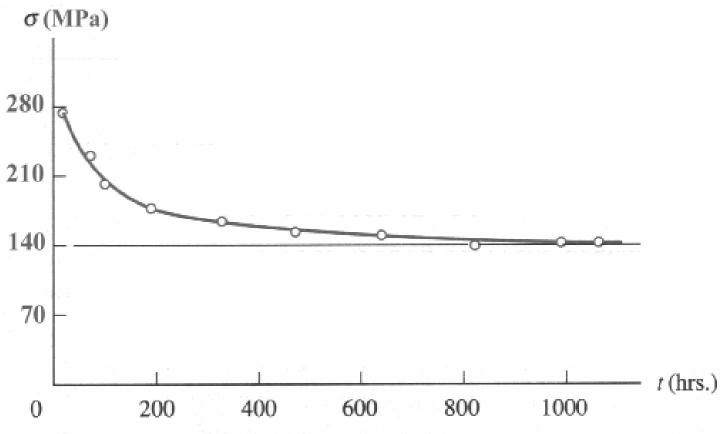
พิจารณาเส้นลวดเหล็กกำลังสูงที่ถูกกระทำโดยแรงดึงในแนวแกนและถูกยึดแน่นที่ปลายทั้งสองข้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 3-16c แรงดึงในแนวแกนทำให้เกิดหน่วยแรงดึง σ_o ในช่วงเวลา t_o เมื่อเวลาผ่านไปนานพอสมควรแล้ว ค่าหน่วยแรงดึงที่เกิดขึ้นในเส้นลวดเหล็กจะมีค่าลดลงจนถึงค่าคงที่ค่าหนึ่ง ดังที่แสดงในรูปที่ 3-16d ซึ่งการลดลงของหน่วยแรงในลักษณะนี้มักจะถูกเรียกว่า relaxation ของวัสดุ

Creep ที่เกิดขึ้นในคอนกรีตและ relaxation ที่เกิดขึ้นในเส้นลวดเหล็กกำลังสูงนี้จะต้องนำมาพิจารณาในการออกแบบโครงสร้าง โดยเฉพาะในโครงสร้างคอนกรีตอัดแรง (prestressed concrete structures)

โดยทั่วไปแล้ว creep ที่เกิดขึ้นในวัสดุโดยส่วนใหญ่ เช่น ไม้และคอนกรีต เป็นต้น จะไม่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิขณะที่วัสดุถูกกระทำโดยแรง แต่ในวัสดุบางประเภท เช่น steel เป็นต้น creep จะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิขณะที่วัสดุถูกกระทำโดยแรงด้วย รูปที่ 3-17 แสดงตัวอย่างของความสัมพันธ์ของ creep strength ของ stainless steel ที่อุณหภูมิ 650 ^oC กับเวลาที่ stainless steel ถูกกระทำโดยแรง เราจะเห็นได้ว่า stainless steel จะมี yielding strength ประมาณ 280 MPa ที่จุดเริ่มต้น แต่จะมีค่า yielding (creep) strength ลดลงเรื่อยๆ จนเหลือเพียงแค่ 138 MPa เมื่อ stainless steel ถูกกระทำโดยแรงเป็นเวลา 1000 ชั่วโมง

Fatigue

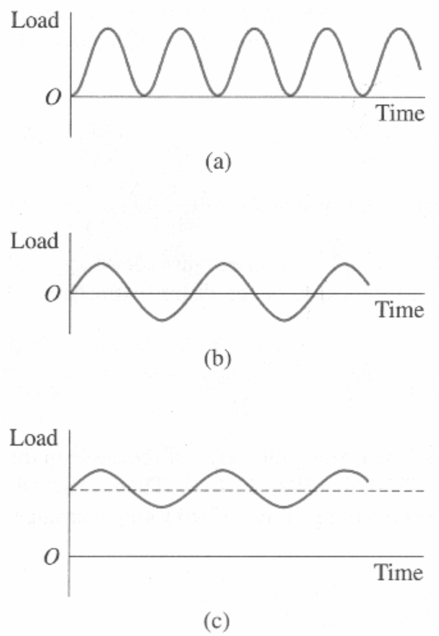
การล้า (fatigue) จะเป็นการวิบัติของวัสดุจำพวกโลหะ ซึ่งเป็นวัสดุแบบ ductile material ที่ถูกกระทำโดยหน่วยแรงหรือความเครียด (ที่มีค่าน้อยกว่าค่าของ yielding stress หรือ yielding strain) แบบซ้ำไปซ้ำมา (repeated cycles) ซึ่งจะทำให้โครงสร้างของวัสดุเหล่านี้มีการแตกแยกออกจากกันและเกิดการวิบัติแบบเปราะ (brittle fracture) ขึ้น



$\sigma - t$ diagram for stainless steel at 650℃

รูปที่ 3-17

รูปที่ 3-18 แสดงรูปแบบของแรงกระทำแบบซ้ำไปซ้ำมา (repeated loads) ที่มักพบเห็นในการทดสอบวัสดุโดยที่รูปที่ 3-18a เป็นแรงดึงที่มีการกระทำแบบเพิ่มขึ้นจนถึงค่าๆ หนึ่ง แล้วลดลงเป็นศูนย์ รูปที่ 3-18b เป็นแรงดึงที่มีการกระทำแบบเพิ่มขึ้นจนถึงค่าๆ หนึ่ง แล้วลดลงและเปลี่ยนเป็นแรงกดอัดจนถึงค่าๆ หนึ่ง และรูปที่ 3-18c เป็นแรงดึงที่มีการกระทำเพิ่มขึ้นและลดลงรอบๆ ค่าเฉลี่ยของแรงดึงค่าหนึ่ง



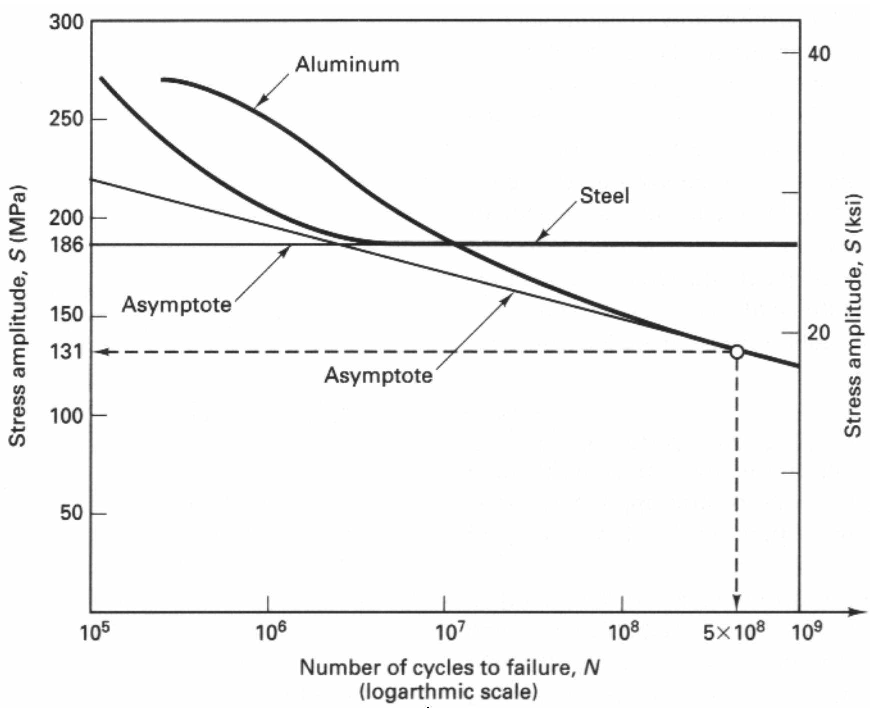
รูปที่ 3-18

การวิบัติในลักษณะนี้จะเกิดขึ้นจาก localized stress ที่เกิดขึ้นที่รอยแตกหรือรอยแยกที่มีขนาดเล็กมากๆ (microscopic defects) ที่มักจะพบอยู่ที่ผิวขององค์อาคารของโครงสร้างหรือตัวอย่างทดสอบ ค่า localized stress นี้จะมีค่ามากกว่าค่าเฉลี่ยของหน่วยแรง (stress) ที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้างหรือตัวอย่างทดสอบมาก เมื่อวัสดุถูกกระทำโดย localized stress แบบซ้ำไปซ้ำมาดังกล่าวแล้ว รอยแตกหรือรอยแยกในวัสดุดังกล่าวก็จะมีการขยายตัวใหญ่ขึ้น ซึ่งจะทำให้ค่าของ localized stress ที่รอยแตกหรือรอยแยกมีค่ามากขึ้นด้วย และจะทำให้รอยแตกหรือรอยแยกนั้นมีขนาดใหญ่ขึ้นไปอีก จนในที่สุด พื้นที่หน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้างหรือตัวอย่างทดสอบก็จะมีขนาดลดลงจนถึง

จุดๆ หนึ่งซึ่งองค์อาคารของโครงสร้างหรือตัวอย่างทดสอบไม่สามารถรับแรงกระทำอีกต่อไปได้ องค์อาคารของโครงสร้างหรือตัวอย่างทดสอบก็จะเกิดการวิบัติแบบฉับพลัน (sudden fracture) ขึ้น

พฤติกรรมการวิบัติแบบ fatigue ของวัสดุจะศึกษาได้โดยการทดสอบตัวอย่างทดสอบจำนวนมาก โดยที่แต่ละตัวอย่างทดสอบจะถูกกำหนดให้ถูกกระทำโดย stress แบบซ้ำไปซ้ำมาค่าหนึ่งจนเกิดการวิบัติ จากนั้น นำข้อมูลของ stress และจำนวนรอบที่ตัวอย่างทดสอบเกิดการวิบัติมาเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ที่มักเรียกว่า $S-N$ diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 3-19 ซึ่งเป็นแผนภาพ $S-N$ diagram ของ steel และ aluminum alloy

จากแผนภาพ เราจะเห็นว่า เส้นกราฟของ steel จะอยู่ในแนวนอนเมื่อหน่วยแรงที่กระทำมีค่า 186 MPa ซึ่งค่าหน่วยแรงดังกล่าวจะเป็นค่าหน่วยแรงที่ steel สามารถรองรับได้โดยไม่เกิดการวิบัติแบบ fatigue ไม่ว่าเหล็กจะถูกกระทำโดยหน่วยแรงกี่รอบก็ตาม ค่าดังกล่าวจะถูกเรียกว่า endurance limit แต่เส้นกราฟของ aluminum alloy จะมีค่าลดลงเรื่อยๆ ตามจำนวนรอบของหน่วยแรงที่เพิ่มขึ้น ซึ่งแสดงว่า aluminum alloy ไม่มีจุด endurance limit ที่ชัดเจนเหมือนกับในกรณีของ steel โดยทั่วไปแล้ว มาตรฐานการออกแบบจะกำหนดให้ค่าหน่วยแรงที่ตัวอย่างทดสอบ aluminum alloy รับได้ $5(10^8)$ รอบเป็นค่า endurance limit ของ aluminum alloy ดังนั้น ในที่นี้ aluminum alloy จะมีค่า endurance limit เท่ากับ131 MPa



รูปที่ 3-19

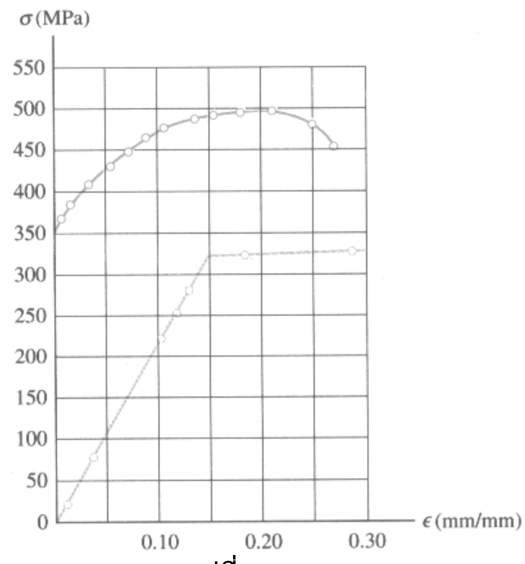
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

3-1 จากการทดสอบแรงดึงของตัวอย่างทดสอบที่ทำด้วย steel ซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลางเมื่อตอนเริ่มต้น 12.5 mm และมีความยาวของ gauge length เท่ากับ 50 mm เราได้ข้อมูลของ loads และ elongation ดังที่แสดงโดยตารางที่ Prob. 3-1 จงเขียน stress-strain diagram และจงหาค่า modulus of elasticity, proportional limit, yielding stress, ultimate stress, rupture stress, และ modulus of resilience สุดท้าย ถ้าแท่งเหล็กทรงกลมซึ่งทำด้วยเหล็กดังกล่าว ถูกกระทำโดยหน่วยแรงแรงดึง 550 MPa จงหาค่าการยืดตัวของแท่งเหล็ก และถ้าเอาแรงดึงออก จงหาว่าแท่งเหล็กดังกล่าวจะมีการยืดถาวรเหลือเท่าไร

ตารางที่ Prob. 3-1

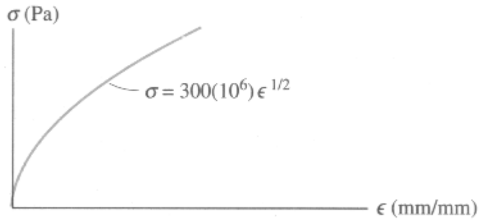
Load (kN)	Elongation (mm)
0	0
6.67	0.0127
20.47	0.0384
35.59	0.0635
48.94	0.0889
52.50	0.1270
52.50	0.2032
53.39	0.5080
73.85	1.0160
88.95	2.5400
95.65	7.1120
86.76	10.1600
82.31	11.6840

3-2 กำหนดให้ stress-strain diagram ของแท่งเหล็กมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-2 โดยที่ 1 ช่องของ strain ที่มี scale ละเอียดมีค่าเป็น 1/100 เท่าของ 1 ช่องของ strain ที่มี scale หยาบ จงหาค่า modulus of elasticity, proportional limit, yielding stress, ultimate stress, rupture stress และ modulus of resilience



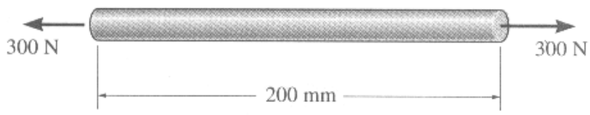
รูปที่ Prob. 3-2

3-3 เส้นใยแก้ว (fiber glass) มี stress-strain diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-3 ถ้าท่อนของวัสดุดังกล่าวมีเส้นผ่าศูนย์กลาง $50\,\mathrm{mm}$ และมีความยาว $2.0\,\mathrm{m}$ ถูกกระทำโดยแรงดึง $60\,\mathrm{kN}$ จงหาค่าการยืดตัว



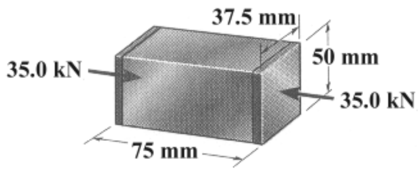
รูปที่ Prob. 3-3

3-4 แท่ง acrylic plastic ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-4 มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $15\,\mathrm{mm}$ และยาว $200\,\mathrm{mm}$ ถูกกระทำโดยแรงดึง $300\,\mathrm{N}$ จงหาค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในแนวแกนและในแนวรัศมี เมื่อ $E = 2.70\,\mathrm{GPa}$ และ $\nu = 0.40$ (3-26)



รูปที่ Prob. 3-4

3-5 แท่ง aluminum ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-5 ถูกกระทำโดยแรงกดอัด $35\,\mathrm{kN}$ ทำให้ด้านที่มีความยาว $38.0\,\mathrm{mm}$ มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเป็น $38.0034\,\mathrm{mm}$ จงหา Poisson's ratio และความยาวที่เปลี่ยนไปในด้านที่ยาว $50.0\,\mathrm{mm}$ เมื่อ $E = 70\,\mathrm{GPa}$



รูปที่ Prob. 3-5

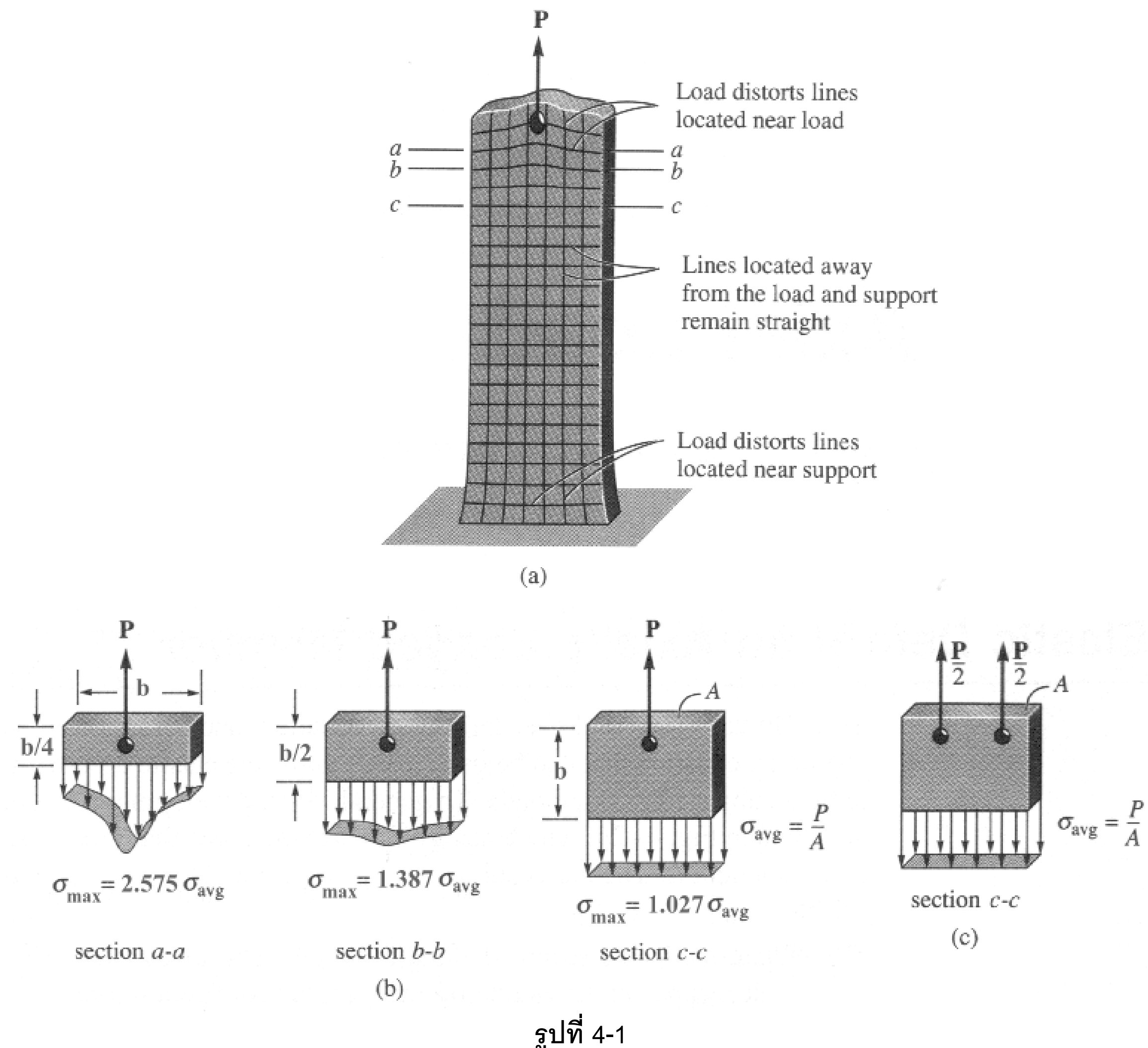
บทที่ 4
น้ำหนักบรรทุกในแนวแกน (Axial Load)

เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

4.1 หลักการของ Saint-Venant (Saint-Venant's Principle)

พิจารณาแท่งวัตถุ เช่น แผ่นเหล็กและแผ่นยาง เป็นต้น ซึ่งมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและมีความยาวพอสมควร ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1a กำหนดให้ปลายด้านล่างของแท่งวัตถุถูกยึดแน่นเข้ากับพื้นและให้แรงดึงในแนวแกน P กระทำต่อรูเจาะที่ปลายอิสระและผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของแท่งวัตถุ

ภายใต้แรงดึง P กำหนดให้วัสดุที่ใช้ทำแท่งวัตถุยังคงมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่น (elastic) ดังนั้น grid lines ที่อยู่บนแท่งวัตถุดังกล่าว ซึ่งเป็นตารางสี่เหลี่ยมด้านเท่าก่อนที่แท่งวัตถุจะถูกกระทำโดยแรงดึง P จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1a จากรูป เราจะเห็นได้ว่า การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ grid lines จะมีลักษณะที่คงที่และสม่ำเสมอที่บริเวณกึ่งกลางของแท่งวัตถุและจะมีลักษณะที่ไม่คงที่และไม่สม่ำเสมอที่บริเวณปลายทั้งสองของแท่งวัตถุและจะมีค่าที่ค่อนข้างสูงเมื่อเทียบกับค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่บริเวณกึ่งกลางของแท่งวัตถุ ซึ่งการเปลี่ยนแปลงรูปร่างนี้มักจะถูกเรียกว่า localized deformation อย่างไรก็ตาม localized deformation ดังกล่าวจะมีค่าที่ลดลงอย่างรวดเร็ว เมื่อจุดที่เรากำลังพิจารณาอยู่ห่างจากปลายทั้งสองของแท่งวัตถุมากขึ้นเรื่อยๆ



รูปที่ 4-1

เนื่องจากหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแท่งวัตถุมีความสัมพันธ์โดยตรงกับค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของแท่งวัตถุ (จาก Hooke's law, $\sigma = E\varepsilon$ และ $\varepsilon = \Delta L / L$ ดังนั้น $\sigma = (E/L)\Delta L$) ดังนั้น หน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดที่มี localized deformation ที่ถูกเรียกว่า ความเข้มข้นของหน่วยแรง (stress concentration) จะมีค่าที่สูงกว่าค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดที่อยู่ห่างจากหน้าตัดดังกล่าวมาก นอกจากนั้นแล้ว การกระจายของหน่วยแรงบนหน้าตัดดังกล่าวจะมีลักษณะที่ไม่คงที่และไม่สม่ำเสมอ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1b จากรูป เราจะเห็นได้ว่า การกระจายของหน่วยแรงที่หน้าตัด $c-c$ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดที่แรงกระทำเท่ากับความกว้างของแท่งวัตถุจะมีลักษณะที่คงที่และสม่ำเสมอมากกว่าที่หน้าตัด $a-a$ และ $b-b$ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดที่แรงกระทำเท่ากับหนึ่งส่วนสี่ของความกว้างและครึ่งหนึ่งของความกว้างของแท่งวัตถุ ตามลำดับ และหน่วยแรงสูงสุดที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด $a-a$ และ $b-b$ จะมีค่าสูงกว่าหน่วยแรงสูงสุดที่เกิดขึ้นที่ $c-c$ โดยทั่วไปแล้ว การกระจายของหน่วยแรงที่หน้าตัดจะมีลักษณะที่คงที่และสม่ำเสมอ เมื่อระยะจากจุดที่แรงกระทำถึงหน้าตัดที่พิจารณามีค่าเท่ากับความกว้างของแท่งวัตถุดังกล่าว

ในบริเวณที่แท่งวัตถุถูกยึดติดแน่นกับพื้น การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของแท่งวัตถุจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 4-1a ซึ่งเกิดจากการที่แท่งวัตถุถูกยึดแน่นไม่ให้มีการหดตัวในแนวขวาง (Poisson's effect) อย่างไรก็ตาม การกระจายของหน่วยแรงที่หน้าตัดที่ห่างออกไปจากบริเวณนี้จะมีค่าที่คงที่และสม่ำเสมออย่างรวดเร็ว เช่นเดียวกับที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านอิสระ

ข้อเท็จจริงของการกระจายของหน่วยแรงและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างข้างต้นเป็นกรณีหนึ่งของหลักการที่เรียกว่า Saint-Venant's Principle ซึ่งถูกค้นพบโดยนักวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ Barre' de Saint-Venant ในปี ค.ศ. 1855 ซึ่งกล่าวว่า

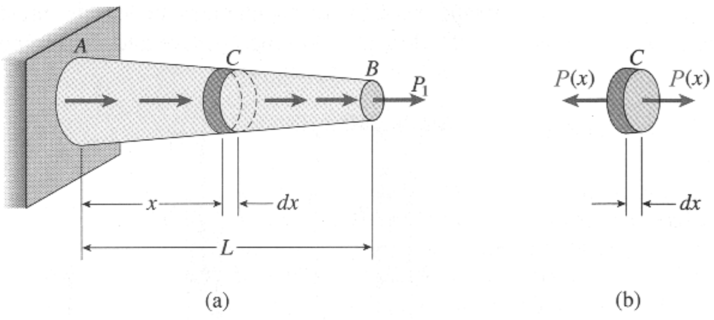
"หน่วยแรง (stress) และความเครียด (strain) ที่เกิดขึ้นในจุดใดจุดหนึ่งในวัตถุ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดที่แรงกระทำจะมีค่าและการกระจายที่**เหมือนกับ**หน่วยแรงและความเครียดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำ ซึ่งสมมูลทางสถิตยศาสตร์กับแรงกระทำดังกล่าวและกระทำกับวัตถุในบริเวณเดียวกัน"

จากรูปที่ 4-1b เราจะเห็นได้ว่า การกระจายของหน่วยแรงที่หน้าตัด $c-c$ ซึ่งเกิดจากแรง P จะมีลักษณะเหมือนกับการกระจายของหน่วยแรงที่หน้าตัดดังกล่าวซึ่งเกิดจากแรง $P/2$ จำนวนสองแรงกระทำร่วมกัน

Saint-Venant's Principle นี้มีความสำคัญอย่างมากในการวิเคราะห์และออกแบบองค์อาคารของโครงสร้าง เช่น คาน เพลา และ bar เป็นต้น เพราะจะช่วยทำให้การคำนวณหาค่าของหน่วยแรงและความเครียดที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดต่างๆ ขององค์อาคารของโครงสร้างที่ห่างจากจุดที่มี localized stress และ localized deformation มีความง่ายขึ้นมาก

4.2 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบยืดหยุ่นของชิ้นส่วนของโครงสร้างที่รับแรงในแนวแกน (Elastic Deformation of an Axially Loaded Member)

พิจารณาแท่งวัตถุซึ่งมีหน้าตัดที่สมมาตรและมีพื้นที่หน้าตัดที่เปลี่ยนแปลงไปตามความยาวของแท่งวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2a



รูปที่ 4-2

กำหนดให้แท่งวัตถุนี้ถูกกระทำโดยแรงกระทำแบบเป็นจุด (concentrated load) ที่ปลายของแท่งวัตถุและแรงกระจายไปตามความยาวของแท่งวัตถุ โดยให้แรงดังกล่าวกระทำผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของแท่งวัตถุ

ถ้าไม่พิจารณา localized deformation ที่เกิดขึ้นที่จุดที่แรงกระทำและจุดที่แท่งวัตถุถูกยึดแน่นเข้ากับผนังและถ้าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นมีค่าอยู่ในช่วง proportional limit แล้ว ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ δ (relative displacement) ของปลายด้านหนึ่งของแท่งวัตถุเทียบกับปลายที่ยึดแน่นจะหามาได้โดยใช้ Hooke's law

พิจารณา free body diagram ของ differential element ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2b ซึ่งถูกตัดออกมาจากแท่งวัตถุที่ระยะ x จากปลายที่ถูกยึดแน่นของแท่งวัตถุ โดยมีความยาว dx และมีพื้นที่หน้าตัด $A(x)$ กำหนดให้แรงลัพธ์ในแนวแกนที่เกิดขึ้นใน differential element มีค่าเป็น $P(x)$ ซึ่งทำให้ differential element เกิดการยืดตัว $d\delta$ ดังนั้น หน่วยแรงและความเครียดที่เกิดขึ้นบน differential element จะหาได้จากสมการ

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \qquad \text{และ} \qquad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx}$$

จาก Hooke's law $\sigma = E\varepsilon$ เราจะได้ว่า

$$\frac{P(x)}{A(x)} = E\frac{d\delta}{dx}$$

$$d\delta = \frac{P(x)\,dx}{A(x)\,E}$$

ดังนั้น การเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ที่เกิดขึ้นตลอดความยาว L จะหาได้จากสมการ

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)}{A(x)\,E}\,dx \tag{4-1}$$

โดยที่ δ = ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ของบนแท่งวัตถุ

L = ระยะระหว่างจุดทั้งสองที่กำลังพิจารณา

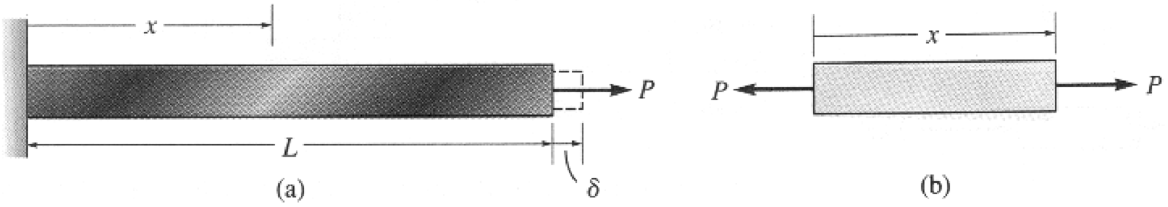
$P(x)$ = แรงลัพธ์ในแนวแกนที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด ซึ่งมีระยะ x จากจุดอ้างอิง

$A(x)$ = พื้นที่หน้าตัดของแท่งวัตถุ ที่ระยะ x จากจุดอ้างอิง

E = modulus of elasticity ของวัสดุที่ใช้ทำแท่งวัตถุ

ในกรณีที่แท่งวัตถุมีพื้นที่หน้าตัดที่คงที่ A วัสดุที่ใช้ทำแท่งวัตถุเป็นวัสดุที่มีเนื้อเดียวกัน (homogeneous material) และแรง P เป็นแรงในแนวแกนและกระทำผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของแท่งวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-3a แล้ว ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ที่ปลายของแท่งวัตถุจะหาได้จากสมการ

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{4-2}$$

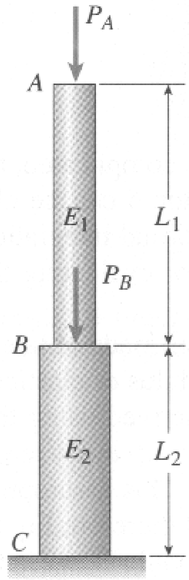


รูปที่ 4-3

ถ้าแท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนพร้อมๆ กันหลายค่า หรือหน้าตัดของแท่งวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงตามความยาวของแท่งวัตถุ หรือค่า modulus of elasticity ของแท่งวัตถุมีการเปลี่ยนแปลงแปลงตามความยาวของแท่งวัตถุ ดัง

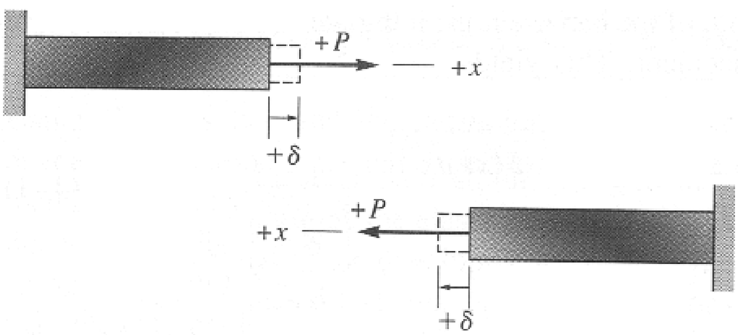
ที่แสดงในรูปที่ 4-4 แล้ว ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้นบนแท่งวัตถุจะมีค่าเท่ากับผลรวมของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ที่หาได้โดยใช้สมการที่ 4-2 บนส่วนต่างๆ ของแท่งวัตถุนั้น ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} \tag{4-3}$$



รูปที่ 4-4

ในการที่จะใช้สมการที่ 4-1 ถึง 4-3 นี้ เราจำเป็นที่จะต้องกำหนด sign convention ของแรงลัพธ์ในแนวแกนที่เกิดขึ้นภายในและค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ที่ต้องการหา ซึ่งเราจะกำหนดให้ แรงลัพธ์ภายในและค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์มีค่าเป็นบวก เมื่อแรงลัพธ์ภายในเป็นแรงดึง (tensile force) และค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์เป็นการยืดตัวออก (elongation) ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-5 และในทางตรงกันข้าม แรงลัพธ์ภายในและค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์มีค่าเป็นลบ เมื่อแรงลัพธ์ภายในเป็นแรงกดอัด (compressive force) และการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์เป็นการหดตัวเข้า (contraction) ตามลำดับ

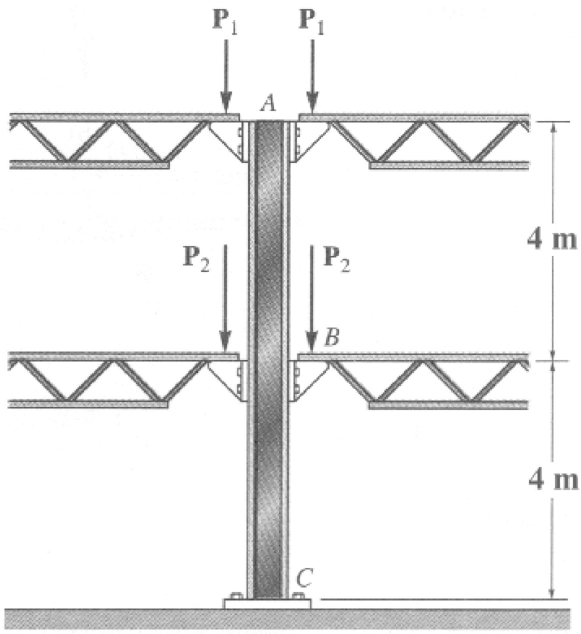


Positive sign convention for P and Δ

รูปที่ 4-5

ตัวอย่างที่ 4-1

จงหาค่าหน่วยแรงกดอัดในแนวแกนสูงสุดและค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ของจุด A เทียบกับจุด C ของเสาเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ EX 4-1a ซึ่งเกิดจากการกระทำของแรง $P_1 = 200\,\text{kN}$ และ $P_2 = 250\,\text{kN}$ กำหนดให้พื้นที่หน้าตัดของส่วน AB และ BC ของเสาเหล็กมีค่าเท่ากับ 9218 และ 13480 mm^2 และให้ $E_{st} = 200\,\text{GPa}$



รูปที่ EX 4-1

เนื่องจากแรงลัพธ์ของแรงกดอัด P_1 และแรงกดอัด P_2 ที่ถ่ายจากพื้นลงสู่ตง (joist) และลงสู่เสากระทำผ่านจุด centroid ของเสา ดังนั้น แรงลัพธ์ดังกล่าวจะเป็นแรงกดอัดในแนวแกน ซึ่งจะก่อให้เกิดหน่วยแรงกดอัดและการหดตัวในเสา

หาค่าของหน่วยแรงกดอัดในแนวแกนสูงสุด

โดยการตัดเสาในช่วง AB และช่วง BC และใช้แผนภาพ free-body diagram ของส่วนทั้งสองของเสา เราจะหาแรงในแนวแกนของช่วง AB และช่วง BC ของเสาได้เท่ากับ

$$P_{AB} = 2P_1 = 400\,\text{kN}$$

$$P_{BC} = 2P_1 + 2P_2 = 400 + 500 = 900\,\text{kN}$$

ดังนั้น หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในช่วง AB และช่วง BC ของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_{AB} = \frac{400(10^3)}{9218(10^{-6})} = 43.4\,\text{MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{900(10^3)}{13480(10^{-6})} = 66.8\,\text{MPa}$$

และค่าของหน่วยแรงกดอัดในแนวแกนสูงสุดจะเกิดที่ช่วง BC ของเสาและมีค่าเท่ากับ $66.8\,\text{MPa}$ Ans.

หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ของจุด A เทียบกับจุด C

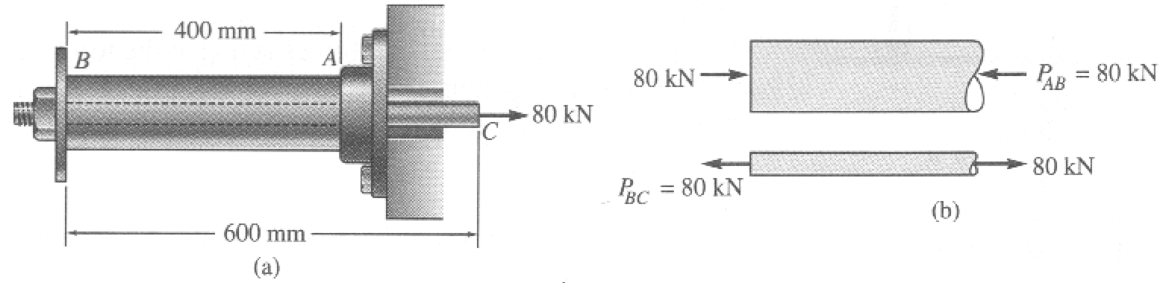
เนื่องจากเสาถูกกระทำโดยแรงกดอัดเท่านั้น ดังนั้น ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ของจุด A เทียบกับจุด C จะหาได้จาก

$$\delta_{A/C} = \frac{P_{AB}L_{AB}}{A_{AB}E} + \frac{P_{AB}L_{AB}}{A_{AB}E}$$
$$= \frac{-400(10^3)4}{9218(10^{-6})200(10^9)} + \frac{-900(10^3)4}{13480(10^{-6})200(10^9)}$$
$$= -0.0022\ \mathrm{m} = -2.2\ \mathrm{mm}$$

เนื่องจากค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ที่ได้มีเครื่องหมายลบ ดังนั้น ปลาย A ของเสาจะเคลื่อนที่เข้าหาจุด C Ans.

ตัวอย่างที่ 4-2

กำหนดให้จุดเชื่อมต่อ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 4-2a ประกอบด้วยท่อกลวง AB ทำด้วย aluminum 2014-T6 มีหน้าตัด $400\,\mathrm{mm}^2$ และแท่งเหล็กกลม BC ทำด้วยเหล็ก A36 ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $25\,\mathrm{mm}$ ซึ่งถูกกระทำโดยแรงดึง $80\,\mathrm{kN}$ จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ปลาย C ของแท่งเหล็กกลมเทียบกับจุด A เมื่อ $E_{al} = 70\,\mathrm{GPa}$ และ $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$



รูปที่ EX 4-2

โดยใช้ method of sections เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของท่อกลวงและแท่งเหล็กกลมได้ดังที่แสดงในรูปที่ EX 4-2b

จากแผนภาพ เราจะเห็นได้ว่า ภายใต้แรงกระทำท่อกลวง ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกดอัดจะเกิดการหดตัวขึ้น และแท่งเหล็กกลม ซึ่งถูกกระทำโดยแรงดึงจะเกิดการยืดตัวขึ้น

เนื่องจากจุด A ถูกยึดแน่นเข้ากับผนัง เราจะใช้จุด A เป็นจุดอ้างอิง ดังนั้น

$$\delta_C = \delta_{C/A} = \delta_{B/A} + \delta_{C/B}$$

เนื่องจากท่อกลวง AB ทำด้วย aluminum ดังนั้น

$$\delta_{B/A} = \frac{P_{AB}L_{AB}}{A_{AB}E_{al}} = \frac{-80(10^3)(0.4)}{400(10^{-6})70(10^9)} = -0.001143\,\mathrm{m}$$

เนื่องจากจุด A ถูกยึดแน่นเข้ากับผนัง จุด C จะเคลื่อนที่ไปทางขวามือเข้าหาจุด A

เนื่องจากแท่งเหล็กกลม BC ทำด้วยเหล็ก ดังนั้น

$$\delta_{C/B} = \frac{P_{BC}L_{BC}}{A_{BC}E_{st}} = \frac{80(10^3)(0.6)}{\pi(0.0125)^2 200(10^9)} = +0.000489\,\mathrm{m}$$

เครื่องหมายบวก แสดงว่าจุด C จะเคลื่อนที่ไปทางขวามือออกจากจุด B

เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งที่ได้มีทิศไปทางขวามือทั้งหมด ดังนั้น การเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ปลาย C ของแท่งเหล็กกลมเทียบกับจุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$\delta_C = 0.001143 + 0.000489 = 0.00163\,\mathrm{m} = 1.63\,\mathrm{mm} \qquad \text{Ans.}$$

เราควรทำการตรวจสอบดูด้วยว่า หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแท่งเหล็กและท่อกลวง aluminum มีค่าน้อยกว่าค่า yielding stress ของวัสดุดังกล่าวหรือไม่ เนื่องจากสมการที่ใช้ในการคำนวณขึ้นอยู่กับสมมุติฐานว่า วัสดุมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic ภายใต้แรงกระทำ

4.3 หลักการ Superposition (Principle of Superposition)

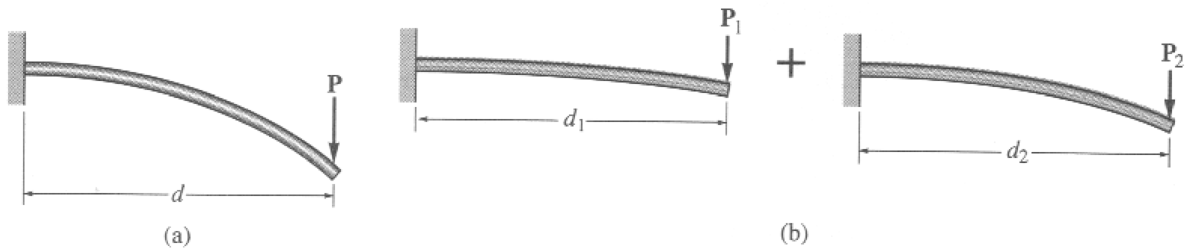
Principle of superposition เป็นหลักการพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์หาค่าหน่วยแรงหรือค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำที่มีความซับซ้อนมากๆ ซึ่งกล่าวว่า

"ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) หรือค่าหน่วยแรง (stress) ลัพธ์ที่จุดใดจุดหนึ่งบนโครงสร้างซึ่งเกิดจากน้ำหนักบรรทุกและแรงต่างๆ ที่กระทำอยู่บนโครงสร้างนั้น สามารถหามาได้โดยการรวมทางพีชคณิตของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งหรือค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นจากแรงแต่ละแรงและน้ำหนักบรรทุกแต่ละอันที่กระทำอยู่บนโครงสร้างนั้น"

Principle of superposition จะใช้ได้ในกรณีที่

1. วัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) ซึ่งในช่วงนี้แรงกระทำจะแปรผันโดยตรงกับการเปลี่ยนตำแหน่งและหน่วยแรง เช่น แท่งวัตถุที่ถูกกระทำโดยแรงดึงในแนวแกน P ดังที่แสดงในรูปที่ 4-3a ค่าของหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยที่เกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางแท่งวัตถุจะมีค่าเท่ากับ $\sigma = P/A$ ($\sigma \,\alpha\, P$) และค่าการยืดที่ปลายของแท่งวัตถุจะมีค่าเท่ากับ $\delta = PL/AE$ ($\sigma \,\alpha\, P$)
2. โครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างที่น้อยมาก ภายใต้แรงกระทำ เนื่องจากว่าเมื่อโครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมากแล้ว ตำแหน่งและทิศทางของแรงกระทำอาจจะเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม ซึ่งจะทำให้ผลที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำที่กระทำแยกกันมีค่าไม่เท่ากับผลที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำที่กระทำร่วมกัน

พิจารณาคานยื่น (cantilevered beam) ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6 จากรูปที่ 4-6a กำหนดให้แรง P มีค่าเท่ากับผลรวมของแรง P_1 และแรง P_2 ซึ่งจะทำให้คานเกิดการโก่งตัวที่สูงมากและทำให้ระยะในแนวนอนจากจุดที่แรงกระทำถึงจุดรองรับแบบยึดแน่นมีค่าเท่ากับ d ดังนั้น แรง P จะทำให้เกิดโมเมนต์ดัดที่จุดรองรับเท่ากับ Pd จากรูปที่ 4-6b กำหนดให้แรง P_1 และ P_2 กระทำต่อคานเป็นอิสระต่อกัน โดยแรง P_1 และ P_2 จะทำให้คานเกิดการโก่งตัวและมีระยะในแนวนอนจากจุดที่แรงกระทำถึงจุดรองรับเท่ากับ d_1 และ d_2 ตามลำดับ ดังนั้น แรง P_1 และ P_2 จะทำให้เกิดผลรวมของโมเมนต์ดัดที่จุดรองรับเท่ากับ $P_1 d_1 + P_2 d_2$ แต่เนื่องจากว่า $d \neq d_1 + d_2$ ดังนั้น $Pd \neq P_1 d_1 + P_2 d_2$



รูปที่ 4-6

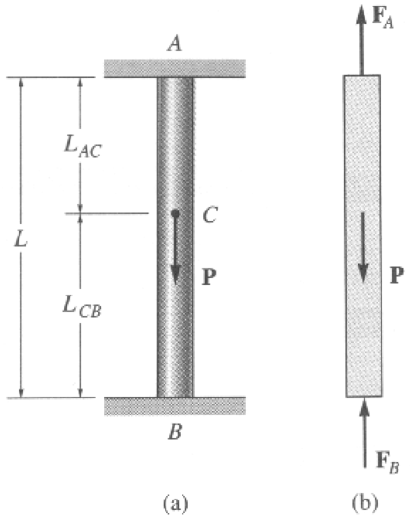
4.4 การวิเคราะห์ชิ้นส่วนของโครงสร้างที่รับแรงในแนวแกนแบบ Statically Indeterminate โดยวิธี Displacement Method (Statically Indeterminate Axially Loaded Member: Displacement Method)

ในกรณีที่ผ่านมานั้น แท่งวัตถุจะถูกยึดที่ปลายเพียงด้านเดียวและถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน ซึ่งเราจะหาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับและแรงภายในแท่งวัตถุได้โดยใช้สมการความสมดุลของแรงในแนวแกนของแท่งวัตถุเพียงสมการเดียว แท่งวัตถุที่มีลักษณะนี้จะเป็นโครงสร้างแบบ statically determinate

ในกรณีที่แท่งวัตถุถูกยึดที่ปลายทั้งสองด้าน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7a แล้ว แท่งวัตถุจะมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าเกิดขึ้นที่ปลายทั้งสองของแท่งวัตถุ 2 ค่าคือ F_A และ F_B ซึ่งแท่งวัตถุดังกล่าวจะมีแผนภาพ free-body diagram ดังที่

แสดงในรูปที่ 4-7b ถ้ากำหนดให้แรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่ามีทิศทางดังที่แสดง จากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกน เราจะได้ว่า

$+\uparrow\sum F = 0$; $\qquad F_B + F_A - P = 0$



รูปที่ 4-7

เนื่องจากแท่งวัตถุมีสมการความสมดุลเพียงสมการเดียว ดังนั้น เราจะไม่สามารถหาค่าแรงปฏิกริยาที่ไม่ทราบค่าที่ปลายทั้งสองของแท่งวัตถุนี้ได้ แท่งวัตถุในลักษณะนี้จะเป็นโครงสร้างแบบ statically indeterminate ดังนั้น ในการหาค่าแรงปฏิกริยาดังกล่าว เราจะต้องมีสมการเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งสมการ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะเป็นเงื่อนไขของความสอดคล้องของการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (compatibility condition) ของแท่งวัตถุ

ในกรณีนี้ เนื่องจากจุดรองรับของแท่งวัตถุเป็นจุดรองรับแบบยึดแน่นทั้งสองข้าง ดังนั้น compatibility condition ของแท่งวัตถุคือ การเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ระหว่างปลาย A และปลาย B ของแท่งวัตถุจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งจะเขียนในรูปของสมการได้เป็น

$$\delta_{A/B} = 0$$

จากแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน AC และ BC เราจะได้ว่า แรงภายในชิ้นส่วน AC จะเป็นแรงดึงและมีค่าเท่ากับ $+F_A$ และแรงภายในชิ้นส่วน BC จะเป็นแรงกดอัดและมีค่าเท่ากับ $-F_B$ ดังนั้น จากความสัมพันธ์ของแรงกระทำและการเปลี่ยนตำแหน่งบนชิ้นส่วนทั้งสอง เราจะได้ สมการ compatibility อยู่ในรูป

$$\frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE} = 0$$

ถ้าสมมุติให้ค่าความแกร่งของแท่งวัตถุ AE มีค่าคงที่แล้ว แรงปฏิกริยา F_A และ F_B ที่เกิดขึ้นที่ปลายของแท่งวัตถุจะหาได้โดยการแก้สมการความสมดุลและสมการ compatibility ซึ่งเราจะได้ว่า

$$F_A = P\frac{L_{CB}}{L}$$

$$F_B = P\frac{L_{AC}}{L}$$

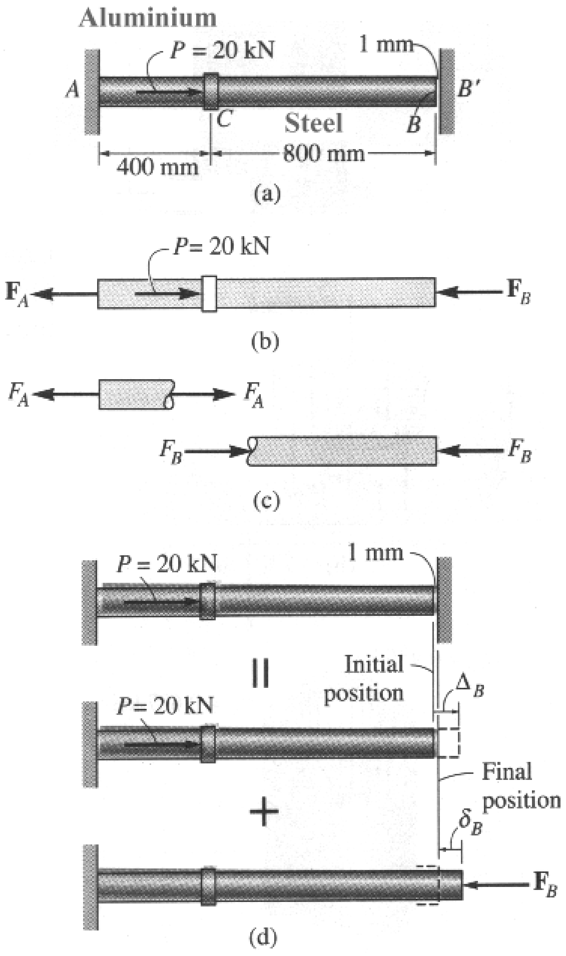
เนื่องจากแรงที่ได้มีค่าเป็นบวก ดังนั้น ทิศทางของแรงที่เราสมมุติขึ้นจะเป็นทิศทางที่เกิดขึ้นจริง

เนื่องจากเราใช้ displacement เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในการเขียนสมการ compatibility ดังนั้น วิธีการโครงสร้างแบบ statically indeterminate ที่กล่าวถึงไปแล้วนี้จึงมักจะถูกเรียกว่า displacement method

ตัวอย่างที่ 4-3

กำหนดให้แท่งวัตถุที่ทำด้วย aluminum 2014 T6 ($\sigma_y = 414\,\mathrm{MPa}$) ในช่วง AC มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $10\,\mathrm{mm}$ และทำด้วยเหล็ก A36 ($\sigma_y = 250\,\mathrm{MPa}$) ในช่วง BC มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $8\,\mathrm{mm}$ และถูกยึดแน่นเข้ากับผนังที่จุด A และที่ปลาย B มีช่องว่างระหว่างผนังและแท่งวัตถุ $1\,\mathrm{mm}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3a

จงหาแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุด A และจุด B' เมื่อกำหนดให้แรง $P = 20\,\mathrm{kN}$, ค่า modulus of elasticity $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$, และ $E_{al} = 70\,\mathrm{GPa}$



รูปที่ Ex 4-3

จากแผนภาพ free-body diagram ของแท่งวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3a และสมการความสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

$$\sum F_x = 0; \qquad -F_A - F_B + 20(10^3) = 0 \tag{1}$$

เนื่องจากปลาย B ของคานจะมีการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์เทียบกับจุดยึดแน่น A ของแท่งวัตถุเท่ากับ $1\,\mathrm{mm}$ ดังนั้น สมการความสอดคล้อง (compatibility) ของแท่งวัตถุจะอยู่ในรูป

$$\delta_{B/A} = 0.001\,\mathrm{m}$$

และเนื่องจากส่วน AC ของแท่งวัตถุจะถูกกระทำโดยแรงดึงและส่วน BC ของแท่งวัตถุจะถูกกระทำโดยแรงกดอัด ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$+\frac{F_A L_{AC}}{A_{AC}E_{al}} - \frac{F_B L_{BC}}{A_{BC}E_{st}} = 0.001$$

โดยที่พื้นที่หน้าตัดของ aluminum ในช่วง AC

$$A_{AC} = \frac{\pi(10)^2}{4} = 78.540\ \text{mm}^2$$

พื้นที่หน้าตัดของเหล็กในช่วง BC

$$A_{BC} = \frac{\pi(8)^2}{4} = 50.256\ \text{mm}^2$$

ดังนั้น

$$+\frac{F_A(0.4)}{78.540(10^{-6})70(10^9)} - \frac{F_B(0.8)}{50.256(10^{-6})200(10^9)} = 0.001$$

$$7.276F_A - 7.959F_B = 100000\ \text{N} \qquad (2)$$

ทำการแก้สมการที่ (1) และที่ (2) ร่วมกัน เราจะได้

$$F_A = 17.01\ \text{kN}$$

$$\sigma_A = \frac{17.01(10^3)}{78.540(10^{-6})} = 216.6\ \text{MPa} < \sigma_y = 414\ \text{MPa} \qquad \text{O.K.}$$

$$F_B = 2.99\ \text{kN}$$

$$\sigma_B = \frac{2.99(10^3)}{50.256(10^{-6})} = 59.5\ \text{MPa} < \sigma_y = 250\ \text{MPa} \qquad \text{O.K.}$$

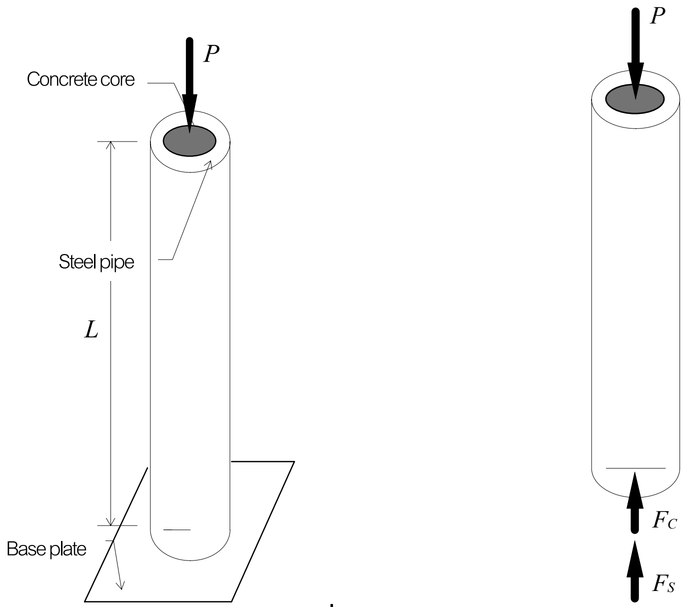
เนื่องจากแรงปฏิกริยาที่ได้มีค่าเป็นบวก ดังนั้น แรงปฏิกริยาจะมีทิศทางตามที่ได้สมมุติไว้ และเนื่องจากหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแท่ง aluminum 2014 T6 และแท่งเหล็ก A36 มีค่าน้อยกว่า yielding stress ของวัสดุ ดังนั้น ค่าของแรงปฏิกริยาที่คำนวณได้จึงถูกต้องตามสมมุติฐานที่ใช้ในการคำนวณ <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 4-4

ท่อเหล็กกลวงซึ่งพื้นที่หน้าตัด A_S ถูกเสริมด้วย concrete ซึ่งพื้นที่หน้าตัด A_C และถูกกระทำโดยแรงกดอัดในแนวแกน P ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-4 กำหนดให้ modulus of elasticity ของเหล็กและ concrete มีค่าเป็น E_S และ E_C ตามลำดับ และ L เป็นความยาวของท่อเหล็กกลวงเสริม concrete จงหา

a.) หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในท่อเหล็กกลวงและใน concrete

b.) ค่าการหดตัวของท่อเหล็กกลวงเสริม concrete



รูปที่ Ex 4-4

a.) หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในท่อเหล็กกลวงและใน concrete

จากแผนภาพ free-body diagram ของท่อเหล็กกลวง และ concrete และจากสมการสมดุลของแรงในแนวดิ่ง เราจะได้ว่า

$$\sum F_y = 0; \qquad F_S + F_C - P = 0 \qquad (1)$$

เนื่องจากท่อเหล็กกลวงและ concrete ต้องร่วมกันต้านแรงกดอัดในแนวแกน P โดยที่การหดตัวที่เกิดขึ้นที่ปลายของท่อเหล็กกลวงเสริม concrete จะต้องมีค่าเท่ากัน ดังนั้น

$$\delta_S = \delta_C \qquad (2)$$

จากความสัมพันธ์ของ load-displacement เราจะได้ว่า

$$\frac{F_S L}{E_S A_S} = \frac{F_C L}{E_C A_C}$$

$$F_S = F_C\left(\frac{E_S}{E_C}\right)\left(\frac{A_S}{A_C}\right)$$

แทนค่า F_S ลงในสมการ (1) แล้วจัดรูปสมการใหม่ เราจะได้

$$F_C = P\left(\frac{E_C A_C}{E_S A_S + E_C A_C}\right)$$

และ
$$F_S = P\left(\frac{E_S A_S}{E_S A_S + E_C A_C}\right) \quad (3)$$

ดังนั้น หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในท่อเหล็กกลวงและใน concrete จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_S = \frac{F_S}{A_S} = P\left(\frac{E_S}{E_S A_S + E_C A_C}\right)$$

$$\sigma_C = \frac{F_C}{A_C} = P\left(\frac{E_C}{E_S A_S + E_C A_C}\right) \quad \underline{\text{Ans.}}$$

จากสมการของหน่วยแรงที่ได้ เราจะเห็นว่า หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในท่อเหล็กกลวงและใน concrete แปรผันโดยตรงกับค่า modulus of elasticity ของเหล็กและ concrete ดังนั้น วัสดุที่มีค่า modulus of elasticity มากกว่าจะมีหน่วยแรงเกิดขึ้นสูงกว่า

b.) **ค่าการหดตัวของท่อเหล็กกลวงเสริม** concrete

แทนค่า F_C และ F_S ในสมการ (3) ลงในความสัมพันธ์ของ load-displacement เราจะได้

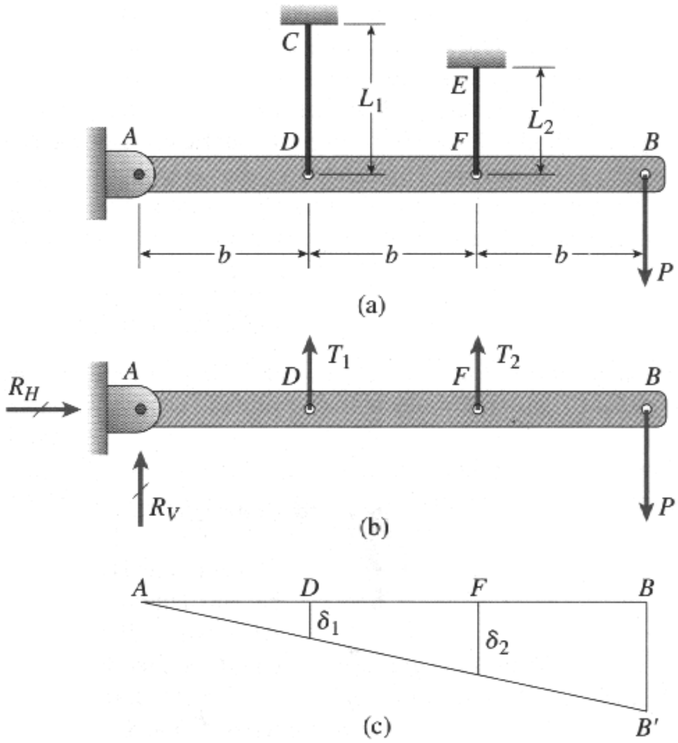
$$\delta = \frac{F_S L}{E_S A_S} = \frac{F_C L}{E_C A_C} = \frac{PL}{E_S A_S + E_C A_C} \quad \underline{\text{Ans.}}$$

จากสมการ เราจะเห็นว่า ค่าการหดตัวของท่อเหล็กกลวงเสริม concrete จะเท่ากับแรงกดอัดในแนวแกนหารด้วยผลรวมของค่าความแกร่งของท่อเหล็กกลวงและ concrete

ตัวอย่างที่ 4-5

กำหนดให้ rigid bar AB มีที่รองรับเป็น pin ที่ A และถูกรองรับโดยเส้นลวด CD และ EF ที่จุด D และจุด F ตามลำดับ กำหนดให้แรง P กระทำที่ปลาย B ของ rigid bar และให้เส้นลวด CD มีความยาว L_1 มีเส้นผ่าศูนย์กลาง d_1 และมีค่า modulus of elasticity E_1 และให้เส้นลวด EF มีความยาว L_2 มีเส้นผ่าศูนย์กลาง d_2 และมีค่า modulus of elasticity E_2

จงหาสมการของแรงที่เกิดขึ้นในเส้นลวด CD และเส้นลวด EF



รูปที่ Ex 4-5

จากแผนภาพ free-body diagram ของ rigid bar ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-5b และสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด A เราจะได้ว่า

$$\sum M_A = 0\,; \qquad T_1 b + T_2(2b) - P(3b) = 0 \qquad (1)$$

ภายใต้การกระทำของแรง P rigid bar จะเกิดการหมุนรอบจุด A ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-5c และเนื่องจากระยะ AF เป็นสองเท่าของระยะ AD ดังนั้น จากสามเหลี่ยมคล้าย เราจะได้สมการความสอดคล้อง (compatibility) ของ rigid bar อยู่ในรูป

$$\delta_2 = 2\delta_1$$

จากความสัมพันธ์ของแรงในแนวแกนและการยืดตัวของเส้นลวด

$$\delta_1 = \frac{T_1 L_1}{A_1 E_1} \qquad \text{และ} \qquad \delta_2 = \frac{T_2 L_2}{A_2 E_2}$$

โดยที่พื้นที่หน้าตัดของเส้นลวด CD และ EF จะมีค่าเท่ากับ $A_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$ และ $A_2 = \dfrac{\pi d_2^2}{4}$ ตามลำดับ กำหนดให้

$$f_1 = \frac{L_1}{A_1 E_1} \qquad \text{และ} \qquad f_2 = \frac{L_2}{A_2 E_2}$$

ดังนั้น เราจะเขียนความสัมพันธ์ของแรงในแนวแกนและการยืดตัวของเส้นลวดใหม่ได้เป็น

$$\delta_1 = f_1 T_1 \qquad \text{และ} \qquad \delta_2 = f_2 T_2$$

และเราจะได้สมการความสอดคล้อง (compatibility) ของ rigid bar อยู่ในรูป

$$f_2 T_2 = 2 f_1 T_1 \tag{2}$$

ทำการแก้สมการที่ (1) และที่ (2) ร่วมกัน เราจะได้

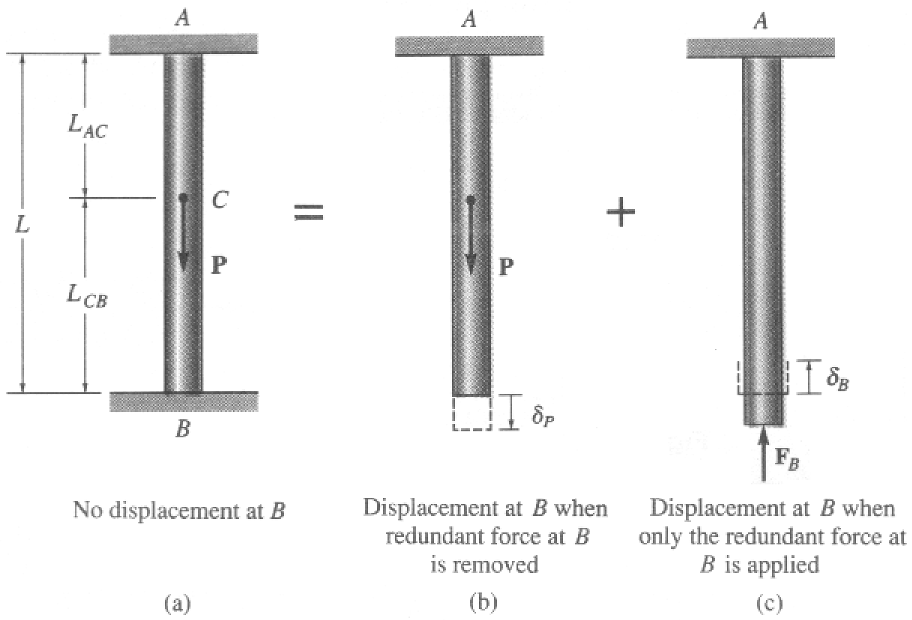
$$T_1 = \frac{3 f_2 P}{4 f_1 + f_2}$$

$$T_2 = \frac{6 f_1 P}{4 f_1 + f_2}$$

เนื่องจากแรงปฏิกิริยาที่ได้มีค่าเป็นบวก ดังนั้น แรงปฏิกิริยาจะมีทิศทางตามที่ได้สมมุติไว้ Ans.

4.5 การวิเคราะห์ชิ้นส่วนของโครงสร้างที่รับแรงในแนวแกนแบบ Statically Indeterminate โดยวิธี Force Method (Statically Indeterminate Axially Loaded Member: Force Method)

นอกจากเราจะหาค่าแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าในแท่งวัตถุแบบ statically indeterminate โดยวิธี displacement method แล้ว เรายังสามารถที่จะเขียนสมการความสอดคล้อง (compatibility equation) ของแท่งวัตถุได้อีกรูปแบบหนึ่ง โดยการ superposition แรงปฏิกิริยา (ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า) ของแผนภาพ free-body diagram ของแท่งวัตถุ ซึ่งวิธีการนี้มักจะถูกเรียกว่า force method



รูปที่ 4-8

รูปที่ 4-8a แสดงแท่งวัตถุแบบ statically indeterminate ซึ่งถูกระทำโดยแรง P ถ้าสมมุติให้จุดรองรับที่ B เป็นจุดรองรับที่เกินจำเป็น (redundant support) และเมื่อเราเอาจุดรองรับดังกล่าวออกจากแท่งวัตถุแล้ว แท่งวัตถุดังกล่าวจะเปลี่ยนเป็นโครงสร้างแบบ statically determinate ซึ่งถูกระทำโดยแรง P ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8b แต่เนื่องจากความจริงที่ว่า จุดรองรับที่ B จะต้องมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่า F_B กระทำ ดังนั้น แท่งวัตถุดังกล่าวจะต้องเป็นโครงสร้างแบบ statically determinate ซึ่งถูกระทำโดยแรง F_B ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8c ด้วย

จาก principle of superposition เราจะได้ว่า แท่งวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-16a จะสมมูลกับแท่งวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-16b ซึ่งถูกกระทำโดยแรง P **บวก**กับแท่งวัตถุ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-16c ซึ่งถูกกระทำโดยแรงเกินจำเป็น (redundant force) ที่ไม่ทราบค่า F_B

ถ้าแรง P ทำให้แท่งวัตถุที่จุด B เกิดการยืดตัว (+) δ_P ดังที่แสดงในรูปที่ 4-16b แล้ว แรงปฏิกิริยา F_B ดังที่แสดงในรูปที่ 4-16c จะต้องมีค่าๆ หนึ่งที่จะทำให้จุด B เกิดการหดตัว (-) δ_B โดยที่

$$0 = \delta_P - \delta_B$$

สมการที่ได้นี้จะเป็นสมการความสอดคล้อง (compatibility equation) ของการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุด B

จากความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเปลี่ยนตำแหน่ง เราจะได้ว่า

$$\delta_P = \frac{PL_{AC}}{AE} \text{ และ } \delta_B = \frac{-F_B L}{AE}$$

ดังนั้น เมื่อเราแทนค่า δ_P และค่า δ_B ลงในสมการความสอดคล้อง เราจะได้ว่า

$$0 = \frac{PL_{AC}}{AE} - \frac{F_B L}{AE}$$

และ

$$F_B = P\frac{L_{AC}}{L}$$

จากแผนภาพ free-body diagram ของแท่งวัตถุ เราจะหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A ได้โดยใช้สมการความสมดุลของแรงในแนวดิ่ง

$+\uparrow\sum F_y = 0;$ $$P\frac{L_{AC}}{L} + F_A - P = 0$$

เนื่องจาก $L_{CB} = L - L_{AC}$ ดังนั้น

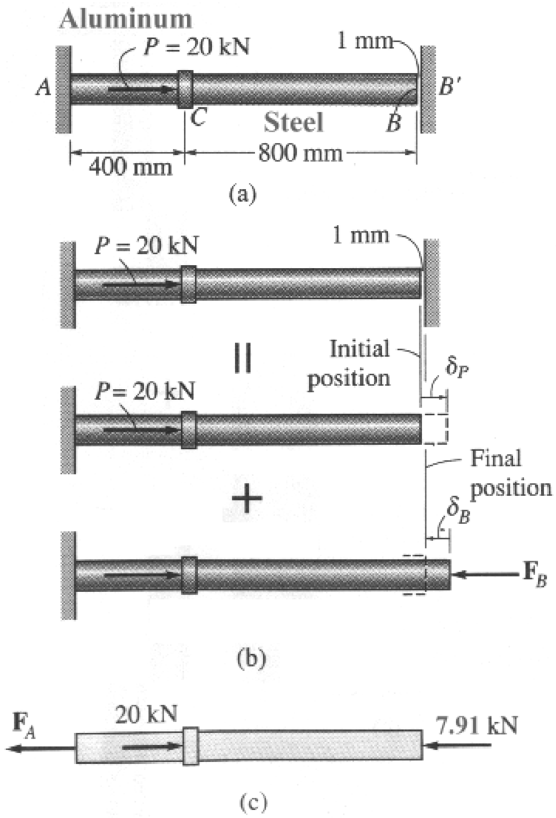
$$F_A = P\frac{L_{CB}}{L}$$

ซึ่งเราจะเห็นว่า F_A และ F_B ที่ได้เหมือนกับที่หามาได้ใน section ที่ 4.4 โดยวิธีการ displacement method

ตัวอย่างที่ 4-6

กำหนดให้แท่งวัตถุที่ทำด้วย aluminum 2014 T6 ในช่วง AC มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $10\,\mathrm{mm}$ และทำด้วยเหล็ก A36 ในช่วง BC มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $8\,\mathrm{mm}$ และถูกยึดแน่นเข้ากับผนังที่จุด A และที่ปลาย B มีช่องว่างระหว่างผนังและแท่งวัตถุ $1\,\mathrm{mm}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-6a

จงหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุด A และจุด B' เมื่อกำหนดให้แรง $P = 20\,\mathrm{kN}$, ค่า modulus of elasticity $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$, และ $E_{al} = 70\,\mathrm{GPa}$



รูปที่ Ex 4-6

กำหนดให้แรงปฏิกริยาที่จุด B เป็นแรงเกินจำเป็น (redundant force) ดังนั้น จาก principle of superposition เราแยกแท่งวัตถุออกมาพิจารณาได้เป็นสองกรณี ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-6b และเราจะได้สมการความสอดคล้องอยู่ในรูป

$$\delta_P - \delta_B = 0.001\,\mathrm{m}$$

โดยที่ δ_P เป็นบวกเนื่องจากแรง P ทำให้แท่งวัตถุเกิดการยืดตัวและ δ_B เป็นลบเนื่องจากแรง F_B ทำให้แท่งวัตถุเกิดการหดตัว

$$\delta_P = \frac{PL_{AC}}{A_{AC}E_{al}} = \frac{20(10^3)0.4}{78.540(10^{-6})70(10^9)} = 0.0014551\,\mathrm{m}$$

$$\begin{aligned}
\delta_B &= \frac{F_B L_{BC}}{A_{BC}E_{st}} + \frac{F_B L_{AC}}{A_{AC}E_{al}} \\
&= \frac{F_B(0.8)}{50.256(10^{-6})200(10^9)} + \frac{F_B(0.4)}{78.540(10^{-6})70(10^9)} \\
&= 0.15235(10^{-6})F_B
\end{aligned}$$

ดังนั้น จากสมการความสอดคล้อง

$$0.001455 - 0.15235(10^{-6})F_B = 0.001\,\mathrm{m}$$

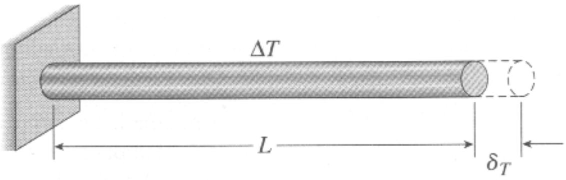
$$F_B = 2.99\,\mathrm{kN}$$ Ans.

จากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกน

$$F_A = 20 - 2.99 = 17.01\,\mathrm{kN}$$ Ans.

4.6 หน่วยแรงเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ (Thermal Stress)

การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจะทำให้ชิ้นส่วนของโครงสร้างเกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่าง ถ้าอุณหภูมิเพิ่มขึ้น วัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนของโครงสร้างจะเกิดการขยายตัว ดังที่แสดงในรูปที่ 4-9 และในทางตรงกันข้าม ถ้าอุณหภูมิลดลงวัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนของโครงสร้างจะเกิดการหดตัว



รูปที่ 4-9

โดยปกติแล้ว การยืดและการหดตัว เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ จะแปรผันโดยตรงกับค่าอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นและลดลง ตามลำดับ ถ้าวัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนของโครงสร้างเป็นวัสดุแบบ homogeneous และ isotropic แล้ว จากการทดสอบ เราจะได้ว่า การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนของโครงสร้าง เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิจะอยู่ในรูป

$$\delta_T = \alpha \, \Delta T \, L \tag{4-4}$$

เมื่อ α = สัมประสิทธิ์ของการยืดหรือหดตัวตามเส้น (linear coefficient of thermal expansion) ซึ่งเป็นคุณสมบัติของวัสดุ ดังที่แสดงในภาคผนวกที่ 1

ΔT = ค่าอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป

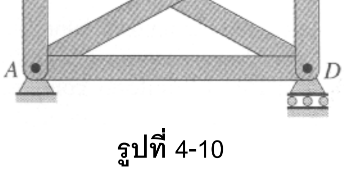
L = ความยาวของชิ้นส่วนของโครงสร้าง

δ_T =ค่าการยืดหรือหดตัวของชิ้นส่วนของโครงสร้าง

ถ้าอุณหภูมิหรือค่า α มีการเปลี่ยนแปลงไปตามความยาวของชิ้นส่วนของโครงสร้างแล้ว ค่าการยืดหรือหดตัวของชิ้นส่วนของโครงสร้างจะหาได้จากสมการ

$$\delta_T = \int_0^L \alpha \, \Delta T \; dx \tag{4-5}$$

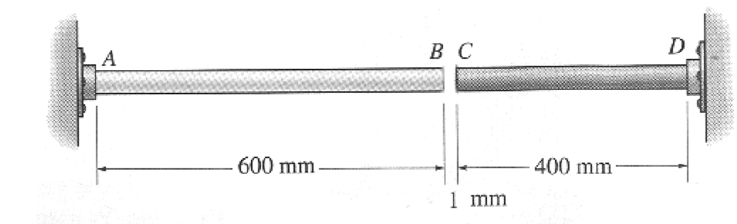
เราจะหาค่าการยืดหรือการหดตัวเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของชิ้นส่วนของโครงสร้างแบบ statically determinate ได้อย่างง่ายดายโดยใช้สมการที่ 4-4 หรือ 4-5 แต่ถ้าชิ้นส่วนของโครงสร้างเป็นแบบ statically indeterminate แล้ว การยืดหรือการหดตัวของชิ้นส่วนของโครงสร้างจะเกิดขึ้นไม่ได้อย่างอิสระ เนื่องจากการยึด (constraint) ของจุดรองรับ (supports) ของชิ้นส่วนของโครงสร้างนั้น ซึ่งจะก่อให้เกิด thermal stress ขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้างดังกล่าว การคำนวณหาค่าของ thermal stress ในโครงสร้างแบบ statically indeterminate ได้แสดงไว้ในตัวอย่างต่อไปนี้



รูปที่ 4-10

ตัวอย่างที่ 4-7

กำหนดให้โครงสร้างมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-7 และชิ้นส่วน AB ทำด้วย steel alloy A36 มีค่า $\alpha_{st} = 17(10^{-6})/^{o}C$, $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$, $\sigma_y = 250\,\mathrm{MPa}$ และมีพื้นที่หน้าตัด $A_{AB} = 600\,\mathrm{mm}^2$ และชิ้นส่วน CD ทำด้วย aluminum alloy 2014-T6 มีค่า $\alpha_{al} = 24(10^{-6})/^{o}C$, $E_{al} = 70\,\mathrm{GPa}$, $\sigma_y = 414\,\mathrm{MPa}$ และมีพื้นที่หน้าตัด $A_{CD} = 1200\,\mathrm{mm}^2$ เมื่ออุณหภูมิของโครงสร้างเพิ่มขึ้นจาก $25^{o}C$ เป็น $125^{o}C$ จงหาค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน AB และ CD



รูปที่ Ex 4-7

เมื่ออุณหภูมิของโครงสร้างเพิ่มสูงขึ้น ชิ้นส่วนทั้งสองของโครงสร้างจะเกิดการยืดตัวที่ไม่เท่ากันและจะทำให้จุด B และจุด C ชนกัน ซึ่งจะทำให้เกิดแรงกดอัดภายในโครงสร้างที่มีค่าเท่ากัน

จากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกนของโครงสร้าง

$$F_{st} = F_{al} = F$$

เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ของจุด A เทียบกับจุด D มีค่าเท่ากับช่องว่างระหว่างจุด B และจุด C ดังนั้น สมการความสอดคล้อง (compatibility equation) ของโครงสร้างจะเขียนได้ในรูป

$$\delta_{A/D} = 0.001\,\mathrm{m}$$

เนื่องจากการเพิ่มสูงขึ้นของอุณหภูมิทำให้ชิ้นส่วนทั้งสองของโครงสร้างเกิดการยืดตัว ดังนั้น ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นจะมีค่าเป็นบวก และเมื่อจุด B และจุด C ชนกันแล้ว แรงกดอัดจะเกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนของโครงสร้าง ซึ่งจะทำให้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นมีค่าเป็นลบ ดังนั้น

$$-\frac{F_{st}L_{AB}}{A_{AB}E_{st}} + \alpha_{st}\Delta T L_{AB} - \frac{F_{al}L_{CD}}{A_{CD}E_{al}} + \alpha_{al}\Delta T L_{CD} = 0.001$$

$$-\frac{F(0.6)}{600(10^{-6})200(10^9)} + 17(10^{-6})100(0.6) - \frac{F(0.4)}{1200(10^{-6})70(10^9)} + 27(10^{-6})100(0.4) = 0.001$$

$$9.762(10^{-9})F = 0.0011$$

$$F = 112.68\,\mathrm{kN}$$

ค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน AB และ CD จะมีค่าเท่ากับ

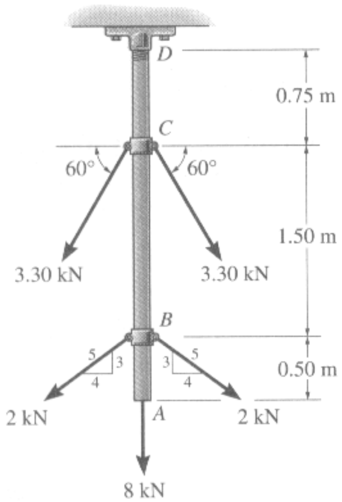
$$\sigma_{AB} = \frac{112.68}{600(10^{-6})} = 187.8\,\mathrm{MPa} < \sigma_y = 250\,\mathrm{MPa} \qquad \text{O.K.}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{112.68}{1200(10^{-6})} = 93.9\,\mathrm{MPa} < \sigma_y = 414\,\mathrm{MPa} \qquad \text{O.K.}$$

ดังนั้น หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน AB และ CD สอดคล้องกับสมมุติฐานที่ว่าวัสดุยังคงมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่น (elastic) ภายใต้การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ <u>Ans.</u>

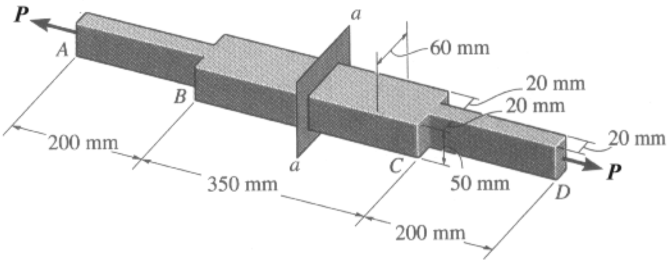
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

4-1 กำหนดให้แท่งเหล็กที่มีพื้นที่หน้าตัด $60\,\mathrm{mm}^2$ รองรับแรงกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-1 จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุด A และ B



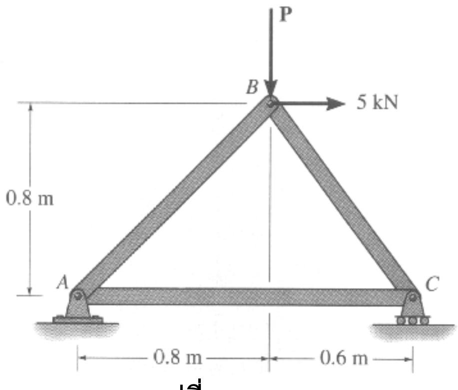
รูปที่ Prob. 4-1

4-2 กำหนดให้แท่งเหล็กมีขนาดและลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-2 ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน (axial load) $P = 50\,\mathrm{kN}$ จงหาค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในแนวแกนและที่หน้าตัด $a-a$ เมื่อ $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$ และ $\nu = 0.29$



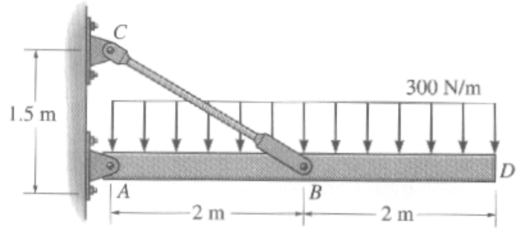
รูปที่ Prob. 4-2

4-3 ถ้าชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน (truss) เหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-3 มีพื้นที่หน้าตัด $400\,\mathrm{mm}^2$ จงหาค่าของแรง P ที่ทำให้ roller เกิดการเคลื่อนที่ไปทางขวามือ $0.2\,\mathrm{mm}$ เมื่อ $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$ (4-12)



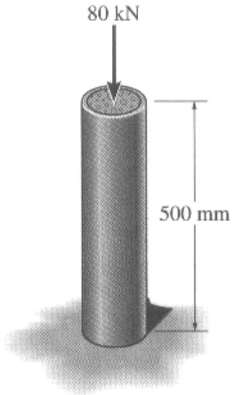
รูปที่ Prob. 4-3

4-4 แท่งเหล็กที่มีความแกร่งสูงมากถูกรองรับโดยแท่ง aluminum 6061-T6 ที่มีพื้นที่หน้าตัด $14\,\mathrm{mm}^2$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-4 จงหาค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในแนวดิ่งที่จุด D เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกกระจาย (4-19)



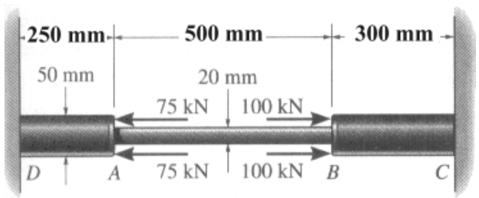
รูปที่ Prob. 4-4

4-5 เสาประกอบคอนกรีต-เหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-5 ถูกกระทำโดยแรงกดอัด $80\,\mathrm{kN}$ จงหาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในคอนกรีตและเหล็ก และจงหาความยาวที่เปลี่ยนไปของเสา เมื่อท่อเหล็กมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก $80\,\mathrm{mm}$ และเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน $70\,\mathrm{mm}$ และ $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$, $E_c = 24\,\mathrm{GPa}$



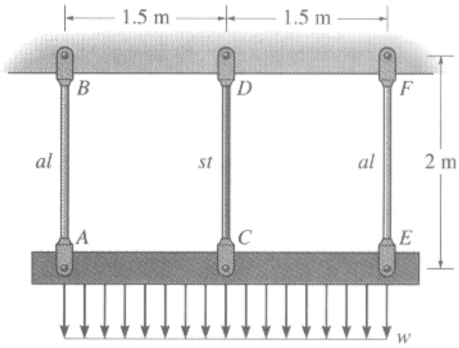
รูปที่ Prob. 4-5

4-6 Composite bar ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-6 มีชิ้นส่วน AB ทำด้วยเหล็ก ($E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$) และชิ้นส่วน DA และ BC ทำด้วยทองเหลือง ($E_{br} = 100\,\mathrm{GPa}$) จงหา normal stress ที่เกิดขึ้นในแต่ละชิ้นส่วนและจงหาการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุด A เทียบกับจุด B



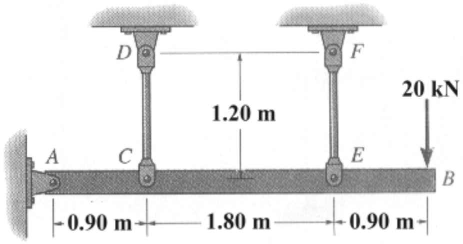
รูปที่ Prob. 4-6

4-7 แท่งเหล็ก ACE ถูกรองรับโดยแท่ง aluminum AB และ EF และแท่งเหล็ก CD ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-7 ถ้าแท่งเหล็กและแท่ง aluminum มีพื้นที่หน้าตัด $450\,\mathrm{mm}^2$ จงหาขนาดของน้ำหนักบรรทุกกระจาย w สูงสุดที่ยอมให้กระทำต่อแท่งเหล็ก ACE เมื่อเหล็กและ aluminum มีหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ $(\sigma_{allow})_{st} = 180\,\mathrm{MPa}$ และ $(\sigma_{allow})_{al} = 94\,\mathrm{MPa}$ ตามลำดับ และ $E_{al} = 70\,\mathrm{GPa}$ และ $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$



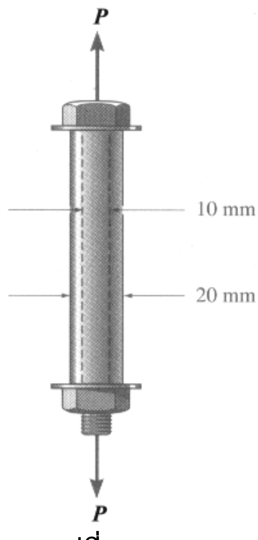
รูปที่ Prob. 4-7

4-8 แท่งเหล็ก $ACEB$ ถูกรองรับโดยแท่ง aluminum CD และ EF และถูกกระทำโดยแรง $20\,\mathrm{kN}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-8 ถ้าแท่ง aluminum มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $25\,\mathrm{mm}$ จงหาการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุด B และหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแท่ง aluminum



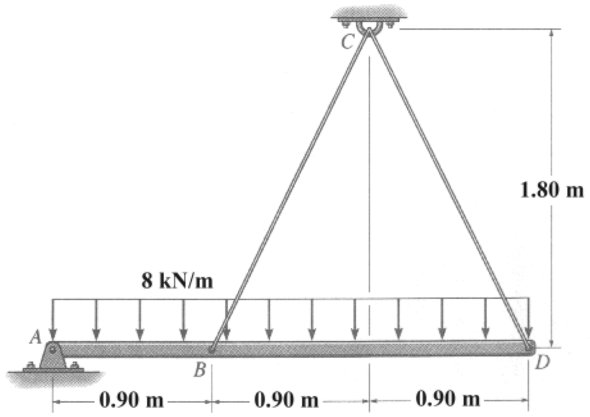
รูปที่ Prob. 4-8

4-9 สลักเกลียวเหล็กเส้นผ่าศูนย์ $10\,\mathrm{mm}$ และถูกหุ้มด้วยท่อทองเหลือง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-9 ถ้าสลักเกลียวถูกกระทำโดยหน่วยแรงกดอัด $P = 20\,\mathrm{kN}$ จงหาค่าหน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นในสลักเกลียวเหล็กและท่อทองเหลือง กำหนดให้ $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$ และ $E_{br} = 100\,\mathrm{GPa}$



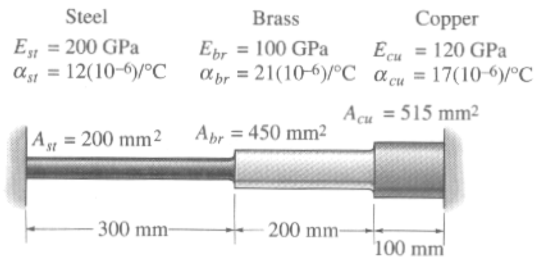
รูปที่ Prob. 4-9

4-10 กำหนดให้ชิ้นส่วนของโครงสร้าง ABD ถูกแขวนโดยใช้เคเบิลที่มีพื้นที่หน้าตัด $32\,\mathrm{mm}^2$ และ $E = 200\,\mathrm{GPa}$ สองเส้น ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-10 จงหาค่าหน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นในเคเบิล และค่าการหมุนของ ชิ้นส่วนของโครงสร้าง ABD



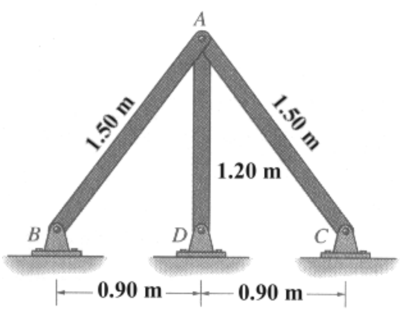
รูปที่ Prob. 4-10

4-11 จงหาค่าหน่วยแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-11 เมื่ออุณหภูมิของโครงสร้างเพิ่มขึ้นจาก 12^oC เป็น 18^oC



รูปที่ Prob. 4-11

4-12 กำหนดให้โครงข้อหมุนเหล็กมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-12 จงหาการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งที่จุดเชื่อมต่อ A เมื่ออุณหภูมิของโครงข้อหมุนเพิ่มขึ้น 55^oC เมื่อชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนมีพื้นที่หน้าตัด $1200\,\text{mm}^2$ และจงหาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน



รูปที่ Prob. 4-12

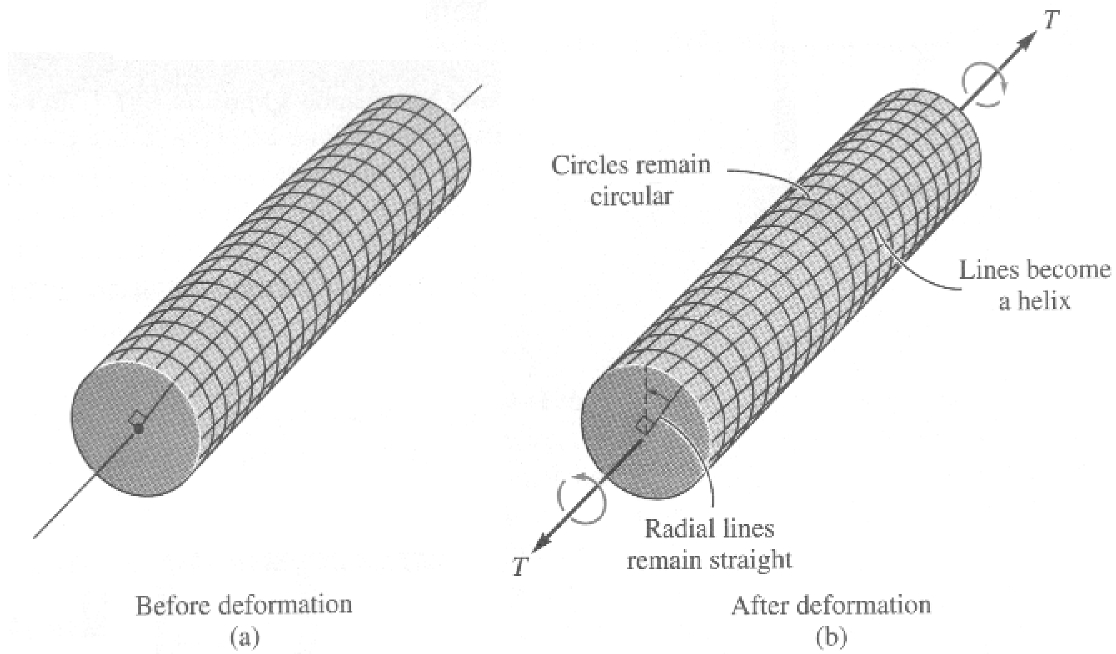
บทที่ 5
การบิด (Torsion)

เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

5.1 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากการบิดเพลากลม (Torsional Deformation of a Circular Shaft)

Torsion เป็นการบิดของชิ้นส่วนของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนของเครื่องจักรกล เช่น เพลารถยนต์ เป็นต้น เนื่องจากการกระทำของแรงบิด (torque) โดยที่แรงบิดเป็นโมเมนต์ (moment) ที่พยายามที่จะบิดชิ้นส่วนของโครงสร้างในแนวแกนของชิ้นส่วนของโครงสร้างนั้น

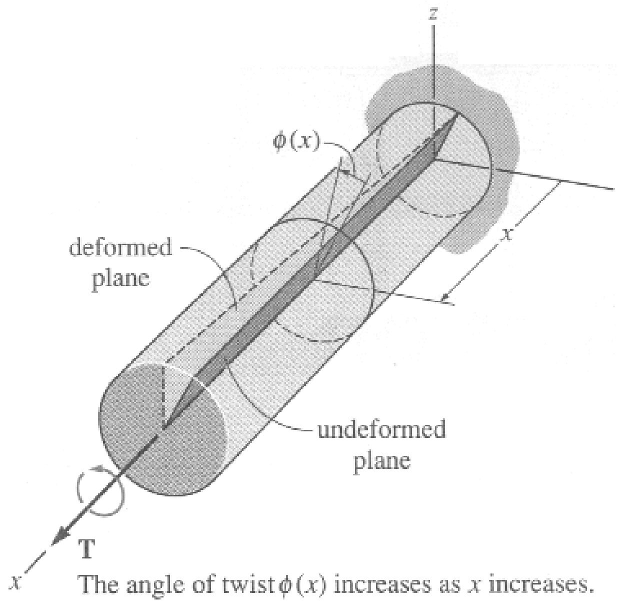
พิจารณาเพลาที่ทำด้วยวัสดุที่มีเนื้อเดียว (homogeneous material) และสามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ง่าย เช่น เพลายาง เป็นต้น ดังที่แสดงในรูปที่ 5-1a เมื่อแรงบิดกระทำต่อเพลายางนี้ grid lines ที่ประกอบด้วยเส้นวงกลมและเส้นตรงที่อยู่ในแนวแกนของเพลาจะเกิดการบิดขึ้นในลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 5-1b ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า เส้นวงกลมจะยังคงมีรูปร่างเป็นทรงกลมเหมือนเดิม แต่เส้นตรงแต่ละเส้นที่อยู่ในแนวแกนของเพลาจะเกิดการบิดเป็นเกลียว (helix) และจะตัดกับเส้นวงกลมเป็นมุมที่เท่ากันตลอดความยาวของเพลายาง นอกจากนั้นแล้ว หน้าตัดที่ปลายของเพลาก็จะยังคงมีลักษณะราบเรียบ (flat) และเส้นในแนวรัศมี (radial line) ที่ปลายของเพลาก็จะยังคงมีลักษณะเป็นเส้นตรงเหมือนเดิม



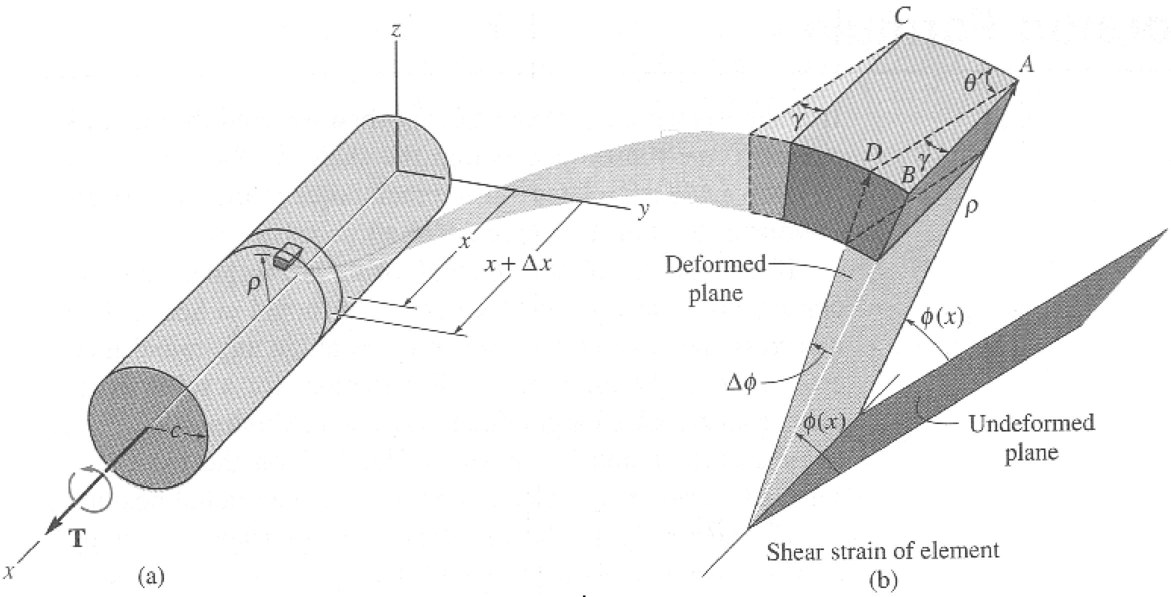
รูปที่ 5-1

จากการสังเกตดังกล่าว เราสรุปได้ว่า ถ้ามุมบิด (angle of rotation) มีค่าน้อยๆ แล้ว ความยาวและรัศมีของเพลาจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงภายใต้แรงบิด ดังนั้น ถ้าเพลาถูกยึดแน่นที่ปลายด้านหนึ่ง ดังที่แสดงในรูปที่ 5-2 และถูกกระทำโดยแรงบิดที่ปลายอีกด้านหนึ่งแล้ว ระนาบที่ระบายสีทึบจะเกิดการบิดเอียง (skew) ดังที่แสดงในรูป และมุมที่เกิดการบิดเอียงหรือมุมบิด (angle of twist) จะมีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่ง x

ในการหาค่าความเครียดที่เกิดขึ้นเนื่องจากการบิด (distortion strain) ให้เราพิจารณา differential element ที่ตัดออกมาจากเพลาที่รัศมี ρ จากจุดศูนย์กลางของหน้าตัดของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ 5-3 จากรูปที่ 5-2 และ 5-3 เราจะเห็นได้ว่า หน้าตัดของ differential element ที่ตัดออกมาจากเพลาที่ระยะ x จะเกิดการบิดเป็นมุม $\phi(x)$ และหน้าตัดของ differential element ที่ตัดออกมาจากเพลาที่ระยะ $x+\Delta x$ จะเกิดการบิดเป็นมุม $\phi(x)+\Delta\phi$ ดังนั้น ค่าความแตกต่างของการบิดที่เกิดขึ้นจะทำให้ differential element นี้ถูกกระทำโดยความเครียดเฉือน (shear strain)



รูปที่5-2



รูปที่ 5-3

จากรูปที่ 5-3 เราจะเห็นได้ว่า ก่อนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง มุมระหว่างขอบ AB และ AC มีค่าเท่ากับ 90^o แต่หลังเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง มุมดังกล่าวมีค่าเท่ากับ θ' ดังนั้น จากนิยามของความเครียดเฉือน

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{C \to A \text{ along } CA \\ D \to A \text{ along } BA}} \theta'$$

ถ้า $\Delta x \to dx$ และ $\Delta\phi \to d\phi$ แล้ว ความยาวจาก B ถึง D ซึ่งมีค่าน้อยมากและจะมีค่าเท่ากับ

$$BD = \rho \, d\phi = \gamma \, dx$$

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx} \tag{5-1}$$

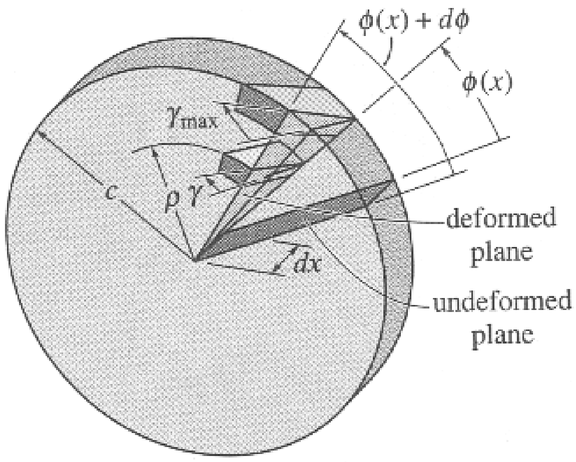
เนื่องจากมุม $d\phi$ และระยะ dx ของทุกๆ differential element ที่อยู่ที่หน้าตัดที่ระยะ x มีค่าคงที่ตลอดทั้งหน้าตัด ดังนั้น $d\phi / dx$ ที่หน้าตัดใดๆ จะมี**ค่าคงที่** และจากสมการที่ 5-1 เราจะได้ว่า ค่าความเครียดเฉือนของ differential element เหล่านี้จะแปรผันโดยตรงกับรัศมี ρ ของเพลา โดยจะมีค่าเท่ากับศูนย์ที่แกนของเพลาและจะมีค่ามากที่สุดที่ผิวด้านนอกของเพลา ถ้ากำหนดให้ความยาวของรัศมีของเพลาที่ผิวด้านนอกมีค่าเท่ากับ c แล้ว การบิดของ differential element ที่รัศมี ρ และที่ $\rho = c$ จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 5-4

เนื่องจาก $d\phi / dx = \gamma / \rho = \gamma_{\max} / c$ ดังนั้น

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{\max} \tag{5-2}$$

สมการที่ 5-2 นี้นอกจากจะใช้ได้กับท่อกลมตันแล้วยังใช้ได้กับท่อกลมกลวงด้วย

โดยการใช้ theory of elasticity เราสามารถที่จะแสดงให้เห็นได้ว่า ภายใต้ข้อสมมุติฐานที่กล่าวไปแล้วนั้น องค์ประกอบอื่นๆ ของหน่วยแรงตั้งฉากและความเครียดเฉือนจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อเพลาถูกกระทำโดยแรงบิด และสภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในเพลาซึ่งถูกกระทำโดยแรงบิดในแนวแกนนี้จะถูกเรียกว่า pure shear



The shear strain for the material increases linearly with ρ, i.e., $\gamma = (\rho/c)\gamma_{\max}$.

รูปที่ 5-4

5.2 **สูตรการบิด** (Torsion Formula)

เมื่อเพลาถูกกระทำโดยแรงบิดภายนอกแล้ว เพลาจะต้านทานแรงบิดดังกล่าวโดยพัฒนาแรงบิดลัพธ์ภายในตัวเพลาขึ้น เพื่อทำให้เพลาอยู่ในสภาวะสมดุล

ถ้าภายใต้แรงบิดภายนอกนี้ วัสดุที่ใช้ทำเพลายังคงมีพฤติกรรมแบบ linear elastic แล้ว จาก Hooke's law เราจะได้ว่า $\tau = G\gamma$ ดังนั้น จากข้อสรุปที่ว่า ความเครียดเฉือนที่เกิดขึ้นในเพลาจะแปรผันโดยตรงกับระยะในแนวรัศมีของเพลา เราจะได้ว่า หน่วยแรงเฉือนก็จะแปรผันโดยตรงกับระยะในแนวรัศมีของเพลาด้วย และจะมีค่าเท่ากับศูนย์ที่แกนของเพลาและจะมีค่ามากที่สุดที่ผิวด้านนอกของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ 5-5 โดยใช้หลักการสามเหลี่ยมคล้าย เราจะได้ว่า

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{\max} \tag{5-3}$$

เนื่องจากแรงบิดลัพธ์ภายในตัวเพลาเกิดจากการกระจายของหน่วยแรงเฉือนที่กระจายอยู่ตลอดทั้งหน้าตัดของเพลา ดังนั้น differential element ใดๆ ที่มีพื้นที่ dA และมีระยะในแนวรัศมี ρ จากแกนของเพลาจะถูกกระทำโดยแรง

$$dF = \tau \, dA$$

และแรงบิดที่เกิดจากแรงนี้จะมีค่าเท่ากับ

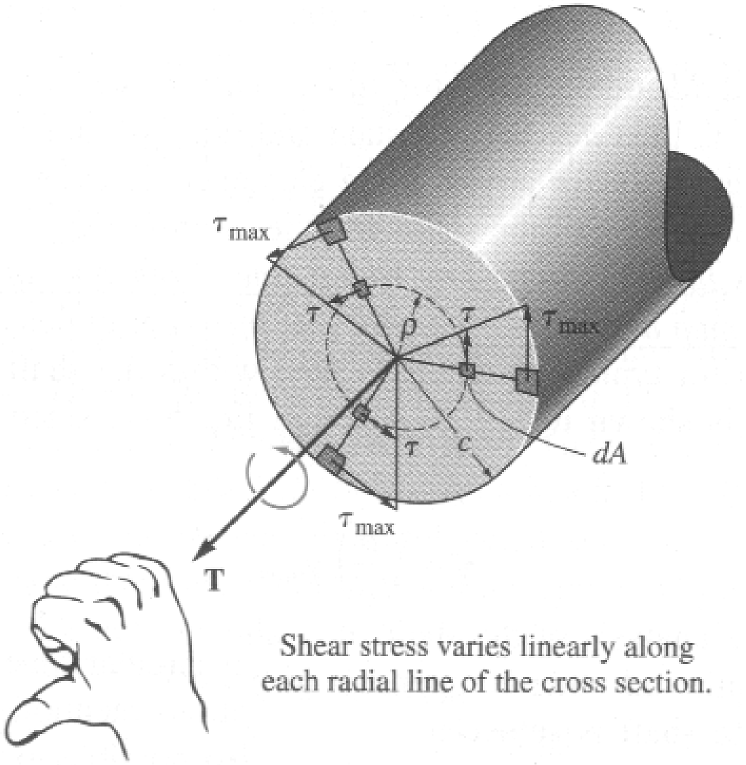
$$dT = \rho(\tau\ dA)$$

เมื่อเราพิจารณาตลอดทั้งหน้าตัดของเพลาแล้ว แรงบิดภายในตัวเพลาจะมีค่าเท่ากับ

$$T = \int_A \rho(\tau\ dA) = \int_A \rho(\frac{\rho}{c}\tau_{\max})\, dA \qquad (5\text{-}4)$$

เนื่องจาก $\tau_{\max}/c$ มีค่าคงที่ ดังนั้น

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c}\int_A \rho^2 dA \qquad (5\text{-}5)$$



รูปที่ 5-5

เทอม integral ในสมการที่ 5-5 จะขึ้นอยู่กับรูปร่างของหน้าตัดของเพลาเพียงอย่างเดียวและจะถูกเรียกว่า polar moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของเพลาหรือ J ดังนั้น เราจะเขียนสมการที่ 5-5 ได้ใหม่เป็น

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \qquad (5\text{-}6)$$

เมื่อ $\tau_{\max}$ = ค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ผิวด้านนอกของเพลา

T = แรงบิดลัพธ์ภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดของเพลาเนื่องจากแรงบิด

J = polar moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของเพลา

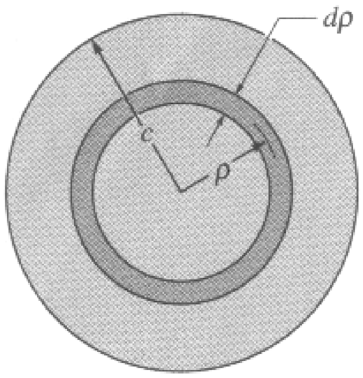
c = รัศมีของเพลา

จากสมการที่ 5-3 และ 5-6 ค่าของหน่วยแรงเฉือนที่รัศมี ρ ใดๆ ของเพลาจะหาได้จากสมการ

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \qquad (5\text{-}7)$$

สมการที่ 5-6 และ 5-7 นี้มักจะถูกเรียกว่า torsion formula ซึ่งใช้ได้กับเพลาที่มีหน้าตัดทรงกลมที่ทำด้วยวัสดุแบบ homogenous และมีพฤติกรรมแบบ linear elastic เท่านั้น

Solid Shaft



รูปที่ 5-6

ในกรณีที่เพลามีหน้าตัดกลมตันแล้ว ค่า polar moment of inertia J จะหามาได้โดยการพิจารณา differential ring ที่มีความหนาเท่ากับ $d\rho$ และมีเส้นรอบวงเท่ากับ $2\pi\rho$ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-6 และมีพื้นที่เท่ากับ $dA = 2\pi\rho\ d\rho$ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 (2\pi\rho)\, d\rho = 2\pi \int_0^c \rho^3\ d\rho = 2\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^c$$

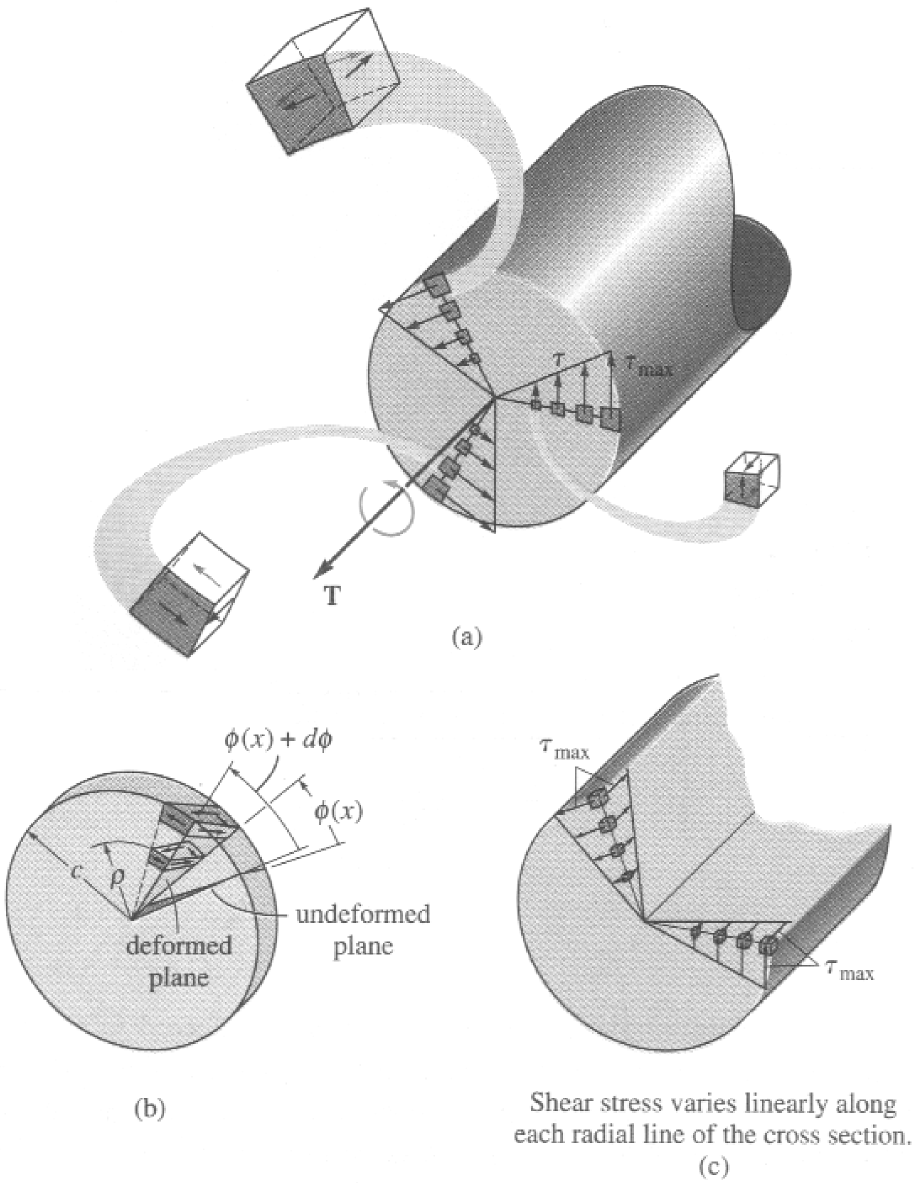
$$J = \frac{\pi}{2} c^4 \tag{5-8}$$

จากสมการที่ 5-8 เราจะเห็นว่า J จะมีค่าขึ้นอยู่กับรัศมีหรือเส้นผ่าศูนย์กลางของเพลาเท่านั้นและจะมีค่าเป็นบวกเสมอ

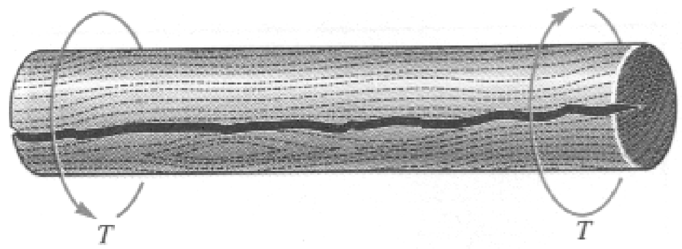
รูปที่ 5-7a แสดงการกระจายของหน่วยแรงเฉือนในแนวรัศมีบนหน้าตัดของเพลาตัน ซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นตรง โดยมีค่าเป็นศูนย์ที่แกนของเพลาและมีค่าสูงสุดที่ผิวนอกของเพลา จากรูป เราจะเห็นได้ว่า หน่วยแรงเฉือนต่างๆ ที่เกิดขึ้นบนแต่ละ differential element เล็กๆ จะมีทิศทางไปทางเดียวกับแรงบิด T ในทิศทางทวนเข็มนาฬิการอบจุดศูนย์กลางของหน้าตัดของเพลา

นอกจากหน่วยแรงเฉือนในแนวขนานกับหน้าตัดแล้ว ถ้าเราตัด cubic volume element เล็กๆ ออกมาจากเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7a แล้ว เราจะเห็นได้ว่า cubic volume element ดังกล่าวจะต้องมีหน่วยแรงเฉือนเกิดขึ้นบนหน้าตัดอีก 3 หน้าตัดที่อยู่ทางด้านข้างของ cubic volume element โดยที่หน่วยแรงเฉือนทั้งสามจะต้องมีค่าเท่ากับหน่วยแรงเฉือนในแนวขนานกับหน้าตัดและทิศทาง ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7 เพื่อทำให้เกิดสมดุลของแรงและ moment บน cubic volume element ดังกล่าว

การกระจายของหน่วยแรงเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกนของเพลาจะมีลักษณะเช่นเดียวกับหน่วยแรงเฉือนในแนวขนานกับหน้าตัด ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7c หน่วยแรงเฉือนนี้จะเป็นสาเหตุทำให้เพลาไม้ ซึ่งถูกกระทำโดยแรงบิดเกิดการวิบัติโดยการแตกร้าวในแนวแกนของเพลาไม้ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-8 ทั้งนี้เนื่องจากไม้มีกำลังรับแรงเฉือนในแนวตามเสี้ยนต่ำกว่าในแนวขวางเสี้ยน



รูปที่ 5-7



Failure of a wooden shaft due to torsion

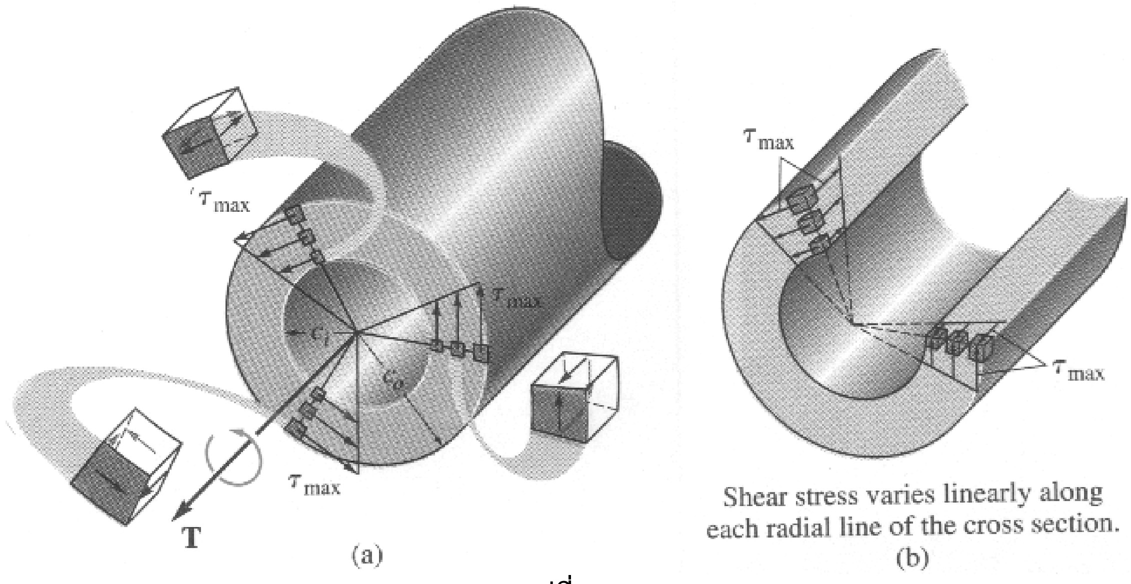
รูปที่ 5-8

Tubular Shaft

การวิเคราะห์เพลากลวงซึ่งถูกกระทำโดยแรงบิดจะมีลักษณะที่คล้ายคลึงกับการวิเคราะห์เพลาตัน ในกรณีที่เพลากลวง ซึ่งมีรัศมีภายใน c_i และรัศมีภายนอก c_o แล้ว จากสมการที่ 5-8 เราจะหาค่า polar moment of inertia J ได้โดยการหักค่า J ของเพลาตันที่มีรัศมี c_i ออกจากค่า J ของเพลาตันที่มีรัศมี c_o ดังนั้น เราจะได้

$$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4) \tag{5-9}$$

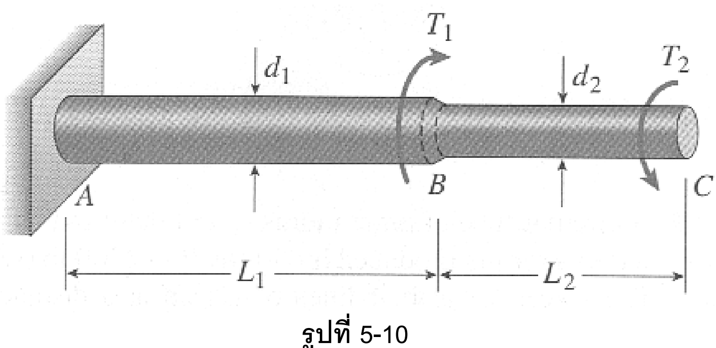
รูปที่ 5-9 แสดงการกระจายของหน่วยแรงเฉือนในแนวรัศมีและในแนวแกนของเพลากลวง เราจะเห็นได้ว่า เพลากลวงมีประสิทธิภาพในการใช้วัสดุในการต้านทานต่อแรงบิดมากกว่าเพลาตัน เนื่องจากว่าพื้นที่โดยส่วนใหญ่ของเพลากลวงที่ใช้ในการรับแรงบิดอยู่ห่างออกไปจากศูนย์กลางของเพลา ดังนั้น วัสดุที่ใช้ทำเพลากลวงโดยส่วนใหญ่จะรับหน่วยแรงเฉือนที่มีค่าค่อนข้างสูง นอกจากนั้นแล้ว หน่วยแรงเฉือนยังมี moment arms ในการต้านทานแรงบิดที่มากกว่าเพลาตันด้วย



รูปที่ 5-9

Absolute Maximum Torsional Stress

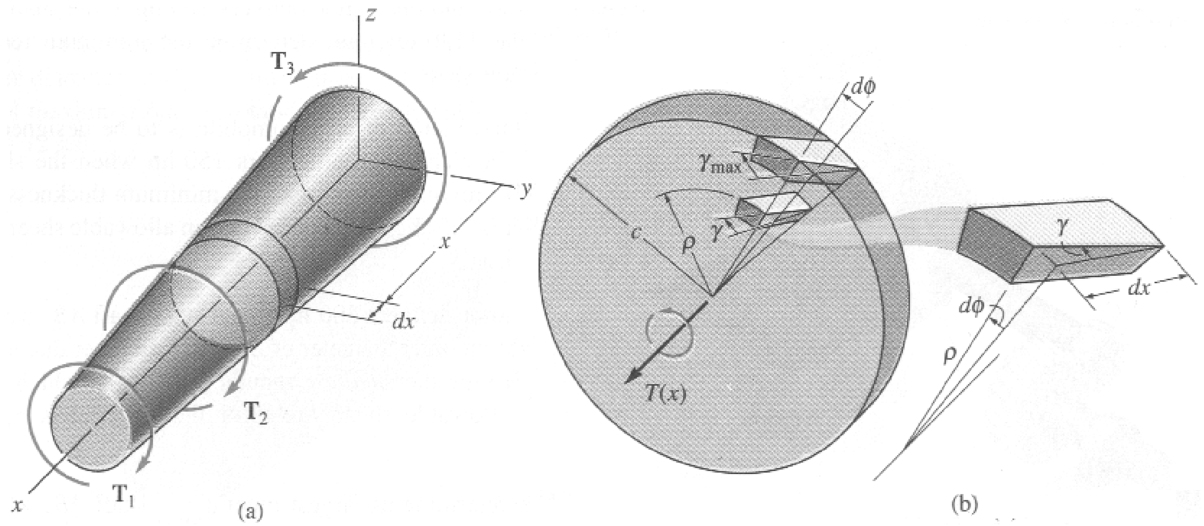
ที่หน้าตัดใดๆ ของเพลา ค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนจะเกิดขึ้นที่ผิวด้านนอกของเพลา ในกรณีที่เพลาถูกกระทำโดยแรงบิดภายนอกหลายๆ ค่าหรือรัศมีของเพลามีการเปลี่ยนแปลงเป็นช่วงๆ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-10 แล้ว ค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นจะมีความแตกต่างกันจากหน้าตัดหนึ่งไปยังอีกหน้าตัดหนึ่ง ในการออกแบบเพลาที่มีลักษณะดังกล่าว เราจำเป็นที่จะต้องหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ของหน่วยแรงเฉือนและตำแหน่งที่เกิดด้วย ซึ่งจะทำได้โดยการเขียน torque diagram ที่เป็นแผนภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของแรงบิดภายใน T ที่เกิดขึ้นเทียบกับระยะ x ในแนวแกนของเพลา ในการเขียนแผนภาพนี้ เราจะให้แรงบิดภายใน T มีค่าเป็นบวกเมื่อมีทิศทางพุ่งออกจากหน้าตัดของเพลาโดยใช้กฎมือขวา ดังที่แสดงในรูปที่ 5-5 หลังจากที่ได้ torque diagram แล้วเราจะหาค่า absolute maximum ของหน่วยแรงเฉือนและตำแหน่งที่เกิดได้โดยง่าย



รูปที่ 5-10

5.3 **มุมบิด** (Angle of Twist)

พิจารณาเพลาที่มีหน้าตัดทรงกลมและมีหน้าตัดที่เปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องตลอดความยาวของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ 5-11a กำหนดให้เพลาถูกยึดแน่นที่ปลายด้านหนึ่ง โดยที่ปลายอีกด้านหนึ่งเป็นอิสระ วัสดุที่ใช้ทำเพลาเป็นวัสดุแบบ homogeneous และมีพฤติกรรมแบบ linear elastic ภายใต้แรงบิด และไม่พิจารณา localized deformation ที่เกิดขึ้นที่จุดที่แรงบิดกระทำ ที่จุดยึดแน่น และที่จุดที่หน้าตัดของเพลามีการเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใด



รูปที่ 5-11

โดยใช้ method of section เราจะตัด differential disk ที่ระยะในแนวแกน x จากปลายของเพลาด้านที่ถูกยึดแน่นได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-11b ซึ่งกำหนดให้ differential disk นี้มีความหนา dx

เนื่องจากแรงบิดภายนอกอาจจะทำให้แรงบิดลัพธ์ภายในมีค่าเปลี่ยนแปลงตลอดความยาวของเพลา ดังนั้น เราจะให้แรงบิดภายในที่เกิดขึ้นเป็น function กับ x หรือ $T(x)$ เนื่องจากแรงบิดนี้ หน้าตัดด้านหนึ่งของ differential disk จะมีการหมุนสัมพัทธ์เทียบกับอีกหน้าตัดหนึ่งเป็นมุม $d\phi$ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-11b และ differential element เล็กๆ ที่อยู่ที่ตำแหน่งในแนวรัศมี ρ ใดๆ จะมีความเครียดเฉือน (shear strain) γ เกิดขึ้น ซึ่งจากสมการที่ 5-1 เราจะได้ว่า

$$d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho} \tag{5-10}$$

จาก Hooke's law $\gamma = \tau / G$ และจาก torsion formula $\tau = T(x)\rho / J(x)$ เราจะเขียนสมการของความเครียดเฉือนอยู่ในรูปของแรงบิดได้เป็น

$$\gamma = \frac{T(x)\rho}{J(x)G}$$

เมื่อ แทนสมการของความเครียดเฉือน γ ลงในสมการที่ 5-10 เราจะได้

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G} dx$$

และค่ามุมบิดที่เกิดขึ้นตลอดความยาว L ของเพลาจะหาได้จาก

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x)G} dx \tag{5-11}$$

เมื่อ ϕ = มุมบิดที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านหนึ่งของเพลาเทียบกับปลายอีกด้านหนึ่ง ซึ่งมีหน่วยเป็น radian

$T(x)$ = แรงบิดภายในที่เกิดขึ้นที่ระยะ x ใดๆ

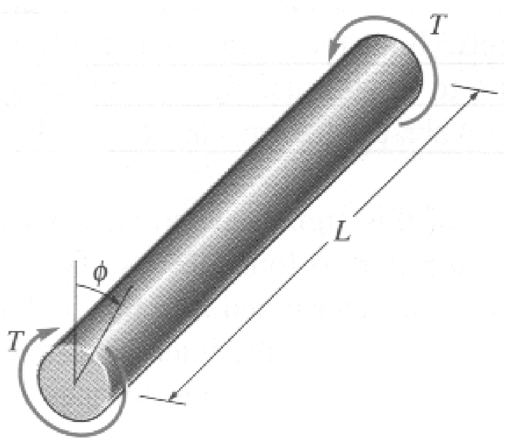
$J(x)$ = polar moment of inertia ของหน้าตัดของเพลาที่ระยะ x ใดๆ

G = shear modulus ของวัสดุที่ใช้ทำเพลา

Constant Torque and Cross-Sectional Area

โดยทั่วไปแล้ว เพลาจะทำด้วยวัสดุแบบ homogenous และมีพื้นที่หน้าตัดที่คงที่และถูกกระทำโดยแรงบิดที่มีค่าคงที่ตลอดความยาวของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ 5-12 ดังนั้น ค่า $T(x)=T$, $J(x)=J$, และ G มีค่าคงที่และสมการที่ 5-11 จะลดรูปลงเป็น

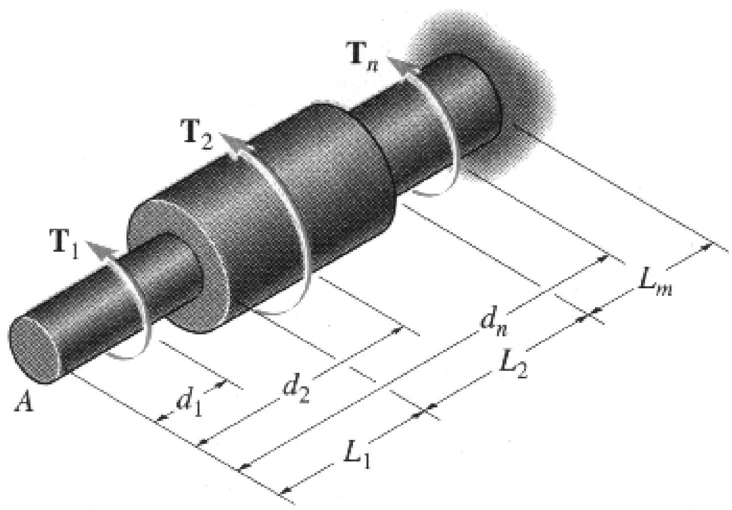
$$\phi = \frac{TL}{GJ} \tag{5-12}$$



รูปที่ 5-12

ในกรณีที่เพลาถูกกระทำโดยแรงบิดหลายแรงบิดตลอดความยาวของเพลา หรือพื้นที่หน้าตัดหรือวัสดุที่ใช้ทำเพลามีการเปลี่ยนแปลงจากส่วนหนึ่งของเพลาไปยังอีกส่วนหนึ่งแล้ว ดังที่แสดงในรูปที่ 5-13 แล้ว มุมบิดที่เกิดขึ้นที่จุดๆ หนึ่งเทียบกับจุดอ้างอิงบนเพลาดังกล่าวจะหาได้จากสมการ

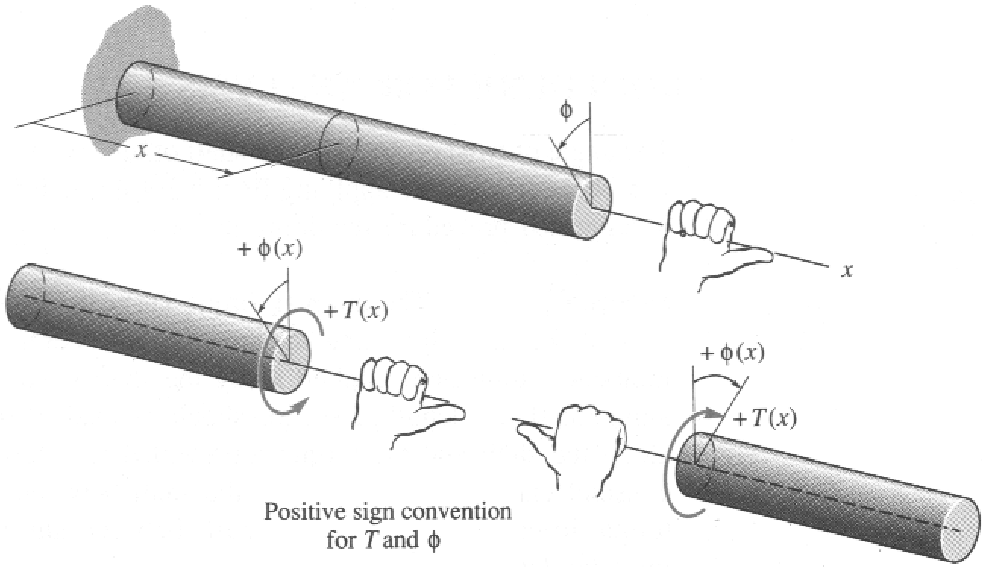
$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{G_i J_i} \tag{5-13}$$



รูปที่ 5-13

Sign Convention

Sign convention ที่จะใช้ในการคำนวณหามุมบิดจะเป็นไปตามกฎมือขวา โดยที่แรงบิดและมุมบิดที่เกิดขึ้นจะมีค่าเป็นบวกเมื่อมีทิศทางพุ่งออกมาจากหน้าตัดของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ 5-14 และจะมีค่าเป็นลบเมื่อมีทิศทางพุ่งเข้าหาหน้าตัดของเพลา

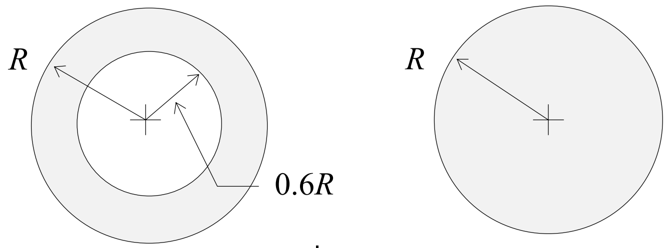


Positive sign convention for T and ϕ

รูปที่ 5-14

ตัวอย่างที่ 5-1

เพลาตันและเพลากลวง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex5-1 ทำด้วยวัสดุชนิดเดียวกัน โดยมีความยาว L และรัศมีภายนอก $c_o = R$ เท่ากัน กำหนดให้เพลากลวงมีรัศมีภายในเท่ากับ $c_i = 0.6R$ สมมุติให้เพลาทั้งสองถูกกระทำโดยแรงบิด T (torque) ที่มีค่าเท่ากัน จงเปรียบเทียบค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้น มุมบิดที่เกิดขึ้น และน้ำหนักของเพลากลวงต่อเพลาตัน



รูปที่ Ex 5-1

จาก torsion formula, $\tau_{\max} = \dfrac{Tc}{J}$ เราจะเห็นได้ว่า เมื่อแรงบิดและรัศมีภายนอกมีค่าคงที่แล้ว ค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนจะเป็นสัดส่วนผกผันกับค่า polar moment of inertia ของเพลา

Polar moment of inertia ของเพลาตันและเพลากลวงจะหาได้จาก

$$J_1 = \frac{\pi R^4}{2} = 0.5\pi R^4$$

$$J_2 = \frac{\pi(c_o^4 - c_i^4)}{2} = \frac{\pi}{2}(R^4 - (0.6R)^4) = 0.4352\pi R^4$$

ดังนั้น อัตราส่วนของค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในเพลากลวงเทียบกับเพลาตันจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{(\tau_{\max})_2}{(\tau_{\max})_1} = \frac{TR}{0.4352\pi R^4}\frac{0.5\pi R^4}{TR} = \frac{0.5}{0.4352} = 1.15$$ <u>Ans.</u>

เช่นเดียวกับในกรณีของค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือน จากสมการของมุมบิด, $\phi = \dfrac{TL}{GJ}$ เราจะเห็นได้ว่า เมื่อแรงบิดและรัศมีภายนอกมีค่าคงที่แล้ว ค่ามุมบิดจะเป็นสัดส่วนผกผันกับค่า polar moment of inertia ของเพลา ดังนั้น เมื่อเพลาทั้งสองทำด้วยวัสดุชนิดเดียวกันแล้ว อัตราส่วนของมุมบิดที่เกิดขึ้นในเพลากลวงเทียบกับเพลาตันจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{(\phi)_2}{(\phi)_1} = \frac{TL}{G(0.4352\pi R^4)}\frac{G(0.5\pi R^4)}{TL} = 1.15$$ <u>Ans.</u>

และเมื่อเพลาทั้งสองทำด้วยวัสดุชนิดเดียวกัน (ความหนาแน่นและความถ่วงจำเพาะจะมีค่าเท่ากัน) แล้ว อัตราส่วนของน้ำหนักของเพลากลวงเทียบกับเพลาตันจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{(W)_2}{(W)_1} = \frac{\gamma L\pi(0.6R)^2}{\gamma L\pi R^2} = 0.64$$ <u>Ans.</u>

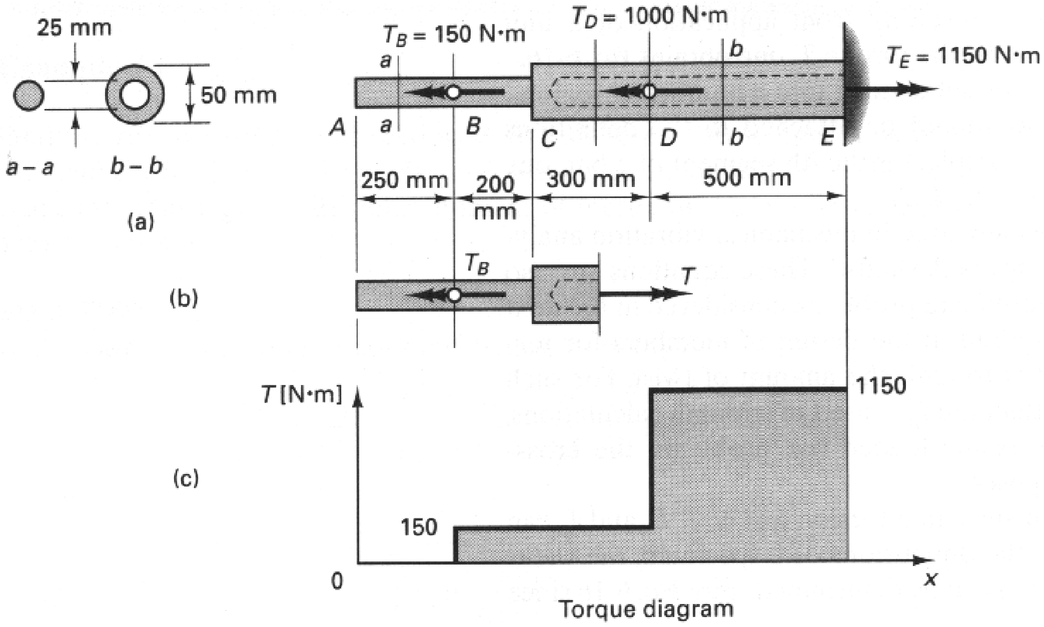
จากคำตอบทั้งสาม เราจะเห็นได้ว่า ถึงแม้นเพลากลวงจะมีค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนและมุมบิดมากกว่าเพลาตัน 15% แต่เพลากลวงจะมีน้ำหนักเบากว่าเพลาตันถึง 36%

ตัวอย่างที่ 5-2

พิจารณาเพลาเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-2a ซึ่งถูกยึดแน่นกับผนังที่จุด E กำหนดให้ $G = 80\,\text{GPa}$ จงหา

a.) ค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในเพลา

b.) ค่าสูงสุดของมุมบิดที่เกิดขึ้นในเพลา



รูปที่ Ex 5-2

จากรูปตัดของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-2a เราจะหาค่า polar moment of inertia ของหน้าตัดของส่วน ABC และ CDE ของเพลาเหล็กได้ดังนี้

$$J_{AB} = J_{BC} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(25)^4}{32} = 38.3(10^3)\,\text{mm}^4$$

$$J_{CD} = J_{DE} = \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(50^4 - 25^4) = 575(10^3)\,\text{mm}^4$$

โดยการตัด sections ต่างๆ ของเพลาและใช้สมการความสมดุลของแรงบิดรอบแกนของเพลาเหล็ก ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ Ex 5-2b เราจะเขียนแผนภาพ torque diagram ของเพลาได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-2c

a.) ค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในเพลา

จากแผนภาพ torque diagram ของเพลา เราจะเห็นได้ว่า ค่าสูงสุดของแรงบิดเกิดขึ้นที่ส่วน DE ของเพลา แต่เนื่องจากส่วน BC ของเพลามีค่า polar moment of inertia ของหน้าตัดต่ำกว่าส่วน DE ของเพลา ดังนั้น เราต้องทำการตรวจสอบค่าหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในส่วนทั้งสองของเพลา

จากสมการ torsion formula เราจะได้ว่า

$$\tau_{BC} = \frac{150(25/2)10^{-3}}{38.3(10^3)(10^{-12})} = 48.96\,\text{MPa}$$

$$\tau_{DE} = \frac{1150(50/2)10^{-3}}{575(10^3)(10^{-12})} = 50\,\text{MPa}$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนเกิดขึ้นที่ส่วน DE ของเพลาและมีค่าเท่ากับ $50\,\text{MPa}$ <u>Ans.</u>

b.) ค่าสูงสุดของมุมบิดที่เกิดขึ้นในเพลา

ค่าสูงสุดของมุมบิดที่เกิดขึ้นในเพลาจะหาได้จากผลรวมขอมุมบิดที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของเพลา

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{G_i J_i} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{GJ_{AB}} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{GJ_{BC}} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{GJ_{CD}} + \frac{T_{DE} L_{DE}}{GJ_{DE}}$$

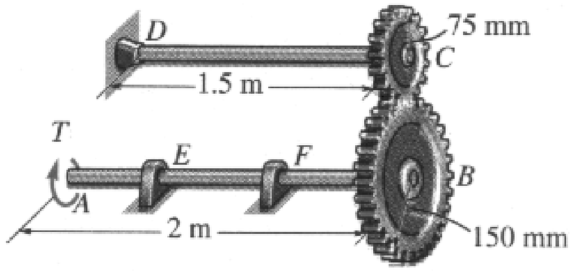
แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ เราจะได้ว่า

$$\phi = 0 + \frac{150(10^3)200}{38.3(10^3)80(10^3)} + \frac{150(10^3)300}{575(10^3)80(10^3)} + \frac{1150(10^3)500}{575(10^3)80(10^3)} = 23.3(10^{-3})\ \mathrm{rad}$$

ซึ่งมีทิศทางเป็นบวก <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 5-3

กำหนดให้ mechanical system มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex5-3 ซึ่งประกอบด้วยเพลาเหล็กตัน 2 ท่อน เส้นผ่าศูนย์กลางเพลาเหล็กเท่ากับ $20\ \mathrm{mm}$ จงหาค่าแรงบิดสูงสุดที่ mechanical system สามารถรองรับได้ เมื่อมุมบิดสูงสุดที่เกิดขึ้นมีค่าได้ไม่เกิน $0.10\ \mathrm{rad}$ และ $G = 80\ \mathrm{GPa}$



รูปที่ Ex5-3

ค่า polar moment of inertia ของหน้าตัดของเพลา AB และเพลา CD มีค่าเท่ากับ

$$J_{AB} = J_{CD} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(0.020)^4}{32} = 15.708(10^{-9})\ \mathrm{m}^4$$

หาแรงบิดที่เกิดขึ้นภายใน

แรงบิดที่เกิดขึ้นภายในเพลา AB มีค่าเท่ากับ T และทำให้เกิดแรงกระทำต่อฟันเฟืองของเฟือง B เท่ากับ

$$F = \frac{T}{0.15}$$

แรงดังกล่าวจะกระทำต่อฟันเฟืองของเฟือง C และทำให้เกิดแรงบิดบนเพลาเท่ากับ

$$T_{CD} = F(0.075) = 0.5T$$

หามุมบิดสูงสุดที่เกิดขึ้น

มุมบิดที่เกิดขึ้นที่เฟือง C เทียบกับจุดยึดแน่น D ในเพลา CD มีค่าเท่ากับ

$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD}L_{CD}}{GJ} = \frac{0.5T(1.5)}{80(10^9)15.708(10^{-9})} = 5.968(10^{-4})T\ \mathrm{rad}$$

เมื่อเฟือง C บิดไปเป็นมุม $\phi_{C/D}$ แล้ว ฟันเฟืองของเฟือง C จะเคลื่อนที่ไปเป็นระยะเท่ากับ

$$\phi_{C/D}(0.075) = 4.476(10^{-5})T\ \mathrm{m}$$

ซึ่งจะทำให้ฟันเฟืองของเฟือง B บิดไปเป็นมุมเท่ากับ

$$\phi_B = \frac{4.476(10^{-5})T}{0.150} = 2.984(10^{-4})T\ \mathrm{rad}$$

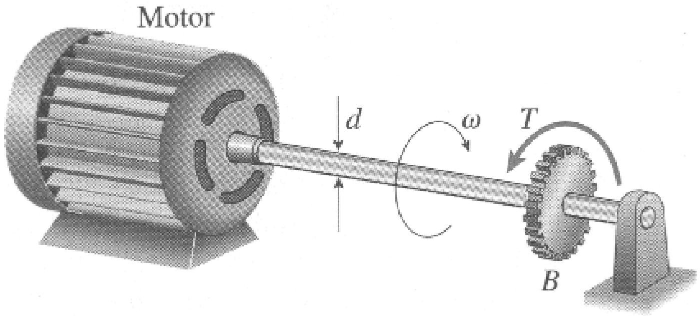
มุมบิดที่เกิดขึ้นระหว่างปลาย A ในเพลา AB เทียบกับจุดยึดแน่น D จะมีค่าเท่ากับ

$$\phi_{A/D} = \phi_B + \frac{TL_{AB}}{GJ} = 2.984(10^{-4})T + \frac{T(2)}{80(10^9)15.708(10^{-9})} = 1.890(10^{-3})T\ \mathrm{rad}$$

เนื่องจากมุมบิดสูงสุดที่เกิดขึ้นใน mechanical system มีค่าได้ไม่เกิน $0.10\ \mathrm{rad}$ ดังนั้น

$$T_{\max} = \frac{0.1}{1.89(10^{-3})} = 52.9\ \mathrm{N\text{-}m}$$ <u>Ans.</u>

5.4 **เพลาส่งกำลัง** (Power Shaft)



รูปที่ 5-15

เพลากลมตันและเพลากลมกลวงมักจะถูกนำมาใช้ในการถ่ายแรงในเครื่องจักรกลต่างๆ ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ 5-15 ในกรณีนี้ค่าแรงบิดที่กระทำกับเพลาจะขึ้นอยู่กับกำลังของเครื่องจักรและความเร็วเชิงมุมของเพลา กำลังของเครื่องจักร P จะเป็นงานที่เครื่องจักรทำให้เกิดขึ้นต่อหนึ่งหน่วยเวลา ซึ่งจะมีค่าเท่ากับผลคูณของแรงบิดกับมุมบิดที่เกิดขึ้นจากแรงบิดนั้น ดังนั้น ถ้าในช่วงเวลา dt เครื่องจักรส่งแรงบิดกระทำต่อเพลา T และทำให้เพลาหมุนไปเป็นมุม $d\theta$ แล้ว กำลังที่เกิดขึ้นจะมีค่าเท่ากับ

$$P = T\frac{d\theta}{dt}$$

เนื่องจากความเร็วเชิงมุมของเพลา $\omega = d\theta / dt$ ดังนั้น

$$P = T\omega \qquad (5\text{-}14)$$

และเนื่องจากความถี่ของการหมุนของเพลา $f = \omega / 2\pi$ ดังนั้น

$$P = 2\pi f\, T \qquad (5\text{-}15)$$

Shaft Design

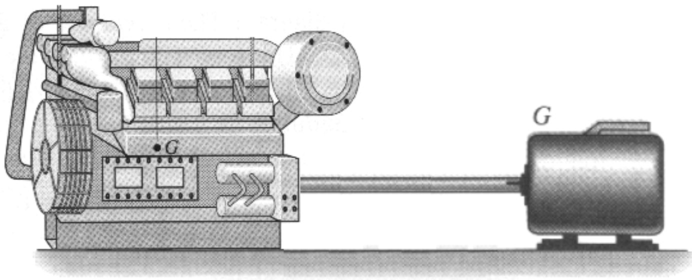
เมื่อเราทราบกำลังของเครื่องจักร P และความเร็วเชิงมุมของเพลา ω หรือความถี่ของการหมุนของเพลา f แล้ว เราจะหาค่าแรงบิดที่กระทำกับเพลา T ได้ และถ้าเราทราบค่าหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ (allowable shear stress) τ_{allow} ของวัสดุที่ใช้ทำเพลาแล้ว เราจะหาขนาดของหน้าตัดของเพลาได้จากสมการ

$$\frac{J}{c} = \frac{T}{\tau_{allow}} \qquad (5\text{-}16)$$

ในกรณีที่เพลาเป็นเพลาตัน ขนาดหน้าตัดของเพลาจะหามาได้โดยง่ายโดยใช้สมการที่ 5-16 แต่ถ้าเพลาเป็นเพลากลวง ซึ่ง $J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4)$ แล้ว ขนาดของหน้าตัดของเพลาจะมีค่าได้หลายค่า โดยปกติแล้ว เราจะกำหนดค่าใดค่าหนึ่งของ c_o หรือ c_i ขึ้นมาค่าหนึ่งก่อน จากนั้น เราจะหาค่าอีกค่าหนึ่งที่เหลือโดยใช้สมการดังกล่าว

ตัวอย่างที่ 5-4

เครื่องกำเนิดไฟฟ้า G ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-4 ถูกเชื่อมต่อเข้ากับเครื่องยนต์โดยใช้เพลาเหล็กกลวง A36 ซึ่งมีความยาว $1.2\ \mathrm{m}$ และมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก $40\ \mathrm{mm}$ ขณะทำการผลิตกระแสไฟฟ้าเพลาดังกล่าวจะหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = 100\ \mathrm{rad/sec}$ และต้องส่งกำลัง $P = 50\ \mathrm{kW}$ จงหาความหนาที่น้อยที่สุดของเพลาเหล็กกลวงเมื่อกำหนดให้ ultimate shear stress ของเหล็กเท่ากับ $200\ \mathrm{MPa}$ และมุมบิดสูงสุดจะต้องมีค่าไม่เกิน 3^o ใช้ factor of safety เท่ากับ 2.0 ในการออกแบบเพลาและ $G_{st} = 80\ \mathrm{MPa}$



รูปที่ Ex 5-4

ในการออกแบบหาความหนาของเพลา เราจะต้องทำการหาความหนาโดยให้เพลามีกำลังที่เพียงพอในการต้านทานต่อแรงบิด และเพลาจะต้องมีมุมบิดไม่เกินค่าที่กำหนด

หาความหนาของเพลาโดยให้เพลามีกำลังที่เพียงพอในการต้านทานต่อแรงบิด

แรงบิดที่กระทำต่อเพลาจะหาได้จากสมการ $P = T\omega$ ดังนั้น

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{50000}{100} = 500\ \mathrm{N.m}$$

ค่าหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้

$$\tau_{allow} = \frac{\tau_{ult}}{\mathrm{F.S.}} = \frac{200}{2} = 100\ \mathrm{MPa}$$

จากสมการ torsion formula $\tau = Tc/J$ เราจะหาค่า polar moment of inertia ของหน้าตัดของเพลาเหล็กได้

$$J_{req'd} = \frac{Tc}{\tau_{allow}} = \frac{500(0.040/2)}{100(10^6)} = 0.10(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

สมการของ polar moment of inertia ของหน้าตัดของเพลาเหล็กกลวงจะอยู่ในรูป

$$J = \frac{\pi(r_o^4 - r_i^4)}{2}$$

$$0.10(10^{-6}) = \frac{\pi(0.020^4 - r_i^4)}{2}$$

$$r_i = 0.0176\ \mathrm{m} = 17.6\ \mathrm{mm}$$

$$t_1 = 20 - 17.6 = 2.4\ \mathrm{mm}$$

หาความหนาของเพลาโดยให้เพลามีมุมบิดไม่เกินค่าที่กำหนด

จากสมการของมุมบิด $\phi = TL/GJ$ เราจะหา polar moment of inertia ของหน้าตัดของเพลาเหล็กกลวงจะอยู่ในรูป

$$J_{req'd} = \frac{TL}{G\phi_{allow}} = \frac{500(1.2)}{80(10^9)(3\pi/180)} = 0.1432(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

ดังนั้น

$$0.1432(10^{-6}) = \frac{\pi\,(0.020^4 - r_i^4)}{2}$$

$$r_i = 0.0162\ \mathrm{m} = 16.2\ \mathrm{mm}$$

$$t_2 = 20 - 16.2 = 3.8\ \mathrm{mm} > t_1 = 2.4\ \mathrm{mm}$$

ดังนั้น มุมบิดควบคุมการออกแบบเพลาและความหนาของเพลาเหล็กกลวงต้องมีค่าอย่างน้อย $3.8\ \mathrm{mm}$ Ans.

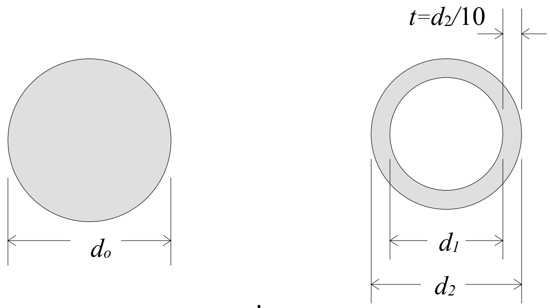
ตัวอย่างที่ 5-5

วิศวกรต้องการออกแบบเพลาเหล็กส่งกำลังจาก motor ซึ่งมีกำลัง $12.5\ \text{kW}$ และหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = 100\ \text{rpm}$ ไปยังสายพาน ดังที่แสดงในรูปที่ EX 5-5 กำหนดให้มุมบิดที่เกิดขึ้นมีค่าไม่เกิน $\phi_{\max} = 0.015\ \text{rad}$ ต่อความยาวของเพลา $1\ \text{m.}$ ค่า allowable shear stress ของเหล็ก, $\tau_{allow} = 40\ \text{MPa}$ และค่า shear modulus of elasticity ของเหล็ก, $G = 75\ \text{GPa}$ จงหา

a.) เส้นผ่าศูนย์กลางของเพลาตัน d_o ที่ต้องใช้ในการส่งกำลัง

b.) เส้นผ่าศูนย์กลางภายนอกของเพลากลวง d_2 ที่ต้องใช้ในการส่งกำลัง ถ้ากำหนดให้ความหนาของเพลา $t = d_2 / 10$

c.) อัตราส่วนของ d_2 / d_o และอัตราส่วนของน้ำหนักของเพลากลวงต่อน้ำหนักของเพลาตัน



รูปที่ Ex 5-5

ความเร็วเชิงมุมของเพลามีค่าเท่ากับ

$$\omega = 100\ \text{rpm} = \frac{100\ \text{rev}}{\text{min}}\left(\frac{2\pi}{1\ \text{rev}}\right)\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} = 10.47\ \text{rad/s}$$

ดังนั้น แรงบิดที่เกิดจากกำลังของ motor จะหาได้จาก

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{12500\ \text{N - m/s}}{10.47\ \text{rad/s}} = 1193.7\ \text{N - m}$$

a.) **หาเส้นผ่าศูนย์กลางของเพลาตัน d_o ที่ต้องใช้ในการส่งกำลัง**

ขนาดของเส้นผ่าศูนย์กลางของเพลาตัน d_o ที่ต้องใช้ในการส่งกำลังจะหาได้จากค่าของ τ_{allow} และ $\phi_{\max}$ และใช้ค่าสูงสุดที่หาได้ในการออกแบบ

จาก torsion formula เราจะได้ว่า $\tau_{allow} = \dfrac{Tc}{J}$ และ $\dfrac{J}{c} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{c^4}{c} = \dfrac{\pi}{32}\dfrac{d^4}{(d/2)} = \dfrac{T}{\tau_{allow}}$

ดังนั้น

$$d = \left(\frac{16T}{\pi\tau_{allow}}\right)^{1/3} = \left(\frac{16(1193.7\ \text{N - m})}{\pi\,(40(10^6)\ \text{N/m}^2)}\right)^{1/3} = 0.0534\ \text{m}$$

จากสมการของ angle of twist เราจะได้ว่า $\phi_{\max} = \dfrac{TL}{GJ}$ และ $J = \dfrac{\pi d^4}{32} = \dfrac{TL}{G\phi_{\max}}$

ดังนั้น

$$d = \left(\frac{32TL}{\pi G\phi_{\max}}\right)^{1/4} = \left(\frac{32(1193.7\ \text{N - m})(1\ \text{m})}{\pi\,(75(10^9)\ \text{N/m}^2)0.015\ \text{rad}}\right)^{1/4} = 0.0573\ \text{m}$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบค่า d_o ที่หามาได้ เราจะเห็นว่า ค่าของมุมบิดสูงสุดจะเป็นตัวควบคุมการออกแบบเพลาตัน โดยเพลาตันที่จะเลือกมาใช้ต้องมีเส้นผ่าศูนย์กลางอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ $0.0573\,\text{m}$ Ans.

b.) **เส้นผ่าศูนย์กลางภายนอกของเพลากลวง d_2 ที่ต้องใช้ในการส่งกำลัง**

เส้นผ่าศูนย์กลางภายในของเพลากลวงมีค่าเท่ากับ

$$d_1 = d_2 - 2t = d_2 - 2(0.1d_2) = 0.8d_2$$

ดังนั้น polar moment of inertia ของเพลากลวงมีค่าเท่ากับ

$$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4)$$

$$J = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - (0.8d_2)^4) = \frac{\pi}{32}(0.5904d_2^4) = 0.05796d_2^4$$

จาก torsion formula เราจะได้ว่า $\tau_{allow} = \dfrac{Tc}{J} = \dfrac{T(d_2/2)}{0.05796d_2^4} = \dfrac{T}{0.1159d_2^3}$

ดังนั้น

$$d_2 = \left(\frac{T}{0.1159\tau_{allow}}\right)^{1/3} = \left(\frac{1193.7\ \text{N - m}}{0.1159(40(10^6))\ \text{N/m}^2}\right)^{1/3} = 0.0636\,\text{m}$$

จากสมการของ angle of twist เราจะได้ว่า $\phi_{\max} = \dfrac{TL}{GJ} = \dfrac{TL}{G(0.05796d_2^4)}$

ดังนั้น

$$d_2 = \left(\frac{1193.7\ \text{N - m}(1\ \text{m})}{0.05796(75(10^9)\ \text{N / m}^2)0.015\ \text{rad}}\right)^{1/4} = 0.0654\ \text{m}$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบค่า d_2 ที่หามาได้ เราจะเห็นว่า ค่าของมุมบิดสูงสุดจะเป็นตัวควบคุมการออกแบบ โดยเพลากลวงที่จะเลือกมาใช้ต้องมีเส้นผ่าศูนย์กลางอย่างน้อยที่สุดเท่ากับ $0.0654\ \text{m}$ Ans.

c.) **อัตราส่วนของ d_2 / d_o และอัตราส่วนของน้ำหนักของเพลากลวงต่อน้ำหนักของเพลาตัน**

อัตราส่วนของ d_2 / d_o,

$$\frac{d_2}{d_o} = \frac{0.0654\,\text{m}}{0.0573\,\text{m}} = 1.14$$ Ans.

อัตราส่วนของน้ำหนักของเพลากลวงต่อน้ำหนักของเพลาตันเท่ากับ

$$\frac{\pi(d_2^2 - d_1^2)/4}{\pi d_o^2/4} = \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_o^2} = \frac{(0.0654\,\text{m})^2 - (0.8(0.0654\,\text{m}))^2}{(0.0573\,\text{m})^2} = 0.47$$ Ans.

จากอัตราส่วนทั้งสอง เราจะเห็นได้ว่า เพลากลวงจะมีน้ำหนักเบากว่าเพลาตันถึง 47% แต่จะมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอกใหญ่กว่าเพลาตัน 14%

5.5 **การวิเคราะห์ชิ้นส่วนของโครงสร้างแบบ** Statically Indeterminate **ที่รับแรงบิด** (Statically Indeterminate Torque-Loaded Members)

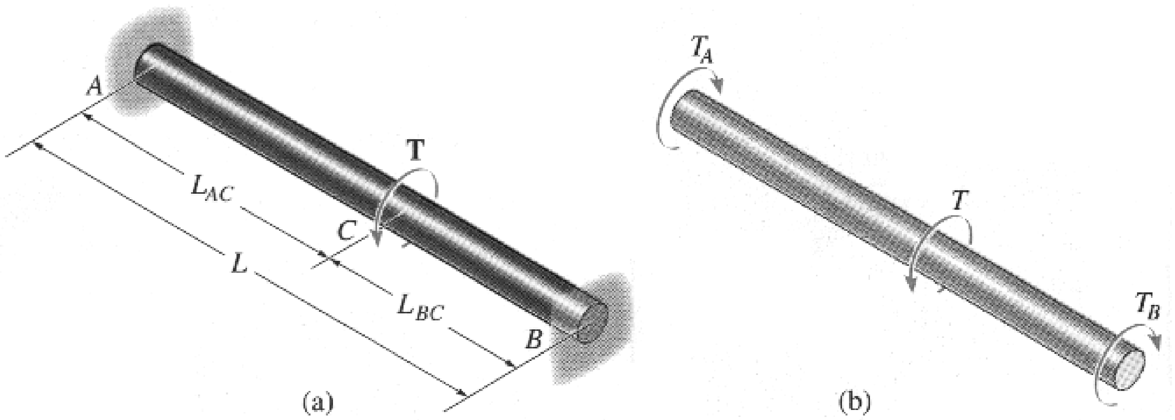
เพลาจะเป็นโครงสร้างแบบ statically indeterminate เมื่อเราไม่สามารถคำนวณหาแรงบิดลัพธ์ที่เกิดขึ้นภายในเพลาได้โดยใช้สมการความสมดุลของโมเมนต์ในแนวแกนของเพลาเพียงสมการเดียว ดังที่แสดงในรูปที่ 5-16a จากรูปปลายของเพลาถูกยึดแน่นที่จุด A และจุด B ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของเพลาดังกล่าวได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-16b จากแผนภาพ เราจะมีแรงบิดปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าสองค่าที่จุด A และที่จุด B ซึ่งเราจะหาค่าแรงบิดปฏิกิริยาดังกล่าวได้ โดยใช้สมการความสมดุลที่มีอยู่หนึ่งสมการและสมการความสอดคล้อง (compatibility equation) อีกหนึ่งสมการ

จากสมการความสมดุลของโมเมนต์ในแนวแกนของเพลา เราจะได้ว่า

$$\sum M_x = 0; \qquad T - T_A - T_B = 0$$

จาก compatibility เราจะได้ว่า เนื่องจากปลายของเพลาถูกยึดแน่นทั้งสองด้าน ดังนั้น ภายใต้การกระทำของแรงบิด มุมบิดที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านหนึ่งของเพลาเทียบกับมุมบิดที่เกิดขึ้นที่ปลายอีกด้านหนึ่งของเพลาจะมีค่าเป็นศูนย์ หรือ

$$\phi_{A/B} = 0$$



รูปที่ 5-16

จากสมการของมุมบิด $\phi = TL/GJ$ และจากแผนภาพ free-body diagram เราจะได้ว่า แรงบิดภายในที่เกิดขึ้นในส่วน AC มีค่าเท่ากับ $+T_A$ และแรงบิดภายในที่เกิดขึ้นในส่วน CB มีค่าเท่ากับ $-T_B$ ดังนั้น เราจะเขียนสมการ compatibility ได้ใหม่เป็น

$$\frac{T_A L_{AC}}{GJ} - \frac{T_B L_{BC}}{GJ} = 0$$

เนื่องจาก $L = L_{AC} + L_{BC}$ และถ้าเราให้ GJ มีค่าคงที่แล้ว จากสมการความสมดุลและสมการ compatibility เราจะหาสมการของแรงบิด T_A และ T_B ได้ในรูป

$$T_A = T\frac{L_{BC}}{L}$$

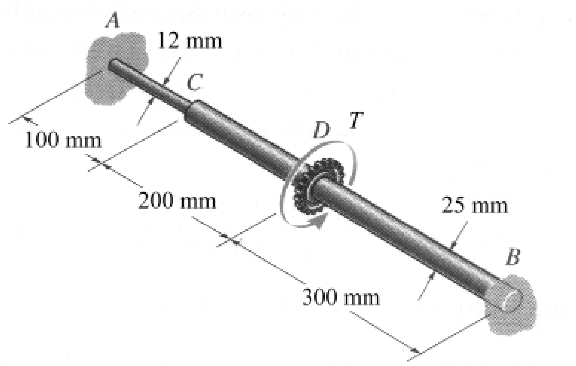
$$T_B = T\frac{L_{AC}}{L}$$

ตัวอย่างที่ 5-6

กำหนดให้เพลาเหล็กมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ EX 5-6 และให้ $G_{st} = 75\ \text{GPa}$, $T = 100\ \text{N - m}$ จงหา

a.) maximum shear stress ที่เกิดขึ้นในเพลาเหล็ก

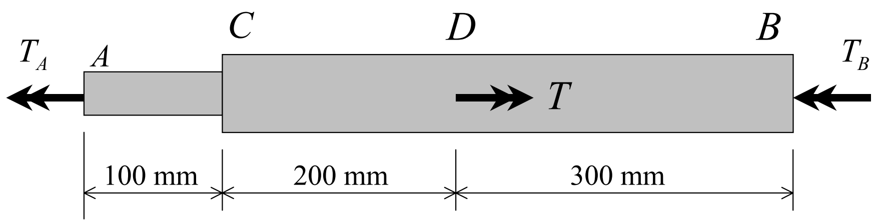
b.) ถ้า allowable shear stress ของเหล็กมีค่าเท่ากับ $60\ \text{MPa}$ จงหาค่าของแรงบิด T สูงสุดที่ยอมให้กระทำกับเพลา



รูปที่ EX 5-6

a.) maximum shear stress **ที่เกิดขึ้นในเพลาเหล็ก**

กำหนดให้ แรงบิดปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A และ B มีทิศทางพุ่งจาก A ไป B ดังนั้น แผนภาพ free-body diagram ของเพลาจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูป



จากสมการความสมดุล

$$T_A + T_B = 100$$

จากสมการ compatibility

$$\phi_{D/A} = \phi_{B/A}$$

$$\frac{T_A(0.10)}{G\left[\frac{\pi}{2}(0.006)^4\right]} + \frac{T_A(0.20)}{G\left[\frac{\pi}{2}(0.0125)^4\right]} = \frac{T_B(0.30)}{G\left[\frac{\pi}{2}(0.0125)^4\right]}$$

$$T_A = 0.144 T_B$$

แทน T_A ลงในสมการความสมดุล เราจะได้

$$T_B = \frac{100}{1.144} = 87.4\ \text{N - m}$$

ดังนั้น

$$T_A = 100 - 87.4 = 12.6\ \text{N - m}$$

เนื่องจากหน้าตัดของส่วน AC มีค่าไม่เท่ากับหน้าตัดของส่วน BD ดังนั้น ค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในเพลาเหล็กจะหาได้จากค่าที่มากกว่าที่เกิดขึ้นในสองส่วนนี้ของเพลา

$$\tau_{AC} = \frac{T_A c_{AC}}{J_{AC}} = \frac{12.6(0.006)}{\left[\frac{\pi}{2}(0.006)^4\right]} = 37.1\,\text{MPa}$$

$$\tau_{BD} = \frac{T_B c_{BD}}{J_{BD}} = \frac{87.4(0.0125)}{\left[\frac{\pi}{2}(0.0125)^4\right]} = 28.5\,\text{MPa}$$

ดังนั้น ค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นที่ส่วน AC ของเพลาเหล็กและมีค่าเท่ากับ $37.1\,\text{MPa}$ <u>Ans.</u>

b.) หาค่าของแรงบิด T สูงสุดที่ยอมให้กระทำกับเพลา

เนื่องจากหน่วยแรงเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นที่ส่วน AC ของเพลาเหล็ก ดังนั้น จาก torsion formula เราจะได้

$$T_A = \frac{\tau_{allow} J_{AC}}{c_{AC}} = \frac{60(10^6)}{0.006}\left[\frac{\pi}{2}(0.006)^4\right] = 20.4\ \text{N - m}$$

$$T_B = \frac{T_A}{0.144} = 141.4\ \text{N - m}$$

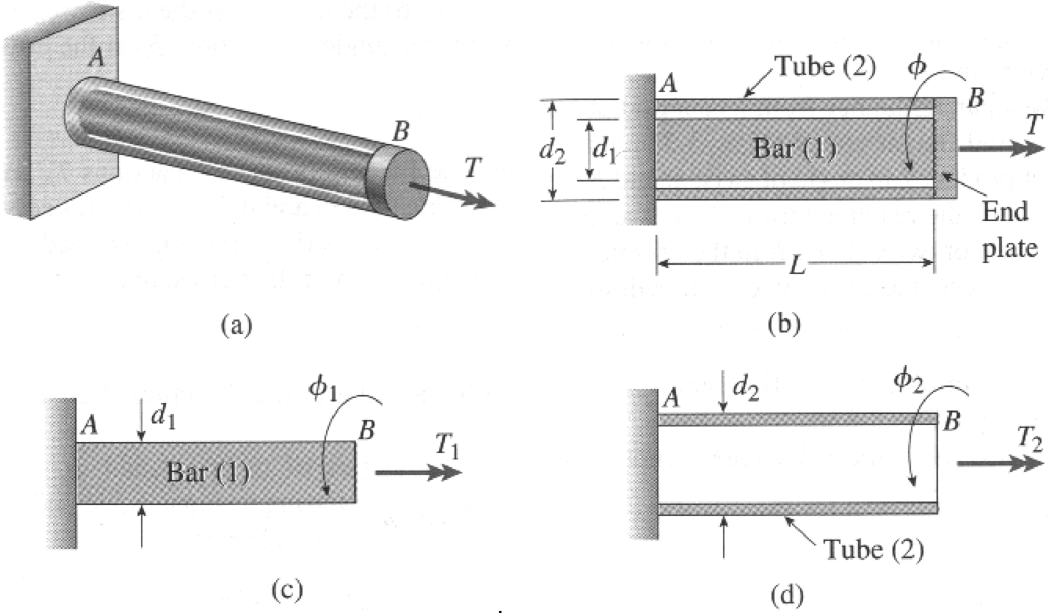
ดังนั้น ค่าของแรงบิด T สูงสุดที่ยอมให้กระทำกับเพลาจะมีค่าเท่ากับ

$$T_{allow} = 20.4 + 141.4 = 161.8\ \text{N - m}$$ <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 5-7

กำหนดให้เพลาแบบ statically indeterminate มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-7a โดยที่ปลาย A ถูกยึดแน่น และถูกกระทำโดยแรงบิด T ที่ปลายอิสระ B เพลานี้ประกอบด้วยเพลาตันที่ทำด้วยวัสดุชนิดที่ 1 (Bar (1)) และอยู่ภายในเพลากลวงที่ทำด้วยวัสดุชนิดที่ 2 (Tube (2)) โดยที่เพลาทั้งสองถูกเชื่อมต่อกันอย่างแข็งแกร่งที่ปลาย B

จงหาสมการของแรงบิดที่เกิดขึ้นในเพลากลวงและเพลาตันดังกล่าว



รูปที่ Ex 5-7a

ภายใต้การกระทำโดยแรงบิด T ปลายอิสระ B ของเพลาจะเกิดมุมบิดขึ้นเป็นมุม ϕ ที่มีขนาดน้อยมาก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-7b

เมื่อกำหนดให้เพลาตันรับแรงบิด T_1 และเพลากลวงรับแรงบิด T_2 แล้ว เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของเพลาทั้งสองได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-7c และ Ex 5-7d ตามลำดับ ดังนั้น จากสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$$T = T_1 + T_2$$

เนื่องจากเพลาทั้งสองถูกเชื่อมต่อกันอย่างแข็งแกร่งที่ปลาย B ดังนั้น มุมบิดที่เกิดขึ้นที่จุด B จะต้องมีค่าเท่ากัน และเราจะเขียนสมการ compatibility ของเพลาได้เป็น

$$\phi = \phi_1 = \phi_2$$

โดยที่ $\phi_1 = \dfrac{T_1 L}{G_1 J_1}$ และ $\phi_2 = \dfrac{T_2 L}{G_2 J_2}$

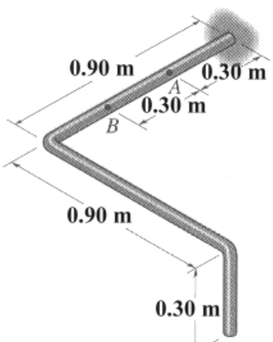
จากนั้น เมื่อเราให้ $\phi_1 = \phi_2$ แล้ว เราจะหาค่าของแรงบิด T_1 ได้ และเมื่อเราแทนค่า T_1 ลงในสมการความสมดุล แล้ว เราจะสามารถหาค่าของแรงบิด T_2 โดยที่

$$T_1 = T\left(\frac{G_1 J_1}{G_1 J_1 + G_2 J_2}\right)$$

$$T_2 = T\left(\frac{G_2 J_2}{G_1 J_1 + G_2 J_2}\right)$$ <u>Ans.</u>

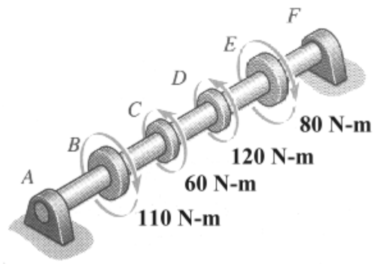
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

5-1 แท่งเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-1 มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $12.5\ \mathrm{mm}$ และมีน้ำหนัก $75\ \mathrm{kg/m}$ จงหาค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่จุด A และค่ามุมบิดที่จุด B



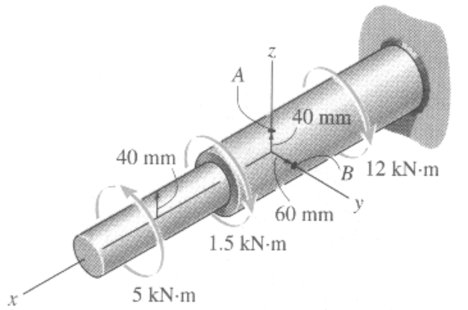
รูปที่ Prob. 5-1

5-2 เพลาตันเส้นผ่าศูนย์กลาง $19\ \mathrm{mm}$ ถูกกระทำโดยแรงบิด ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-2 กำหนดให้ bearing ที่จุด A และจุด F ไม่มีความฝืด จงหาค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดและมุมบิดสูงสุดที่เกิดขึ้นในเพลา



รูปที่ Prob. 5-2

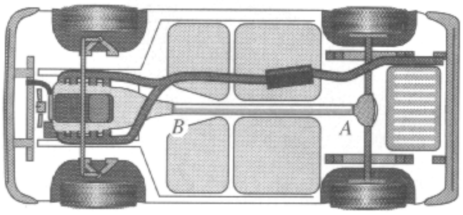
5-3 กำหนดให้เพลาถูกกระทำโดยแรงบิด ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-3 จงหาค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุด เขียนแผนภาพการกระจายของหน่วยแรงเฉือนที่จุดดังกล่าว และค่าระยะที่จุด A เปลี่ยนตำแหน่ง



รูปที่ Prob. 5-3

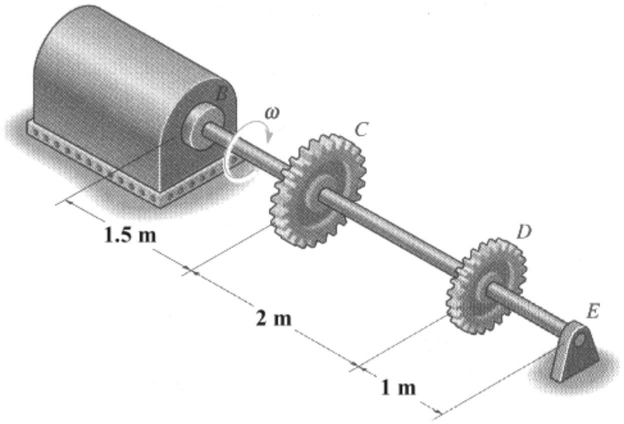
5-4 เพลาเหล็กกลวงมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก $62\ \mathrm{mm}$ ใช้ในการถ่ายแรงจากเครื่องยนต์ขนาด 35 แรงม้า ซึ่งหมุน 2700 รอบต่อนาที จงหาขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน d ของเพลาถ้าหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ $\tau_{allow} = 70\ \mathrm{MPa}$

5-5 เพลารถยนต์ทำด้วยเหล็กกลวงมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก $62\ \mathrm{mm}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-5 ใช้ในการถ่ายแรงจากเครื่องยนต์ขนาด 150 แรงม้า ซึ่งหมุน 1500 รอบต่อนาที จงหาขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน d ของเพลาถ้าหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ $\tau_{allow} = 70\ \mathrm{MPa}$ (5-33)



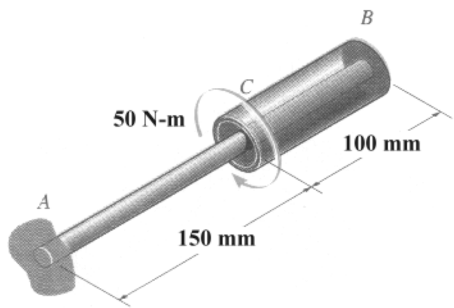
รูปที่ Prob. 5-5

5-6 มอเตอร์ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-6 มีกำลัง $150\,\mathrm{kW}$ ถ่ายกำลังไปยังเกียร์ C 70% และเกียร์ D 30% ถ้าเพลาทำด้วยเหล็กมีเส้นผ่าศูนย์กลาง $100\,\mathrm{mm}$ หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = 1000$ รอบต่อนาที จงหาค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในเพลาและมุมบิดที่จุด E เทียบกับจุด B เมื่อ bearing ที่จุด E ไม่มีความฝืด



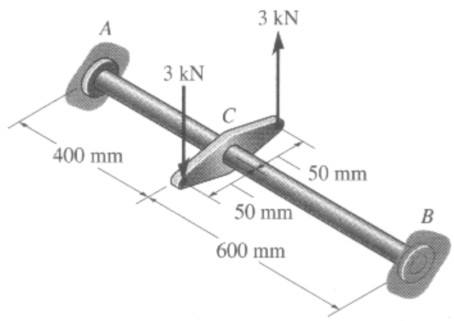
รูปที่ Prob. 5-6

5-7 ชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลประกอบด้วยแท่งเหล็กตัน AB เชื่อมต่อโดยแผ่นเหล็กเข้ากับท่อเหล็กกลวง BC ที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-7 กำหนดให้แท่งเหล็กตัน AB มีเส้นผ่าศูนย์กลาง $25\,\mathrm{mm}$ และท่อเหล็กกลวง BC มีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน $30\,\mathrm{mm}$ และหนา $3\,\mathrm{mm}$ จงหาหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในแต่ละชิ้นส่วนและมุมบิดที่จุด C



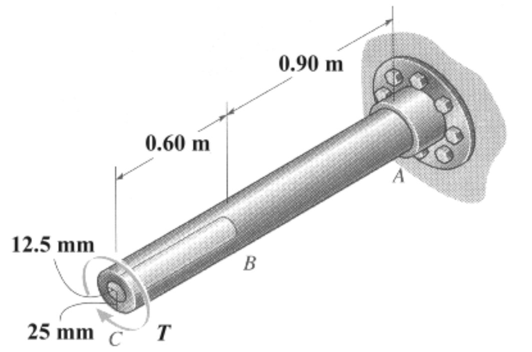
รูปที่ Prob. 5-7

5-8 เพลาเหล็ก AC ยาว $0.40\,\mathrm{m}$ มีเส้นผ่ากลางศูนย์ $28.0\,\mathrm{mm}$ และเพลาเหล็ก BC ยาว $0.60\,\mathrm{m}$ มีเส้นผ่ากลางศูนย์ $37.5\,\mathrm{mm}$ ถูกเชื่อมต่อกันที่จุด C ถูกรองรับอย่างยึดแน่นที่ปลาย A และ B และถูกกระทำโดยแรงคู่ควบ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-8 จงหาหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นและมุมบิดที่จุด C เมื่อ $G_{st} = 70\,\mathrm{GPa}$ (5-73)



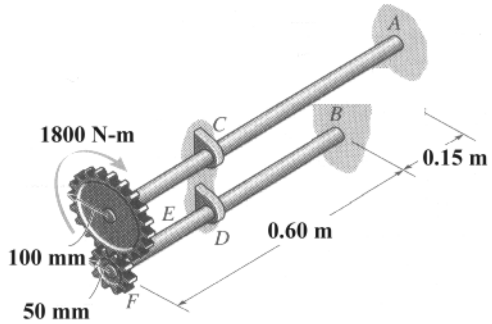
รูปที่ Prob. 5-8

5-9 เพลา ABC ถูกรองรับอย่างยึดแน่นที่ปลาย A มีส่วน AB เป็นเหล็กตันและส่วน BC เป็นเหล็กกลวงที่มีแท่งทองเหลืองตันฝังอยู่ภายใน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-9 ถ้าปลาย C ของเพลาถูกกระทำโดยแรงบิด $T = 60\ \mathrm{N\text{-}m}$ จงหามุมบิดที่เกิดขึ้นที่ปลาย C และหน่วยแรงเฉือนและความเครียดเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในเหล็กและทองเหลือง เมื่อเหล็กและทองเหลืองมี $G_{st} = 80\ \mathrm{GPa}$ และ $E_{br} = 40\ \mathrm{GPa}$ (5-79)



รูปที่ Prob. 5-9

5-10 เพลาเหล็ก ACE ยาว $0.75\ \mathrm{m}$ และเพลาเหล็ก BDF ยาว $0.60\ \mathrm{m}$ มีเส้นผ่ากลางศูนย์ $37.5\ \mathrm{mm}$ ถูกยึดแน่นที่ปลาย A และ B ตามลำดับ และถูกเชื่อมต่อโดยเกียร์ E และ F ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-10 กำหนดให้ bearing ที่จุด C และ D ไม่มีความฝืดและเกียร์ E ถูกกระทำโดยแรงบิด $1800\ \mathrm{N\text{-}m}$ จงหาหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในเพลา



รูปที่ Prob. 5-10

บทที่ 6
การดัด (Bending)

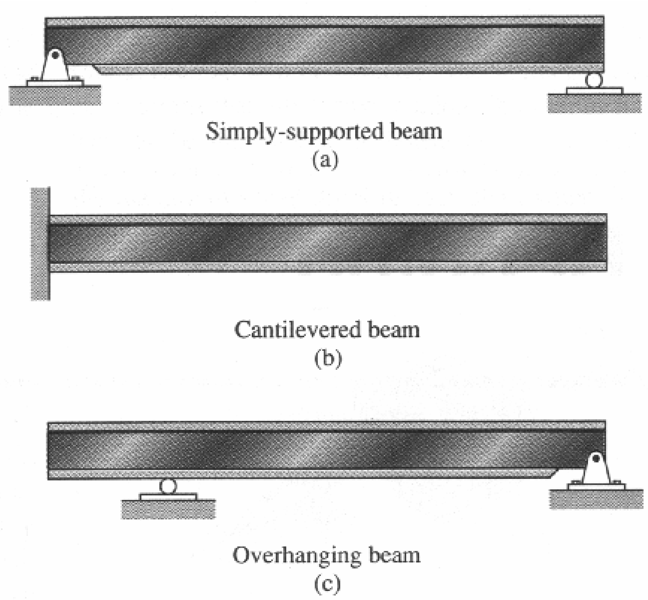
เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

6.1 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด (Shear and Moment Diagrams)

คาน (beam) เป็นองค์อาคารของโครงสร้างที่มีลักษณะตรง วางอยู่ในแนวนอน และถูกกระทำโดยแรงตามขวาง (transverse loads) คานมักจะถูกเรียกตามลักษณะที่คานถูกรองรับ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1

- คานช่วงเดี่ยวที่ถูกรองรับโดยหมุด (pin) และล้อเลื่อน (roller) จะถูกเรียกว่า คานช่วงเดี่ยวรองรับแบบธรรมดา (simply-supported beam) ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1a
- คานที่ถูกรองรับแบบยึดแน่นที่ปลายด้านหนึ่งและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นอิสระจะถูกเรียกว่า คานยื่น (cantilevered beam) ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1b
- คานช่วงเดี่ยวรองรับแบบธรรมดาที่มีปลายยื่นจะถูกเรียกว่า overhanging beam ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1c

ภายใต้การกระทำของแรง คานจะต้านทานต่อแรงดังกล่าวโดยแรงเฉือนภายใน (internal shear force) V และโมเมนต์ดัดภายใน (internal bending moment) M โดยที่แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดดังกล่าวมักจะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามแนวแกนของคาน



รูปที่ 6-1

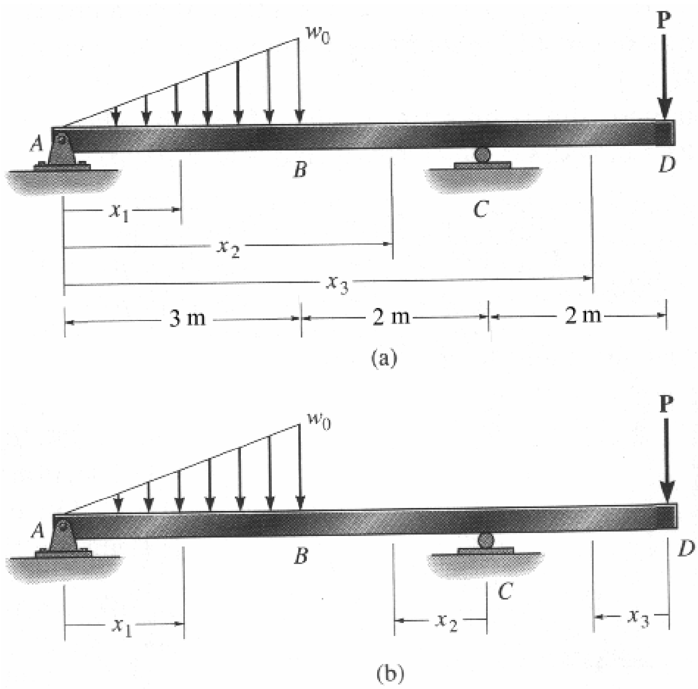
ในการออกแบบคาน เราจะต้องทราบค่าแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์ดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นภายในคานและตำแหน่งที่เกิด ซึ่งจะทำได้โดยการเขียนแผนภาพ shear diagram และ bending moment diagram

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อคานถูกกระทำโดยแรงกระทำเป็นจุด (concentrated loads) หรือโมเมนต์ (moment) หรือเมื่อค่าของแรงแผ่กระจาย (distributed loads) มีการเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใดที่จุดใดจุดหนึ่งบนคานแล้ว สมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด และ/หรือสมการของความชัน (slope) ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดจะไม่มีความต่อเนื่องที่จุดดังกล่าว ในกรณีเช่นนี้ สมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดจะต้องหามาจากแต่ละช่วงของคานที่อยู่ระหว่างความไม่ต่อเนื่องของแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-2a

จากรูป เราจะเห็นได้ว่า เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อคาน คานดังกล่าวจะถูกแบ่งออกได้เป็น 3 ช่วงคือ

1. ช่วง AB มีพิกัด (coordinate) เป็น x_1
2. ช่วง BC มีพิกัดเป็น x_2
3. ช่วง CD มีพิกัดเป็น x_3

โดยที่พิกัด x_1 x_2 และ x_3 อาจจะมีจุดเริ่มต้นที่ A เพียงจุดเดียว ดังที่แสดงในรูปที่ 6-2a หรืออาจจะมีจุดเริ่มต้นที่จุดที่ต่างกัน เช่น จุด A จุด B และจุด D ดังที่แสดงในรูปที่ 6-2b ก็ได้ แต่ถ้าเราสังเกตให้ดีแล้ว เราจะเห็นได้ว่า ในกรณีนี้ พิกัดแบบที่สองจะช่วยให้เราหาสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดได้ง่ายกว่าในกรณีที่เราใช้พิกัดแบบแรก



รูปที่ 6-2

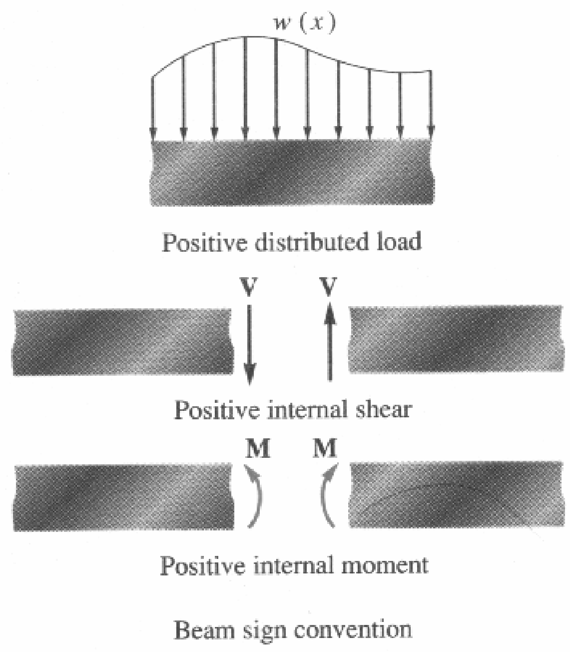
Beam Sign Convention

รูปที่ 6-3 แสดง sign convention ที่มีค่าเป็นบวกของแรงกระทำภายนอก w แรงเฉือน V และโมเมนต์ดัด M จากรูป แรงกระทำภายนอกจะมีค่าบวก เมื่อแรงกระทำภายนอกมีทิศทางชี้ลงข้างล่าง แรงเฉือนจะมีค่าบวก เมื่อแรงเฉือนกระทำกับชิ้นส่วนเล็กๆ ของคานในทิศทางตามเข็มนาฬิกา และโมเมนต์ดัดจะมีค่าเป็นบวก เมื่อโมเมนต์ดัดนั้นทำให้ชิ้นส่วนเล็กๆ ของคานเกิดการแอ่นหงายขึ้น

Procedure for Analysis

1. เขียนแผนภาพ free-body diagram ของคานและใช้สมการความสมดุล (equilibrium equations) หาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ (support reactions)
2. เลือกตำแหน่งของพิกัด x โดยให้พิกัดแต่ละค่าอยู่ในช่วงที่อยู่ระหว่างแรงกระทำเป็นจุด, แรงคู่ควบ (couples), และแรงแผ่กระจาย โดยจุดเริ่มต้นของพิกัด x นี้จะอยู่ที่จุดใดก็ได้ขึ้นอยู่กับความเหมาะสม
3. ตัดคานออกที่ตำแหน่ง x ใดๆ โดยให้หน้าตัดของคานตั้งฉากกับแนวแกนของคาน แล้วเขียนแผนภาพ free body diagram ที่หน้าตัดของคานดังกล่าว โดยใช้ sign convention ที่ได้กล่าวถึงไปแล้ว

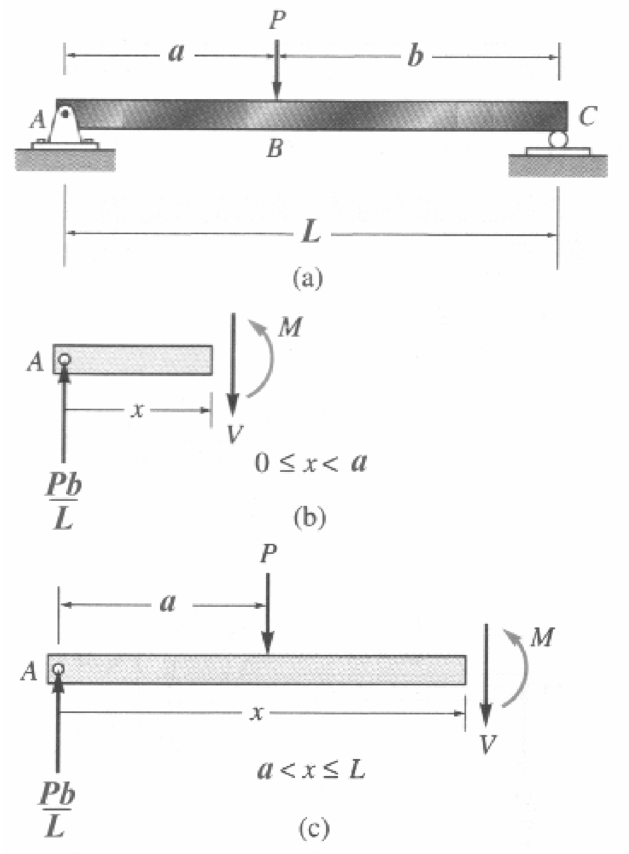
4. ใช้สมการความสมดุลหาสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นภายในคานและตรวจสอบความถูกต้องของสมการที่ได้โดยใช้สมการ $V(x) = dM / dx$ และ $w(x) = -dV / dx$ ที่จะกล่าวถึงต่อไป
5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram โดยให้แกน x เป็นแกนนอนและค่าของ $V(x)$ และ $M(x)$ เป็นแกนตั้ง



รูปที่ 6-3

ตัวอย่างที่ 6-1

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-1a



รูปที่ Ex 6-1

หาแรงปฏิกริยา

โดยใช้แผนภาพ free-body diagram ของคานและสมการความสมดุล เราจะหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1d

Functions **ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด**

ในการหา functions ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในกรณีนี้ เราจะต้องแบ่งคานออกเป็น 2 ช่วง เนื่องจากคานมีความไม่ต่อเนื่องที่จุดที่แรงกระทำ

$0 \le x < a$

ทำการตัดคานที่ระยะ x จากจุดรองรับ A ในช่วง AB ของคาน

ทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของส่วนดังกล่าวของคาน โดยใช้ sign convention ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวก ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1b

จากสมการความสมดุล

$\uparrow + \sum F_y = 0;$ $\qquad V = \dfrac{Pb}{L}$

$\circlearrowright + \sum M = 0;$ $\qquad M = \dfrac{Pb}{L}x$

$a < x \le L$

ทำการตัดคานที่ระยะ x จากจุดรองรับ A ในช่วง BC ของคาน

ทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของส่วนดังกล่าวของคาน โดยใช้ sign convention ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวก ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1c

จากสมการความสมดุล

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $$V = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L}$$

$\curvearrowright + \sum M = 0;$ $$M = \frac{Pb}{L}x - P(x-a) = \frac{Pa}{L}(L-x)$$

เมื่อนำสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่ได้มา plot เทียบกับระยะ x เราจะได้แผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1d <u>Ans.</u>

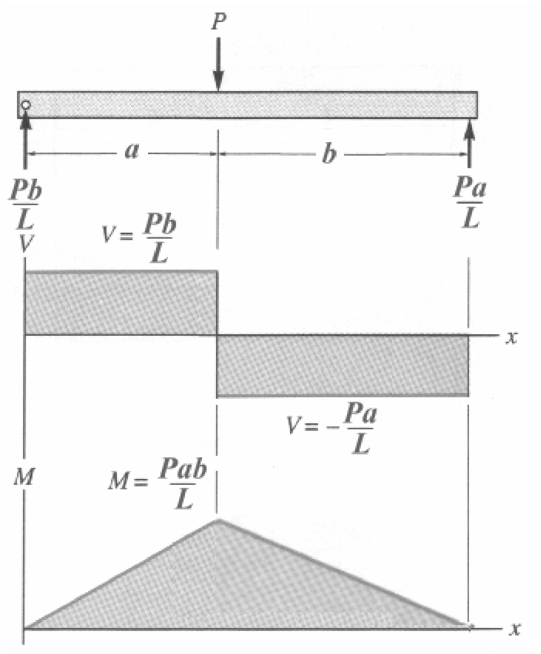
จากแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน เราจะได้ว่า

ในกรณีที่ $b > a$ ค่าแรงเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นในช่วง AB และจะหาได้จากสมการ

$$V_{\max} = \frac{Pb}{L}$$

ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นที่จุดที่แรงกระทำหรือจุด B และจะหาได้จากสมการ

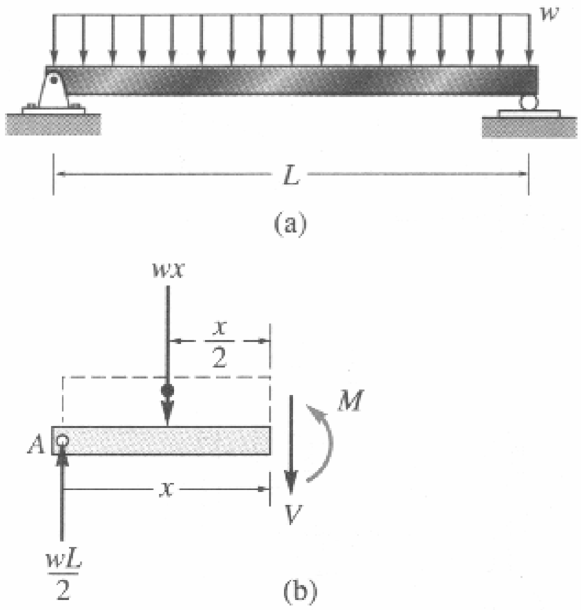
$$M_{\max} = \frac{Pab}{L}$$



(d)

ตัวอย่างที่ 6-2

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-2a



รูปที่ Ex 6-2

หาแรงปฏิกริยา

โดยใช้แผนภาพ free-body diagram ของคานและสมการความสมดุล เราจะหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-2c

เนื่องจากคานและแรงกระทำมีความสมมาตร ดังนั้น แรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับทั้งสองจะมีค่าเท่ากัน

Functions **ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด**

ในการหา functions ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในกรณีนี้ เราจะพิจารณาคานเพียงช่วงเดียว เนื่องจากแรงกระทำมีความต่อเนื่องตลอดความยาวคาน

ทำการตัดคานที่ระยะ x จากจุดรองรับ A

ทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของส่วนดังกล่าวของคาน โดยใช้ sign convention ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวก ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1b

จากสมการความสมดุล

$$\uparrow + \sum F_y = 0; \qquad V = \frac{wL}{2} - wx$$

$$\curvearrowright + \sum M = 0; \qquad M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

เมื่อนำสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่ได้มา plot เทียบกับระยะ x เราจะได้แผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1c **Ans.**

จากแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน เราจะได้ว่า

ค่าแรงเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นที่จุดรองรับ และจะหาได้จากสมการ

$$V_{\max} = \frac{WL}{2}$$

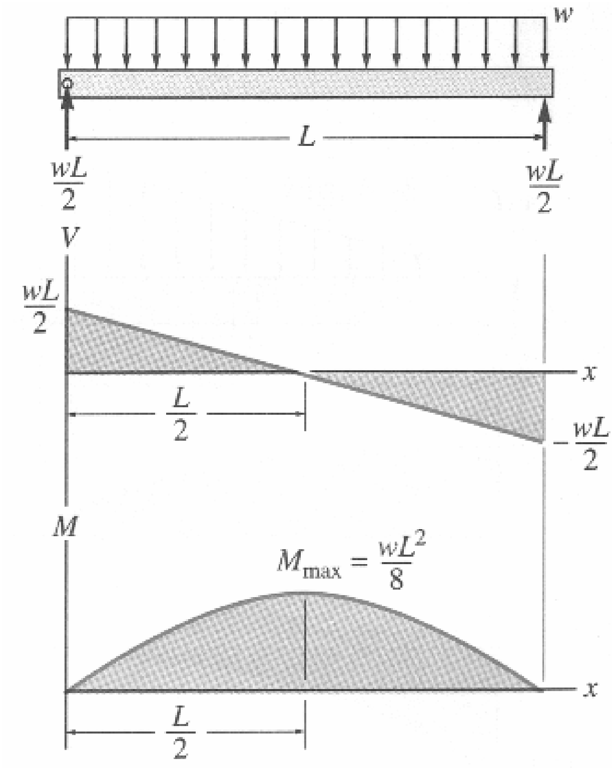
จากแผนภาพ ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นที่จุดที่แรงเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยมีระยะจากจุดรองรับ A เท่ากับ

$$V = \frac{wL}{2} - wx = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดจะหาได้จากสมการ

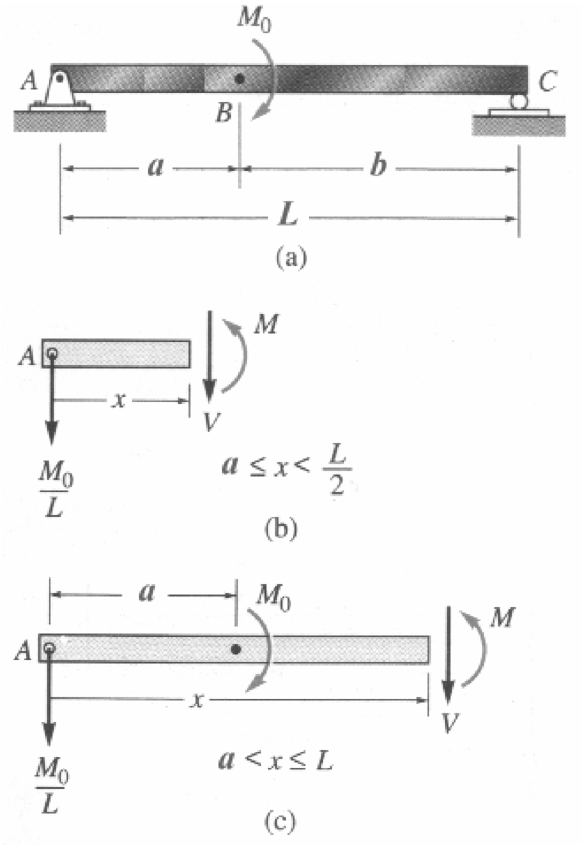
$$M_{\max} = \frac{wL}{2}\frac{L}{2} - \frac{w}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{wL^2}{8}$$



(c)

ตัวอย่างที่ 6-3

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-3a



รูปที่ Ex 6-3

หาแรงปฏิกริยา

โดยใช้แผนภาพ free-body diagram ของคานและสมการความสมดุล เราจะหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-3d

Functions **ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด**

ในการหา functions ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในกรณีนี้ เราจะต้องแบ่งคานออกเป็น 2 ช่วง เนื่องจากคานมีความไม่ต่อเนื่องที่จุดที่โมเมนต์ดัดกระทำ

$0 \le x < a$

ทำการตัดคานที่ระยะ x จากจุดรองรับ A ในช่วง AB ของคาน

ทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของส่วนดังกล่าวของคาน โดยใช้ sign convention ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวก ดังที่แสดงในรูปที่ 6-3b

จากสมการความสมดุล

$$\uparrow + \sum F_y = 0; \qquad V = -\frac{M_o}{L}$$

$$\circlearrowleft + \sum M = 0; \qquad M = -\frac{M_o}{L}x$$

$a < x \le L$

ทำการตัดคานที่ระยะ x จากจุดรองรับ A ในช่วง BC ของคาน

ทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของส่วนดังกล่าวของคาน โดยใช้ sign convention ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวก ดังที่แสดงในรูปที่ 6-3c

จากสมการความสมดุล

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad V = -\frac{M_o}{L}$$

$$\circlearrowright + \sum M = 0; \qquad M = M_o - \frac{M_o}{L}x = M_o\left[1 - \frac{x}{L}\right]$$

เมื่อนำสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่ได้มา plot เทียบกับระยะ x เราจะได้แผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-3d **Ans.**

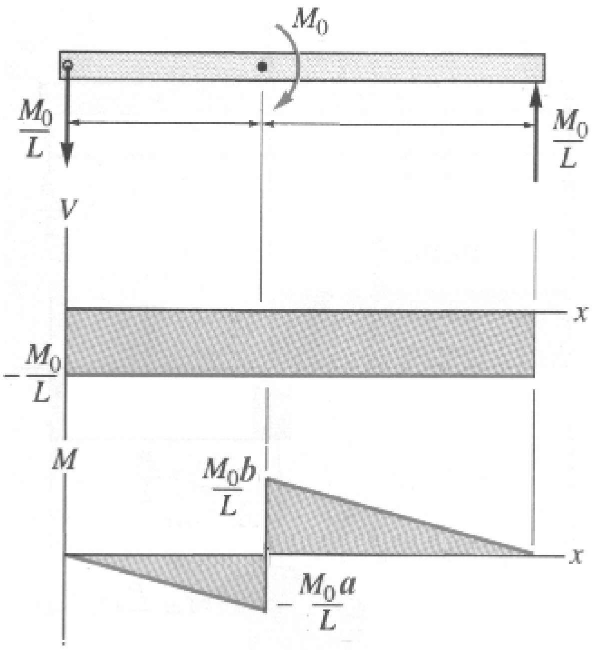
จากแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน เราจะได้ว่า

ค่าแรงเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นในคานมีค่าเท่ากันตลอดคาน และจะหาได้จากสมการ

$$V_{\max} = -\frac{M_o}{L}$$

ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นที่ขึ้นอยู่กับระยะของ a และ b ถ้า $b > a$ แล้ว โมเมนต์ดัดสูงสุดจะเกิดขึ้นที่จุดที่โมเมนต์ M_o กระทำ และจะหาได้จากสมการ

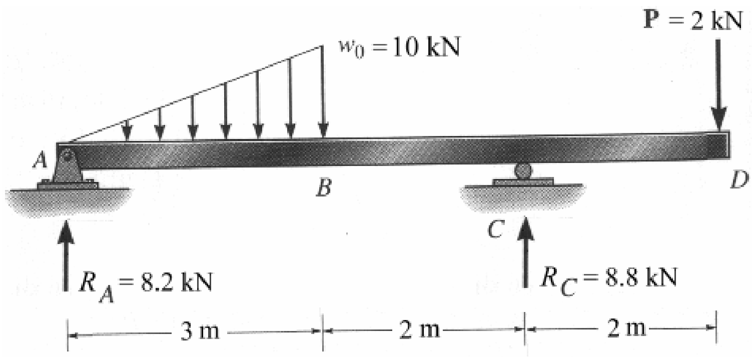
$$M_{\max} = \frac{M_o b}{L}$$



(d)

ตัวอย่างที่ 6-4

จงหาฟังก์ชันของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดและเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-4a กำหนดให้ $w_0 = 10\,\mathrm{kN/m}$ และ $P = 2\,\mathrm{kN}$



(a)

รูปที่ Ex 6-4

หาแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ A **และ** C

$$\curvearrowleft + \sum M_C = 0; \qquad R_A(5) + 2(2) - 0.5(3)10(2 + 3/3) = 0$$

$$R_A = 8.2\,\mathrm{kN}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0; \qquad R_A + R_C - 0.5(3)10 = 0$$

$$R_C = 8.8\,\mathrm{kN}$$

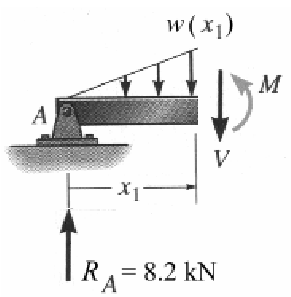
Functions **ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด**

$0 \le x_1 \le 3\,\mathrm{m};$

จากแผนภาพ free-body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-4b และโดยการใช้สามเหลี่ยมคล้าย เราจะหาค่าของ $w(x_1)$ ได้ โดยที่ $w(x_1) = \dfrac{10}{3}x_1$ ดังนั้น จากสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$$V(x_1) = 8.2 - 0.5(x_1)\frac{10}{3}x_1 = 8.2 - \frac{5}{3}x_1^2\ \mathrm{kN}$$

$$M(x_1) = 8.2x_1 - 0.5(x_1)\frac{10}{3}x_1(\frac{x_1}{3}) = 8.2x_1 - \frac{5}{9}x_1^3\ \mathrm{kN\text{-}m}$$



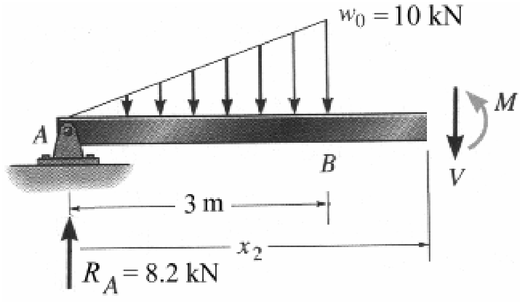
(b)

$3\,\mathrm{m} \le x_2 \le 5\,\mathrm{m};$

จากแผนภาพ free-body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-4c ระยะห่างระหว่างจุด B และรอยตัดมีค่าเท่ากับ $x_2 - 3\,\mathrm{m}$ ดังนั้น จากสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$$V(x_2) = 8.2 - 0.5(3)10 = -8.8 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = 8.2x_2 - 0.5(3)10(\frac{3}{3} + (x_2 - 3)) = -6.8x_2 + 30 \text{ kN-m}$$



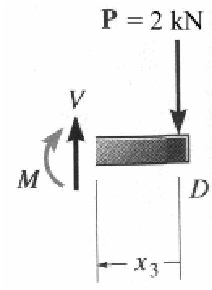
(c)

$0 \le x_3 \le 2$ m;

จากแผนภาพ free-body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-4c และสมการความสมดุล เราจะได้ว่า

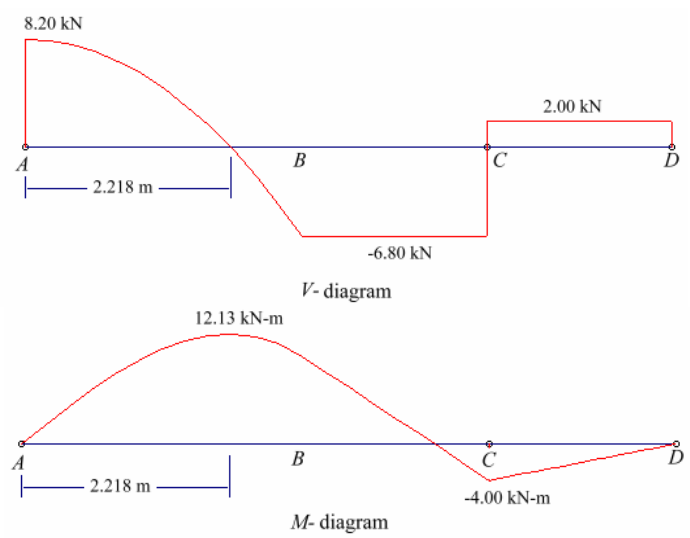
$$V(x_3) = 2 \text{ kN}$$

$$M(x_3) = -2x_3 \text{ kN-m}$$



(d)

จากสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่หาได้ เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex6-4e <u>Ans.</u>



(e)

ตำแหน่งที่เกิดโมเมนต์ดัดสูงสุดและค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดจะหาได้ดังนี้

จากสมการของ $V(x_1)$ เราจะสามาหาระยะ x_1 ซึ่งทำให้ $V(x_1)$ จะมีค่าเป็นศูนย์จากการแทนค่า $V(x_1) = 0$ ลงในสมการของ $V(x_1)$ ดังนั้น

$$0 = 8.2 - \frac{5}{3}x_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2.218\,\mathrm{m}$$

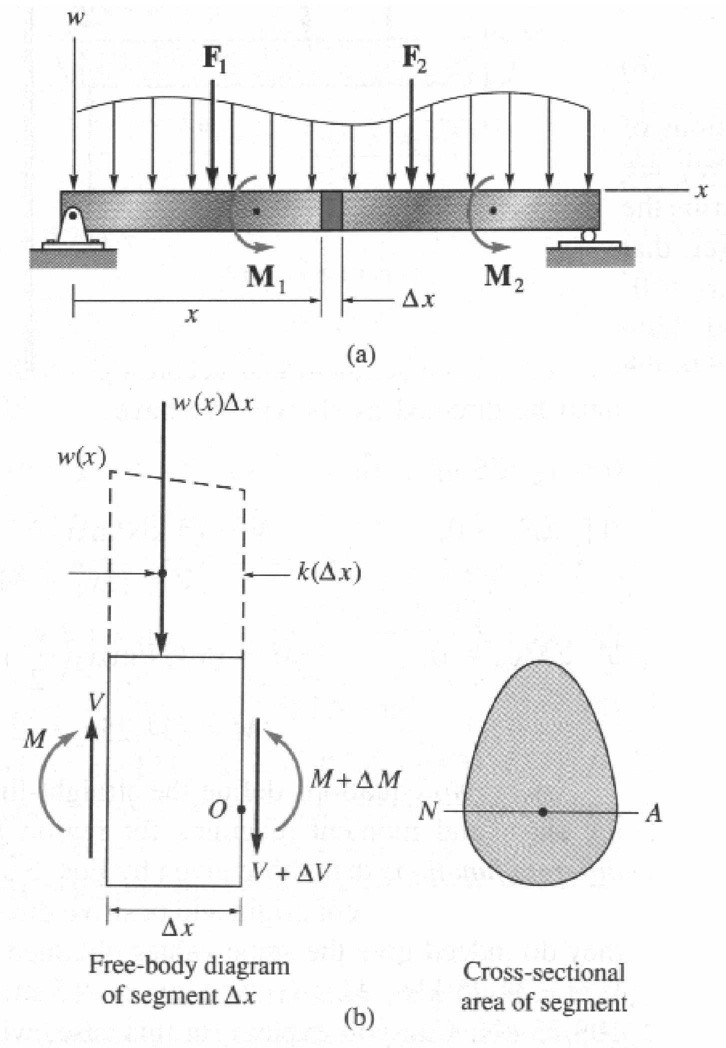
ดังนั้น ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในคานจะมีค่าเท่ากับ

$$M(x_1 = 2.218\,\mathrm{m}) = 8.2(2.218) - \frac{5}{9}(2.218)^3 = 12.126\,\mathrm{kN\text{-}m}$$

6.2 การเขียนแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดโดยวิธีกราฟฟิค (Graphical Method for Constructing Shear and Moment Diagram)

วิธีการทางกราฟิก (graphical method) จะช่วยให้การเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานมีความง่ายขึ้น โดยเฉพาะในกรณีที่คานถูกกระทำโดยแรงกระทำเป็นจุด (concentrated loads) แรงคู่ควบ (couples) และแรงแผ่กระจาย (distributed loads) หลายๆ ค่าในเวลาเดียวกัน

ช่วงที่คานถูกกระทำโดย Distributed Load



รูปที่ 6-4

พิจารณาคานและแผนภาพ free body diagram ของส่วนของคานที่มีขนาดความยาวน้อยมาก Δx ซึ่งตัดออกมาที่ระยะ x และ $x+\Delta x$ จากจุดรองรับ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-4a และ 6-4b ตามลำดับ

จาก sign convention กำหนดให้ทิศทางของแรงและ couples มีค่าเป็นบวก และแรงลัพธ์ที่เกิดจากแรงแผ่กระจาย $w(x)$ มีค่าเท่ากับ $w(x)\Delta x$ และกระทำที่ระยะ $k\,\Delta x$ จากจุด O เมื่อ $0 < k < 1$

โดยใช้สมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$+\uparrow \sum F_y = 0$; $$V - w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -w(x)\Delta x$$

เมื่อหารสมการข้างต้นด้วย Δx และใส่ limit โดยให้ $\Delta x \to 0$ แล้ว เราจะได้ว่า

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \tag{6-1}$$

(ความชันของ shear diagram ที่จุดใดๆ = ค่าลบของแรงกระจายที่จุดนั้น)

$\circlearrowright + \sum M_o = 0$; $\qquad -V\Delta x - M + w(x)\Delta x[k\Delta x] + (M + \Delta M) = 0$

$$\Delta M = V\Delta x - w(x)k(\Delta x)^2$$

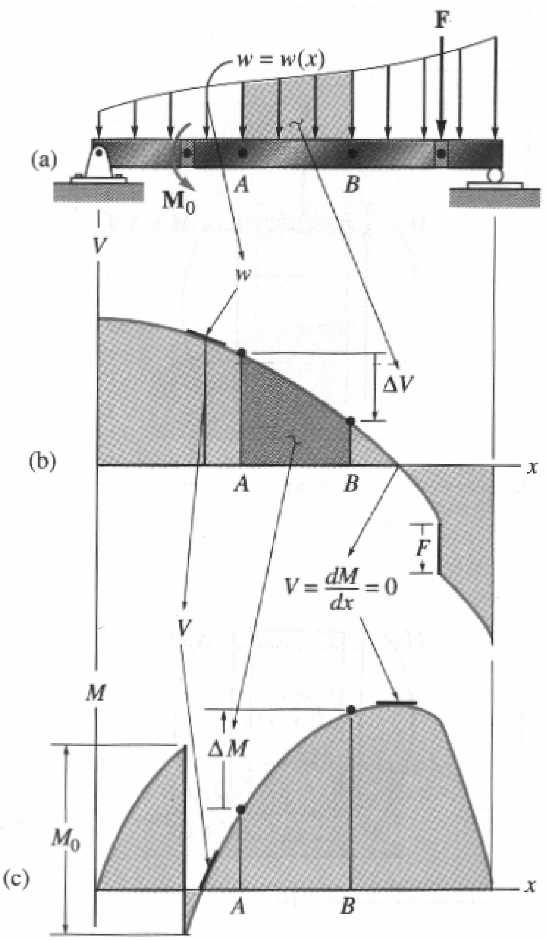
ทำการตัดเทอมที่มี high order ออก แล้วหารสมการข้างต้นด้วย Δx และใส่ limit โดยให้ $\Delta x \to 0$ เราจะได้ว่า

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{6-2}$$

(ความชันของ moment diagram ที่จุดใดๆ = ค่าแรงเฉือนที่จุดนั้น)

เราจะเห็นความหมายของสมการที่ 6-1 และ 6-2 ได้ชัดเจนขึ้น ถ้าเราทำการวิเคราะห์รูปที่ 6-5 จากสมการที่ 6-2 เราจะเห็นว่า เมื่อ $V = 0$ แล้ว $dM/dx = 0$ ซึ่งหมายความว่า จุดที่มีแรงเฉือนเท่ากับศูนย์จะเป็นจุดที่โมเมนต์มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด โดยที่เมื่อค่าของแรงเฉือนเปลี่ยนจากค่าบวกเป็นค่าลบ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-5 แล้ว ค่าโมเมนต์จะเป็นค่าสูงสุด และเมื่อค่าของแรงเฉือนเปลี่ยนจากค่าลบเป็นค่าบวกแล้ว ค่าโมเมนต์จะเป็นค่าต่ำสุด

เมื่อเขียนสมการที่ 6-1 และ 6-2 ใหม่ให้อยู่ในรูป $dV = -w(x)dx$ และ $M = Vdx$ แล้ว สมการทั้งสองจะเป็นพื้นที่ขนาดเล็กๆ ภายใต้แรงแผ่กระจายและ shear diagram ตามลำดับ เมื่อทำการ integrate สมการทั้งสองนี้ระหว่างจุดที่แรงกระทำเป็นจุดหรือแรงคู่ควบกระทำ อย่างเช่นจุด A และจุด B แล้ว เราจะได้ว่า



รูปที่ 6-5

$$\Delta V = -\int w(x)\, dx \tag{6-3}$$

(การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน = ค่าลบของพื้นที่ภายใต้ distributed load)

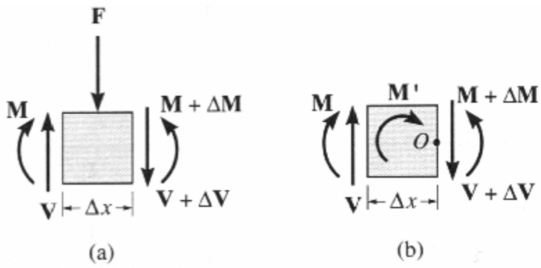
$$\Delta M = \int V(x)\, dx \tag{6-4}$$

(การเปลี่ยนแปลงของ moment = พื้นที่ภายใต้ shear diagram)

เราจะเห็นความหมายของสมการที่ 6-3 และ 6-4 ได้ชัดเจนขึ้น ถ้าเราทำการวิเคราะห์รูปที่ 6-5 นอกจากนั้นแล้ว เราจะเห็นได้ว่า สมการของแรงเฉือน $V(x)$ จะมีกำลังของตัวแปร x มากกว่าสมการแรงแผ่กระจาย $w(x)$ หนึ่งค่าและสมการของโมเมนต์ $M(x)$ จะมีกำลังของตัวแปร x มากกว่าสมการของแรงเฉือน $V(x)$ หนึ่งค่า ยกตัวอย่างเช่น ถ้าแรงแบบกระจายมีค่าเป็นค่าคงที่ w แล้ว $V(x) = -wx + C_1$ และ $M(x) = -w\dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ เป็นต้น

ช่วงที่คานถูกกระทำโดยแรงกระทำเป็นจุดและแรงคู่ควบ

เราจะไม่สามารถใช้สมการของ ΔV และ ΔM ที่หามาได้ข้างต้นตรงจุดที่แรงกระทำเป็นจุด (concentrated forces) และแรงคู่ควบกระทำ (couples) กระทำ เนื่องจากว่าสมการของ ΔV และ ΔM ดังกล่าวไม่ได้รวมถึงการเปลี่ยนแปลงอย่างไม่ต่อเนื่องของค่าของแรงเฉือนและโมเมนต์ที่จุดที่แรงดังกล่าวกระทำ



รูปที่ 6-6

พิจารณาแผนภาพ free body diagrams ของส่วนของคานที่มีความยาวน้อยมาก Δx ซึ่งตัดออกมาที่จุดที่แรงกระทำเป็นจุดและแรงคู่ควบกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-6 โดยใช้สมการความสมดุลของแรง การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน ΔV จะอยู่ในรูป

$+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\qquad V - F - (V + \Delta V) = 0$

$$\Delta V = -F \tag{6-5}$$

ซึ่งหมายความว่า เมื่อแรงกระทำเป็นจุด F มีทิศทางพุ่งเข้าหาคานแล้ว ค่า ΔV จะมีค่าเป็นลบ (-) และ shear diagram จะมีค่าลดลงเท่ากับค่าแรง F ดังที่แสดงในรูปที่ 6-5b

โดยใช้สมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด O การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ ΔM จะอยู่ในรูป

$\circlearrowright + \sum M_o = 0;$ $\qquad (M + \Delta M) - M' - V\Delta x - M = 0$

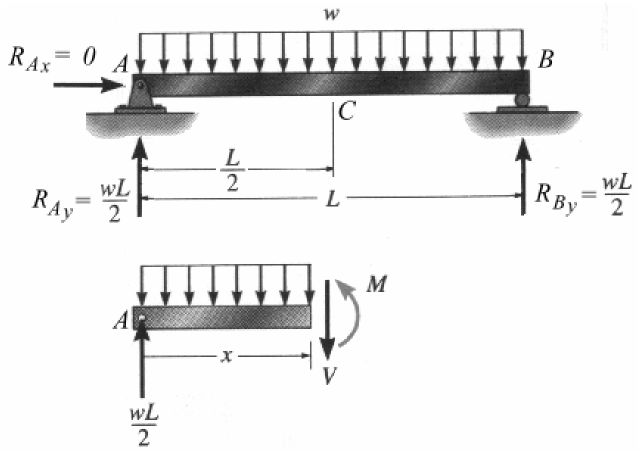
ถ้า $\Delta x \to 0$,

$$\Delta M = M' \tag{6-6}$$

ซึ่งหมายความว่า เมื่อแรงคู่ควบ M' มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาแล้ว ค่า ΔM จะมีค่าเป็นบวกและ moment diagram จะมีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับค่า M' ดังที่แสดงในรูปที่ 6-5c

ตัวอย่างที่ 6-5

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ACB ซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกกระจายสม่ำเสมอ (Uniformly distributed load) w ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-5a



(a)

รูปที่ Ex 6-5

จากตัวอย่างที่ 6-3 เราได้สมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด x อยู่ในรูป

$$V(x) = \frac{wL}{2} - wx$$

$$M(x) = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

จากสมการของแรงเฉือน $V(x)$ และโมเมนต์ดัด $M(x)$ ดังกล่าว เราจะเห็นได้ว่า

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{wL}{2} - wx) = -w$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}) = \frac{wL}{2} - wx = V(x)$$

ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่ (6-1) และ (6-2)

รูปที่ Ex 6-5b แสดงแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน จากแผนภาพ เราจะเห็นได้ว่าแรงเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ระยะ $x = L/2$ โดยที่ shear diagram เปลี่ยนค่าจากบวกเป็นลบที่จุดดังกล่าว ดังนั้น จุดนี้จะเป็นจุดที่ค่าโมเมนต์สูงสุด

จาก shear diagram การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนระหว่างจุด A ไปยังจุด C มีค่าเท่ากับ

$$\Delta V_{C-A} = 0 - \frac{wL}{2} = -\frac{wL}{2}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าลบของพื้นที่ภายใต้แรงกระจายในช่วง จุด A ถึงจุด C ดังที่แสดงในสมการที่ (6-3)

$$\Delta V_{C-A} = -\int_0^{L/2} w dx = -wx\Big|_0^{L/2} = -(\frac{wL}{2} - 0) = -\frac{wL}{2}$$

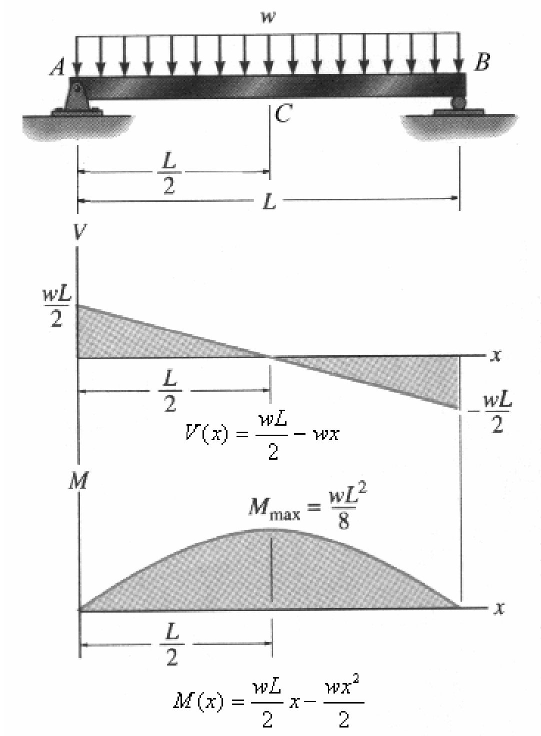
จาก moment diagram การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ระหว่างจุด A ไปยังจุด C มีค่าเท่ากับ

$$\Delta M_{C-A} = \frac{wL^2}{8} - 0 = \frac{wL^2}{8}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าของพื้นที่ภายใต้ shear diagram ในช่วง จุด A ถึงจุด C ดังที่แสดงในสมการที่ (6-4) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\Delta M_{C-A} = \int_0^{L/2} (\frac{wL}{2} - wx)dx = [\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}]_0^{L/2} = \frac{wL^2}{8} - 0 = \frac{wL^2}{8}$$

ดังนั้น เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex6-5b <u>Ans.</u>



(b)

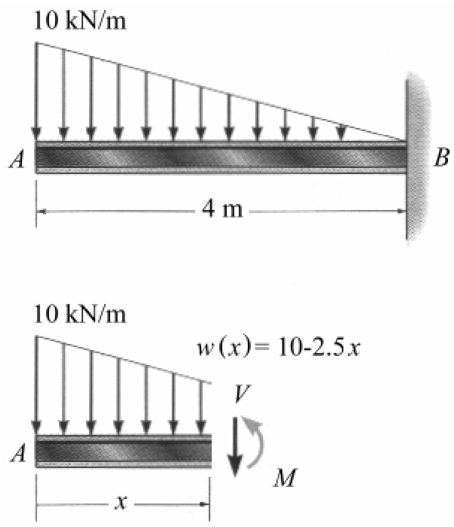
ตัวอย่างที่ 6-6

จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานยื่น ซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายเชิงเส้น (linearly distributed load) ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-6a

จากรูปที่ Ex 6-6a สมการของน้ำหนักบรรทุกที่ระยะ x หรือ $w(x)$ จะหามาได้โดยใช้สามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{10\text{ kN}}{4\text{ m}} = \frac{w(x)}{4-x}$$

$$w(x) = 10 - 2.5x$$



(a)

รูปที่ Ex 6-6

จาก free body diagram ของส่วนตัดของคานที่ระยะ x เราจะหาสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดได้ดังนี้

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad -V(x) - \frac{1}{2}[10-(10-2.5x)]x - (10-2.5x)x = 0$$

$$V(x) = \frac{5}{4}x^2 - 10x \text{ kN}$$

$$\sum M = 0; \qquad M(x) + \frac{1}{2}[10-(10-2.5x)]x(\frac{2}{3}x) + (10-2.5x)x(\frac{x}{2}) = 0$$

$$M(x) = \frac{5}{12}x^3 - 5x^2 \text{ kN - m}$$

เราสามารถตรวจสอบความถูกต้องของสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่ได้ โดยใช้สมการที่ (6-1) และ (6-2)

$$V(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}[\frac{5}{12}x^3 - 5x^2] = \frac{5}{4}x^2 - 10x$$

$$w(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}[\frac{5}{4}x^2 - 10x] = -(2.5x-10) = 10 - 2.5x$$

และเราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-6b

จาก shear diagram การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนระหว่างจุด A ไปยังจุด B

$$\Delta V_{C-A} = 20\text{ kN}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าลบของพื้นที่ภายใต้แรงกระจายในช่วงจุด A ถึงจุด B ดังที่แสดงในสมการที่ (6-3)

$$\Delta V_{C-A} = -\int_0^L w dx = -\int_0^4 (10-2.5x)dx = -(10x-1.25x^2)\Big|_0^4 = -20\text{ kN}$$

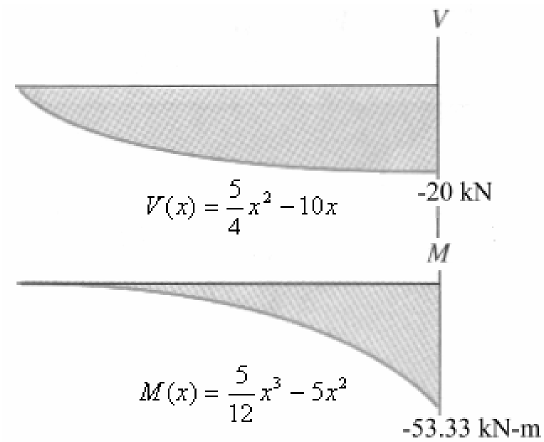
จาก moment diagram การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ระหว่างจุด A ไปยังจุด B

$$\Delta M_{C-A} = -53.33\text{ kN - m}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าของพื้นที่ภายใต้ shear diagram ในช่วง จุด A ถึงจุด C ดังที่แสดงในสมการที่ (6-4) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\Delta M_{C-A} = \int_0^L (\frac{5}{4}x^2 - 10x)dx = [\frac{5}{12}x^3 - 5x^2]_0^4 = -53.33\text{ kN - m}$$

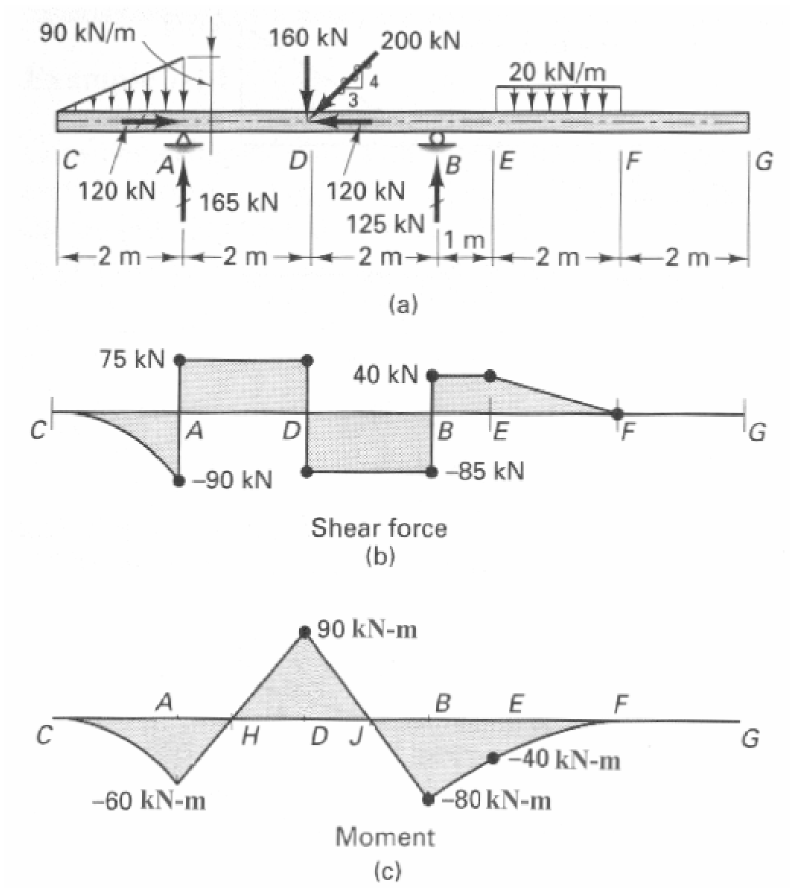
ดังนั้น เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex6-6b <u>Ans.</u>



(b)

ตัวอย่างที่ 6-7

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-7a



รูปที่ Ex 6-7

โดยใช้แผนภาพ free-body diagram ของคานและสมการความสมดุล เราจะหาแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-7a

ตาม sign convention ที่เราใช้ ในการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram โดยวิธีกราฟิก เราจะต้องเริ่มต้นการเขียนแผนภาพจากทางซ้ายมือของคานไปยังปลายทางด้านขวามือของคาน

Shear diagram

จากรูปที่ Ex 6-7a และ slope ที่จุดใดๆ ของแผนภาพ shear diagram มีค่าเท่ากับค่าลบของแรงกระจายที่จุดนั้นและค่าที่เปลี่ยนแปลงไปของแรงเฉือนระหว่างจุดสองจุดมีค่าเท่ากับค่าลบของพื้นที่ใต้แรงกระจายระหว่างจุดสองจุดนั้น เราจะได้ว่า

ช่วง CA ของคาน

slope ของแผนภาพ shear diagram ที่จุด C จะมีค่าเท่ากับศูนย์และ slope ของแผนภาพ shear diagram ที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ -90 เนื่องจากแรงแบบกระจายมีค่าเท่ากับศูนย์ที่จุด C และ $90\,\text{kN/m}$ ที่จุด A และค่าของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นทางด้านซ้ายมือของจุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{AL} - V_C = -\int w dx$$

$$V_{AL} = -\frac{1}{2}(2\text{ m})(90\text{ kN/m}) - 0 = -45\text{ kN}$$

ช่วง AD ของคาน

แรงปฏิกิริยาในแนวดิ่งที่จุด A มีค่าเท่ากับ $165\,\mathrm{kN}$ ดังนั้น ค่าของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นทางด้านขวามือจุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{AR} - (-90) = 165$$
$$V_{AR} = 165 - 90 = 75\,\mathrm{kN}$$

เนื่องจากคานในช่วง AD นี้ ไม่ถูกกระทำโดยแรงแบบกระจาย ดังนั้น slope ของแผนภาพ shear diagram ในช่วงนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์หรือแรงเฉือนมีค่าคงที่ในช่วงนี้และจะมีค่าเท่ากับ $75\,\mathrm{kN}$

ช่วง DB ของคาน

ที่จุด D คานถูกกระทำโดยองค์ประกอบในแนวดิ่งของแรง $200\,\mathrm{kN}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $160\,\mathrm{kN}$ ดังนั้น ค่าของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นทางด้านขวามือจุด D จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{DR} - V_{DL} = V_{DR} - 75 = -160$$
$$V_{DR} = -85\,\mathrm{kN}$$

เนื่องจากคานในช่วง DB นี้ ไม่ถูกกระทำโดยแรงแบบกระจาย ดังนั้น slope ของแผนภาพ shear diagram ในช่วงนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์หรือแรงเฉือนมีค่าคงที่ในช่วงนี้และจะมีค่าเท่ากับ $-85\,\mathrm{kN}$

ช่วง BE ของคาน

แรงปฏิกิริยาในแนวดิ่งที่จุด B มีค่าเท่ากับ $125\,\mathrm{kN}$ ดังนั้น ค่าของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นทางด้านขวามือจุด B จะมีค่าเท่ากับ

$$V_{BR} - (-125) = -85$$
$$V_{AR} = -85 + 125 = 40\,\mathrm{kN}$$

เนื่องจากคานในช่วง BE นี้ ไม่ถูกกระทำโดยแรงแบบกระจาย ดังนั้น slope ของแผนภาพ shear diagram ในช่วงนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์หรือแรงเฉือนมีค่าคงที่ในช่วงนี้และจะมีค่าเท่ากับ $40\,\mathrm{kN}$

ช่วง EF ของคาน

slope ของแผนภาพ shear diagram ที่จุด E และจุด F จะมีค่าเท่ากับ -20 เนื่องจากแรงแบบกระจายมีค่าคงที่เท่ากับ $20\,\mathrm{kN/m}$ ในช่วงนี้ของคานและค่าของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่จุด F จะมีค่าเท่ากับ

$$V_F - V_E = -\int w dx$$
$$V_F = -(2\,\mathrm{m})(20\,\mathrm{kN/m}) + 40 = 0\,\mathrm{kN}$$

ช่วง FG ของคาน

เนื่องจากคานไม่ถูกกระทำโดยแรงในช่วงนี้และ $V_F = 0\,\mathrm{kN}$ ดังนั้น คานจะไม่ถูกกระทำโดยแรงเฉือน

Moment diagram

จากรูปที่ Ex 6-7b และ slope ที่จุดใดๆ ของแผนภาพ moment diagram มีค่าเท่ากับค่าของแรงเฉือนที่จุดนั้นและค่าที่เปลี่ยนแปลงไปของ moment ระหว่างจุดสองจุดมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้ shear diagram ระหว่างจุดสองจุดนั้น เราจะได้ว่า

ช่วง CA ของคาน

slope ของแผนภาพ moment diagram ที่จุด C จะมีค่าเท่ากับศูนย์และ slope ของแผนภาพ moment diagram ที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ -90 เนื่องจากแรงเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์ที่จุด C และ $-90\,\mathrm{kN}$ ที่จุด A และค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$M_A - M_C = \int V dx$$

$$M_A = \frac{1}{3}(2\ \mathrm{m})(90\ \mathrm{kN}) + 0 = 60\ \mathrm{kN\text{-}m}$$

ช่วง AD ของคาน

slope ของแผนภาพ moment diagram ทางด้านขวามือของจุด A จนถึงทางด้านซ้ายมือของจุด D จะมีค่าเท่ากับ $+75$ เนื่องจากแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในช่วงนี้คานมีค่าเท่ากับ $75\ \mathrm{kN}$ และค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่จุด D จะมีค่าเท่ากับ

$$M_D - M_A = \int V dx$$

$$M_D = (2\ \mathrm{m})(75\ \mathrm{kN}) \text{ - } 60 = 90\ \mathrm{kN\text{-}m}$$

ช่วง DB ของคาน

slope ของแผนภาพ moment diagram ทางด้านขวามือของจุด D จนถึงทางด้านซ้ายมือของจุด B จะมีค่าเท่ากับ -85 เนื่องจากแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในช่วงนี้คานมีค่าเท่ากับ $-85\ \mathrm{kN}$ และค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่จุด B จะมีค่าเท่ากับ

$$M_B - M_D = \int V dx$$

$$M_B = (2\ \mathrm{m})(-85\ \mathrm{kN}) + 90 = \text{-}80\ \mathrm{kN\text{-}m}$$

ช่วง BE ของคาน

slope ของแผนภาพ moment diagram ทางด้านขวามือของจุด B จนถึงทางด้านซ้ายมือของจุด E จะมีค่าเท่ากับ $+40$ เนื่องจากแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในช่วงนี้คานมีค่าเท่ากับ $+40\ \mathrm{kN}$ และค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่จุด E จะมีค่าเท่ากับ

$$M_E - M_B = \int V dx$$

$$M_E = (1\ \mathrm{m})(40\ \mathrm{kN}) - 80 = -40\ \mathrm{kN\text{-}m}$$

ช่วง EF ของคาน

slope ของแผนภาพ moment diagram ทางด้านขวามือของจุด E จะมีค่าเท่ากับ $+40$ และ slope ของแผนภาพ moment diagram ทางด้านซ้ายมือของจุด F จะมีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากแรงเฉือนมีค่าเท่ากับ $+40$ ที่จุด E และ $0\ \mathrm{kN}$ ที่จุด F และค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่จุด F จะมีค่าเท่ากับ

$$M_F - M_E = \int V dx$$

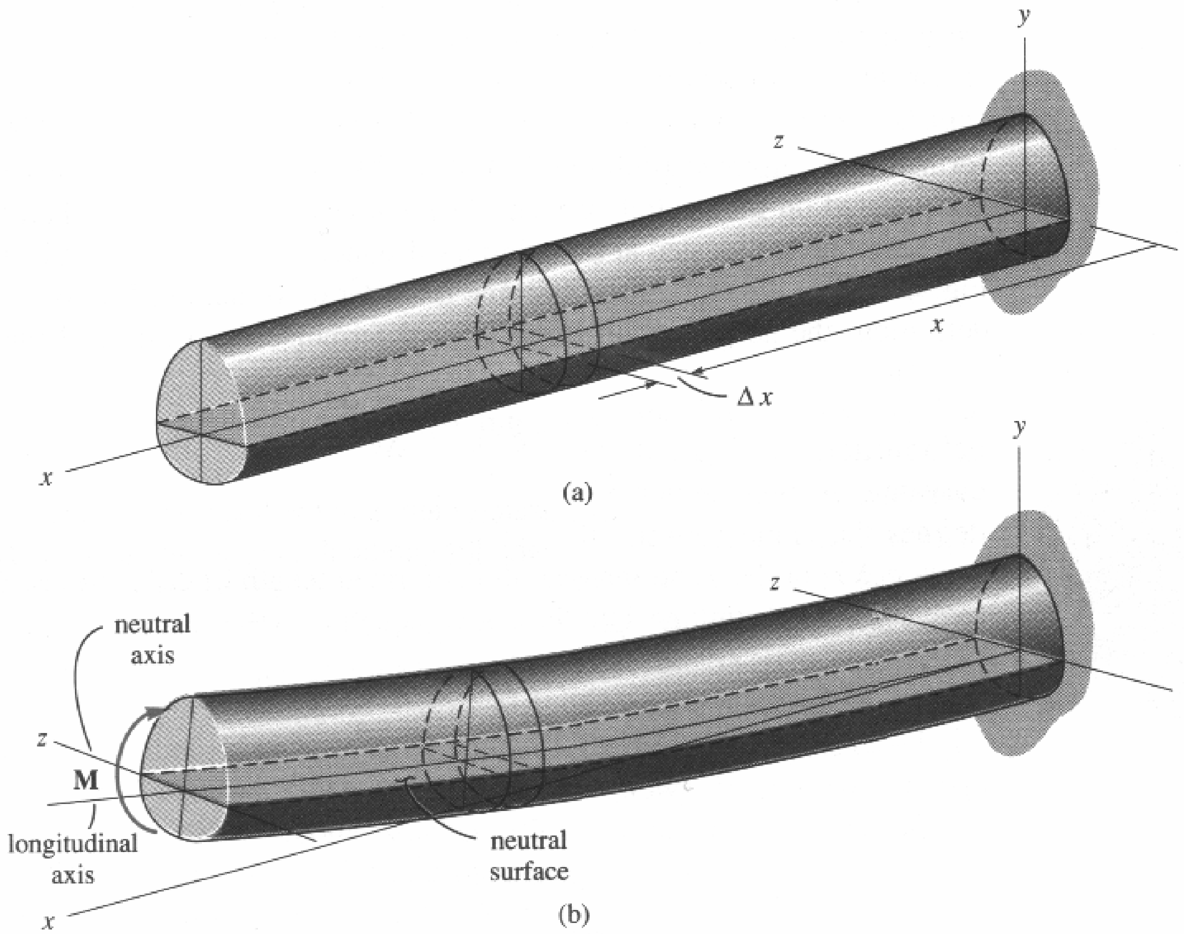
$$M_F = \frac{1}{2}(2\ \mathrm{m})(40\ \mathrm{kN}) - 40 = 0\ \mathrm{kN\text{-}m}$$

ช่วง FG ของคาน

เนื่องจากคานไม่ถูกกระทำโดยแรงในช่วงนี้และ $M_F = 0\ \mathrm{kN\text{-}m}$ ดังนั้น คานจะไม่ถูกกระทำโดย moment ในช่วงนี้ของคาน

สุดท้าย เราจะได้แผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานดังที่แสดงในรูปที่ Ex6-7b <u>Ans.</u>

6.3 **การเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากการดัดของชิ้นส่วนโครงสร้าง** (Bending Deformation of a Straight Member)



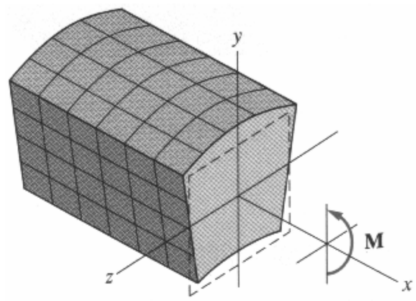
รูปที่ 6-7

พิจารณาคาน ซึ่งทำด้วยวัสดุเป็นเนื้อเดียวกัน (homogeneous material) และมีหน้าตัดที่คงที่และสมมาตรรอบแกน y ตลอดความยาวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-7a

กำหนดให้คานถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัด (bending moment) M ซึ่งมีทิศทางในแนวแกน $+z$ และภายใต้การกระทำของโมเมนต์ดัด คานจะเกิดการดัด ดังที่แสดงในรูปที่ 6-7b โดยที่วัสดุที่อยู่ส่วนบนของหน้าตัดของคานจะถูกทำให้หดตัวลง และวัสดุที่อยู่ส่วนล่างของหน้าตัดของคานจะถูกทำให้ยืดออก ดังนั้น จะต้องมีระนาบๆ หนึ่ง ที่อยู่ระหว่างส่วนบนและส่วนล่างดังกล่าวที่ไม่มีการยืดหรือหดตัวเกิดขึ้นเลย ระนาบนี้มักจะถูกเรียกว่า ระนาบสะเทิน (neutral plane)

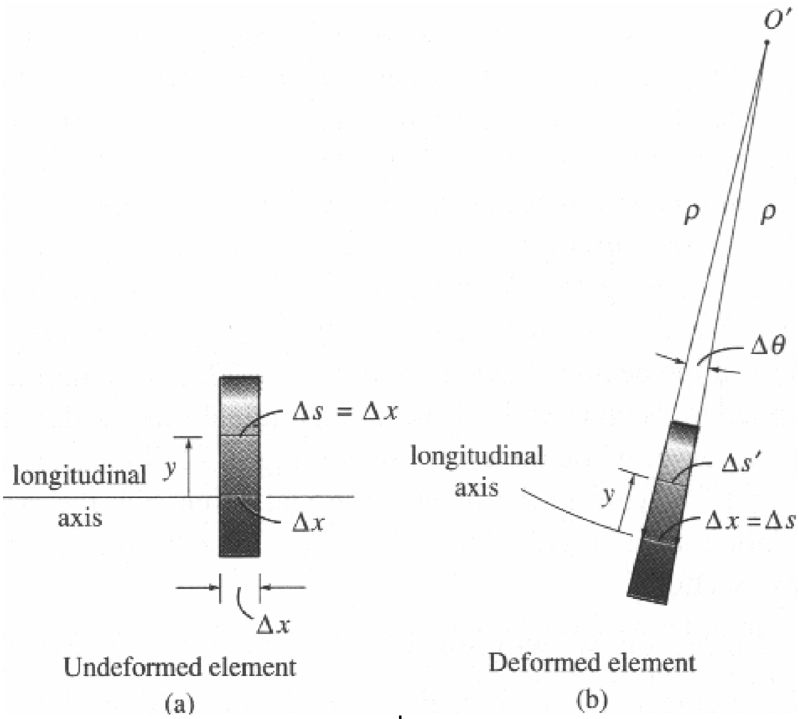
กำหนดให้การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของคานมีลักษณะตามข้อสมมุติฐานดังต่อไปนี้

1. แกนตามยาว (longitudinal axis) ที่อยู่บนระนาบสะเทินของคานจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงความยาว แต่จะถูกดัดให้เป็นเส้นโค้งที่อยู่บนระนาบ $x-y$
2. ระนาบของหน้าตัดของคานที่ตำแหน่งใดๆ จะยังคงรูปเป็นระนาบเหมือนเดิมและยังคงตั้งฉากกับแกนตามยาวของคาน ขณะที่คานเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (ไม่พิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของระนาบของหน้าตัดของคานเนื่องจากแรงเฉือน)
3. เราจะไม่นำค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในระนาบของหน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-8 มาพิจารณา หรือเราจะไม่พิจารณาผลของ Poisson's effect ที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของคาน ซึ่งมีค่าที่น้อยมากๆ



รูปที่ 6-8

พิจารณารูปที่ 6-9 ซึ่งเป็นส่วนของคานที่ตัดออกมาจากคานในรูปที่ 6-7a ที่ตำแหน่ง x จากจุดเริ่มต้นของแกนอ้างอิงและมีความยาว Δx



รูปที่ 6-9

จากนิยามของความเครียดตั้งฉาก (normal strains) เราจะเขียนสมการความเครียดตั้งฉากในแนวแกนของคานที่ระยะ y จากแกนตามยาว (longitudinal axis) ของคาน ซึ่งมีความยาวเริ่มต้นเท่ากับ Δs และมีความยาวหลังจากเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง $\Delta s'$ ได้ว่า

$$\varepsilon = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

ก่อนที่จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง:

$$\Delta s = \Delta x = \rho \Delta \theta$$

หลังจากที่เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างระยะ Δs จะเปลี่ยนเป็น:

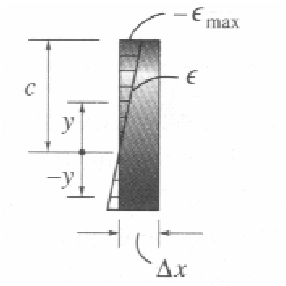
$$\Delta s' = (\rho - y)\Delta \theta$$

แทน Δs และ $\Delta s'$ ลงในสมการของความเครียดตั้งฉาก เราจะได้ว่า

$$\varepsilon = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{(\rho - y)\Delta \theta - \rho \Delta \theta}{\rho \Delta \theta}$$

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho} \qquad (6\text{-}7)$$

จากสมการที่ 6-7 เราได้ว่า ที่หน้าตัดใดๆ ที่มีรัศมีความโค้ง (radius of curvature) ρ ค่าความเครียดตั้งฉากของคานจะแปรผันโดยตรงกับระยะ y ดังนั้น ความเครียดตั้งฉากจะมีการกระจายบนหน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-10



Normal strain distribution

รูปที่ 6-10

จากรูปที่ 6-10 เราจะได้ว่า $\varepsilon_{\max} = c/\rho$ และจากสมการที่ 6-7 เราจะได้ว่า

$$\varepsilon = -\frac{y}{c}\varepsilon_{\max} \qquad (6\text{-}8)$$

จากการพิจารณาคานที่ผ่านมาและจากข้อสมมุติฐานที่ 3 เราจะสรุปได้ว่า คานที่ถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัดจะมีหน่วยแรงตั้งฉากและความเครียดเกิดขึ้นในแนวแกน x เท่านั้น โดยไม่มีหน่วยแรงและความเครียดในแนวอื่นๆ เกิดขึ้นเลย ซึ่งจาก Hooke’s law เราจะได้ว่า $\sigma_x = E\varepsilon_x$

6.4 **สูตรการดัด** (Flexural Formula)

เนื่องจากคานมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) ภายใต้การกระทำของโมเมนต์ดัด M ดังนั้น เมื่อแทน Hooke’s law, $\varepsilon_x = \sigma_x / E$ ลงในสมการที่ 6-8 แล้ว เราจะได้สมการการกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากบนหน้าตัดของคานในรูป

$$\sigma = -\frac{y}{c}\sigma_{\max} \qquad (6\text{-}9)$$

ซึ่งจะมีการกระจายดังที่แสดงในรูปที่ 6-12b โดยที่เมื่อ y มีค่าเป็นบวก ส่วนของคานดังกล่าวจะถูกกระทำโดยหน่วยแรงกดอัด (compressive stress) และเมื่อ y มีค่าเป็นลบ ส่วนของคานดังกล่าวจะถูกกระทำโดยหน่วยแรงดึง (tensile stress)

ตำแหน่งของแกนสะเทิน (neutral axis) ของคานจะหาได้โดยใช้เงื่อนไขความสมดุลของแรงลัพธ์ที่เกิดจากหน่วยแรงตั้งฉากบนหน้าตัดของคาน จากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกนของคาน เราจะได้ว่า

$$F_R = \sum F_x \;; \qquad 0 = \int_A dF = \int_A \sigma dA = \int_A -\frac{y}{c}\sigma_{\max} dA = -\frac{\sigma_{\max}}{c}\int_A y dA$$

เนื่องจากค่า $\sigma_{\max}/c$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น

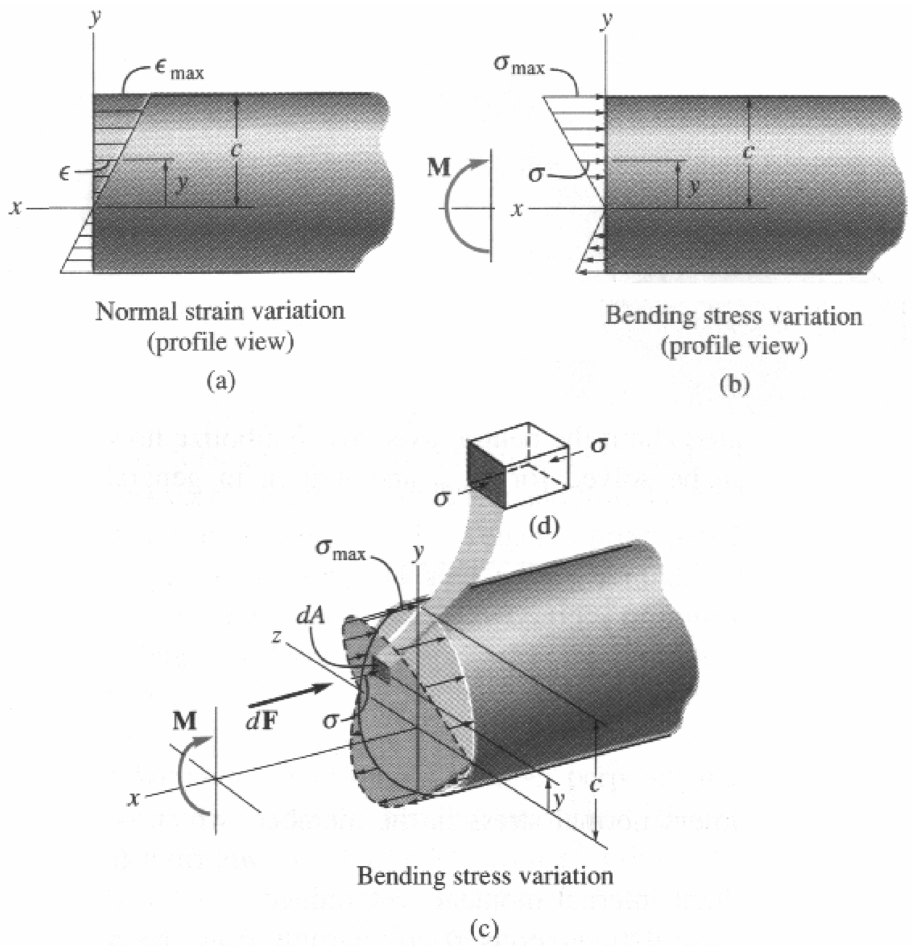
$$\int_A y\, dA = 0 \qquad (6\text{-}10)$$

ดังนั้น จากสมการที่ 6-10 เราจะเห็นได้ว่า เงื่อนไขความสมดุลของแรงดังกล่าวจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อค่าโมเมนต์ของพื้นที่หน้าตัดของคานรอบแกนสะเทินจะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์

จากวิชา statics จุด centroid ของหน้าตัดของคานจะหาได้จากสมการ

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}$$

แต่เนื่องจาก $\int_A y\, dA = 0$ ดังนั้น แกนสะเทิน (neutral axis) จะเป็นแกนเดียวกับแกนในแนวนอนที่ตัดผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของคาน



รูปที่ 6-11

ค่าของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดของคานจะหาได้ได้โดยใช้เงื่อนไขความสมดุลของโมเมนต์ลัพธ์ภายใน M กับ moment ที่เกิดจากการกระจายของหน่วยแรงรอบแกน neutral axis หรือ

$$dM = ydF = y(-\sigma dA)$$

$(M_R)_z = \sum M_z$; $$M = \int_A -y\,\sigma dA = \int_A y(\frac{y}{c}\sigma_{max})\,dA$$

$$M = \frac{\sigma_{max}}{c}\int_A y^2 dA \qquad (6\text{-}11)$$

เนื่องจากเทอม $\int_A y^2 dA$ เป็นค่า moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคานรอบแกน neutral axis หรือ I ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} \tag{6-12}$$

เมื่อ $\sigma_{\max} =$ หน่วยแรงตั้งฉากสูงสุดที่เกิดที่จุดบนหน้าตัดของคานที่ห่างจากแกน neutral axis ที่มากที่สุด

$M =$ moment ลัพธ์ภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดรอบแกน neutral axis

$I =$ moment of inertia ของหน้าตัดของคานรอบแกน neutral axis

$c =$ ระยะตั้งฉากจากแกน neutral axis ถึงจุดบนหน้าตัดของคานที่เรากำลังพิจารณา

และเนื่องจาก $\dfrac{\sigma_{\max}}{c} = -\dfrac{\sigma}{y}$ เราจะได้ว่า

$$\sigma = -\frac{My}{I} \tag{6-13}$$

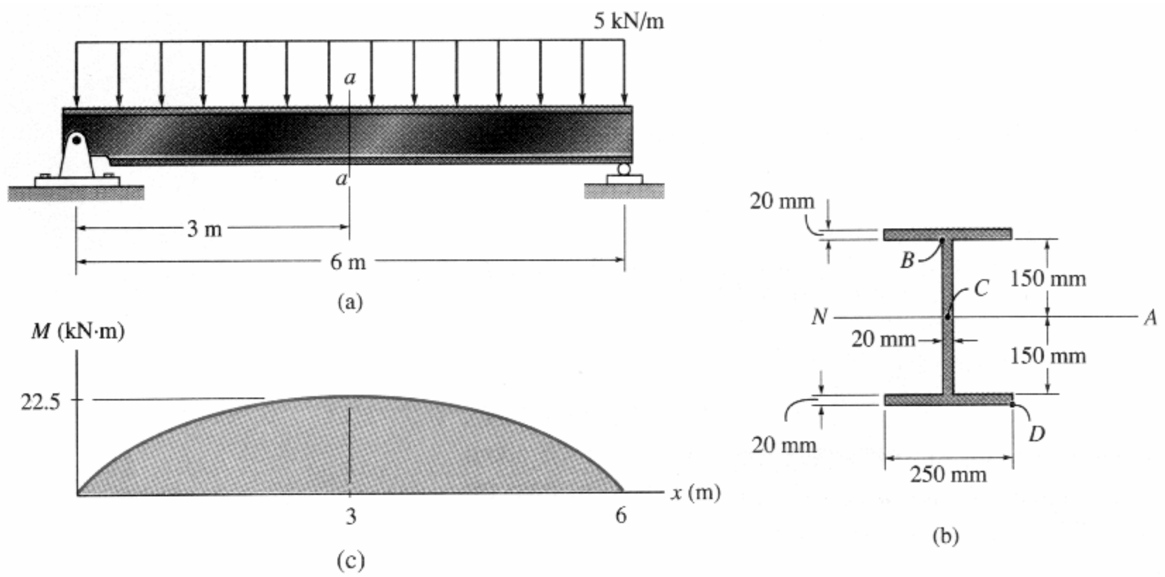
สมการที่ 6-12 และ 6-13 มักจะถูกเรียกว่า flexural formula และค่าหน่วยแรงที่คำนวณได้จากสมการทั้งสองนี้จะถูกเรียกว่า หน่วยแรงดัด (bending stress หรือ flexural stress) ซึ่งจะมีค่าเป็นบวกเมื่อหน่วยแรงดังกล่าวเป็นหน่วยแรงดึง และจะมีค่าเป็นลบเมื่อหน่วยแรงดังกล่าวเป็นหน่วยแรงกดอัด

ถ้าเราพิจารณาหน้าตัดของคานที่ถูกกระทำโดยโมเมนตืดัดที่มีค่าคงที่ค่าหนึ่งแล้ว เราจะเห็นได้ว่า หน่วยแรงดัดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของคานจะแปรผกผันกับค่า I ของหน้าตัดของคาน ดังนั้น คานที่มีค่า I สูงจะมีหน่วยแรงดัดเกิดขึ้นต่ำกว่าคานที่มีค่า I ต่ำกว่า

ภาคผนวกที่ 3 แสดงค่าของพื้นที่และ moment of inertia ของหน้าตัดของคานที่เรามักจะพบในทางวิศวกรรม

ตัวอย่างที่ 6-8

กำหนดให้คานเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ EX 6-8a มีหน้าตัด แบบ wide-flange ดังที่แสดงในรูปที่ EX 6-8b จงหาค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานและจงเขียนการกระจายของหน่วยแรงดัดบนหน้าตัด $a-a$



รูปที่ EX 6-8

หาค่า bending moment สูงสุด

จากตัวอย่างที่ 6-2 และรูปที่ EX 6-8c ค่า moment สูงสุดของคานในกรณีจะหาได้จากสมการ

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} = \frac{5(6)^2}{8} = 22.5\ \text{kN - m}$$

หาคุณสมบัติของหน้าตัด

จากรูปที่ EX 6-8b เราจะเห็นได้ว่า คานมีหน้าตัดที่สมมาตรรอบแกนนอนและแกนดิ่ง ดังนั้น จุด centroid จะอยู่ที่กึ่งกลางของหน้าตัดและแกนสะเทิน (neutral axis) ของคานจะอยู่ที่กึ่งกลางความลึกของหน้าตัด

เมื่อทำการแบ่งหน้าตัดออกเป็น 3 ส่วนคือ ปีกบน (top flange) ปีกล่าง (bottom flange) และเอว (web) แล้ว เราจะหาค่า moment of inertia ของหน้าตัดรอบแกนสะเทินได้จากสมการ

$$I = \sum(\bar{I} + ad^2)$$

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.25)0.020^3 + 0.25(0.020)0.160^2\right] + \left[\frac{1}{12}(0.020)0.300^3\right] = 301.3(10^{-6})\ \text{m}^4$$

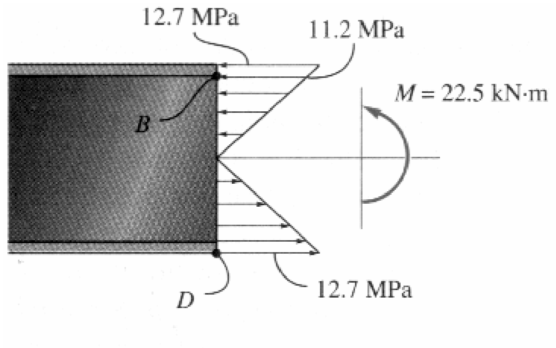
หาค่าหน่วยแรงดัด

จากสมการ flexural formula ค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นที่ผิวบนสุดและผิวล่างสุดของหน้าตัดคานจะหาได้จากสมการ

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{22.5(10^3)(0.170)}{301.3(10^{-6})} = 12.7\ \text{MPa}$$ Ans.

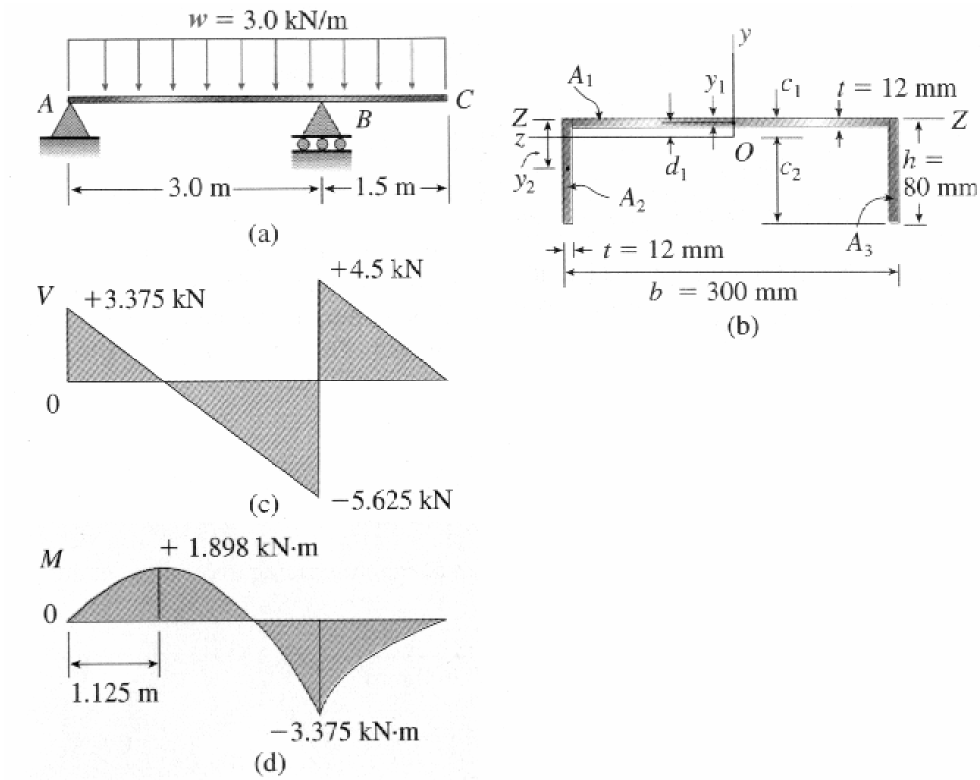
เนื่องจาก $\sigma_{\max} < \sigma_y = 250\,\text{MPa}$ ดังนั้น การคำนวณจึงสอดคล้องกับสมมุติฐานว่าวัสดุมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic ภายใต้การกระทำของน้ำหนักบรรทุก และการกระจายของหน่วยแรงดัดที่เกิดขึ้นที่บนของหน้าตัดคานจะมีการกระจายเป็นแบบเส้นตรงขึ้นอยู่กับระยะ y จากแกนสะเทิน ดังนั้น กระจายของหน่วยแรงดัดจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ EX 6-8d <u>Ans.</u>



(d)

ตัวอย่างที่ 6-9

จงหาค่าหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงกดอัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ EX 6-9a เมื่อคานมีหน้าตัดเป็นรูปรางน้ำ (C section) ดังที่แสดงในรูปที่ EX 6-9b



รูปที่ EX 6-9

หาค่า bending moment สูงสุด

รูปที่ EX 6-8c และรูปที่ EX 6-8d แสดงแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ตามลำดับ และค่า moment สูงสุดของคานมีค่าเท่ากับ $-3.375\ \mathrm{kN\text{-}m}$ ซึ่งจะทำให้คานเกิดหน่วยแรงดึงที่ผิวด้านบนและเกิดหน่วยแรงกดอัดที่ผิวด้านล่าง

หาคุณสมบัติของหน้าตัด

จากรูปที่ EX 6-9b เราจะเห็นได้ว่า คานมีหน้าตัดที่สมมาตรรอบแกน y เท่านั้น ดังนั้น จุด centroid จะอยู่บนแกน y และตำแหน่งของแกนสะเทิน (neutral axis) ของของหน้าตัดจะหาได้จากการพิจารณา moment ของพื้นที่หน้าตัดของคานรอบแกนอ้างอิง $Z-Z$ เมื่อทำการแบ่งหน้าตัดออกเป็น 3 ส่วน โดยที่ $A_2 = A_3$ แล้ว

$$c_1 = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + 2 y_2 A_2}{A_1 + 2A_2}$$

$$c_1 = \frac{6(276)12 + 2(40)80(12)}{276(12) + 2(80)12} = 18.48\ \mathrm{mm}$$

$$c_2 = h - c_1 = 80 - 18.48 = 61.52\ \mathrm{mm}$$

ค่า moment of inertia ของหน้าตัดรอบแกนสะเทินได้จากสมการ

$$I = \sum (\bar{I} + ad^2)$$

$$I = \left[\frac{1}{12}(276)12^3 + 276(12)(18.48-6)^2\right] + 2\left[\frac{1}{12}(12)80^3 + 80(12)(40-18.48)^2\right]$$

$$= 2.469(10^6)\ \mathrm{mm}^4 = 2.469(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

หาค่าหน่วยแรงดัด

จากสมการ flexural formula ค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นที่ผิวบนสุดและผิวล่างสุดของหน้าตัดคานจะหาได้จากสมการ

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I}$$

$$(\sigma_t)_{\max} = \frac{3.375(10^3)(0.01848)}{2.469(10^{-6})} = 25.3\ \mathrm{MPa}$$

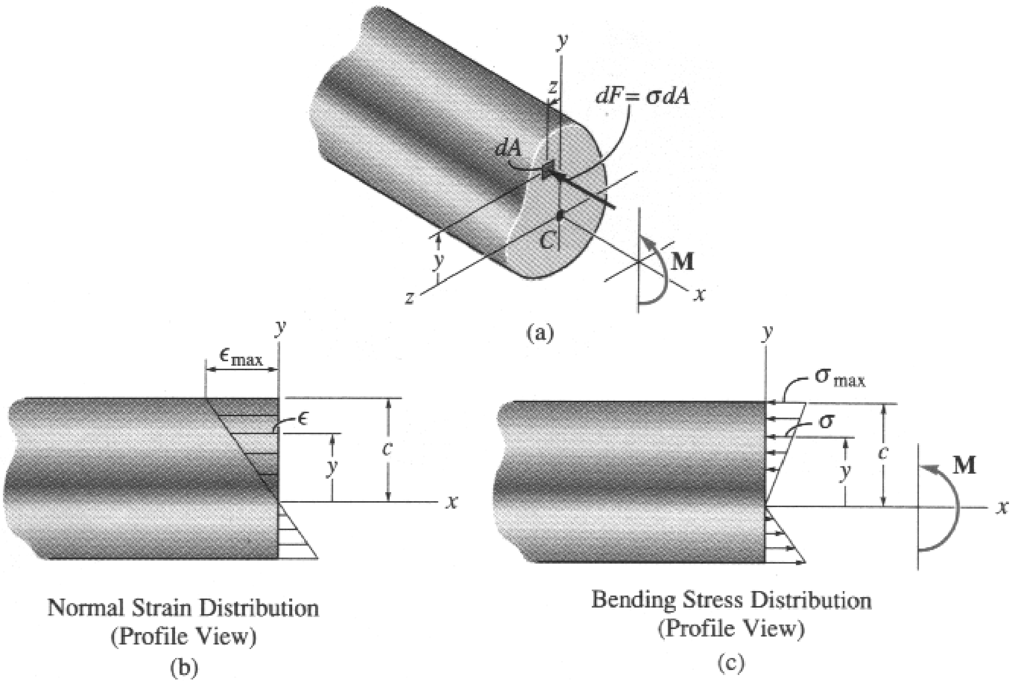
$$(\sigma_c)_{\max} = -\frac{3.375(10^3)(0.06152)}{2.469(10^{-6})} = -84.2\ \mathrm{MPa}$$

ขอให้สังเกตด้วยว่าค่า $\sigma_{\max} < \sigma_y = 250\ \mathrm{MPa}$ ดังนั้น วัสดุมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic ภายใต้การกระทำของน้ำหนักบรรทุก Ans.

6.5 การดัดที่ไม่สมมาตร (Unsymmetrical Bending)

Moment Applied Along Principal Axis

พิจารณาคานที่มีหน้าตัดที่ไม่สมมาตรรอบแกน x, y, และ z ดังที่แสดงในรูปที่ 6-12a กำหนดให้จุด C เป็นจุด centroid ของพื้นที่หน้าตัดของคานและเป็นจุดเริ่มต้นของแกนอ้างอิงตั้งฉาก x, y, และ z ภายใต้แรงกระทำใดๆ คานจะมีโมเมนต์ลัพธ์ภายใน M เกิดขึ้น ซึ่งกระทำรอบแกน $+z$ เท่านั้น



รูปที่ 6-12

โดยใช้เงื่อนไขความสมดุลของแรงลัพธ์ภายในคานในแนวแกน x และเงื่อนไขความสมดุลของโมเมนต์รอบแกน y และแกน z จากรูปที่ 6-12a แรงที่กระทำอยู่บน differential element dA ที่อยู่ที่ตำแหน่ง $(0, y, z)$ จะมีค่าเท่ากับ $dF = \sigma\, dA$ ดังนั้น

$$F_R = \sum F_x ; \qquad 0 = \int_A \sigma dA \qquad (6\text{-}14)$$

$$(M_R)_y = \sum M_y ; \qquad 0 = \int_A z\,\sigma dA \qquad (6\text{-}15)$$

$$(M_R)_z = \sum M_z ; \qquad M = \int_A -y\,\sigma dA \qquad (6\text{-}16)$$

สมการที่ 6-14 จะถูกต้องโดยอัตโนมัติเนื่องจากแกน z เป็นแกนที่ผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของคานและเป็นแกนสะเทิน (neutral axis) ของคาน ดังนั้น ความเครียดตั้งฉากจะมีค่าเท่ากับศูนย์บนแกนนี้และจะแปรผันโดยตรงกับระยะ y ซึ่งจะมีค่ามากที่สุดเมื่อ y มีค่ามากที่สุดหรือที่ $y = c$ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-12b

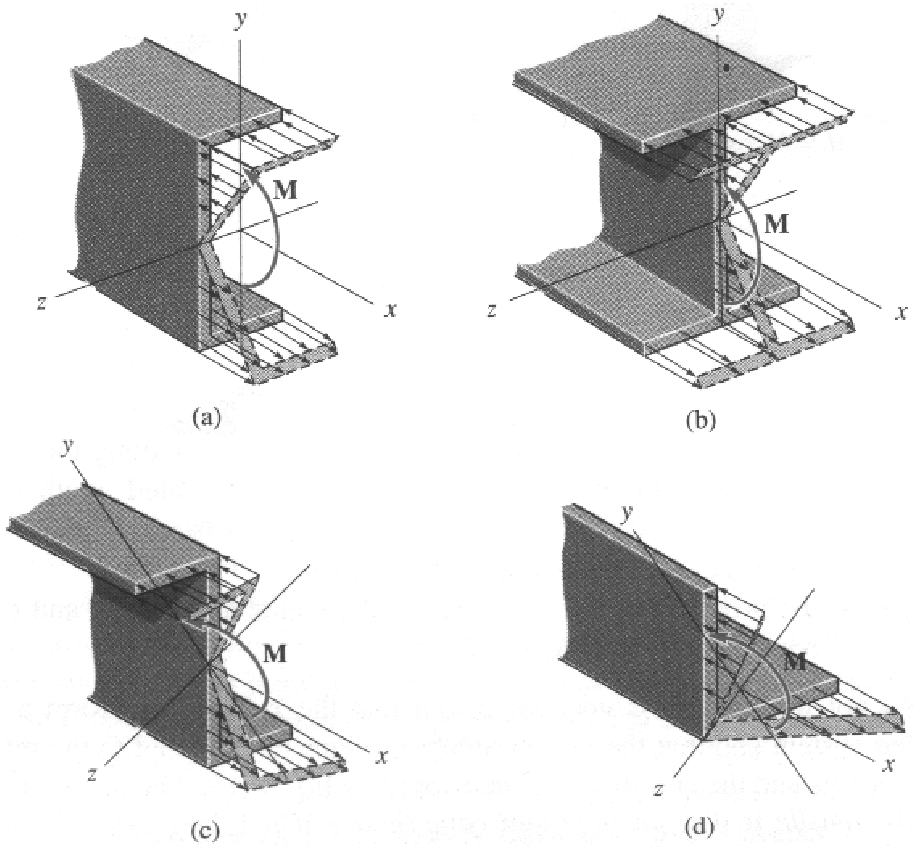
ถ้าวัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) แล้ว การกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากบนหน้าตัดของคานจะเป็นแบบเชิงเส้นตรง (linear) เช่นเดียวกับความเครียดตั้งฉาก ดังที่แสดงในรูปที่ 6-12c ซึ่งเราทราบมาแล้วว่า $\sigma = -(y/c)\sigma_{\max}$ เมื่อเราแทนสมการของหน่วยแรงตั้งฉากดังกล่าวลงในสมการที่ 6-16 แล้ว เราจะได้ flexural formula,

$$\sigma_{\max} = Mc/I$$

เมื่อเราแทนสมการ flexural formula ลงในสมการที่ 6-15 แล้ว เราจะได้ว่า

$$0 = \frac{\sigma_{max}}{c}\int_A yz\,dA$$

จากสมการข้างต้น เนื่องจากเทอม $\dfrac{\sigma_{max}}{c}$ มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ภายใต้การกระทำของแรงใดๆ ดังนั้น ค่า product of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคาน $\int_A yz\,dA$ จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ และจากวิชา statics เมื่อเทอม $\int_A yz\,dA = 0$ แล้ว เราจะได้ว่า แกน y และแกน z จะเป็นแกน principal axes of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคาน ดังนั้น สมการที่ 6-14 ถึง 6-16 จะมีความถูกต้องได้ก็ต่อเมื่อโมเมนต์ M กระทำอยู่รอบแกน y หรือแกน z อย่างเช่นที่แสดงในรูปที่ 6-13 เท่านั้น



รูปที่ 6-13

Moment Arbitrary Applied

เมื่อหน้าตัดของคานถูกกระทำโดยโมเมนต์ M ที่ทำมุม θ กับแกน principal z axis เมื่อกำหนดให้ θ มีค่าเป็นบวก เมื่อวัดจากแกน $+z$ ไปยังแกน $+y$ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-14a แล้ว เราจะแตกโมเมนต์ M ออกเป็นองค์ประกอบรอบแกน principal axes y และ z ได้เป็น $M_z = M\cos\theta$ และ $M_y = M\sin\theta$ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-14b และ 6-14c ตามลำดับ จากนั้น เราจะใช้ flexural formula หาค่าของหน่วยแรงตั้งฉากลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากองค์ประกอบของ moment แต่ละอัน และสุดท้าย ค่าหน่วยแรงตั้งฉาก σ ที่จุดใดๆ (y, z) จะหามาได้โดยใช้ principle of superposition โดยที่

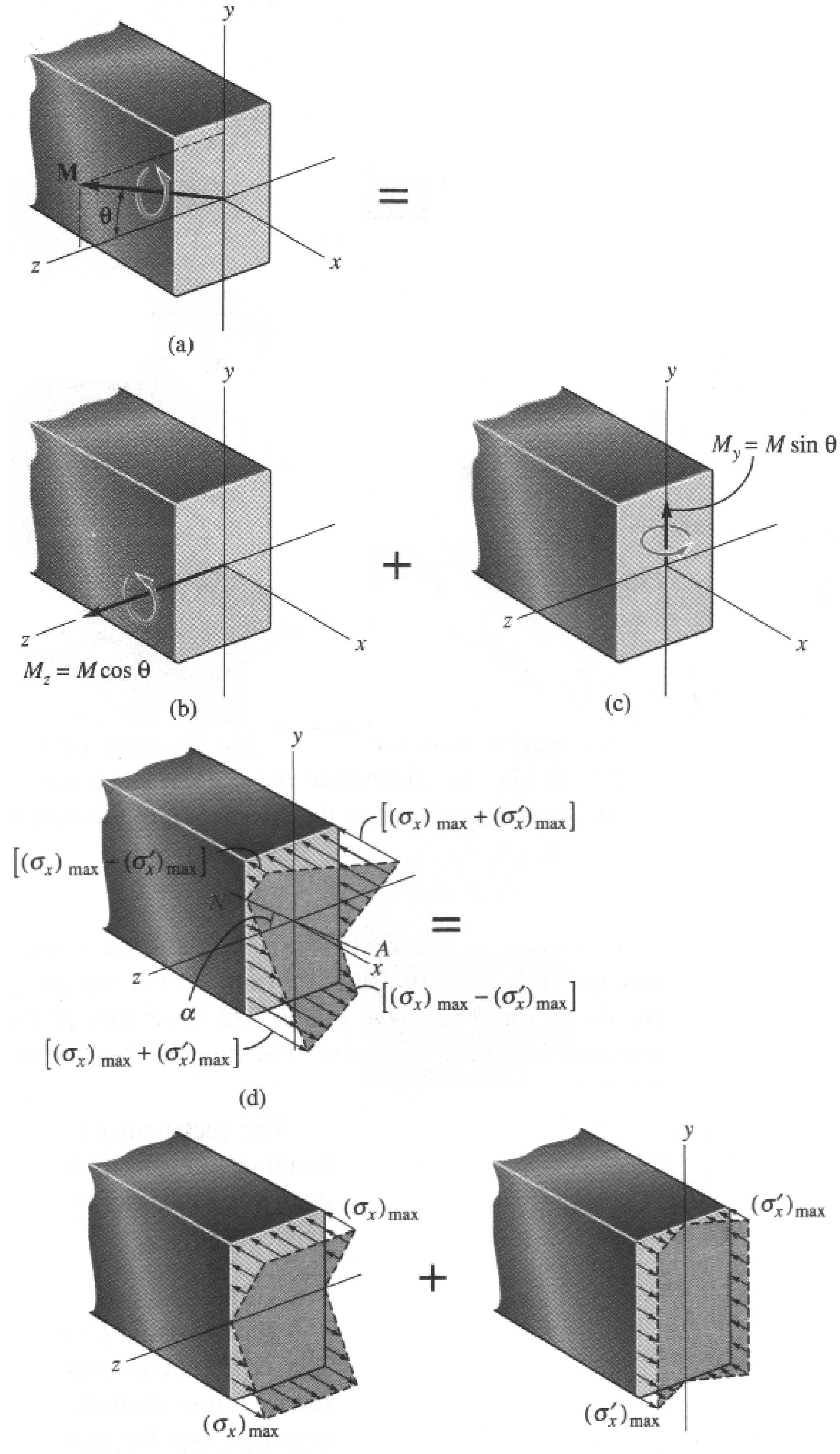
$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \qquad (6\text{-}17)$$

เมื่อ σ = ค่าหน่วยแรงตั้งฉาก (normal stress) ที่จุดใดๆ บนหน้าตัดของคาน

y , z = ระยะในแนวแกน y และแกน z ถึงจุดใดๆ บนหน้าตัดของคานที่เราต้องการหาค่าหน่วยแรงตั้งฉาก

M_y , M_z = องค์ประกอบของโมเมนต์ลัพธ์ภายในที่อยู่ในแนวแกน y และแกน z

I_y , I_z = principal moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคานรอบแกน y และแกน z



รูปที่ 6-14

รูปที่ 6-14d แสดงการกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากลัพธ์บนหน้าตัดของคานดังกล่าว โดยที่การกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากนี้จะเกิดจากการรวมกันกับการกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากเนื่องจากโมเมนต์ M_z และ M_y ดังที่แสดงในรูปที่ 6-14e และ 6-14f ตามลำดับ

Orientation of the Neutral Axis

ทิศทางของแกนสะเทิน (neutral axis) ที่กระทำกับแกน principal axes หรือมุม α จะหาได้จากสมการที่ 6-17 โดยใช้หลักการที่ว่า บนแกน neutral axis ค่าของหน่วยแรงตั้งฉาก $\sigma = 0$ ดังนั้น

$$\frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y}$$

เนื่องจาก $M_z = M\cos\theta$ และ $M_y = M\sin\theta$ ดังนั้น

$$\frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \qquad (6\text{-}18)$$

และเนื่องจาก slope ของแกน neutral axis มีค่าเท่ากับ $\tan\alpha = \dfrac{y}{z}$ สมการที่ 6-18 จะถูกเขียนใหม่ได้เป็น

$$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta \qquad (6\text{-}19)$$

จากสมการที่ 6-19 เราจะเห็นได้ว่า ทิศทางของโมเมนต์ M หรือมุม θ จะมีค่าเท่ากับทิศทางของแกน neutral axis หรือมุม α เมื่อ $I_y = I_z$ ถ้ากำหนดให้พิกัดบนหน้าตัดของคานในลักษณะที่ให้ $I_z > I_y$ แล้ว จากสมการที่ 6-19 เราจะได้ว่า ค่า $\tan\alpha > \tan\theta$ และมุม α จะอยู่ระหว่างแนวกระทำของโมเมนต์ M กับแกน $+y$ หรือ $\theta \le \alpha \le 90^o$

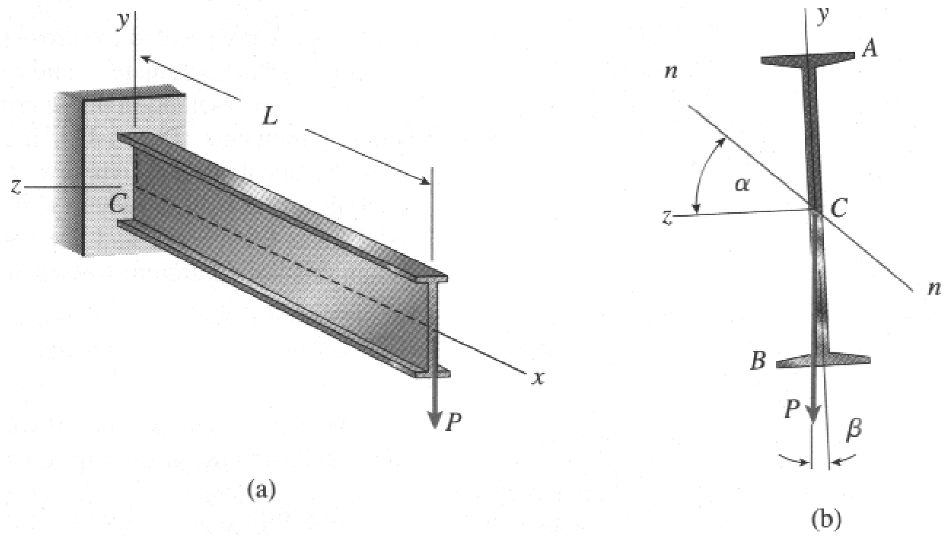
ตัวอย่างที่ 6-10

กำหนดให้คานยื่น ดังที่แสดงในรูปที่ Ex6-10a ซึ่งมีความยาว $L = 4\,\mathrm{m}$ และมีลักษณะหน้าตัดเป็นรูปตัว I เกิดการบิดเอียงจากแนวดิ่งเป็นมุม β เนื่องจากการก่อสร้าง และถูกกระทำโดยแรง $P = 60\,\mathrm{kN}$ ในแนวดิ่งที่ปลายของคาน ตามที่แสดงในรูป นอกจากนั้นแล้ว กำหนดให้หน้าตัดของคานมีคุณสมบัติดังนี้

$I_z = 874.1 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4$, $I_y = 17.56 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4$, ความลึก $h = 0.6\,\mathrm{m}$, ความกว้างของ flange $b_f = 0.2\,\mathrm{m}$

จงหา a.) ค่า maximum bending stresses ที่เกิดขึ้นบนคานเมื่อ $\beta = 0^o$

b.) ค่า maximum bending stresses ที่เกิดขึ้นบนคานเมื่อ $\beta = 2^o$



รูปที่ Ex6-10

a.) **ค่า** maximum bending stresses **ที่เกิดขึ้นบนคานเมื่อ** $\beta = 0^o$

จากรูป maximum bending moment จะมีค่าสูงสุดที่จุดรองรับและจะมีค่าเป็น

$$M_{\max} = PL$$

เมื่อ $\beta = 0^o$ แกน neutral axis ของคานจะเป็นแกน z ดังนั้น จาก flexural formula เราจะได้ว่า maximum bending stresses จะเกิดขึ้นที่ผิวบนสุดและผิวล่างสุดของปีก (flange) ของคาน โดยเป็นหน่วยแรงกดอัดที่ผิวด้านล่างและเป็นหน่วยแรงดึงที่ผิวด้านบน

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{I_z} = \frac{PL(h/2)}{I_z} = \frac{60\,\mathrm{kN}\,(4\,\mathrm{m})(0.6\,\mathrm{m}/2)}{874.1 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4} = 82.37\,\mathrm{MPa}$$ Ans.

b.) **ค่า** maximum bending stresses **ที่เกิดขึ้นบนคานเมื่อ** $\beta = 2^o$

เมื่อแตกแรง P ในแนวแกน y และแกน z เราจะได้ว่า

$$P_y = P\cos\beta$$

$$P_z = P\sin\beta$$

แรง P_y จะทำให้เกิด moment รอบแกน z บนหน้าตัดที่จุด C บนด้านที่ติดกับผนังมีค่าเป็น

$$M_z = -(P\cos\beta)L = -(60\,\mathrm{kN})\cos 2^o\,(4\,\mathrm{m}) = -\,239.85\,\mathrm{kN\text{-}m}$$

(การที่เราพิจารณาหน้าตัดที่จุด C บนด้านที่ติดกับผนังนั้น เนื่องมาจาก sign convention ที่เราใช้ในรูปที่ 16.4)

แรง P_z จะทำให้เกิด moment รอบแกน y บนหน้าตัดที่จุด C บนด้านที่ติดกับผนังมีค่าเป็น

$$M_y = -(P\sin\beta)L = -(60\,\text{kN})\sin 2^o(4\,\text{m}) = -8.38\,\text{kN - m}$$

มุมที่แกน neutral axis $n-n$ กระทำกับแกน z มีค่าเท่ากับ

$$\tan\alpha = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} = \frac{(-8.38\,\text{kN - m})874.1\times10^{-6}\ \text{m}^4}{(-239.85\,\text{kN - m})17.56\times10^{-6}\ \text{m}^4} = 1.739$$

$$\alpha = 60.1^o$$

ดังนั้น เราจะเห็นได้ว่า maximum bending stresses จะเกิดขึ้นที่จุด A และจุด B ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ห่างไกลจากแกน neutral axis มากที่สุด

เนื่องจากมุม β มีค่าน้อยมาก เราจะประมาณค่าของ coordinate ที่จุด A ได้เป็น

$$y_A = +0.3\,\text{m} \text{ และ } z_A = -0.1\,\text{m}$$

ดังนั้น tensile stress ที่เกิดขึ้นที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_A = \frac{M_y z_A}{I_y} - \frac{M_z y_A}{I_z} = \frac{(-8.38\,\text{kN - m})(-0.1\,\text{m})}{17.56\times10^{-6}\ \text{m}^4} - \frac{(-239.85\,\text{kN - m})(+0.3\text{m})}{874.1\times10^{-6}\,\text{m}^4}$$

$$\sigma_A = 130.04\,\text{MPa}$$ Ans.

และ compressive stress ที่เกิดขึ้นที่จุด B จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_B = -130.04\,\text{MPa}$$ Ans.

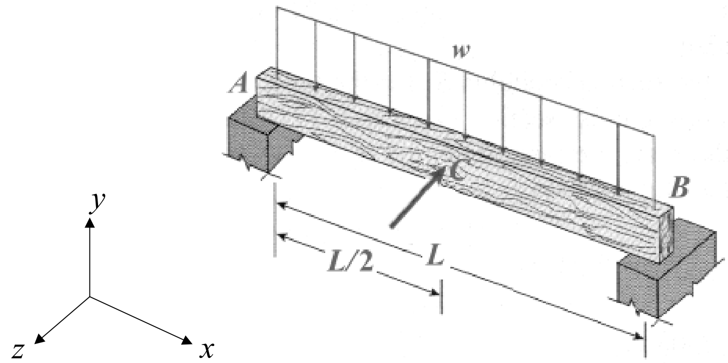
Note เราจะเห็นได้ว่า ในกรณีของคานที่มีหน้าตัดตามรูป ($I_z >> I_y$) ค่า maximum bending stresses ที่เกิดขึ้นในข้อ b. จะมีค่ามากกว่าค่า maximum bending stressesที่เกิดขึ้นในข้อ a.) เท่ากับ

$$\frac{130.04-82.37}{130.04}\times100\% = 36.7\%$$

ซึ่งแสดงถึงความสำคัญของความเที่ยงตรงในการก่อสร้างคานดังกล่าว และเราควรที่จะต้องระมัดระวังมากขึ้นในการใช้คานที่มีลักษณะเช่นนี้

ตัวอย่างที่ 6-11

กำหนดให้คานไม้ช่วงเดี่ยวรองรับแบบธรรมดา (simple support) ซึ่งมี span $L = 4\,\mathrm{m}$ และถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ (uniformly distributed load) $w = 1\,\mathrm{kN/m}$ และแรงกระทำเป็นจุด (concentrated load) P ที่กึ่งกลาง span ดังที่แสดงในรูปที่ Ex6-11 กำหนดให้ส่วนของความปลอดภัย (factor of safety) $\mathrm{F.S.} = 2.0$, หน่วยแรงดัดสูงสุดของไม้ $\sigma_{ult} = 10\,\mathrm{MPa}$ จงหาค่าสูงสุดของแรง P ที่คานไม้สามารถรับได้



(a)

รูปที่ Ex6-11

โดยการเขียนแผนภาพ free-body diagram และใช้สมการความสมดุล แผนภาพ bending moment diagram ของคานเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ w จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-1 และเนื่องจากแรงกระทำเป็นจุด P มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-2

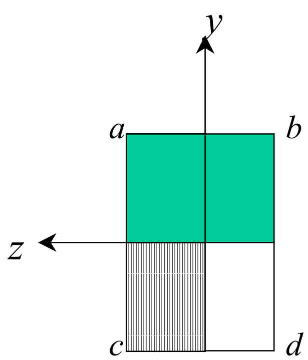
สมการของ bending moment สูงสุดที่เกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ w ที่หน้าตัด C ของคาน (รอบแกน z) ซึ่งทำให้เกิดแรงกดอัดบนผิวด้านบนของคานจะอยู่ในรูป

$$M_z = \frac{wL^2}{8} = \frac{1000(4)^2}{8} = 2000\ \mathrm{N\text{-}m}$$

สมการของ bending moment สูงสุดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำเป็นจุด P ที่หน้าตัด C ของคาน (รอบแกน y) ซึ่งทำให้เกิดแรงกดอัดบนผิวด้านข้างของคาน ที่ถูกกระทำโดยแรง P จะอยู่ในรูป

$$M_y = -\frac{PL}{4} = -P\ \mathrm{N\text{-}m}$$

โดยใช้ principle of superposition เราจะได้ bending moment สูงสุดจะเกิดขึ้นที่จุด a (หน่วยแรงกดอัด) และจุด d (หน่วยแรงดึง) ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-11b



(b) หน้าตัด C ของคาน

ค่าสูงสุดของหน่วยแรงดัดที่เกิดขึ้นที่จุด a (หน่วยแรงกดอัด) และจุด d (หน่วยแรงดึง) หน้าตัด C ของคานจะหาได้จากสมการ

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

ซึ่งจะมีค่าเท่ากับหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ของไม้

$$\sigma_{allow} = \frac{\sigma_{ult}}{\text{F.S.}} = \frac{10}{2} = 5\ \text{MPa}$$

และ moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคานรอบแกน y และแกน z มีค่าเท่ากับ

$$I_y = \frac{0.2(0.1)^3}{12} = 16.67(10^{-6})\ \text{m}^4$$

$$I_z = \frac{0.1(0.2)^3}{12} = 66.67(10^{-6})\ \text{m}^4$$

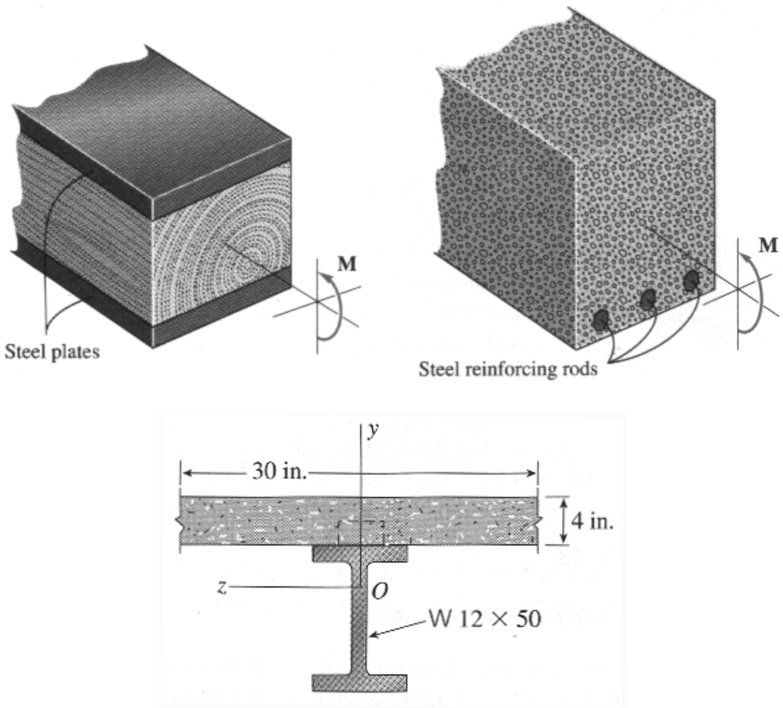
ดังนั้น

$$\sigma_a = -\frac{2000(0.1)}{66.67(10^{-6})} + \frac{(-P)(0.050)}{16.67(10^{-6})} = -5(10^6)$$

$$P = 0.667\ \text{kN}$$ <u>Ans.</u>

6.6 คานที่ทำจากวัสดุต่างชนิดกัน (Composite Beams)

Composite beam เป็นคานที่ถูกสร้างขึ้นจากวัสดุที่ต่างกันอย่างน้อยสองชนิด เช่น คานไม้เสริมเหล็กแผ่น คานคอนกรีตเสริมเหล็ก (reinforced concrete beam) และคานเหล็กประกอบ ดังที่แสดงตามรูปที่ 6-15 เป็นต้น



รูปที่ 6-15

การใช้ flexural formula กับคาน composite beams นี้ เราจะต้องแปลง (transform) วัสดุต่างๆ ที่ใช้ทำคานให้เป็นวัสดุประเภทเดียวกัน โดยใช้วิธีการที่เรียกว่า วิธีการแปลงหน้าตัด (transformed section method)

พิจารณาcomposite beam ดังที่แสดงตามรูปที่ 6-16a กำหนดให้ระนาบของหน้าตัดของคานยังคงเป็นระนาบเหมือนเดิมหลังจากที่คานถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัด M ดังนั้น ความเครียดตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของคานจะมีลักษณะดังที่แสดงตามรูปที่ 6-16b และจาก Hooke's law เราจะได้ว่า หน่วยแรงตั้งฉากที่จุดใดๆ ในวัสดุหมายเลข 1 จะมีค่าเท่ากับ $\sigma = E_1\varepsilon$ และหน่วยแรงตั้งฉากที่จุดใดๆ ในวัสดุหมายเลข 2 จะมีค่าเท่ากับ $\sigma = E_2\varepsilon$ ถ้าวัสดุหมายเลข 1 มีความแกร่งมากกว่าวัสดุหมายเลข 2 แล้ว การกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากบนหน้าตัดของคานจะมีลักษณะตามที่แสดงในรูปที่ 6-16c

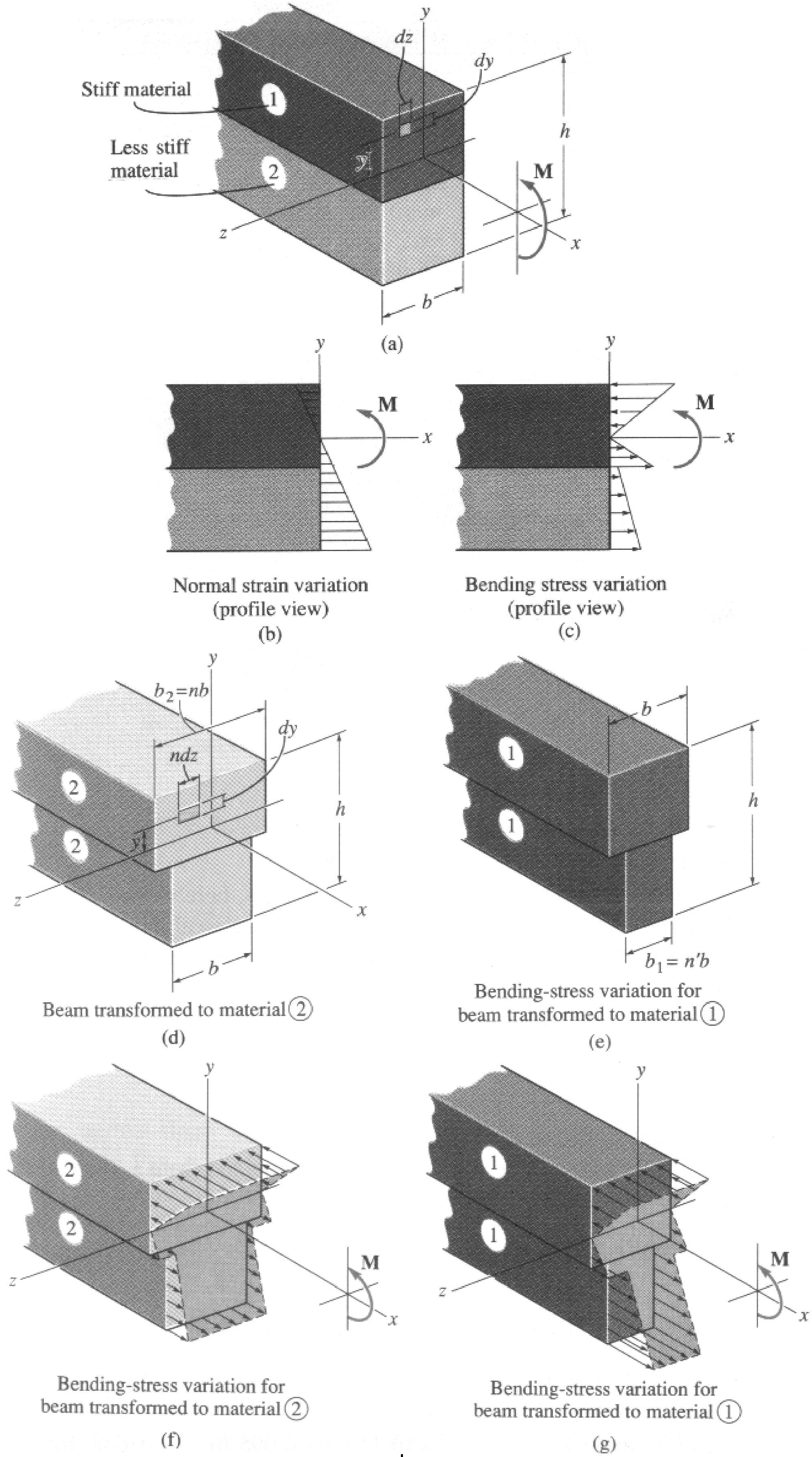
ถ้าเรากำหนดให้คานถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุที่มีความแกร่งน้อยกว่า (วัสดุหมายเลข 2) เท่านั้น และกำหนดให้ความลึกของคาน h มีค่าเท่าเดิมหลังจากที่มีการแปลงวัสดุ (เพื่อให้การกระจายของความเครียดตั้งฉากบนหน้าตัดของคานมีลักษณะคงเดิม) แล้ว ส่วนของคานที่ทำด้วยวัสดุหมายเลข 1 จะต้องถูกขยายให้กว้างขึ้น เพื่อที่จะรองรับแรงกระทำซึ่งมีค่าเท่ากับแรงกระทำที่วัสดุหมายเลข 1 รองรับก่อนที่จะมีการแปลงวัสดุ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-16e ดังนั้น เราจะสามารถหาค่า transformation factor n ที่ใช้ในการแปลงวัสดุหมายเลข 1 เป็นวัสดุหมายเลข 2 ได้จาก

แรงกระทำที่วัสดุหมายเลข 1 รองรับ,

$$dF = \sigma\ dA = (E_1\varepsilon)\ dzdy$$

แรงกระทำที่วัสดุหมายเลข 1 ที่ถูกแปลงเป็นวัสดุหมายเลข 2 และมีความกว้างของคานเพิ่มขึ้นเป็น nz รองรับ,

$$dF' = \sigma'\ dA' = (E_2\varepsilon)n\ dzdy$$


Stiff material
1
Less stiff material
2
dz
dy
y
h
M
z
x
b
(a)
M
x
Normal strain variation (profile view)
(b)
Bending stress variation (profile view)
(c)
$b_2 = nb$
ndz
dy
2
2
h
z
x
b
Beam transformed to material 2
(d)
b
1
1
h
$b_1 = n'b$
Bending-stress variation for beam transformed to material 1
(e)
2
2
M
z
x
Bending-stress variation for beam transformed to material 2
(f)
1
1
M
z
x
Bending-stress variation for beam transformed to material 1
(g)

รูปที่ 6-16

เนื่องจากว่าแรง $dF = dF'$ เราจะเขียนสมการ transformation factor ได้เป็น

$$n = \frac{E_1}{E_2} \tag{6-20}$$

ดังนั้น ในกรณีนี้ ความกว้าง b ของคานที่ทำด้วยวัสดุหมายเลข 1 ซึ่งแกร่งกว่าจะถูกเปลี่ยนไปเป็นความกว้าง nb ของคานที่ทำด้วยวัสดุหมายเลข 2 ที่แกร่งน้อยกว่า ดังที่แสดงในรูปที่ 6-16e

หลังจากที่เราทราบการกระจายของหน่วยแรงบนหน้าตัดของคานที่ถูกแปลง ดังที่แสดงในรูปที่ 6-16g แล้ว ค่าหน่วยแรงดังกล่าวจะต้องถูกคูณด้วย transformation factor เพื่อที่จะแปลงค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นกลับไปเป็นค่าหน่วยแรงบนหน้าตัดก่อนที่จะถูกแปลง เนื่องจากพื้นที่ของส่วนของหน้าตัดที่ถูกเปลี่ยนแปลงมีค่าเป็น n เท่าของพื้นที่ของส่วนของหน้าตัดก่อนที่จะถูกแปลง ดังนั้น

$$dF = \sigma \; dA = \sigma' \, dA'$$

$$\sigma \; dzdy = \sigma' \, n \, dzdy$$

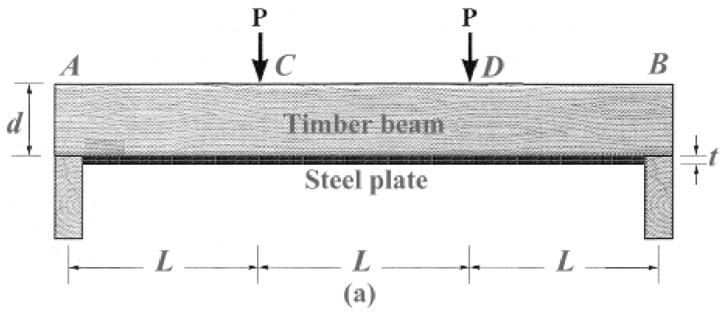
$$\sigma = n\sigma' \tag{6-21}$$

ในลักษณะที่ตรงกันข้าม ถ้าเรากำหนดให้คานถูกสร้างขึ้นมาจากวัสดุที่มีความแกร่งมากกว่า (วัสดุหมายเลข 1) เท่านั้นแล้ว ส่วนของคานที่ทำด้วยวัสดุหมายเลข 2 จะต้องถูกทำให้กว้างลดลงเป็น $n'b$ โดยที่ $n' = E_2 / E_1 < 1$ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-16f และการกระจายของหน่วยแรงบนหน้าตัดของคานจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 6-16h หลังจากที่เราทราบการกระจายของหน่วยแรงแล้ว ค่าของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในหน้าตัดที่ถูกแปลงจะถูกเปลี่ยนกลับไปเป็นค่าของหน่วยแรงบนหน้าตัดเริ่มต้น โดยที่ $\sigma = n'\sigma'$

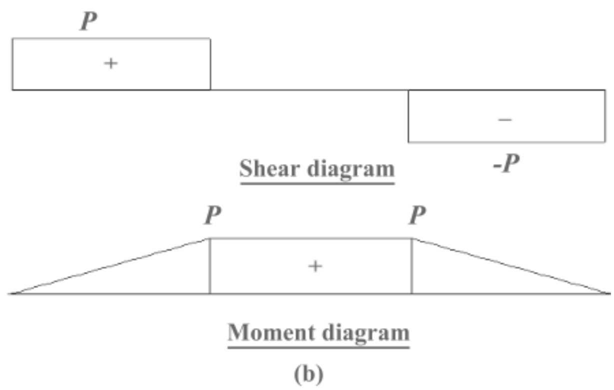
ตัวอย่างที่ 6-12

กำหนดให้คานไม้ simple supports ถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกเป็นจุด (concentrated load) P ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-12a ให้ส่วนของความปลอดภัย (factor of safety) $\text{F.S.} = 2.0$, ultimate stress ของไม้ $\sigma_{ult} = 10\,\text{MPa}$, yeilding stress ของ steel $\sigma_y = 250\,\text{MPa}$, modulus of elasticity ของไม้ $E_w = 10\,\text{GPa}$ และ steel $E_{st} = 200\,\text{GPa}$

ถ้าให้คานมีความกว้าง $b = 0.10\,\text{m}$ ลึก $d = 0.20\,\text{m}$ และแผ่นเหล็กมีความกว้าง $0.100\,\text{m}$ และหนา $t = 5\,\text{mm}$ จงหาน้ำหนักบรรทุกเป็นจุดสูงสุด $P_{\max}$ ที่**<u>คานไม้</u>** และ **<u>คานไม้เสริมแผ่นเหล็ก</u>**สามารถรับได้และน้ำหนักบรรทุกจุด P เพิ่มขึ้นกี่เปอร์เซ็นหลังจากที่เสริมด้วยแผ่นเหล็ก



รูปที่ Ex 6-12



โดยการเขียนแผนภาพ free-body diagram และใช้สมการความสมดุล เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และแผนภาพ bending moment diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-12b

จากแผนภาพ bending moment diagram เราจะได้ว่า bending moment สูงสุดจะเกิดขึ้นในช่วง CD ของคานโดยที่

$$M_{\max} = P$$

หน่วยแรงที่ยอมให้ของไม้

$$(\sigma_w)_{allow} = \frac{\sigma_{ult}}{\text{F.S.}} = \frac{10}{2.0} = 5\,\text{MPa}$$

หน่วยแรงที่ยอมให้ของเหล็ก

$$(\sigma_{st})_{allow} = \frac{\sigma_y}{\text{F.S.}} = \frac{250}{2.0} = 125\,\text{MPa}$$

เมื่อคานไม้ไม่มีการเสริมแผ่นเหล็ก

moment of inertia ของหน้าตัดของคานไม้จะมีค่าเท่ากับ

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{0.10(0.20)^3}{12} = 66.67(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

จาก flexural formula เราจะได้ว่า

$$M_{\max} = \frac{(\sigma_w)_{allow} I}{c} = \frac{5(10^6)66.67(10^{-6})}{(0.2/2)} = 3{,}333\ \mathrm{N\text{-}m}$$

ดังนั้น

$$P_{\max} = 3.333\ \mathrm{kN}$$ <u>Ans.</u>

เมื่อคานไม้ถูกเสริมแผ่นเหล็ก

พื้นที่หน้าตัดของแผ่นเหล็ก

$$A_{st} = 0.10(0.005) = 500(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

transformation factor จากเหล็กไปเป็นไม้

$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = \frac{200}{10} = 20$$

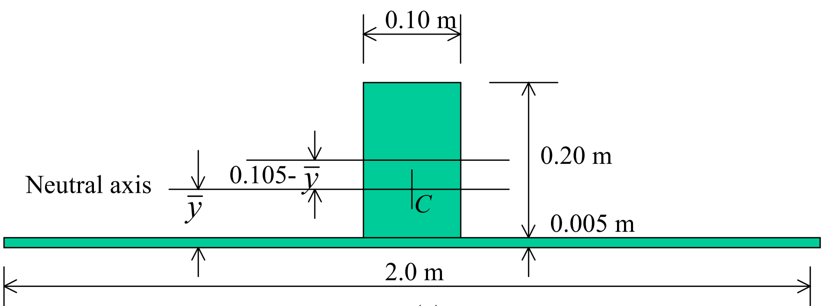
ดังนั้น พื้นที่หน้าตัดของเหล็กที่ถูกแปลงเป็นไม้จะมีค่าเท่ากับ

$$A_{st,transformed} = 20(500)10^{-6} = 10(10^{-3})\ \mathrm{m}^2$$

และพื้นที่ดังกล่าวจะมีความกว้างเท่ากับ

$$b_{st,transformed} = \frac{A_{st,transformed}}{t} = \frac{10(10^{-3})}{0.005} = 2\ \mathrm{m}$$

หน้าตัดของคานจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ EX 6-12c



(c)

ตำแหน่งของแกนสะเทินจากผิวด้านล่างสุดของคานจะหาได้จากสมการ

$$\bar{y} = \frac{0.1(0.2)(0.1+0.005)+0.005(2)(0.005/2)}{0.1(0.2)+0.005(2)} = 0.0708\ \mathrm{m}$$

moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดรอบแกนสะเทิน

$$I = \left[\frac{0.1(0.2)^3}{12} + 0.1(0.2)(0.105-0.0708)^2\right] + \left[\frac{2(0.005)^3}{12} + 2(0.005)(0.0708-0.0025)^2\right]$$

$$= 136.73(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

ทำการตรวจสอบดูว่า ไม้หรือเหล็กจะเกิดการวิบัติก่อนกัน

1. ถ้าไม้เกิดการวิบัติก่อนเหล็ก

$$(\sigma_w)_{allow} = \frac{M(0.1+0.0342)}{I}$$

$$M = \frac{(\sigma_w)_{allow} I}{0.1342} = \frac{5(10^6)136.73(10^{-6})}{0.1342} = 5.09 \text{ kN - m}$$

2. ถ้าเหล็กเกิดการวิบัติก่อนไม้

$$(\sigma_{st})_{allow} = n\frac{M(0.0708)}{I}$$

$$M = \frac{(\sigma_{st})_{allow} I}{n(0.0708)} = \frac{125(10^6)136.73(10^{-6})}{20(0.0708)} = 12.07 \text{ kN - m}$$

ดังนั้น ไม้จะเกิดการวิบัติก่อนแผ่นเหล็ก และ

$$P_{\max} = 5.09 \text{ kN}$$ Ans.

ค่าหน่วยแรงสูงสุดที่เกิดขึ้นบนแผ่นเหล็กเมื่อคานไม้เกิดการวิบัติมีค่าเท่ากับ

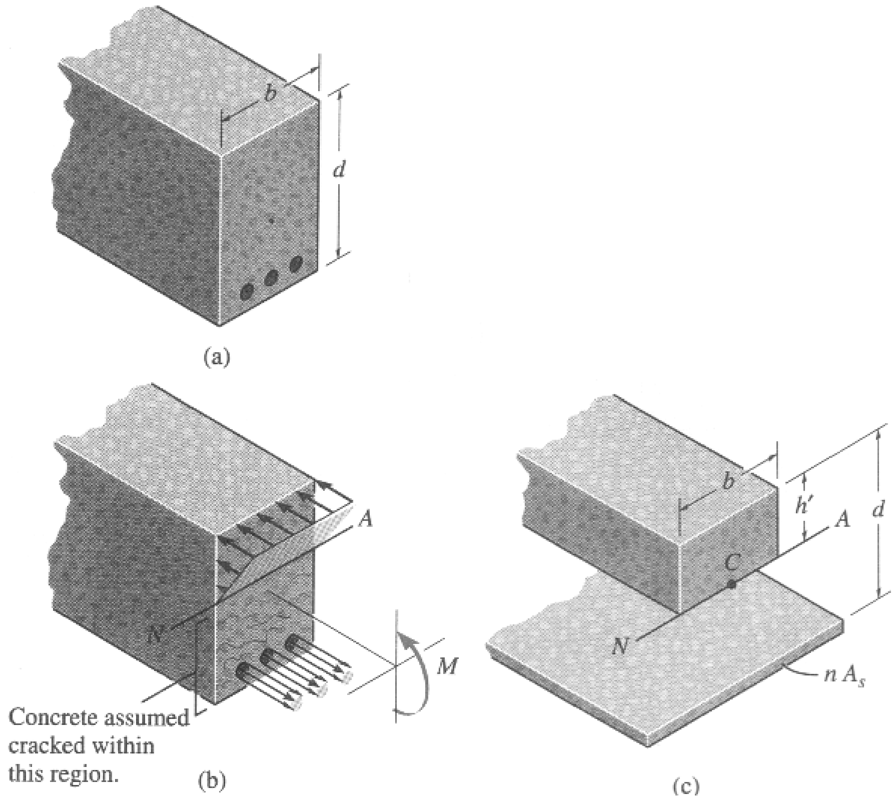
$$\sigma_{st} = n\frac{M(0.0708)}{I} = 20\frac{5090(0.0708)}{136.73(10^{-6})} = 52.7 \text{ MPa}$$

เปอร์เซ็นที่น้ำหนักบรรทุกจุด P เพิ่มขึ้นหลังจากที่เสริมด้วยแผ่นเหล็กเท่ากับ

$$\frac{5.09-3.333}{3.333}(100) = 52.7\ \%$$ Ans.

6.7 คานคอนกรีตเสริมเหล็ก (Reinforced Concrete Beams)

เนื่องจากคอนกรีต (concrete) เป็นวัสดุเปราะ (brittle material) ซึ่งมีกำลังรับแรงดึงประมาณ 10% ของ กำลังรับแรงกดอัด ดังนั้น วิศวกรจึงได้ค้นหาวิธีการปรับปรุงเพื่อที่จะใช้คานคอนกรีตให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยการเสริมคอนกรีตด้วยเหล็กเส้น ซึ่งเรามักจะเรียกว่า คานคอนกรีตเสริมเหล็ก (reinforced concrete beam) ในการวิเคราะห์คานคอนกรีตเสริมเหล็กนั้น เราจะสมมุติให้เหล็กเส้นทำหน้าที่ในการรับแรงดึงที่เกิดขึ้นในคานทั้งหมดและคอนกรีตจะไม่มีความสามารถในการรับแรงดึงเลย ซึ่งข้อสมมุติฐานนี้ได้มาจากการสังเกตที่ว่า การแตกร้าวที่เกิดขึ้นในคานคอนกรีตเสริมเหล็กมักจะเกิดขึ้นในส่วนของคานที่รับแรงดึงในขณะที่แรงกระทำมีค่าที่ต่ำมากๆ เมื่อเทียบกับกำลังประลัยของคาน และลักษณะของการแตกร้าวนี้มักจะมีรูปแบบที่ไม่แน่นอน ดังนั้น เราจะสมมุติให้การกระจายของหน่วยแรงตั้งฉากบนหน้าตัดของคานคอนกรีตเสริมเหล็กมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 6-17b



รูปที่ 6-17

ในลักษณะเช่นเดียวกับ composite beams เราสามารถที่จะแปลง (transform) พื้นที่ของเหล็กเส้น A_s ไปเป็นพื้นที่ของคอนกรีตที่สมมูลกันได้เท่ากับ nA_s เมื่อ $n = E_s / E_c$ นอกจากนั้นแล้ว เราสามารถที่จะหาระยะ h' ของแกนสะเทิน (neutral axis) ที่วัดจากผิวด้านบนของคานได้จากเงื่อนไขที่ว่า โมเมนต์ของพื้นที่หน้าตัดนั้นรอบแกน neutral axis มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$bh'(\frac{h'}{2}) - nA_s(d - h') = 0$$

$$\frac{bh'^2}{2} + nA_s h' - nA_s d = 0$$

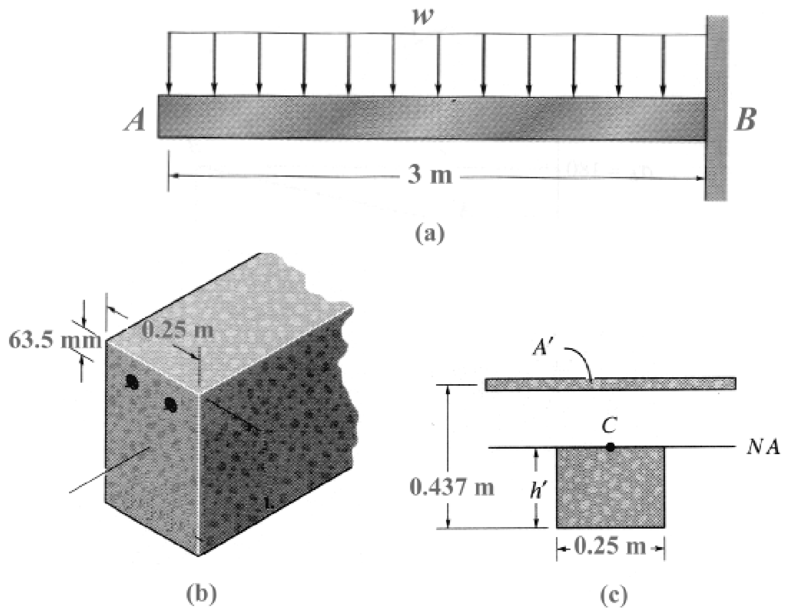
หลังจากที่เราได้ค่าระยะ h' แล้ว ค่าของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในคานก็จะหามาได้โดยวิธีการที่ได้กล่าวถึงใน section ที่แล้ว

ตัวอย่างที่ 6-13

กำหนดให้คานคอนกรีตเสริมเหล็ก ซึ่งเป็นคานยื่น (cantilevered beam) ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-13a ถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ (uniformly distributed load) w และมีหน้าตัดที่เสริมโดยเหล็กเสริมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $19\,\mathrm{mm}$ วางอยู่ที่ตำแหน่งบนหน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-13b

จงหาค่าน้ำหนักบรรทุกสูงสุด w ที่คานนี้สามารถรับได้เมื่อ หน่วยแรงที่ยอมให้ของเหล็ก $(\sigma_{st})_{allow} = 125\,\mathrm{MPa}$ หน่วยแรงที่ยอมให้ของคอนกรีต $(\sigma_{conc})_{allow} = 21\,\mathrm{MPa}$ ค่า modulus of elasticity ของเหล็ก $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$ และค่า modulus of elasticity ของคอนกรีต $E_c = 25\,\mathrm{GPa}$

สมมุติให้คอนกรีตไม่สามารถรับแรงดึงได้



รูปที่ Ex 6-13

จากรูปที่ Ex 6-13a ค่า bending moment สูงสุดที่เกิดขึ้นในคานที่จุดยึดแน่น A จะหาได้จากสมการ

$$M_{\max} = -\frac{wL^2}{2} = -4.5w$$

ซึ่งจะทำให้ผิวด้านบนของคานคอนกรีตเสริมเหล็กถูกกระทำโดยแรงดึง

พื้นที่หน้าตัดของเหล็กเสริมมีค่าเท่ากับ

$$A_{st} = 2(\pi r^2) = 2\pi(0.019/2)^2 = 0.567(10^{-3})\,\mathrm{m}^2$$

Transformation factor เปลี่ยนจากเหล็กเป็นคอนกรีต

$$n = \frac{E_{st}}{E_c} = \frac{200}{25} = 8.0$$

เนื่องจากคอนกรีตไม่สามารถรับแรงดึงได้ หน้าตัดของคานคอนกรีตเสริมเหล็กจะเปลี่ยนเป็นคานคอนกรีต ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-13c โดยพื้นที่ของคอนกรีต A' จะหาได้จากสมการ

$$A' = nA_{st} = 8(0.567)10^{-3} = 4.54(10^{-3})\,\mathrm{m}^2$$

ตำแหน่งของแกนสะเทิน h'

จากผลรวมของ moment ของพื้นที่รอบแกนสะเทิน (neutral axis) มีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะได้ว่า

$$0.25(h')\frac{h'}{2} - 4.536(10^{-3})(0.437 - h') = 0$$

$$h' = 0.109\ \text{m}$$

moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคอนกรีตรอบแกนสะเทิน (neutral axis)

$$I = \left[\frac{0.25(0.109)^3}{12} + 0.25(0.109)\left(\frac{0.109}{2}\right)^2\right] + 4.54(10^{-3})(0.437 - 0.109)^2$$

$$= 597(10^{-6})\ \text{m}^4$$

ทำการตรวจสอบดูว่า คอนกรีตหรือเหล็กเกิดการวิบัติก่อนกัน

3. ถ้าคอนกรีตเกิดการวิบัติก่อนเหล็ก

$$(\sigma_{conc})_{allow} = \frac{Mh'}{I}$$

$$M = \frac{(\sigma_{conc})_{allow} I}{h'} = \frac{21(10^6)597(10^{-6})}{0.109} = 115\ \text{kN - m}$$

4. ถ้าเหล็กเกิดการวิบัติก่อนคอนกรีต

$$(\sigma_{st})_{allow} = n\frac{M(0.437 - h')}{I}$$

$$M = \frac{(\sigma_{st})_{allow} I}{n(0.437 - h')} = \frac{120(10^6)597(10^{-6})}{8(0.437 - 0.109)} = 27.3\ \text{kN - m}$$

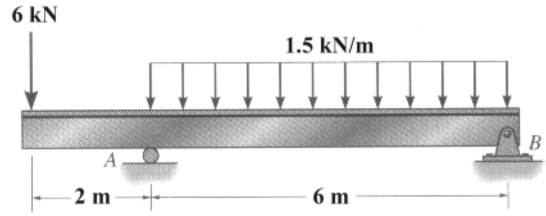
ดังนั้น เหล็กเสริมจะเกิดการวิบัติก่อนคอนกรีต

ค่าน้ำหนักบรรทุกสูงสุด w ที่คานสามารถรับได้มีค่าเท่ากับ

$$w_{\max} = \frac{M_{\max}}{4.5} = \frac{27.3}{4.5} = 6.07\ \text{kN/m}$$ <u>Ans.</u>

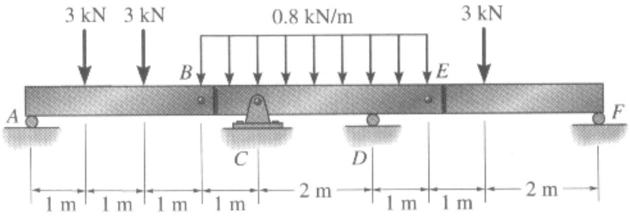
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6

6-1 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-1



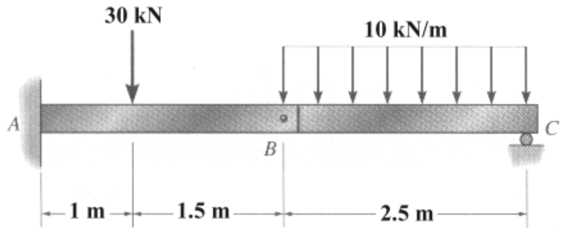
รูปที่ Prob. 6-1

6-2 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-2



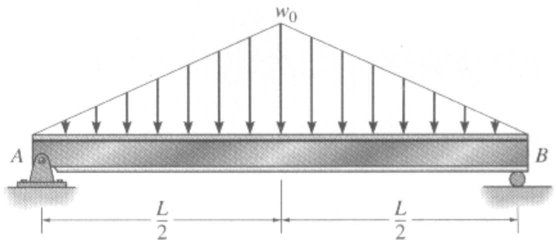
รูปที่ Prob. 6-2

6-3 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-3



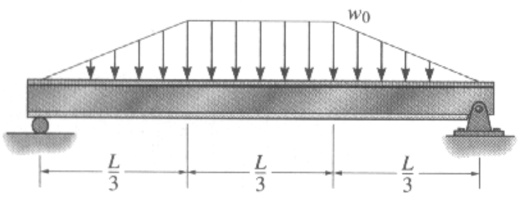
รูปที่ Prob. 6-3

6-4 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-4



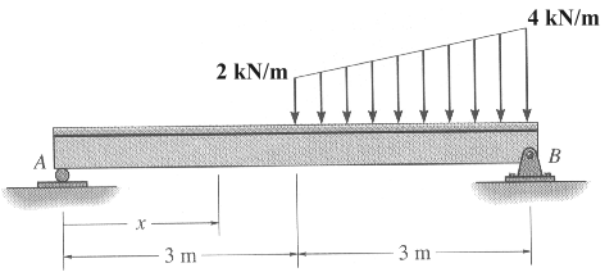
รูปที่ Prob. 6-4

6-5 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-5



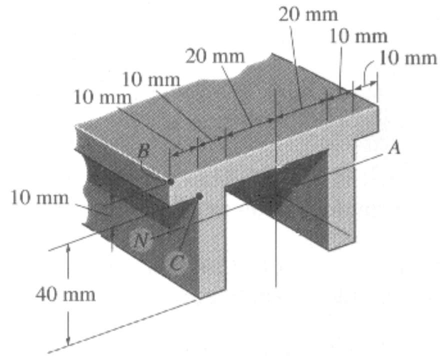
รูปที่ Prob. 6-5

6-6 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-6



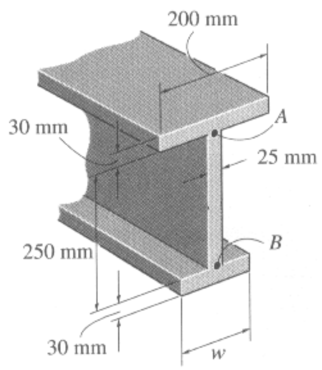
รูปที่ Prob. 6-6

6-7 กำหนดให้คานใน Prob. 6-1 มีหน้าตัด ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-7 จงหาหน่วยแรงดึงสูงสุดและหน่วยแรงกดอัดสูงสุดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัด



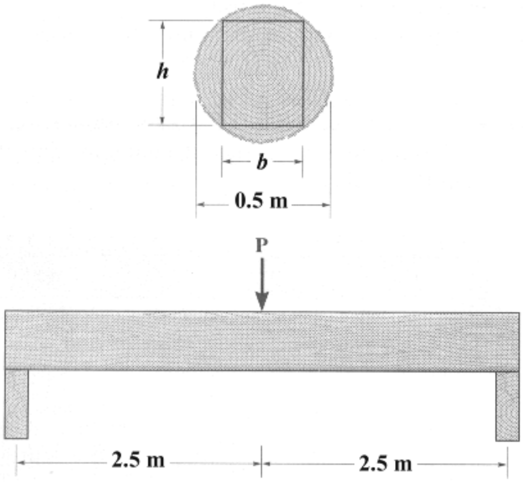
รูปที่ Prob. 6-7

6-8 กำหนดให้คานใน Prob. 6-4 มีหน้าตัด ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-8 เมื่อ $w = 200\ \mathrm{mm}$ จงหาหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดและจงหาเปอร์เซ็นต์ของโมเมนต์ที่เอว (web) ของหน้าตัดรองรับ



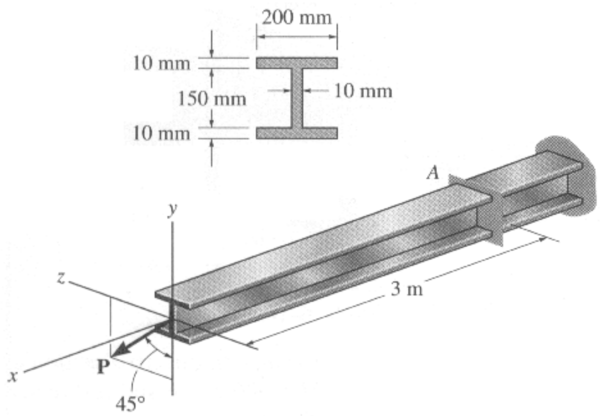
รูปที่ Prob. 6-8

6-9 ถ้าเราต้องการนำท่อนไม้ ซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลาง $0.50\ \mathrm{m}$ มาตัดเพื่อทำคานหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-9 จงหาขนาดความกว้างและความลึกของหน้าตัดของคานดังกล่าวที่จะทำให้คานสามารถรองรับแรงกระทำ P ได้สูงสุด และแรงกระทำ P ดังกล่าวมีค่าเท่ากับเท่าใด กำหนดให้ไม้มี $\sigma_{allow} = 55\ \mathrm{MPa}$



รูปที่ Prob. 6-9

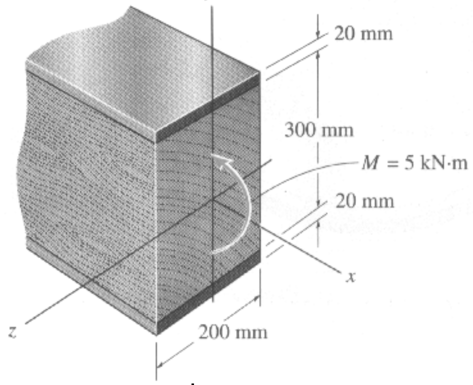
6-10 กำหนดให้คานยื่น (cantilevered beam) ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-10 ถูกกระทำโดยแรง P จงหาค่าของแรง P ที่ทำให้หน่วยแรงดัดมีค่าไม่เกิน $\sigma_{allow} = 180\ \mathrm{MPa}$



รูปที่ Prob. 6-10

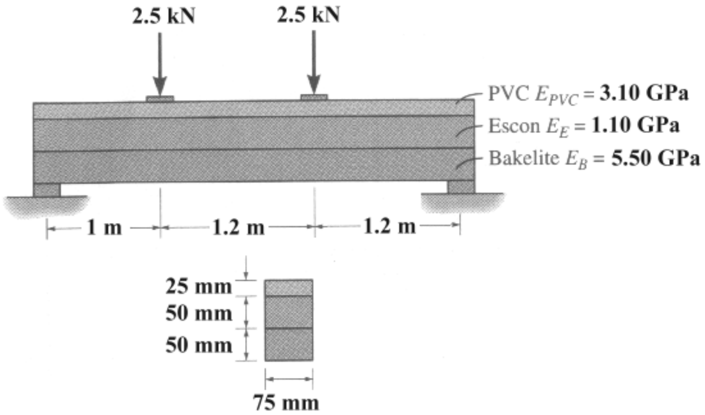
6-11 ถ้าแรง P ที่กระทำต่อคานยื่น ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-10 มีค่า $600\ \mathrm{N}$ จงหาค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นที่หน้าตัด A ของคาน

6-12 กำหนดให้คานไม้ ($E_w = 11\ \mathrm{GPa}$) ถูกเสริมด้วยแผ่นเหล็ก ($E_{st} = 200\ \mathrm{GPa}$) ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-12 จงหาค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในไม้และเหล็กถ้าคานถูกกระทำดดยโมเมนต์ดัด $M = 5\ \mathrm{kN\text{-}m}$ และจงเขียนแผนภาพการกระจายของหน่วยแรงดัดบนหน้าตัดดังกล่าว



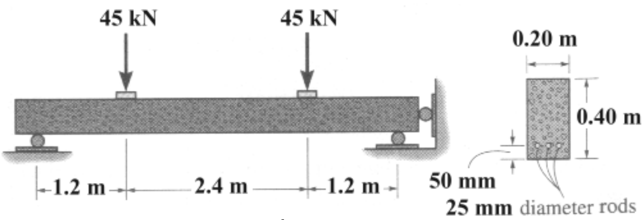
รูปที่ Prob. 6-12

6-13 กำหนดให้คานประกอบ (composite beam) ทำด้วยพลาสติก 3 ชนิด และถูกกระทำโดยแรงกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-13 จงหาค่าหน่วยแรงดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นใน PVC



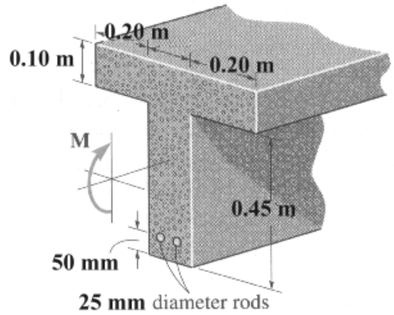
รูปที่ Prob. 6-13

6-14 คานคอนกรีตเสริมเหล็กถูกกระทำโดยแรงกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-14 จงหาค่าหน่วยแรงดึงสูงสุดที่เกิดขึ้นในเหล็กและหน่วยแรงกดอัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคอนกรีต



รูปที่ Prob. 6-14

6-15 กำหนดให้คานคอนกรีตเสริมเหล็กมีหน้าตัด ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-15 ($E_w = 11\,\text{GPa}$) ไม้ถูกเสริมด้วยแผ่นเหล็ก ($E_{st} = 200\,\text{GPa}$) จงหาค่าโมเมนต์ M สูงสุดที่ยอมให้กระทำต่อหน้าตัดคาน เมื่อหน่วยแรงดึงที่ยอมให้ของเหล็ก $(\sigma_{st})_{allow} = 275\,\text{MPa}$ หน่วยแรงกดอัดที่ยอมให้ของคอนกรีต $(\sigma_{conc})_{allow} = 20\,\text{MPa}$ ค่า modulus of elasticity ของเหล็กและคอนกรีตมีค่าเท่ากับ $E_{st} = 200\,\text{GPa}$ และ $E_{conc} = 26\,\text{GPa}$ ตามลำดับ (6-127)



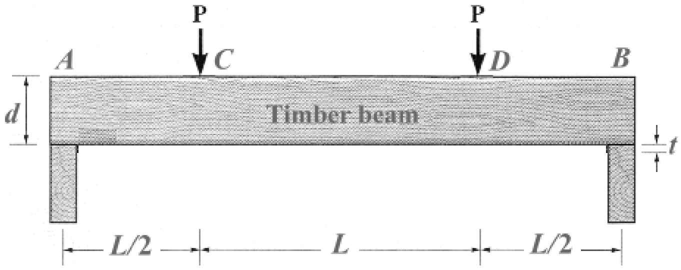
รูปที่ Prob. 6-15

บทที่ 7
การเฉือนตามขวาง (Transverse Shear)

เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

7.1 การเฉือนในชิ้นส่วนของโครงสร้าง (Shear in Straight Members)

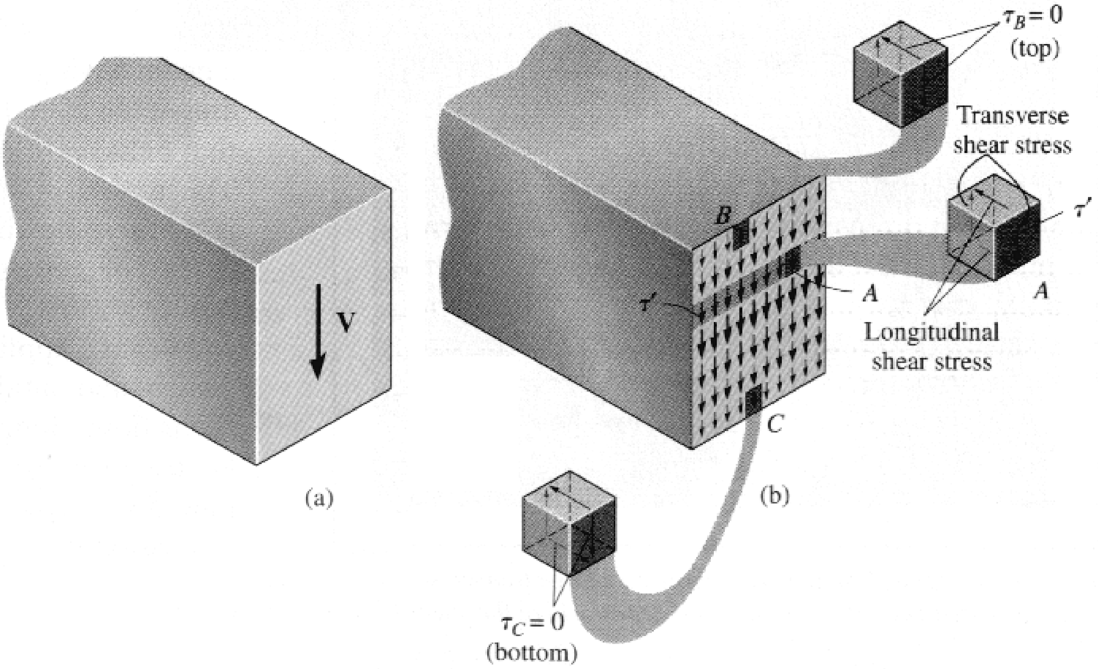
เมื่อคานถูกกระทำโดยแรงกระทำในแนวขวาง (transverse loading) ซึ่งทำให้เกิดโมเมนต์ดัด (bending moment) ภายในที่หน้าตัดของคานเท่านั้น ดังเช่น หน้าตัดในช่วง CD ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 7-1 แล้ว หน่วยแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของคานในช่วงดังกล่าวจะมีเฉพาะหน่วยแรงดัดตั้งฉากเท่านั้น ซึ่งจะหาได้โดยใช้สมการ flexural formula



รูปที่ 7-1

แต่โดยทั่วไปแล้ว คานมักจะถูกกระทำโดยแรงกระทำในแนวขวาง ซึ่งทำให้เกิดทั้งโมเมนต์ดัดภายใน M และแรงเฉือนภายใน V บนหน้าตัดของคาน ดังเช่น หน้าตัดในช่วง AC และ BD ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 7-1

แรงเฉือนบนหน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-2a จะเกิดจากการกระจายของหน่วยแรงเฉือนทางขวาง (transverse shear stress) ที่กระทำอยู่บนหน้าตัดของคานนั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 7-2b ซึ่งเป็นความต้านทานของวัสดุต่อแรงกระทำภายนอกและจะทำให้คานมีความสมดุลต่อการเลื่อน (translational equilibrium) ในแนวดิ่ง



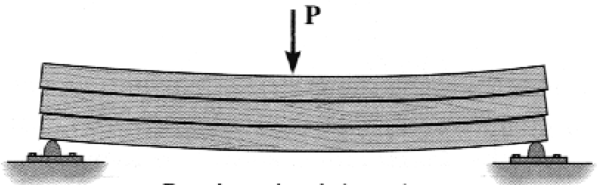
รูปที่ 7-2

นอกจากนั้นแล้ว หน่วยแรงเฉือนทางขวางดังกล่าวยังก่อให้เกิดหน่วยแรงเฉือนในแนวแกน (longitudinal shear stresses) ของคานด้วย เพื่อทำให้เกิดความสมดุลของแรงและโมเมนต์บน differential element ของหน้าตัดของคาน ยก

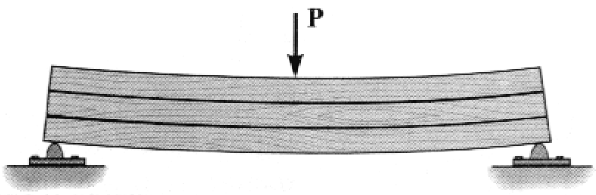
ตัวอย่างเช่น ที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 7-2b เป็นต้น และเนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำขนานไปกับผิวด้านบนและด้านล่างของคาน ดังนั้น หน่วยแรงเฉือนทางขวางที่ผิวทั้งสองนี้จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ยกตัวอย่างเช่น ที่จุด B หรือจุด C ที่แสดงในรูปที่ 7-2b เป็นต้น

เพื่อให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับหน่วยแรงเฉือนในแนวแกนมากขึ้น พิจารณาคานที่ทำด้วยแผ่นไม้ 3 แผ่น ซึ่งมีผิวที่เรียบมากและถูกกระทำโดยแรงกระทำเป็นจุด (concentrated load) P ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3

ในกรณีที่แผ่นไม้ทั้งสามแผ่นไม่มีการยึดติดกันเลย เมื่อคานถูกกระทำโดยแรง P แล้ว แผ่นไม้ทั้งสามแผ่นจะเกิดการเลื่อนสัมพัทธ์ขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3a ทั้งนี้เนื่องมาจากผิวสัมผัสของแผ่นไม้ทั้งสามแผ่นดังกล่าวไม่มีความต้านทานต่อการกระทำของหน่วยแรงเฉือนในแนวแกน แต่ถ้าแผ่นไม้ทั้งสามนั้นมีการยึดติดกันอย่างแน่นหนาแล้ว ผิวสัมผัสของแผ่นไม้ทั้งสามแผ่นจะมีความต้านทานต่อหน่วยแรงเฉือนในแนวแกนและจะป้องกันไม่ให้เกิดการเลื่อนสัมพัทธ์ของแผ่นไม้ขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3b



Boards not bonded together
(a)

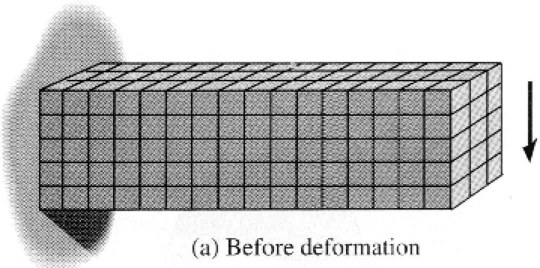


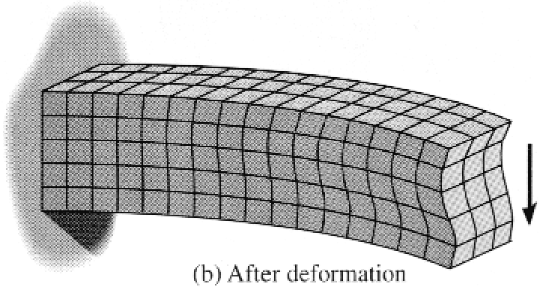
Boards bonded together
(b)

รูปที่ 7-3

หน่วยแรงเฉือนทางขวางที่เกิดขึ้นในคานจะทำให้เกิดความเครียดเฉือน (shear strain) โดยจะค่าเท่ากับศูนย์ที่ผิวด้านบนและผิวด้านล่างของคาน และมีค่าสูงสุดที่จุดกึ่งกลางความลึกของหน้าตัดคาน ความเครียดเฉือนนี้จะทำให้เกิดการบิดเบี้ยว (distortion หรือ warping) ขึ้นบนหน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-4 ซึ่งเกิดขึ้นมาจากการที่ความเครียดเฉือนมีการกระจายที่ไม่คงที่และไม่สม่ำเสมอบนหน้าตัดของคาน

การบิดเบี้ยวที่เกิดขึ้นนี้จะละเมิดข้อสมมุติฐานที่ใช้ในการหาสมการ flexural formula ที่ว่า หน้าตัดของคานก่อนและหลังการเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างยังคงเป็นระนาบและตั้งฉากกับแนวแกนของคาน อย่างไรก็ตาม โดยใช้ theory of elasticity เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า การบิดเบี้ยวเนื่องจากความเครียดเฉือนดังกล่าวมักจะมีค่าที่น้อยมาก เมื่อเปรียบเทียบกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในแนวแกนที่เกิดจากโมเมนต์ดัด โดยเฉพาะในกรณีที่คานยาวมากหรือมีอัตราส่วนของความยาวต่อความลึกมากกว่า 10 ดังนั้น โดยส่วนใหญ่แล้ว เราจะสามารถใช้ flexural formula ในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงดัดที่เกิดขึ้นในคานได้





รูปที่ 7.4

7.2 **สูตรการเฉือน** (Shear Formula)

พิจารณาคานซึ่งถูกกระทำโดยแรงและโมเมนต์ภายนอก ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5a และพิจารณาส่วนของคานที่มีความยาว dx ซึ่งถูกตัดออกมาจากคานที่ระยะ x จากจุดรองรับหมุด (pinned support) ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5b ภายใต้การกระทำของแรงและโมเมนต์ภายนอก ส่วนดังกล่าวของคานจะถูกกระทำโดยโมเมนต์ภายในและจะมีการกระจายของหน่วยแรงดัดตั้งฉาก ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5c

เพื่อทำให้เกิดความสมดุลของแรงในแนวแกนของคาน การกระจายของหน่วยแรงดัดตั้งฉากจะทำให้เกิดแรงลัพธ์ dF' และ dF'' ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5c ซึ่งแรงลัพธ์ dF' และ dF'' นี้จะก่อให้เกิดโมเมนต์ภายใน M และ $M + dM$ เพื่อต้านทานต่อการกระทำของแรงและโมเมนต์ภายนอก (ในที่นี้ เราจะไม่สนใจผลของแรงเฉือนและแรงกระทำอื่นๆ ที่ไม่อยู่ในแนวนอน)

ทำการตัดส่วนของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5b อีกครั้งหนึ่งที่ระยะ y' จากแกนสะเทิน (neutral axis) ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5d (ส่วนที่ระบายสีทึบ) กำหนดให้หน้าตัดดังกล่าวของส่วนของคานมีความกว้างเท่ากับ t ดังนั้น พื้นที่หน้าตัดข้างล่างของส่วนที่ถูกตัดออกมาจะมีค่าเท่ากับ $t\,dx$ และกำหนดให้พื้นที่หน้าตัดทางด้านข้างของส่วนของคานดังกล่าวมีค่าเท่ากับ A'

เนื่องจากผลต่างของโมเมนต์ลัพธ์ภายในที่เกิดขึ้นบนแต่ละด้านของส่วนของคานมีค่าเท่ากับ dM ดังนั้น ส่วนของคานดังกล่าวจะต้องมีหน่วยแรงเฉือนในแนวแกน (longitudinal shear stress) τ เกิดขึ้น เพื่อทำให้เกิดความสมดุลของแรงในแนวนอน

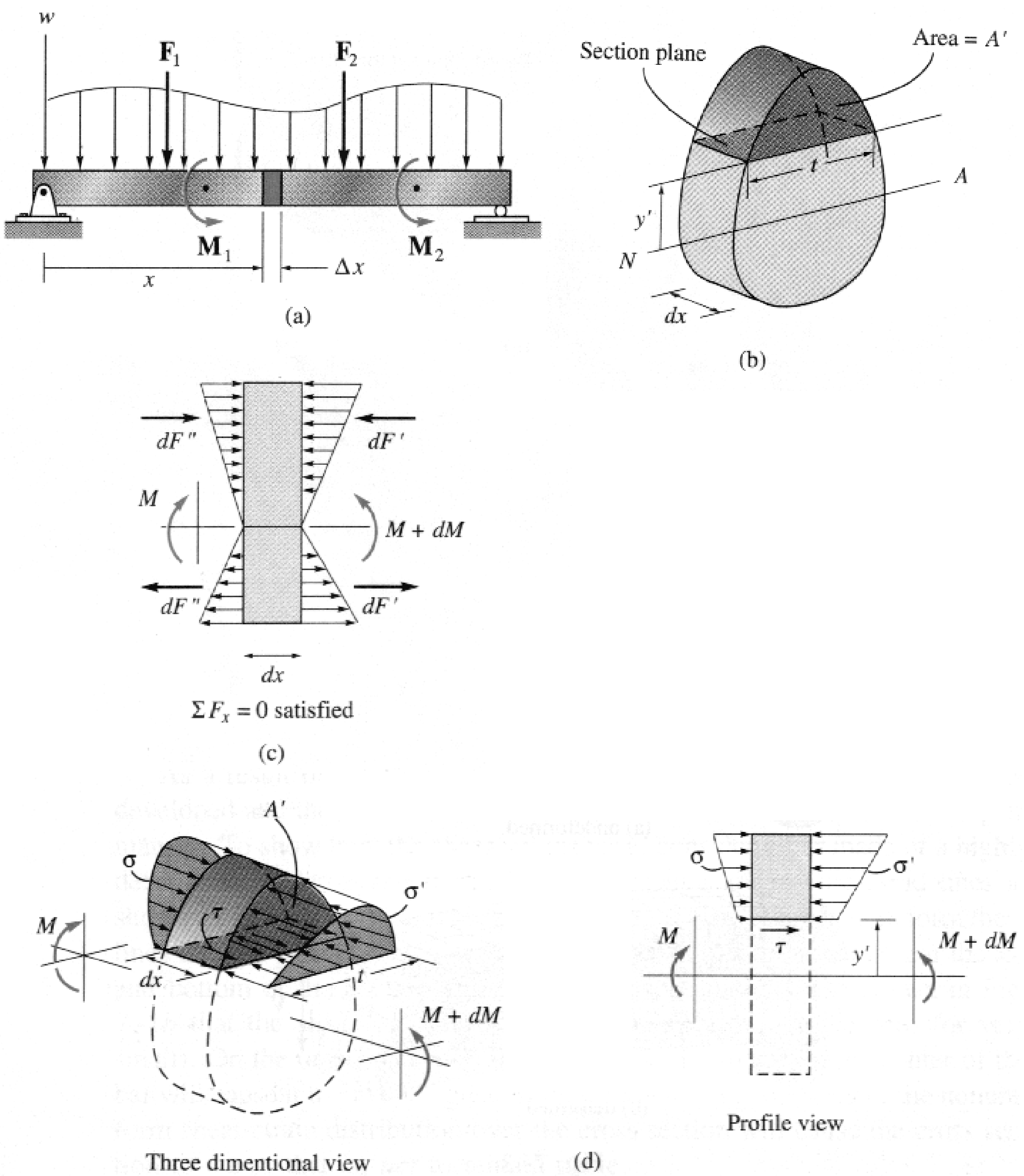
ถ้าสมมุติให้ τ มีค่าคงที่ตลอดความกว้าง t จากสมการความสมดุลของแรงในแนวนอน $\sum F_x = 0$ และสมการ $\sigma = (M/I)y$ เราจะได้ว่า

$$\overset{+}{\leftarrow} \sum F_x = 0; \qquad \int_{A'} \sigma' \, dA - \int_{A'} \sigma \, dA - \tau (t\, dx) = 0$$

$$\int_{A'} \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int_{A'} \frac{My}{I} dA - \tau (t\, dx) = 0$$

$$\frac{dM}{I}\int_{A'} y\,dA = \tau\,(t\,dx)$$

$$\tau = \frac{1}{It}\left(\frac{dM}{dx}\right)\int_{A'} y\,dA \qquad (7\text{-}1)$$



รูปที่ 7-5

จากสมการที่ 7-1 เทอม $\int_{A'} y\,dA$ คือ first moment ของพื้นที่หน้าตัด A' ซึ่งจะเขียนให้อยู่อีกรูปหนึ่งได้โดยการพิจารณาสมการของตำแหน่ง centroid ของพื้นที่หน้าตัด A' ซึ่งอยู่ในรูป

$$\bar{y}' = \frac{\int_{A'} y\,dA}{A'}$$

เมื่อทำการจัดรูปสมการดังกล่าวใหม่แล้ว เราจะเขียนสมการของ first moment ของพื้นที่หน้าตัด A' ได้ในรูป

$$Q = \int_{A'} y\, dA = \bar{y}'A' \tag{7-2}$$

นอกจากนั้นแล้ว จากความสัมพันธ์ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด $V = dM / dx$ เราจะได้ว่า สมการของหน่วยแรงเฉือนในส่วนของคานที่จุดที่มีระยะ y' จากแกนสะเทิน (neutral axis) จะเขียนได้ใหม่ในรูป

$$\tau = \frac{VQ}{It} \tag{7-3}$$

เมื่อ V = แรงเฉือนภายในที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของคาน

I = moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคานรอบแกน neutral axis

t = ความกว้างของหน้าตัดของคานที่เราต้องการหาค่าหน่วยแรงเฉือน

สมการที่ 7-3 นี้มักจะถูกเรียกว่า shear formula ซึ่งจะใช้ได้ในกรณีที่วัสดุมีพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) และมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity) ที่คงที่เท่านั้น

7.3 หน่วยแรงเฉือนในคาน (Shear Stress in Beams

Rectangular Cross Section

พิจารณาคานที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีความกว้าง b และความลึก d ดังที่เสดงในรูปที่ 7-6a ซึ่งถูกกระทำโดยแรงเฉือนภายใน V เราจะหาการกระจายของหน่วยแรงเฉือนบนหน้าตัดของคานนี้ได้จากการคำนวณหาค่าหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่ง y ใดๆ จากแกน neutral axis ของคาน ดังที่เสดงในรูปที่ 7-6b แล้วทำการเขียนสมการที่หามาได้เทียบกับความลึกของหน้าตัดของคานนั้น

จากรูปที่ 7-6b สมการของ first moment ของพื้นที่ที่ระบายสีทึบ A' จะอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} Q &= \bar{y}'A' \\ &= \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) \right]\left(\frac{h}{2} - y\right)b \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)b \end{aligned}$$

แทนค่าของ Q ลงใน shear formula เราจะได้ว่า

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{7-4}$$

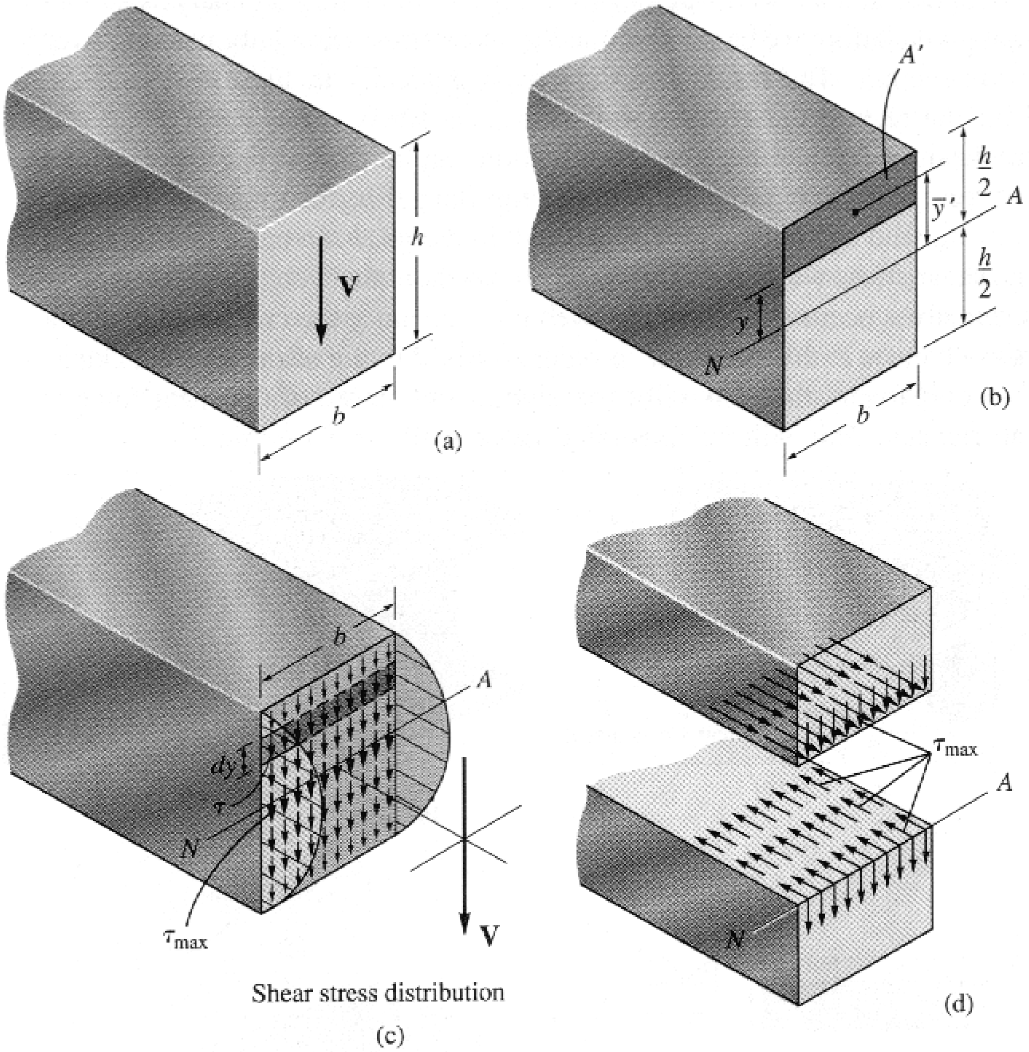
จากสมการที่ 7-4 นี้ เราจะเห็นว่า การกระจายของหน่วยแรงเฉือนบนหน้าตัดของคานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีรูปร่างพาราโบลา (parabola) ตามความลึกของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-6c ซึ่งจาก Hooke’s law เราจะหาความเครียดเฉือนที่เกิดขึ้นได้จาก $\gamma = \tau / G$ ซึ่งจะมีค่าเปลี่ยนแปลงแบบพาราโบลาตามความลึกของคานด้วย และความเครียดเฉือนนี้จะทำให้หน้าตัดของคาน ซึ่งเริ่มต้นมีลักษณะเป็นระนาบเกิดการบิดเบี้ยว (warping) ขึ้น ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในตอนต้น

ค่าสูงสุดของหน่วยแรงเฉือนหรือ $\tau_{\max}$ บนคานที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเกิดขึ้นบนแกน neutral axis หรือที่ตำแหน่ง $y = 0$ ดังนั้น

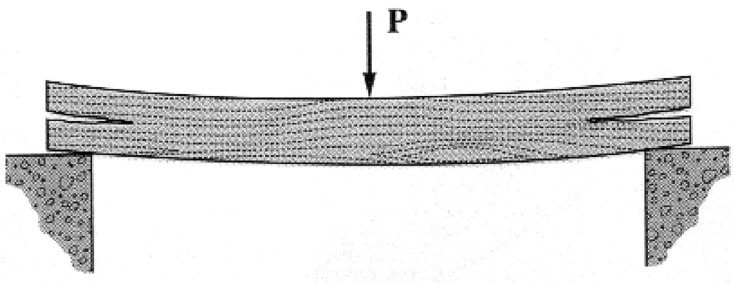
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = 1.5\frac{V}{A}$$

ซึ่งมีค่าเป็น 1.5 เท่าของค่าเฉลี่ยของหน่วยแรงเฉือน τ_{avg}

เนื่องจากหน่วยแรงเฉือนในแนวขวางที่จุดใดๆ มีค่าเท่ากับหน่วยแรงเฉือนในแนวแกน ดังนั้น หน่วยแรงเฉือนในแนวแกนจะมีค่าสูงสุดที่ตำแหน่ง $y = 0$ ด้วย หน่วยแรงเฉือนนี้มักจะทำให้เกิดการวิบัติของคานไม้ในลักษณะที่แสดงในรูปที่ 7-7 เนื่องจากไม้มีกำลังรับหน่วยแรงเฉือนในแนวแกนน้อยกว่าหน่วยแรงเฉือนในแนวขวาง



รูปที่ 7.6



รูปที่ 7-7

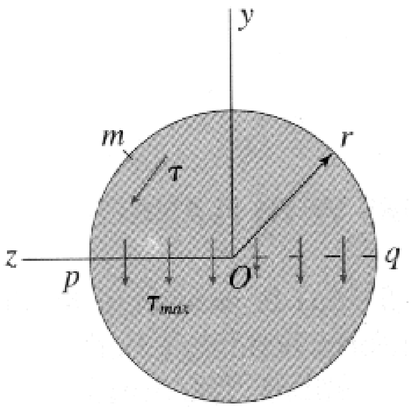
Circular Cross Section

เมื่อคานมีหน้าตัดเป็นทรงกลมแล้ว หน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่จุดต่างๆ บนหน้าตัดของคานจะไม่มีทิศทางในแนวความลึกของหน้าตัดของคาน แต่จะมีทิศทางสัมผัส (tangent) กับเส้นรอบนอกของหน้าตัดของคาน ยกตัวอย่างเช่น ที่จุด m ดังที่แสดงในรูปที่ 7-8 เป็นต้น อย่างไรก็ตาม จากการวิเคราะห์โดยใช้ theory of elasticity เราสามารถที่จะสมมุติให้หน่วยแรงเฉือนที่แกนสะเทิน (neutral axis) ของคานดังกล่าว มีทิศทางในแนวความลึกของหน้าตัดของคานและมีค่าคงที่ได้ ซึ่งในกรณีนี้ เราจะสามารถใช้ shear formula ในการหาหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่แกนสะเทินของคานที่มีหน้าตัดเป็นทรงกลมได้ โดยที่

$$I = \frac{\pi r^4}{4} \qquad Q = A\bar{y} = \left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3} \qquad b = 2r$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

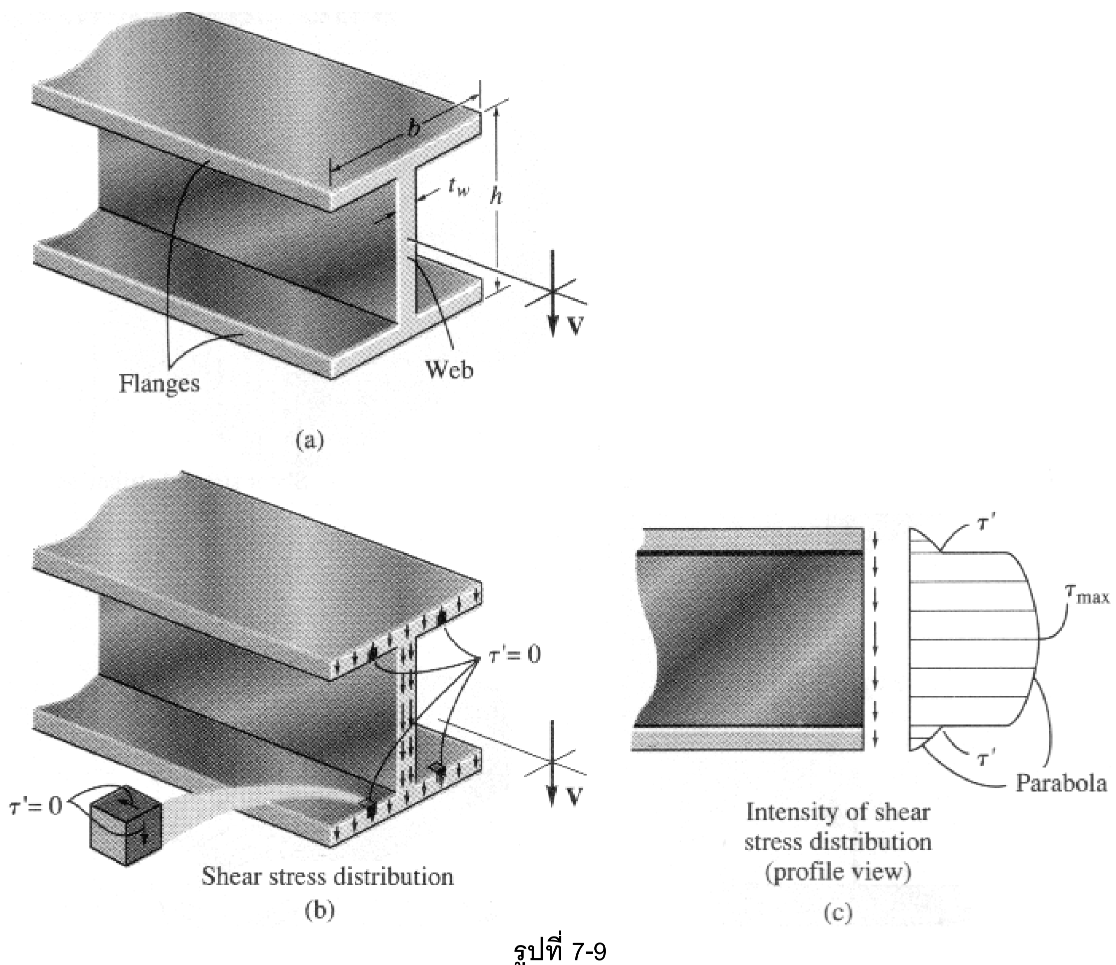
$$\tau_{\max} = \frac{V(2r^3/3)}{(\pi r^4/4)(2r)} = \frac{4V}{3\pi r^2} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$$



รูปที่ 7-8

I -Beam

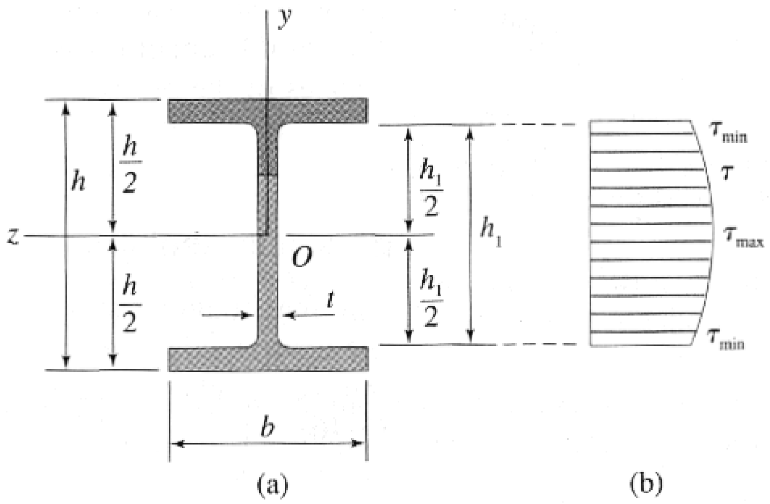
พิจารณาคานหน้าตัดรูปตัว I ดังที่แสดงในรูปที่ 7-9a ซึ่งถูกกระทำโดยแรงเฉือนภายใน V



รูปที่ 7-9

โดยใช้ shear formula เราจะได้การกระจายของหน่วยแรงเฉือนบนหน้าตัดของคานมีลักษณะเป็นรูปพาราโบลา ดังที่แสดงในรูปที่ 7-9b และ 7-9c ซึ่งมีการเพิ่มขึ้นของหน่วยแรงเฉือนที่จุดต่อของปีก (flange) และเอว (web) โดยที่การเพิ่มขึ้นของหน่วยแรงเฉือนนี้เกิดขึ้นเนื่องจากการลดลงของความกว้างของปีก b เป็นความกว้างของเอว t_w

ถ้าเรากำหนดให้คานหน้าตัดรูปตัว I มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 7-10 เราจะหาสมการของหน่วยแรงเฉือนสูงสุด τ_{max} และหน่วยแรงเฉือนต่ำสุด τ_{min} ที่เกิดขึ้นบนเอว (web) ของหน้าตัดของคานได้ โดยที่



รูปที่ 7-10

$$\tau_{min} = \frac{V}{It_w}\left[b\left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right)\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h/2-h_1/2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{Vb}{8It_w}(h^2 - h_1^2)$$

$$\tau_{max} = \frac{V}{It_w}\left[b\left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right)\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h/2-h_1/2}{2}\right)+t_w\left(\frac{h_1}{2}\right)\left(\frac{h_1/2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{V}{8It_w}(bh^2 - bh_1^2 + t_w h_1^2)$$

และเราจะหาสมการของแรงเฉือนภายในที่เกิดขึ้นที่เอวของคานได้ในรูป

$$V_{web} = \left(h_1\tau_{min} + \frac{2}{3}h_1(\tau_{max} - \tau_{min})\right)t$$

$$= \frac{th_1}{3}(2\tau_{max} + \tau_{min})$$

โดยทั่วไปแล้ว V_{web} จะมีค่าประมาณ 90% ถึง 98% ของแรงเฉือนทั้งหมดที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดของคาน ดังนั้น เราจะประมาณค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุด τ_{max} ที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของคานหน้าตัดรูปตัว I ได้จากสมการ

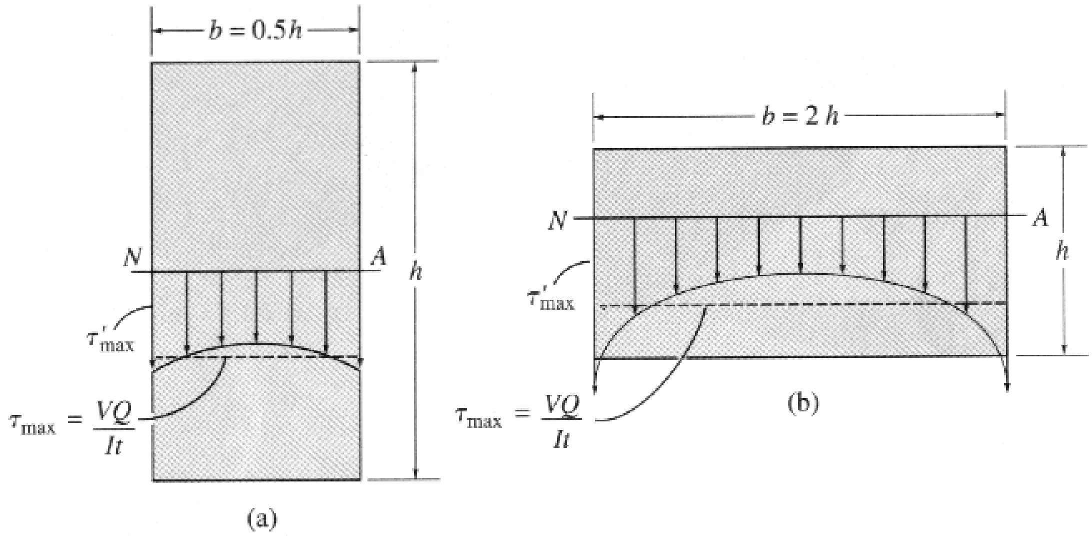
$$\tau_{avg} = \frac{V}{th_1}$$

ซึ่งจะมีค่าต่างจากค่า τ_{max} ที่เกิดขึ้นจริงประมาณ $\pm 10\%$

Limitations on the Use of the Shear Formula

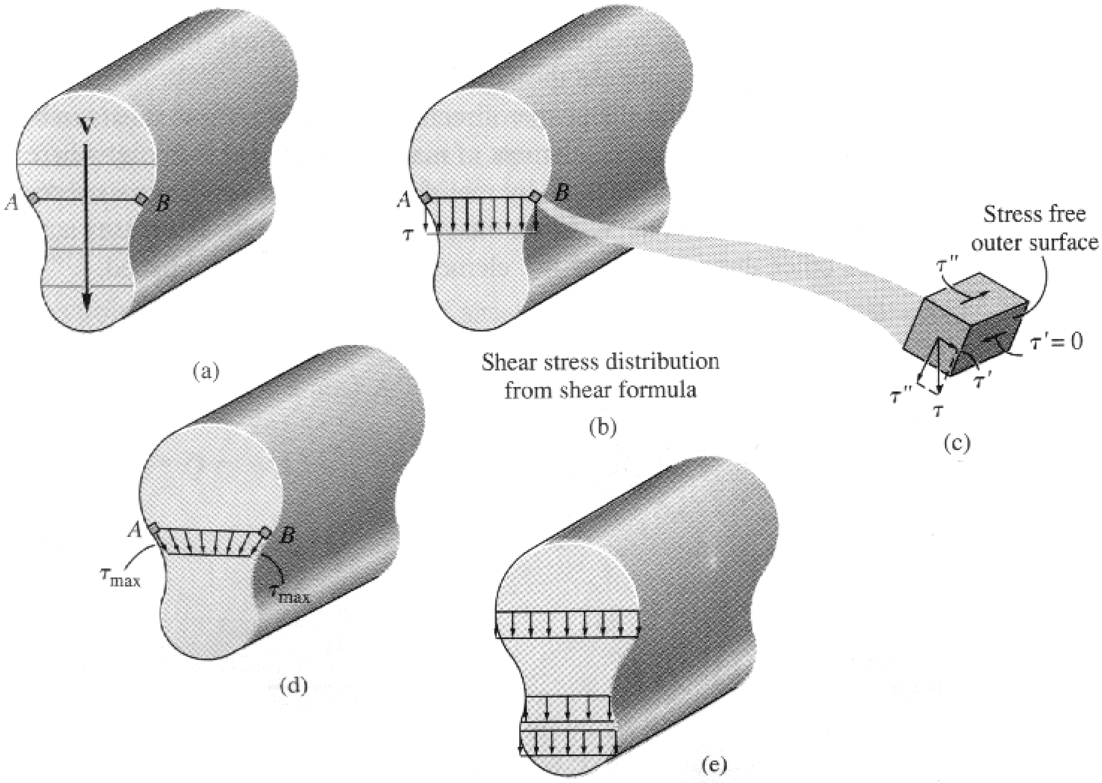
สมการ shear formula จะให้คำตอบที่ไม่ถูกต้องเมื่อ

1. หน้าตัดของคานมีอัตราส่วนของความกว้างต่อความสูงมากกว่าหรือเท่ากับ 0.5 หรือ $b/h \geq 0.5$ นั่นคือ หน้าตัดของคานมีลักษณะที่เหมือนแผ่นกระดาน ซึ่งจะทำให้สมมุติฐานที่ว่า หน่วยแรงเฉือนมีค่าคงที่ตลอดความกว้างของคานไม่เป็นจริง เช่น เมื่อ $b/h = 0.5$ แล้ว $\tau_{\max}$ จะมีค่าประมาณ $1.03\tau_{avg}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-8a แต่เมื่อ $b/h = 2$ แล้ว $\tau_{\max}$ จะมีค่าประมาณ $1.40\tau_{avg}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-8b



รูปที่ 7-11

2. จุดที่หน้าตัดของคานมีการเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใด เช่น ที่จุดต่อของปีก (flange) และเอว (web) ของคานหน้าตัดรูปตัว I เป็นต้น เนื่องจากจุดนี้จะมี stress concentration เกิดขึ้น
3. จุดบนหน้าตัดของคานที่มีเส้นสัมผัสทำมุมกับขอบของคานไม่เท่ากับ 90^o ดังที่แสดงในรูปที่ 7-12

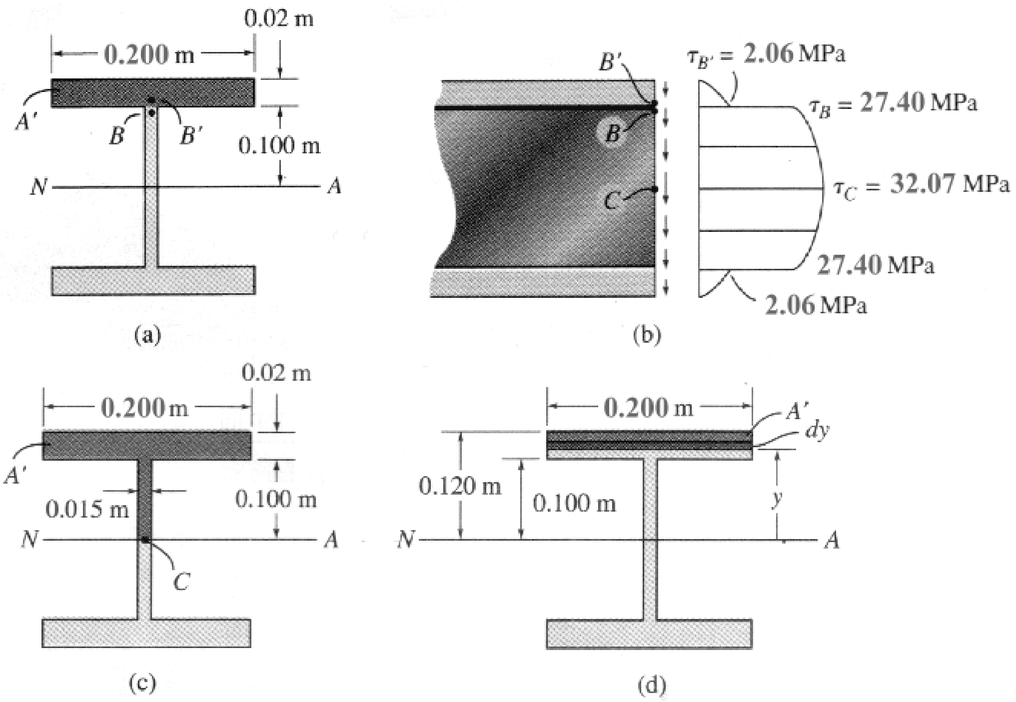


รูปที่ 7-12

จากรูปการกระจายของหน่วยแรงเฉือนที่หาได้โดยใช้ shear formula บนเส้นตรง AB จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 7-12b แต่เนื่องจากเส้นสัมผัสที่จุด A และจุด B บนหน้าตัดของคานตัดกับขอบของคานเป็นมุมไม่เท่ากับ 90^o ดังนั้น หน่วยแรงเฉือนจะมีการกระจายในลักษณะดังกล่าวไม่ได้ ทั้งนี้เนื่องจากว่าการกระจายของหน่วยแรงเฉือนดังกล่าวจะก่อให้เกิดองค์ประกอบของหน่วยแรงเฉือน τ' ขึ้น ซึ่งจะก่อให้เกิดความไม่สมดุลบน differential element ที่จุด A และจุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 7-12c ดังนั้น การกระกระจายของหน่วยแรงเฉือนที่จุด A และจุด B จำเป็นที่จะต้องมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 7-12d อย่างไรก็ตาม ขอให้สังเกตด้วยว่า เราจะหาหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนเส้นตรงที่อยู่ที่ตำแหน่งอื่นๆ ของคานในลักษณะที่แสดงในรูปที่ 7-12e ได้โดยใช้สมการ shear formula

ตัวอย่างที่ 7-1

กำหนดให้หน้าตัดของคานเหล็ก A36 รูปตัว I มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ EX 7-1a ซึ่งถูกกระทำโดยแรงเฉือน $100\ \mathrm{kN}$ จงเขียนแผนภาพแสดงการกระจายของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของคานและจงหาค่าของแรงเฉือนที่ถูกต้านทานโดยเอว (web) ของหน้าตัด



รูปที่ EX 7-1

การกระจายของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของคาน

เราทราบมาแล้วว่า หน่วยแรงเฉือนจะมีการกระจายในรูปของ parabolic บนหน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ EX 7-1b เนื่องจากคานมีหน้าตัดที่สมมาตร ดังนั้น เราจะหาเฉพาะค่าของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่จุด B' จุด B และจุด C

จากสมการ shear formula

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

moment of inertia ของหน้าตัดของคานรอบแกน neutral axis

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.015)0.2^3\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0.2)0.02^3 + 0.2(0.02)0.110^2\right]$$

$$= 107.07(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

ที่จุด B'

$$t_{B'} = 0.20\ \mathrm{m}$$

พิจารณาพื้นที่ A' ระบายสีทึบ คาน ดังที่แสดงในรูปที่ EX 7-1b

$$Q_{B'} = \overline{y}'A' = 0.110\left[(0.20)0.02\right] = 0.440(10^{-3})\ \mathrm{m}^3$$

$$\tau_{B'} = \frac{100(10^3)0.440(10^{-3})}{107.07(10^{-6})(0.20)} = 2.06\ \mathrm{MPa}$$

ที่จุด B

$$t_B = 0.015\ \mathrm{m}$$

$$Q_B = Q_{B'} = 0.440(10^{-3})\ \mathrm{m}^3$$

$$\tau_B = \frac{100(10^3)0.440(10^{-3})}{107.07(10^{-6})(0.015)} = 27.40\ \mathrm{MPa}$$

ที่จุด C

$$t_C = 0.015\ \mathrm{m}$$

พิจารณาพื้นที่ A' ระบายสีทึบ คาน ดังที่แสดงในรูปที่ EX 7-1c

$$Q_C = 0.110\left[(0.20)0.02\right] + 0.05\left[(0.015)\right]0.10$$

$$= 0.515(10^{-3})\ \mathrm{m}^3$$

$$\tau_C = \tau_{\max} = \frac{100(10^3)0.515(10^{-3})}{107.07(10^{-6})(0.015)} = 32.07\ \mathrm{MPa}$$

จากค่าของหน่วยแรงเฉือนที่จุดต่างๆ ที่คำนวณได้ เราจะเขียนแผนภาพของการกระจายของหน่วยแรงเฉือนได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1b Ans.

ค่าของแรงเฉือนที่ถูกต้านทานโดยเอว (web) ของหน้าตัด

ค่าของแรงเฉือนที่ถูกต้านทานโดยเอว (web) ของหน้าตัดจะเท่ากับค่าของแรงเฉือนที่กระทำต่อหน้าตัดลบด้วยค่าของแรงเฉือนที่ถูกต้านทานโดยปีก (flange) ของหน้าตัด

พิจารณาหน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1d เราจะหา first moment ของพื้นที่ A' ที่ระยะ y จากแกนสะเทินของหน้าตัดได้จากสมการ

$$Q = \overline{y}'A' = \left[y + \frac{1}{2}(0.12 - y)\right]\left[0.20(0.120 - y)\right]$$

$$= 0.10\left[0.12^2 - y^2\right]\mathrm{m}^3$$

ดังนั้น หน่วยแรงเฉือนที่ระยะ y จากแกนสะเทินของหน้าตัดจะอยู่ในรูป

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{100(10^3)0.10(0.12^2 - y^2)}{107.07(10^{-6})(0.20)}$$

$$= 467(0.12^2 - y^2)\ \mathrm{MPa}$$

หน่วยแรงเฉือนนี้กระทำอยู่บนพื้นที่ $dA = 0.20dy$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1d ดังนั้น แรงเฉือนที่ถูกต้านทานโดยปีกบนของหน้าตัดจะมีค่าเท่ากับ

$$V_{flange} = \int_{A_f} \tau dA$$

$$= \int_{0.10}^{0.12} 467(10^6)(0.12^2 - y^2)0.20dy = 4.234\ \mathrm{kN}$$

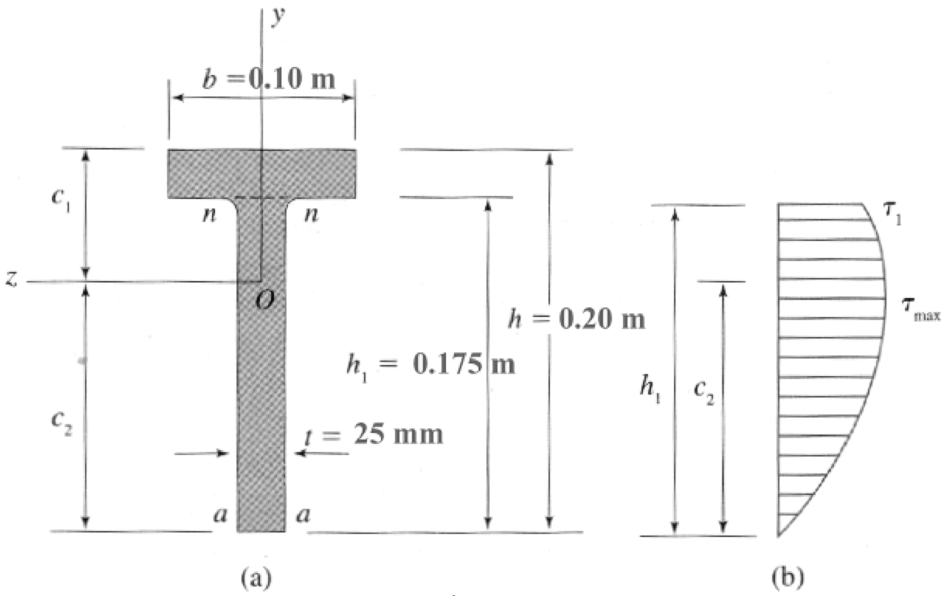
ดังนั้น

$$V_{web} = V - 2V_{flange} = 100 - 2(4.234) = 95.77\ \mathrm{kN}$$

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า ในกรณีนี้ แรงเฉือนที่ถูกต้านทานโดยเอว (web) ของหน้าตัดจะมีค่าถึง 95% ของแรงเฉือนที่กระทำต่อหน้าตัด Ans.

ตัวอย่างที่ 7-2

กำหนดให้หน้าตัดของคานรูปตัว T มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-2a ถูกกระทำโดยแรงเฉือนในแนวดิ่งลงขนาด 40 kN จงหาหน่วยแรงเฉือน τ_1 ที่เกิดขึ้นบนแนว $n-n$ และหน่วยแรงเฉือนสูงสุด $\tau_{\max}$



รูปที่ Ex 7-2

ตำแหน่งของแกนสะเทิน (neutral axis) ของหน้าตัดของคานจากแนว $a-a$

$$c_2 = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\left(\frac{h+h_1}{2}\right)b(h-h_1) + \left(\frac{h_1}{2}\right)th_1}{b(h-h_1)+th_1}$$

$$= \frac{8.516(10^{-4})}{6.875(10^{-3})} = 0.124\ \mathrm{m}$$

$$c_1 = h - c_2 = 0.20 - 0.124 = 0.076\ \mathrm{m}$$

moment of inertia ของหน้าตัดของคานรอบแกนสะเทิน (neutral axis)

$$I = \sum\left(I_i + A_i d_i^2\right) = 27.0(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

หน่วยแรงเฉือน τ_1 ที่เกิดขึ้นบนแนว $n-n$

$$t_{n-n} = 0.025\ \mathrm{m}$$

โดยใช้พื้นที่หน้าตัดของคานเหนือแนว $n-n$ ค่า first moment ของพื้นที่ของปีก (flange) ของหน้าตัดคานรอบแกน neutral axis จะมีค่าเท่ากับ

$$Q_{n-n} = b(h-h_1)\left(c_1 - \frac{h-h_1}{2}\right)$$

$$= 0.10(0.025)\left(0.076 - \frac{0.025}{2}\right) = 159(10^{-6})\ \mathrm{m}^3$$

นอกจากนั้นแล้ว เราอาจจะหา Q_{n-n} ได้โดยใช้พื้นที่หน้าตัดของคานใต้แนว $n-n$ โดยที่

$$Q_{n-n} = th_1\left(c_2 - \frac{h_1}{2}\right) = 159(10^{-6})\ \mathrm{m}^3$$

จากสมการ shear formula

$$\tau_1 = \frac{VQ_{n-n}}{It_{n-n}} = \frac{40(10^3)159(10^{-6})}{27.0(10^{-6})0.025} = 9.42 \text{ MPa}$$ Ans.

หน่วยแรงเฉือนสูงสุด $\tau_{\max}$

หน่วยแรงเฉือนสูงสุด $\tau_{\max}$ จะเกิดขึ้นที่แกนสะเทินของหน้าตัดของคาน ดังนั้น

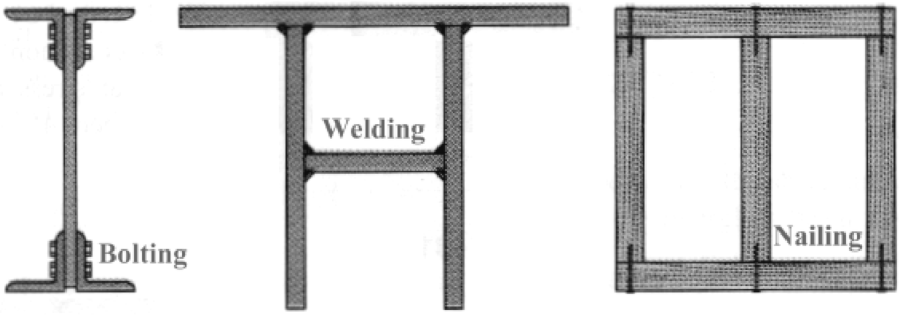
$$Q_{\max} = tc_2\left(\frac{c_2}{2}\right) = 0.025(0.124)\left(\frac{0.124}{2}\right) = 192(10^{-6}) \text{ m}^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{VQ_{\max}}{It} = \frac{40(10^3)192(10^{-6})}{27.0(10^{-6})0.025} = 11.28 \text{ MPa}$$ Ans.

ดังนั้น เราจะเขียนการกระจายของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบน web ของหน้าตัดของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-2b

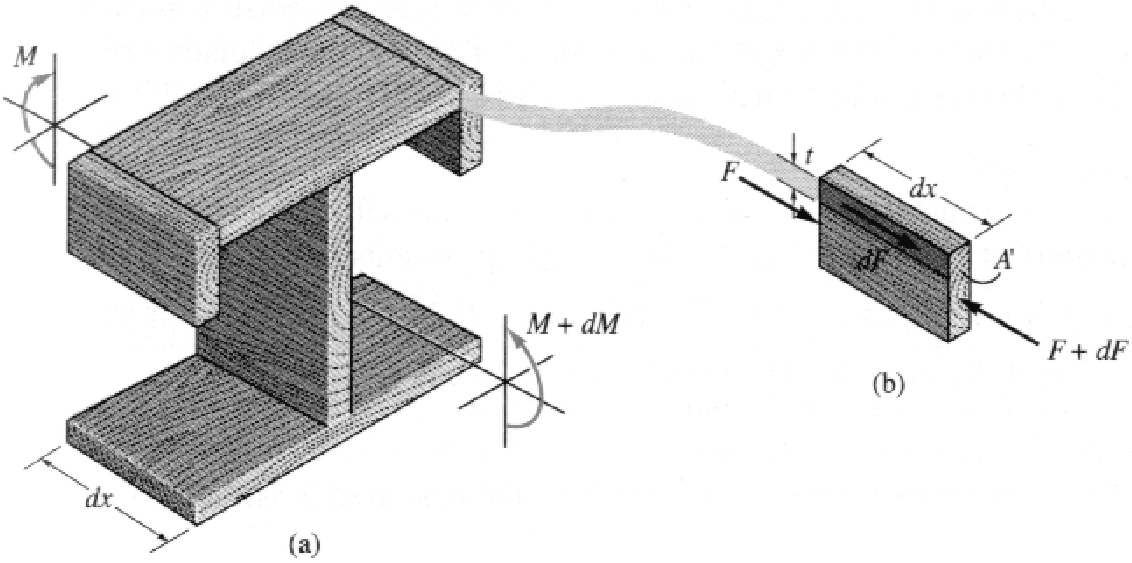
7.4 Shear flowในองค์อาคารประกอบ (Shear Flow in Built-Up Member)

Built-up member เป็นชิ้นส่วนของโครงสร้างหรือเครื่องจักรกลที่ได้จากการนำชิ้นส่วนประกอบต่างๆ มาประกอบเข้าด้วยกันโดยใช้สลักเกลียว (bolting) การเชื่อม (welding) และตะปู (nailing) เพื่อให้ได้มาซึ่งชิ้นส่วนของโครงสร้างหรือเครื่องจักรกลที่มีกำลังสูงสุดในการต้านทานต่อแรงกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-13



รูปที่ 7-13

ถ้าแรงกระทำภายนอกทำให้ built-up member เกิดการดัดขึ้นแล้ว ตัวยึด (fasteners) จะต้องป้องกันไม่ให้ชิ้นส่วนประกอบของ built-up member เกิดการเลื่อนสัมพัทธ์ขึ้น ดังนั้น ในการออกแบบ built-up member เราจะต้องทราบค่าของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนตัวยึดก่อน โดยที่แรงเฉือนนี้จะมีหน่วยเป็นแรงต่อความยาวของ built-up member ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า shear flow หรือ q



รูปที่ 7-14

รูปที่ 7-14a แสดงส่วนของ built-up member ที่มีความยาว dx ซึ่งถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัด M พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของจุดที่ชิ้นส่วนประกอบเชื่อมต่อติดกันที่ปีก (flange) ของ built-up member ดังที่แสดงในรูปที่ 7-14b จากรูป แรง F และแรง $F+dF$ เป็นแรงที่เกิดขึ้นจากหน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นจากโมเมนต์ดัด M และ $M+dM$ ตามลำดับ เพื่อที่จะทำให้เกิดสมดุลของแรงในแนวแกนของ built-up member ดังนั้น จากสมการความสมดุลของแรงในแนวนอน $\sum F_x = 0$ และสมการ $\sigma = (M/I)y$ เช่นเดียวกับในการหาสมการ shear formula (สมการที่ 7-1) เราจะได้ว่า

$$dF = \frac{dM}{I}\int_{A'} y\,dA$$

ในกรณีนี้ $Q = \int_{A'} y\,dA$ จะเป็น first moment ของพื้นที่ A' รอบแกนสะเทิน (neutral axis) ของหน้าตัดของ built-up member

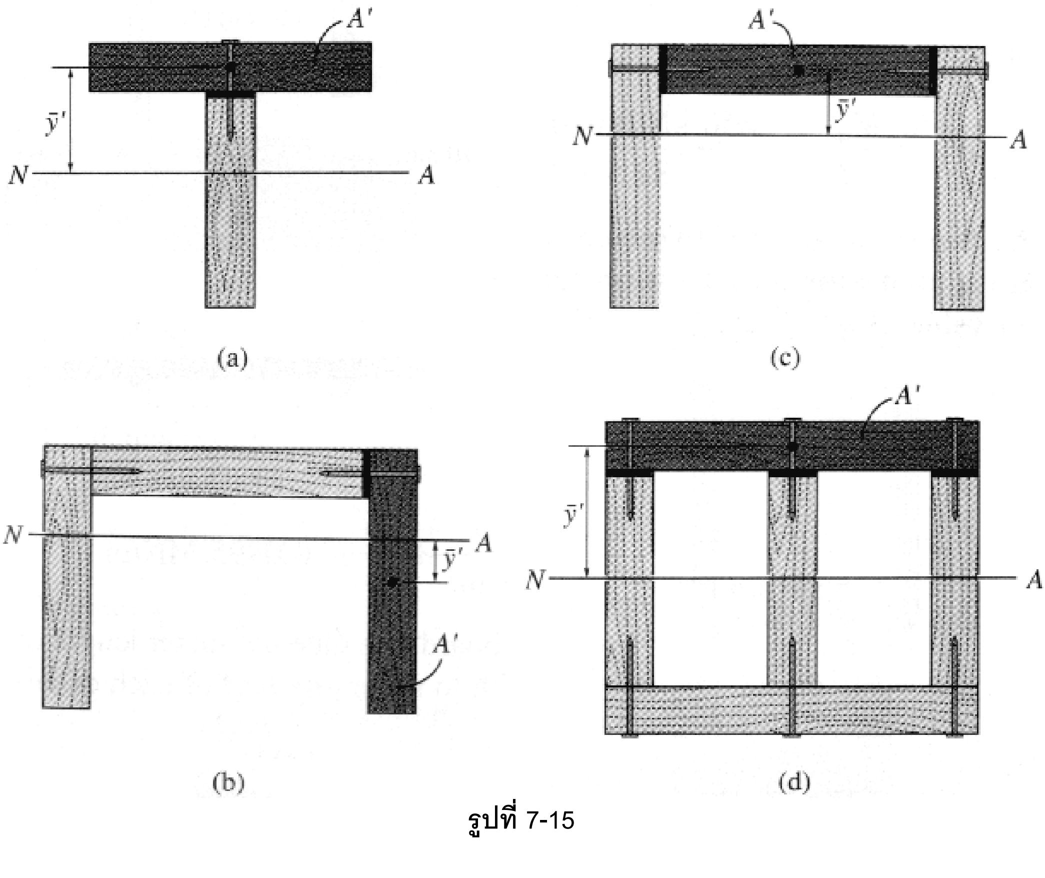
จากนิยามของ shear flow หรือ q เราจะได้ว่า

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{1}{I}\left(\frac{dM}{dx}\right)\int_{A'} y\,dA$$

เนื่องจาก $V = dM/dx$ ดังนั้น

$$q = \frac{VQ}{I} \tag{7-6}$$

การที่จะใช้สมการที่ 7-6 หาค่า shear flow ได้อย่างถูกต้องนั้น เราจะต้องหาจุดที่จะใช้ในการหาค่า Q ให้ถูกต้องก่อน พิจารณาหน้าตัดของคานที่ได้จากการนำแผ่นไม้มายึดติดกันเป็นคานประกอบ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-15 สมมุติให้แผ่นไม้ที่ทาสีทึบถูกยึดติดกับแผ่นไม้อื่นๆ โดยใช้ตะปูอย่างแน่นหนา จากรูปเราจะได้ว่า ตะปูในรูปที่ 7-15a และ 7-15b จะรับ shear flow เท่ากับ q ตะปูในรูปที่ 7-15c จะรับ shear flow เท่ากับ $q/2$ และตะปูในรูปที่ 7-15d จะรับ shear flow เท่ากับ $q/3$



รูปที่ 7-15

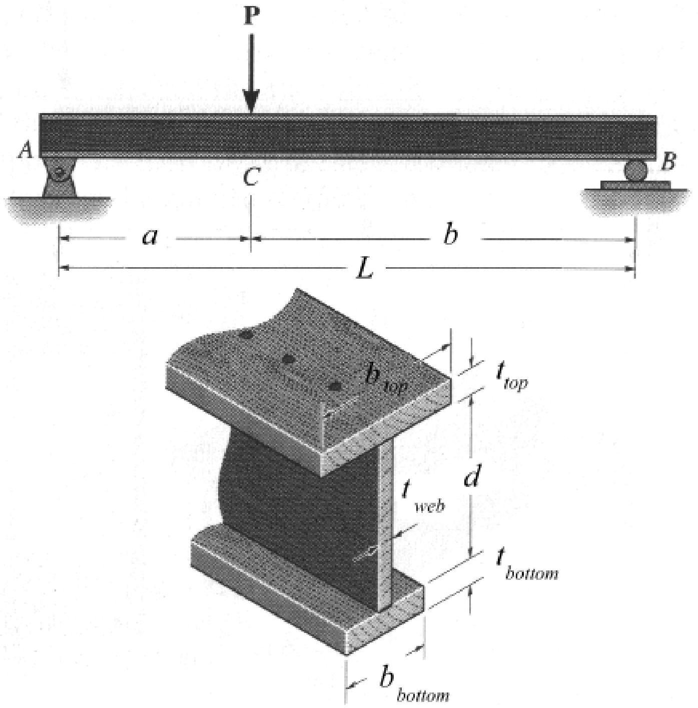
ตัวอย่างที่ 7-3

กำหนดให้คานไม้ประกอบขึ้นจากแผ่นไม้ 3 แผ่นโดยถูกยึดติดโดยตะปู มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-3 ซึ่งมี $L = 3\,\mathrm{m}$, $a = 1\,\mathrm{m}$, และ $b = 2\,\mathrm{m}$, คานนี้มีขนาดของหน้าตัดคือ $b_{top} = 0.25\,\mathrm{m}$, $b_{bottom} = 0.15\,\mathrm{m}$, $t_{top} = 0.0375\,\mathrm{m}$, $t_{bottom} = 0.0375\,\mathrm{m}$, $t_{web} = 0.025\,\mathrm{m}$, $d = 0.30\,\mathrm{m}$, $I = 467.36(10^{-6})\,\mathrm{m}^4$ นอกจากนั้น allowable shear stress ของไม้ $\tau_{allow} = 0.5\,\mathrm{MPa}$, allowable flexural stress ของไม้ $\sigma_{allow} = 2.0\,\mathrm{MPa}$, และตะปูแต่ละตัวรับแรงเฉือนได้ $= 1.8\,\mathrm{kN}$ จงหา

a.) ค่าสูงสุดของแรง P ที่ไม่ทำให้คานวิบัติโดยแรงเฉือน

b.) ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดเนื่องจากแรง $P_{\max}$

c.) ระยะระหว่างตะปูที่แผ่นไม้ด้านบนและด้านล่างของคาน



รูปที่ Ex 7-3

โดยใช้หลักการเขียนแผนภาพ free-body diagram และสมการความสมดุล เราจะได้ว่า แรงเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นในช่วง AC ของคานและจะหาได้จากสมการ

$$V_{\max} = \frac{2P}{3}$$

โมเมนต์ดัดสูงสุดจะเกิดขึ้นที่จุด C ของคานและจะหาได้จากสมการ

$$M_{\max} = \frac{2P}{3}$$

ค่าสูงสุดของแรง P ที่ไม่ทำให้คานวิบัติโดยแรงเฉือน

ระยะของแกนสะเทิน (neutral axis) จากผิวด้านบนของหน้าตัดของคาน

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{0.25(0.0375)^2/2 + 0.30(0.025)0.1875 + 0.15(0.0375)0.35625}{0.25(0.0375) + 0.30(0.025) + 0.15(0.0375)}$$

$$= 0.1594\,\mathrm{m}$$

หน่วยแรงเฉือนสูงสุด $\tau_{\max}$ จะเกิดขึ้นที่แกนสะเทินของหน้าตัดของคาน ดังนั้น

$$Q_{\max} = 0.025(0.0375)(0.14065) + 0.025(0.1219)^2/2$$
$$= 1.504(10^{-3})\ \mathrm{m}^3$$

เนื่องจากหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นจะมีค่าได้ไม่เกิน allowable shear stress ของไม้ จากสมการ shear formula

$$\tau_{allow} = \frac{V_{\max} Q_{\max}}{It}$$

$$P_{\max} = \frac{3}{2}\frac{\tau_{allow} It}{Q_{\max}} = \frac{3}{2}\frac{0.5(10^6)467.36(10^{-6})0.025}{1.504(10^{-3})} = 5.826\ \mathrm{kN}$$

ดังนั้น แรง P ที่กระทำต่อคานจะต้องมีค่าได้ไม่เกิน $5.826\ \mathrm{kN}$ Ans.

ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดเนื่องจากแรง $P_{\max}$

โมเมนต์ดัดสูงสุดจะมีค่าเท่ากับ

$$M_{\max} = \frac{2(5.826)}{3} = 3.884\ \mathrm{kN\text{-}m}$$

จาก flexural formula

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I} = \frac{3.884(10^3)(0.375 - 0.1594)}{467.36(10^{-6})} = 1.792\ \mathrm{MPa} < \sigma_{allow}$$

เนื่องจาก $M_{\max} = 3884\ \mathrm{kN\text{-}m}$ ทำให้เกิด $\sigma_{\max} < \sigma_{allow}$ ดังนั้น $M_{\max}$ ที่ได้จึงถูกต้อง Ans.

ระยะห่างระหว่างตะปูที่แผ่นไม้ด้านบนและด้านล่างของคาน

แรงเฉือนสูงสุดเนื่องจากแรง $P_{\max}$ มีค่าเท่ากับ

$$V_{\max} = \frac{2(5.826)}{3} = 3.884\ \mathrm{kN}$$

เนื่องจากปีก (flange) ด้านบนและด้านล่างของคานมีความกว้างไม่เท่ากัน ดังนั้น ระยะห่างระหว่างตะปูของแผ่นไม้ด้านบนและด้านล่างของคานจะมีค่าไม่เท่ากัน

จากสมการของ shear flow ค่า shear flow ที่เกิดขึ้นที่จุดต่อระหว่างปีกด้านบนและเอว (web) จะมีค่าเท่ากับ

$$q_{top} = \frac{VQ_{top}}{I} = \frac{3884[(0.25)0.0375(0.14065)]}{487.36(10^{-6})} = 10.96\ \mathrm{kN/m}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างตะปูที่แผ่นไม้ด้านบนจะมีค่าเท่ากับ

$$s_{top} = \frac{V_{allow}}{q_{top}} = \frac{1.8}{10.96}(1000) = 164.3\ \mathrm{mm}$$ Ans.

ค่า shear flow ที่เกิดขึ้นที่จุดต่อระหว่างปีกด้านล่างและเอว (web) จะมีค่าเท่ากับ

$$q_{bottom} = \frac{VQ_{bottom}}{I} = \frac{3884[(0.15)0.0375(0.19685)]}{467.36(10^{-6})} = 9.20\ \mathrm{kN/m}$$

ดังนั้น ระยะห่างระหว่างตะปูที่แผ่นไม้ด้านบนจะมีค่าเท่ากับ

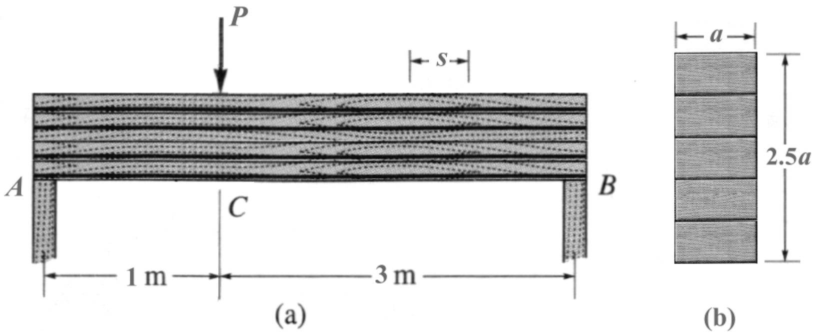
$$s_{bottom} = \frac{V_{allow}}{q_{bottom}} = \frac{1.8}{9.20}(1000) = 195.7\ \mathrm{mm}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 7-4

คานไม้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-4a มีหน้าตัดที่ได้จากการนำแผ่นไม้ขนาดหน้าตัด $a \times a/2$ จำนวน 5 แผ่นมายึดติดกันโดยใช้สลักเกลียว ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-4b กำหนดให้ $P = 20\,\mathrm{kN}$ หน่วยแรงดัดที่ยอมให้ของไม้ = $15\,\mathrm{MPa}$ หน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ของไม้ = $2.0\,\mathrm{MPa}$ และสลักเกลียวมีกำลังรับแรงเฉือนที่ยอมให้ = $10\,\mathrm{kN}$ จงหา

a.) ความกว้าง a ของแผ่นไม้

b.) ระยะห่างของสลักเกลียว s ที่สั้นที่สุดที่จะต้องใช้



รูปที่ Ex 7-4

หาความกว้าง a ของแผ่นไม้

ความกว้าง a ของแผ่นไม้จะต้องมีค่าพอเพียงที่จะต้านทานต่อโมเมนต์ดัดสูงสุดและแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในคาน จากการเขียนแผนภาพ shear diagram และ bending moment diagram เราจะได้ว่า

แรงเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นที่จุดรองรับ A ของคานและมีค่าเท่ากับ $15\,\mathrm{kN}$

โมเมนต์ดัดสูงสุดจะเกิดขึ้นที่จุด C ของคานและมีค่าเท่ากับ $15\,\mathrm{kN\text{-}m}$

moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคานประกอบ

$$I = \frac{a(2.5a)^3}{12} = 1.3021a^4$$

จากสมการ flexural formula $\sigma = Mc/I$ และหน่วยแรงดัดสูงสุดจะเกิดที่ผิวด้านบนและผิวด้านล่างของหน้าตัดคาน ซึ่งจะมีค่าได้ไม่เกินค่าหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ของไม้ ดังนั้น

$$15(10^6) = \frac{15000(2.5a/2)}{1.3021a^4}$$

$$a = 0.099\,\mathrm{m}$$

ดังนั้น เราควรใช้ความกว้างของหน้าตัดของคาน $a = 0.10\,\mathrm{m}$ <u>Ans.</u>

หน่วยแรงเฉือนสูงสุดจะเกิดที่กึ่งกลางความลึกของหน้าตัดของคาน ซึ่งจะมีค่าได้ไม่เกินค่าหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ของไม้ และเนื่องจากคานมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จากสมการ shear formula $\tau = 1.5V/A$ ดังนั้น

$$\tau_{max} = 1.5\frac{15000}{0.10(2.5)(0.10)} = 0.90\,\mathrm{MPa} < \tau_{allow} = 2\,\mathrm{MPa} \qquad \text{O.K.}$$

หาระยะห่างของสลักเกลียว s ที่สั้นที่สุด

ระยะห่างของสลักเกลียว s ที่สั้นที่สุดในคานประกอบจะต้องคำนวณจากค่าแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานและที่ตำแหน่งของรอยเชื่อมต่อระหว่างแผ่นไม้ที่ 2 และแผ่นไม้ที่ 3 ที่นับจากผิวด้านบนหรือผิวด้านล่างของหน้าตัดของคาน

จากสมการของ shear flow

$$q = \frac{VQ}{I}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} Q &= A'\overline{y}' \\ &= [a(a/2 + a/2)][(a/2 + a/4)] \\ &= [0.10(0.10)][0.050 + 0.025)] = 750(10^{-6})\ \mathrm{m}^4 \\ I &= \frac{0.10[2.5(0.10)]^3}{12} = 130.21(10^{-6})\ \mathrm{m}^4 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$q = \frac{15000(750)10^{-6}}{130.21(10^{-6})} = 86.4\ \mathrm{kN/m}$$

ระยะห่างของสลักเกลียวที่สั้นที่สุดในคานประกอบจะมีค่าเท่ากับ

$$s_{\min} = \frac{10}{86.4} = 0.116\ \mathrm{m}$$

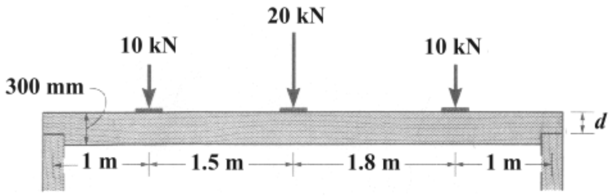
ดังนั้น ระยะห่างของสลักเกลียวควรมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $0.116\ \mathrm{m}$ <u>Ans.</u>

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

7-1 จงหาเขียนแผนภาพการกระจายของ transverse shear ที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดที่ถูกกระทำโดยแรงเฉือนสูงสุดของคานใน Prob. 6-7

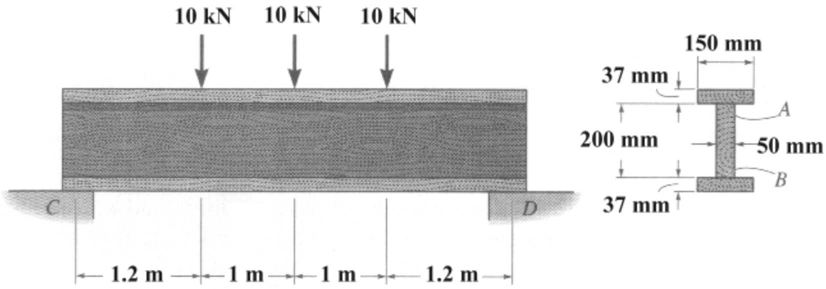
7-2 จงหาเขียนแผนภาพการกระจายของ transverse shear ที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดที่ถูกกระทำโดยแรงเฉือนสูงสุดของคานใน Prob. 6-8 จากนั้น จงหาแรงเฉือนที่ถูกต้านทานเอวของคาน

7-3 กำหนดให้คานไม้ถูกบากที่ปลายคานและถูกกระทำโดยแรงต่างๆ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-3 จงหาค่าความลึก d ที่น้อยที่สุดที่ยอมให้ เมื่อหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ (allowable shear stress) ของไม้ $\tau_{allow} = 0.310\,\text{MPa}$ และคานมีความกว้าง $200\,\text{mm}$



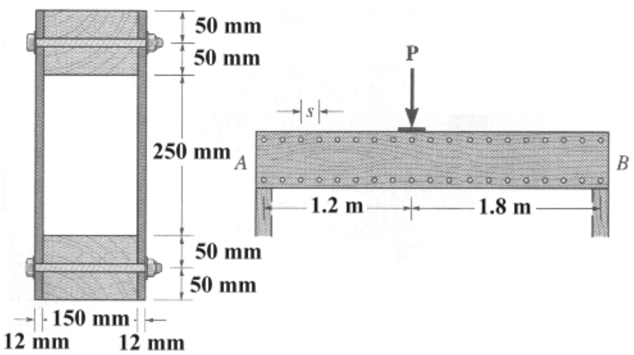
รูปที่ Prob. 7-3

7-4 กำหนดให้คานไม้ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-4 ถูกประกอบขึ้นโดยนำแผ่นไม้ 3 แผ่นมาติดกาวเข้าด้วยกันที่จุด A และจุด B จงหาค่าของหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในกาว



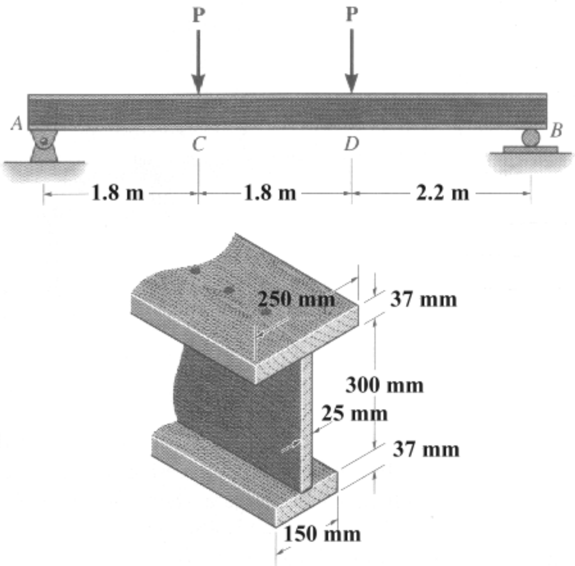
รูปที่ Prob. 7-4

7-5 กำหนดให้หน้าตัดของคานที่ได้จากการนำแผ่นเหล็ก 3 แผ่นมาเชื่อมเข้าด้วยกันมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-5 ถ้ารอยเชื่อมมี $\tau_{allow} = 90\,\text{MPa}$ จงหาค่าแรงเฉือน V สูงสุดที่ยอมให้กระทำต่อหน้าตัดคาน



รูปที่ Prob. 7-5

7-6 กำหนดให้คานมีหน้าตัดที่ได้จากการนำไม้ 3 แผ่นมายึดกันโดยใช้ตะปู ถูกกระทำโดยแรง $P = 20\,\text{kN}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-6 จงหาระยะห่างระหว่างตะปู s ในช่วง AC และ CD ของคาน เมื่อตะปูแต่ละตัวสามารถรองรับแรงเฉือนได้ $2\,\text{kN}$



รูปที่ Prob. 7-6

7-7 จงหาค่าแรง P สูงสุดที่คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-6 สามารถรองรับได้ เมื่อหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ (allowable shear stress) ของไม้ $\tau_{allow} = 2.75\ \mathrm{MPa}$ และจงหาระยะห่างระหว่างตะปู s ที่ต้องใช้ในการยึดปีก (flange) บนและปีกล่างของคาน เมื่อตะปูแต่ละตัวสามารถรองรับแรงเฉือนได้ $2\ \mathrm{kN}$

บทที่ 8
น้ำหนักบรรทุกกระทำร่วม (Combined Loadings)

เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

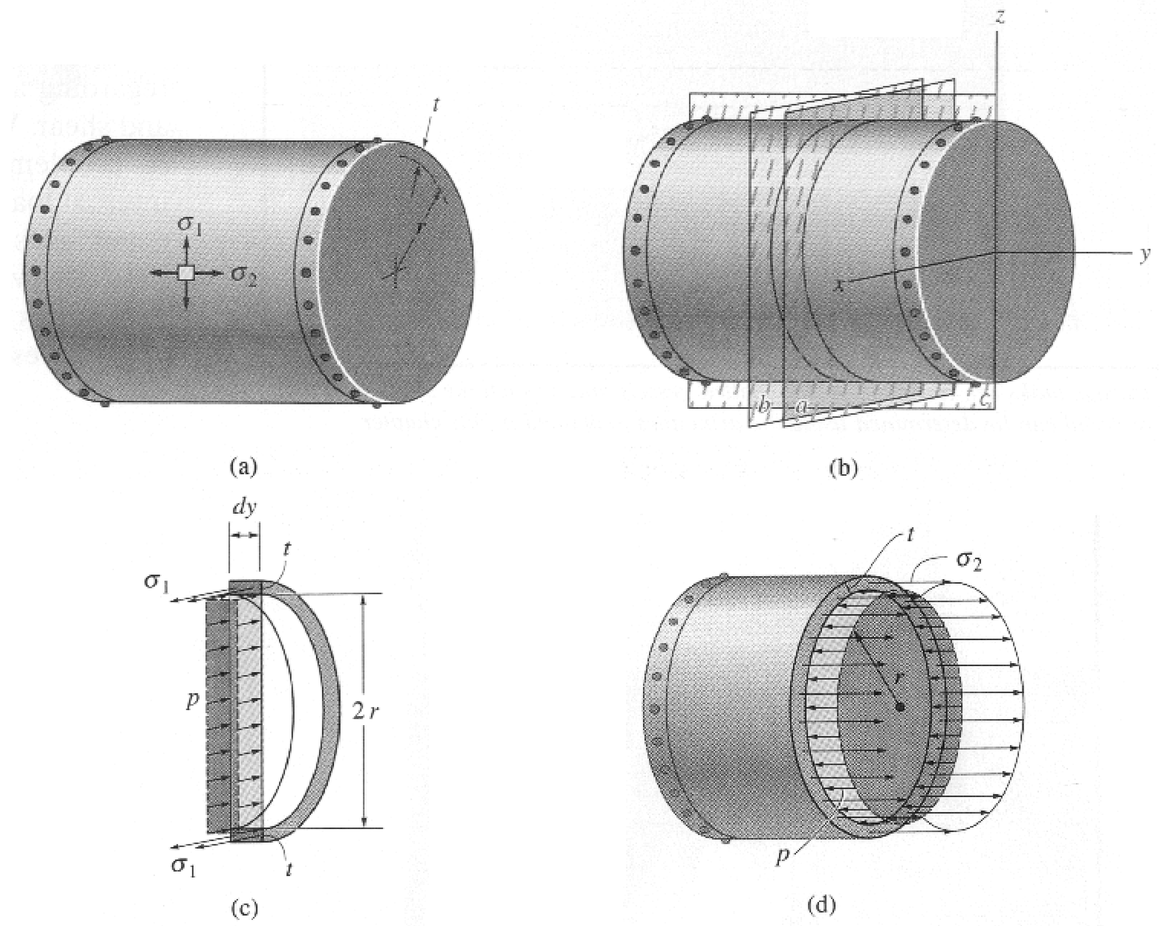
8.1 ท่อรับความดันผิวบาง Thin-Walled Pressure Vessels

Pressure vessel เป็นโครงสร้างที่ใช้ในการบรรจุของเหลว (fluid) หรือของไหล (gas) ภายใต้ความดัน เช่น ถังใส่ก๊าซธรรมชาติและท่อส่งน้ำ เป็นต้น โดยทั่วไปแล้ว ความดันภายใน pressure vessel p จะมีค่ามากกว่าแรงดันของบรรยากาศภายนอกมาก

ภายใต้ความดันดังกล่าว วัสดุที่ใช้ทำ pressure vessel จะถูกกระทำโดยแรงจากทุกทิศทาง ถ้า pressure vessel มีผนังที่บางหรือเมื่ออัตราส่วนของรัศมีของผนังต่อความหนาของผนังมีค่ามากกว่า 10 ($r/t \geq 10$) แล้ว การกระจายของหน่วยแรงตามความหนาของผนังจะมีค่าที่เปลี่ยนแปลงน้อยมาก ดังนั้น เราจะสมมุติให้หน่วยแรงดังกล่าวมีค่าคงที่ตลอดความหนาของผนัง

Cylindrical Vessels

พิจารณา pressure vessel รูปทรงกระบอก ที่มีผนังหนา t และมีรัศมีภายใน r ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1a Pressure vessel นี้ถูกกระทำโดยความดันภายใน p จากของเหลวหรือของไหลที่สมมุติให้มีน้ำหนักที่น้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดของแรงดันที่เกิดจากความดันภายใน



รูปที่ 8-1

เนื่องจากจากความดันมีการกระจายที่สม่ำเสมอ ดังนั้น การกระจายของหน่วยแรงบน differential element ที่อยู่ห่างจากปลายของ pressure vessel รูปทรงกระบอกเป็นระยะทางพอสมควรจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 8-1a โดยที่ค่า

ของหน่วยแรงตั้งฉาก σ_1 จะมีทิศทางสัมผัส (tangent) กับเส้นรอบวงของ pressure vessel ซึ่งจะถูกเรียกว่า หน่วยแรงในแนวเส้นวงรอบ (circumferential stress หรือ hoop stress) และหน่วยแรงตั้งฉาก σ_2 ในแนวแกนของ pressure vessel จะถูกเรียกว่า หน่วยแรงในแนวแกน (longitudinal stress) เราควรที่จะทราบด้วยว่า ภายใต้แรงดันภายใน หน่วยแรงตั้งฉากทั้งสองนี้จะเป็นหน่วยแรงดึงเสมอ

Hoop stress

พิจารณา pressure vessel ที่ถูกตัดโดยระนาบ a, b, และ c ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1b เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนของ pressure vessel ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1c จากรูป เราแสดงเพียงแค่แรงที่อยู่ในแนวแกน x เท่านั้น โดยที่ σ_1 เป็น hoop stress ที่กระทำอยู่บนผนังของ pressure vessel และมีค่าคงที่ตลอดความหนาของผนัง และ p เป็นความดันภายในที่กระทำอยู่บนของเหลวหรือของไหลที่อยู่ใน pressure vessel

จากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกน x เราจะได้ว่า

$$2[\sigma_1 (t\,dy)] - p(2\,r\,dy) = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \tag{8-1}$$

Longitudinal stress

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนของ pressure vessel ซึ่งได้มาจากการตัดของระนาบ b บน cylindrical pressure vessel ดังที่แสดงในรูปที่ 8-1d จากรูป เราแสดงเพียงแค่แรงที่อยู่ในแนวแกน y เท่านั้น โดยที่ σ_2 เป็น longitudinal stress ที่กระทำอยู่บนผนังของ pressure vessel และมีค่าคงที่ตลอดความหนาของผนัง และ p เป็นความดันภายในที่กระทำอยู่บนของเหลวหรือของไหลที่อยู่ใน pressure vessel

จากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกน y เราจะได้ว่า

$$\sigma_2(2\pi\,r\,t) - p(\pi\,r^2) = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{8-2}$$

Spherical Vessels

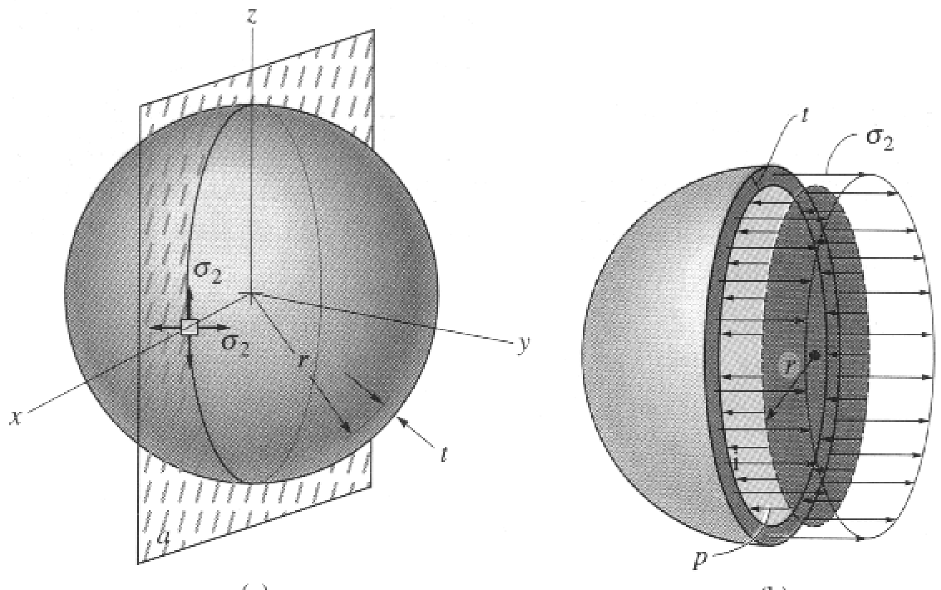
พิจารณา pressure vessel รูปทรงกลม ซึ่งบรรจุของเหลวหรือของไหลภายใต้ความดัน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-2a ในลักษณะที่คล้ายกับในกรณีของ pressure vessel รูปทรงกระบอก เราจะตัด spherical pressure vessel นี้โดยใช้ระนาบ a ซึ่งจะแบ่ง pressure vessel ดังกล่าวออกเป็นสองส่วนที่เท่ากัน และเราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนของ pressure vessel ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-2b โดยที่ σ_2 เป็นหน่วยแรงที่กระทำอยู่บนผนังของ pressure vessel และมีค่าคงที่ตลอดความหนาของผนัง และ p เป็นความดันภายในที่กระทำอยู่บนของเหลวหรือของไหลที่อยู่ใน pressure vessel

จากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกน y เราจะได้ว่า

$$\sigma_2(2\pi\,r\,t) - p(\pi\,r^2) = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{8-3}$$

โดยการตัด pressure vessel ในทิศทางอื่นๆ ในลักษณะเช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว เราจะได้ว่า หน่วยแรง σ_2 นี้จะมีค่าเท่ากันในทุกทิศทางของการตัด ดังนั้น element เล็กๆ ที่อยู่บน pressure vessel รูปทรงกลมจะถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-2a

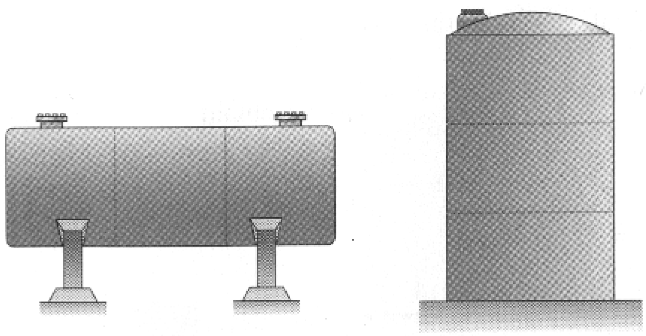


(a) (b)

รูปที่ 8-2

จากการวิเคราะห์ที่กล่าวมาแล้ว เราควรที่จะทราบด้วยว่า

1. สภาวะของหน่วยแรงใน pressure vessel ทรงกระบอกและทรงกลมจะอยู่ในรูปของ biaxial stress ซึ่งมีหน่วยแรงตั้งฉากกระทำอยู่ในสองทิศทางที่ตั้งฉากกันบน differentail element ของ pressure vessel แต่ในความเป็นจริงแล้ว วัสดุที่ใช้ทำ pressure vessel จะถูกกระทำโดยหน่วยแรงในแนวรัศมี (radial stress) σ_3 ด้วย ซึ่งหน่วยแรงนี้จะมีค่าเท่ากับความดันภายใน p ที่กระทำอยู่ที่ผนังด้านในของ pressure vessel และจะมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ผิวของผนังด้านนอก แต่เนื่องจากว่า pressure vessel ที่เราพิจารณาอยู่มีผนังที่บาง เราจะไม่จำเป็นที่จะต้องพิจารณา σ_3 เช่นเมื่อ $r/t = 10$ แล้ว σ_3 จะมีค่าน้อยกว่า σ_2 ถึง 5 เท่าและจะมีค่าน้อยกว่า σ_1 ถึง 10 เท่า (จากสมการที่ 8-1 และ 8-2)
2. สมการต่างๆ ที่หามาได้จะใช้ได้กับ pressure vessel ที่มีอัตราส่วนของรัศมีของผนังต่อความหนาของผนัง มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 10 ($r/t \geq 10$)
3. สมการต่างๆ ที่ได้มานี้จะไม่สามารถนำไปใช้ได้กับ pressure vessel ที่ถูกกระทำโดยความดันภายนอก เพราะในกรณีนี้ ความดันจะทำให้ผนังของ pressure vessel ขาดเสถียรภาพได้
4. สมการต่างๆ ที่หามาได้จะไม่สามารถใช้ได้ในบริเวณที่มี stress concentration เกิดขึ้น เช่น ที่จุดรองรับและที่ช่องเปิดต่างๆ ของ pressure vessel รูปทรงกระบอก ดังที่แสดงในรูปที่ 8-3 เป็นต้น

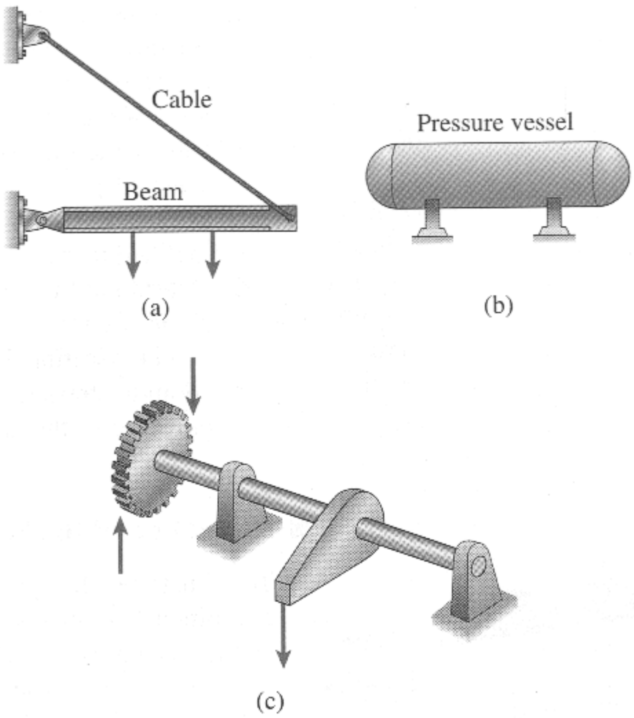


(a) (b)

รูปที่ 8-3

8.2 สภาวะหน่วยแรงที่เกิดจากน้ำหนักบรรทุกกระทำร่วม (State of Stress Caused by Combined Loadings)

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อโครงสร้างหรือชิ้นส่วนของโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงกระทำภายนอกแล้ว โครงสร้างหรือชิ้นส่วนของโครงสร้างดังกล่าวจะมีแรงภายใน เช่น แรงในแนวแกน (axial force) แรงเฉือน (shear force) โมเมนต์ดัด (bending moment) และแรงบิด (torque) เป็นต้น เกิดขึ้นเพื่อต้านทานต่อแรงกระทำภายนอก ยกตัวอย่างเช่น เมื่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-4a ถูกรองรับโดยหมุดและเคเบิล (cable) และถูกกระทำโดยแรงภายนอกแล้ว คานดังกล่าวจะมีแรงในแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นภายในคาน เมื่อ pressure vessel ดังที่แสดงในรูปที่ 8-4b ถูกกระทำโดยแรงภายในและภายนอกแล้ว pressure vessel ดังกล่าวจะมีแรงในแนวแกน แรงในแนวเส้นวงรอบ แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นภายใน pressure vessel และเมื่อเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ 8-4c ถูกกระทำโดยแรงภายนอกแล้ว เพลาดังกล่าวจะมีแรงบิด แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นภายในเพลา เป็นต้น



รูปที่ 8-4

แรงภายในเหล่านี้จะทำให้เกิดสภาวะของหน่วยแรงที่ซับซ้อนบนหน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงสร้าง ในกรณีที่ความสัมพันธ์ระหว่างแรง หน่วยแรง และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนของโครงสร้างแปรผันโดยตรงต่อกัน และเมื่อชิ้นส่วนของโครงสร้างดังกล่าวมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่น้อยมากแล้ว เราจะใช้หลักการ principle of superposition ช่วยในการวิเคราะห์และออกแบบชิ้นส่วนของโครงสร้างดังกล่าวได้

ขั้นตอนในการวิเคราะห์

1. Internal loadings

- ตัดโครงสร้างหรือชิ้นส่วนของโครงสร้างที่ตำแหน่งที่ต้องการหาค่าหน่วยแรงให้ตั้งฉากกับแนวแกนของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนของโครงสร้าง
- ใช้แผนภาพ free-body diagram และสมการความสมดุลในการหาแรงลัพธ์ภายใน เช่น แรงในแนวแกน แรงเฉือน โมเมนต์ดัด และแรงบิด เป็นต้น โดยให้แรงเหล่านี้กระทำผ่านจุด centroid ของหน้าตัด และให้โมเมนต์ดัดกระทำรอบแกนตั้งฉากที่ผ่านจุด centroid ของหน้าตัด

2. Stress components

- คำนวณหาค่าของหน่วยแรงต่างๆ ที่เกิดขึ้นจากแรงและโมเมนต์ลัพธ์ โดยที่

- แรงในแนวแกน

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

- แรงเฉือน

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

- โมเมนต์ดัด

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

- แรงบิด

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

- Thin-walled pressure vessels

 pressure vessel รูปทรงกระบอก

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

 pressure vessels รูปทรงกลม

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

- เขียนแผนภาพแสดงการกระจายของของหน่วยแรงบนหน้าตัดของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนของโครงสร้าง

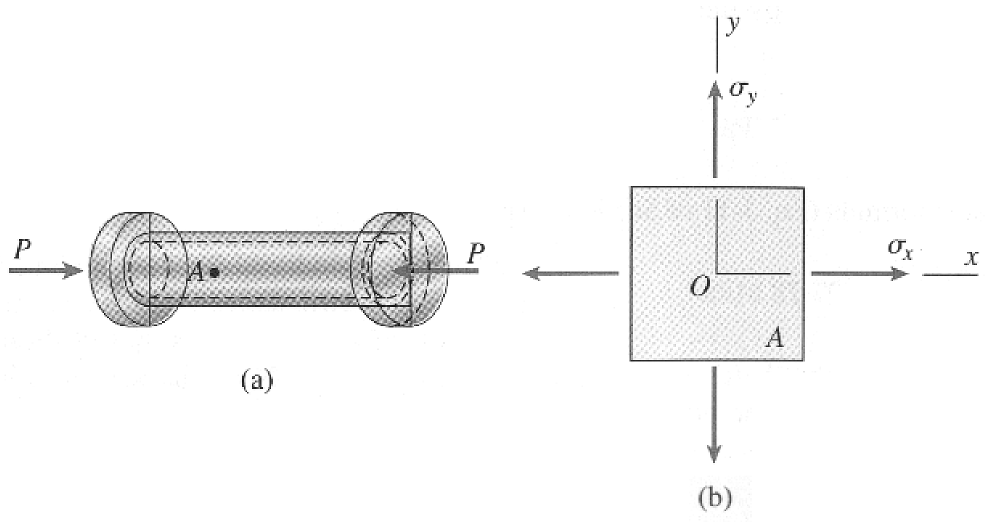
3. Superposition

- ใช้หลักการ principle of superposition ในการหาหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนลัพธ์ที่จุดใดๆ บนหน้าตัดของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนของโครงสร้าง

ตัวอย่างที่ 8-1

ท่อทรงกระบอกผนังบาง (thin-walled cylinder) ดังที่แสดงในรูปที่ EX 8-1a มีรัศมีภายใน $r_i = 50\ \mathrm{mm}$ และมีความหนา $t = 3.6\ \mathrm{mm}$ ถูกกระทำโดยแรงดันภายใน $p = 10\ \mathrm{MPa}$ ร่วมกับแรงในแนวแกน $P = 50\ \mathrm{kN}$

จงหาสภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในท่อทรงกระบอกผนังบางที่จุด A



รูปที่ EX 8-1

หน่วยแรงในแนวแกนของ thin-walled cylinder จะมีค่าเท่ากับหน่วยแรงในแนวแกนเนื่องจากความดันภายในและหน่วยแรงในแนวแกนเนื่องจากแรงกดอัด

$$\sigma_x = \frac{pr}{2t} - \frac{P}{A} = \frac{pr}{2t} - \frac{P}{2\pi rt}$$

$$= \frac{10(10^6)(0.050)}{2(0.0036)} - \frac{50(10^3)}{2\pi(0.050)0.0036} = 25.2\ \mathrm{MPa}$$

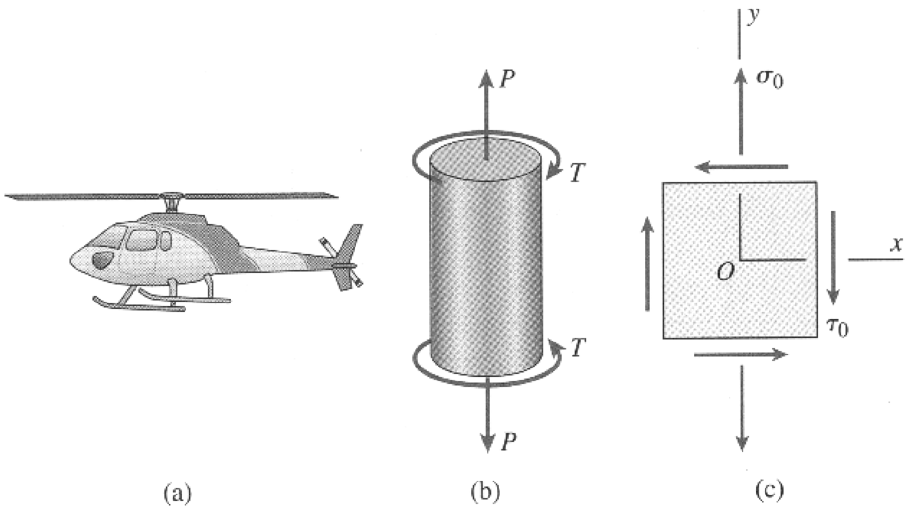
หน่วยแรงในแนวเส้นรอบวง (hoop stress) จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_y = \frac{pr}{t} = \frac{10(10^6)0.050}{0.0036} = 138.9\ \mathrm{MPa}$$

ดังนั้น เราจะเขียนสภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในท่อทรงกระบอกผนังบางที่จุด A ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 8-1b <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 8-2

Rotor shaft ของเฮลิคอปเตอร์ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 8-2a จะถูกกระทำโดยแรงดึงในแนวแกน $P = 125\,\text{kN}$ และแรงบิด $T = 2.4\,\text{kN - m}$ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 8-2b กำหนดให้เพลาดังกล่าวมีรัศมี $c = 25\,\text{mm}$ จงหาหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในเพลา



รูปที่ EX 8-2

หน่วยแรงดึงในแนวแกนของเพลาเนื่องจากแรง P

$$\sigma_o = \frac{P}{A} = \frac{125(10^3)}{\pi (0.025)^2} = 63.66\,\text{MPa}$$

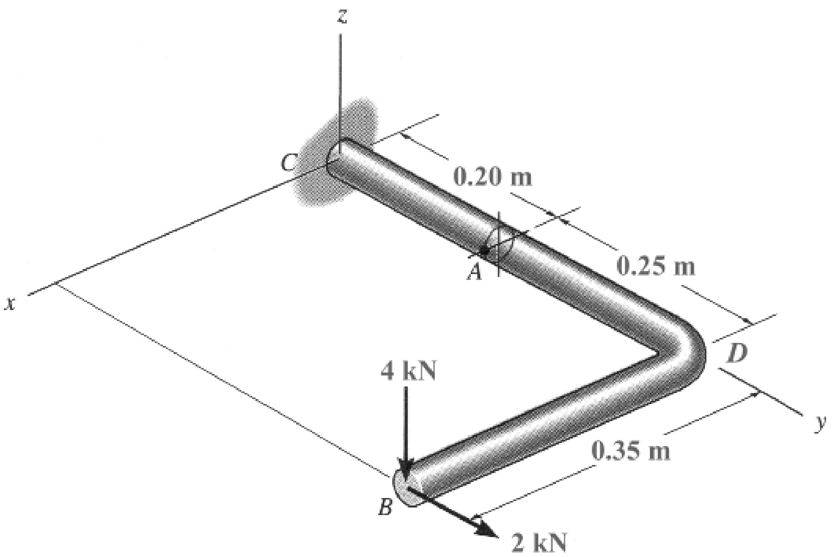
หน่วยแรงบิด ซึ่งจะมีทิศทางไปทางเดียวกับแรงบิด T จะหาได้จาก torsional formula

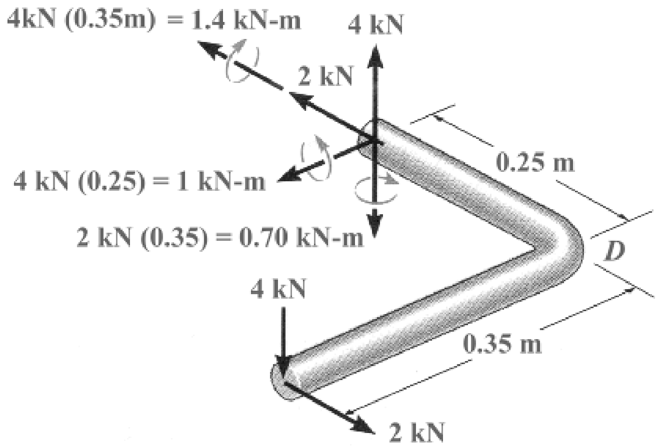
$$\tau_o = \frac{Tc}{J} = \frac{2400(0.025)}{\pi (0.025)^4 / 2} = 97.78\,\text{MPa}$$

ดังนั้น เราจะเขียนสภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในเพลาได้ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 8-2c <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 8-3

แท่งเหล็กกลมตันถูกกระทำโดยแรงต่างๆ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-3a มีรัศมี $25\ \mathrm{mm}$ จงหาสภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่จุด A





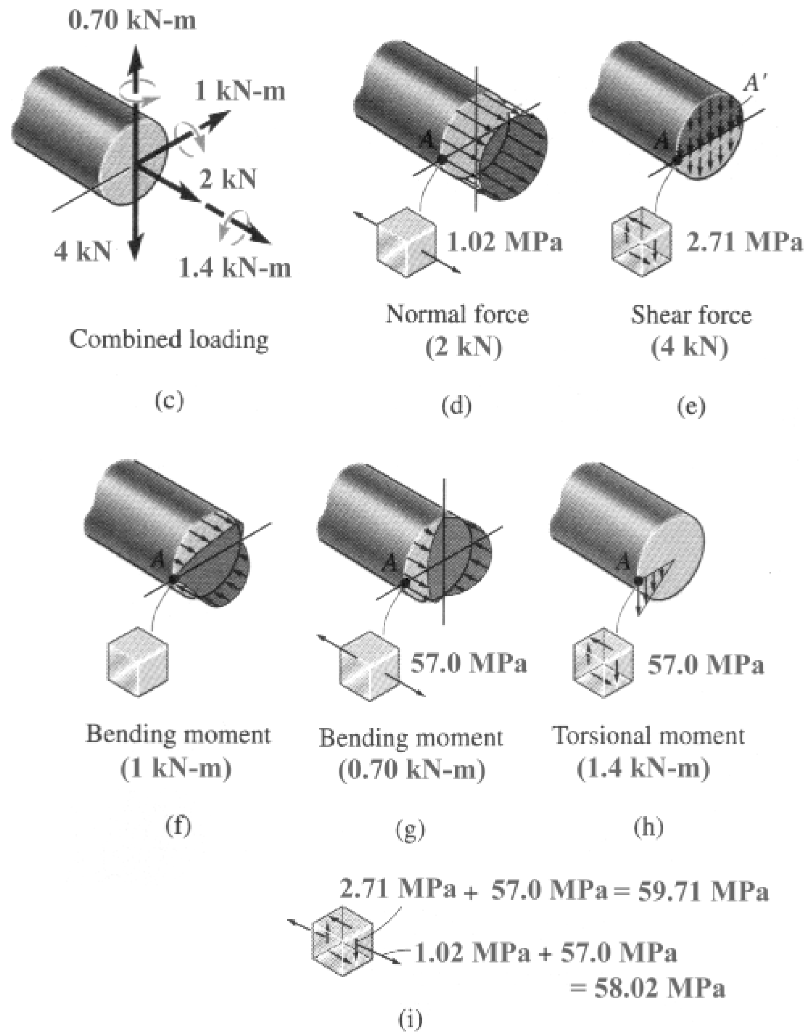
รูปที่ Ex 8-3

แรงภายในแท่งเหล็กกลมตันที่หน้าตัดที่ผ่านจุด A จะหาได้โดยการตัดที่หน้าตัดดังกล่าว จากนั้น ใช้สมการความสมดุลของแรงและ moment ในแนวแกน x , y , และ z ซึ่งจะได้แรงภายในแท่งเหล็กกลมตันที่หน้าตัดดังกล่าว ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-3b

จากกฎข้อที่ 3 ของ Newtow เราจะเขียนแรงภายในที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดที่ผ่านจุด A ของอีกส่วนหนึ่งของแท่งเหล็กกลมตันได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-3c

แรงในแนวแกน $2\ \mathrm{kN}$ จะทำให้มีการกระจายของหน่วยแรงตั้งฉาก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-3d และหน่วยแรงตั้งฉากที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_A = \frac{P}{A} = \frac{2000}{\pi (0.025)^2} = 1.02\ \mathrm{MPa}$$



แรงเฉือน $4\,\mathrm{kN}$ จะทำให้มีการกระจายของหน่วยแรงเฉือน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-3e และหน่วยแรงเฉือนที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It}$$

โดยที่

$$Q_A = \overline{y}'A' = \left[\frac{4(0.025)}{3\pi}\right]\left[\frac{1}{2}\pi(0.025)^2\right] = 10.417(10^{-6})\,\mathrm{m}^3$$

$$I = \frac{\pi(0.025)^4}{4} = 0.307(10^{-6})\,\mathrm{m}^4$$

ดังนั้น

$$\tau_A = \frac{4000(10.417)10^{-6}}{0.307(10^{-6})2(0.025)} = 2.71\,\mathrm{MPa}$$

โมเมนต์ดัด $1\,\mathrm{kN\text{-}m}$ จะทำให้เกิดการกระจายของหน่วยแรงดัด ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-3f และหน่วยแรงดัดที่จุด A จะมีค่าเท่ากับศูนย์

โมเมนต์ดัด $0.7\,\mathrm{kN\text{-}m}$ จะทำให้เกิดการกระจายของหน่วยแรงดัด ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-3g และหน่วยแรงดัดที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_A = \frac{Mc}{I} = \frac{700(0.025)}{0.307(10^{-6})} = 57.0\,\mathrm{MPa}$$

แรงบิด $1.4\,\mathrm{kN\text{-}m}$ จะทำให้มีการกระจายของหน่วยแรงเฉือน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 8-3h และหน่วยแรงเฉือนที่จุด A จะมีค่าเท่ากับ

$$\tau_A = \frac{Tc}{J}$$

โดยที่

$$J = \frac{\pi (0.025)^4}{2} = 0.614(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

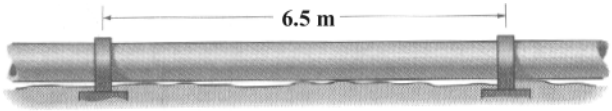
$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{1400(0.025)}{0.614(10^{-6})} = 57.0\ \mathrm{MPa}$$

ดังนั้น จาก principle of superposition เราจะเขียนสภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่จุด A ในแท่งเหล็กกลมตันได้ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 8-3i <u>Ans.</u>

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

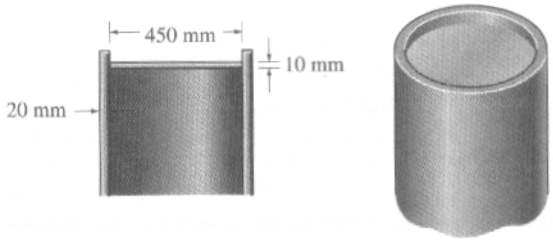
8-1 ถังเก็บก๊าซทรงกลมมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน $r = 1.5\ \mathrm{m}$ ถูกกระทำโดยความดันภายใน $p = 300\ \mathrm{kPa}$ จงหาความหนาของถัง ถ้ากำหนดให้หน่วยแรงตั้งฉากสูงสุดมีค่าไม่เกิน $12\ \mathrm{MPa}$

8-2 ท่อส่งก๊าซเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 8-2 ถูกรองรับทุกๆ $6\ \mathrm{m}$ โดยตอม่อคอนกรีตอย่างยึดแน่น ถ้าก๊าซในท่อมีความดัน $4\ \mathrm{MPa}$ และอุณหภูมิของท่อมีค่าเพิ่มขึ้น $30^{o}C$ จงหาหน่วยแรงในแนวแกนและ hoop stress ที่เกิดขึ้นในท่อ กำหนดให้ท่อมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน $0.50\ \mathrm{m}$ และหนา $6.3\ \mathrm{mm}$



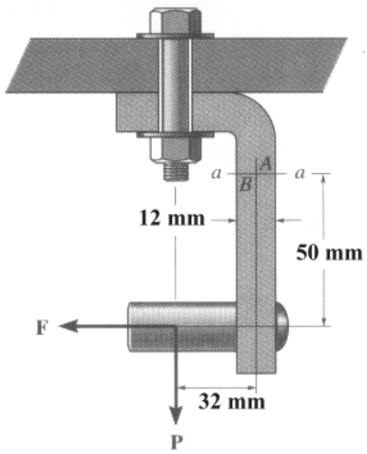
รูปที่ Prob. 8-2

8-3 pressure vessel ถูกปิดปลายด้วยแผ่นเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 8-3 ถ้าความดันภายในท่อ $p = 450\ \mathrm{kPa}$ จงหาค่าของหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่จุดเชื่อมต่อของแผ่นเหล็กและท่อที่ปลายท่อ และจงเขียนสภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่ผนังของ pressure vessel



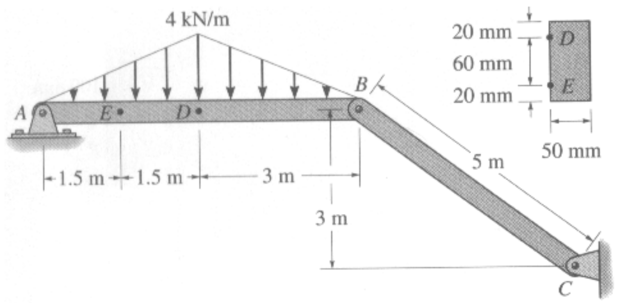
รูปที่ Prob. 8-3

8-4 กำหนดให้จุดเชื่อมต่อ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 8-4 ถูกกระทำโดยแรง $P = 1.0\ \mathrm{kN}$ และแรง $F = 0.75\ \mathrm{kN}$ จงเขียนสภาวะของหน่วยแรงที่จุด A และจุด B ถ้าชิ้นส่วนของโครงสร้างมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง $19\ \mathrm{mm}$ และหนา $12\ \mathrm{mm}$



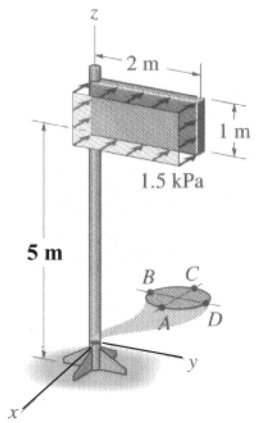
รูปที่ Prob. 8-4

8-5 กำหนดให้โครงสร้างถูกกระทำโดยแรงกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 8-5 จงเขียนสภาวะของหน่วยแรงที่จุด D และจุด E



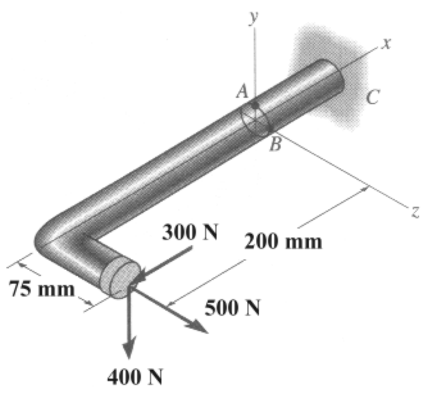
รูปที่ Prob. 8-5

8-6 ป้ายสัญญาณจราจร ซึ่งถูกรองรับโดยเสาที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก $100\,\mathrm{mm}$ และหนา $6.3\,\mathrm{mm}$ ถูกกระทำโดยแรงลม ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 8-6 จงเขียนสภาวะของหน่วยแรงที่จุด A จุด B จุด C และจุด D ที่หน้าตัดของเสาดังที่แสดงในรูป



รูปที่ Prob. 8-6

8-7 แท่งเหล็กถูกยึดแน่นที่จุด C และถูกกระทำโดยแรงต่างๆ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 8-7 จงเขียนสภาวะของหน่วยแรงที่จุด A และจุด B



รูปที่ Prob. 8-7

บทที่ 9

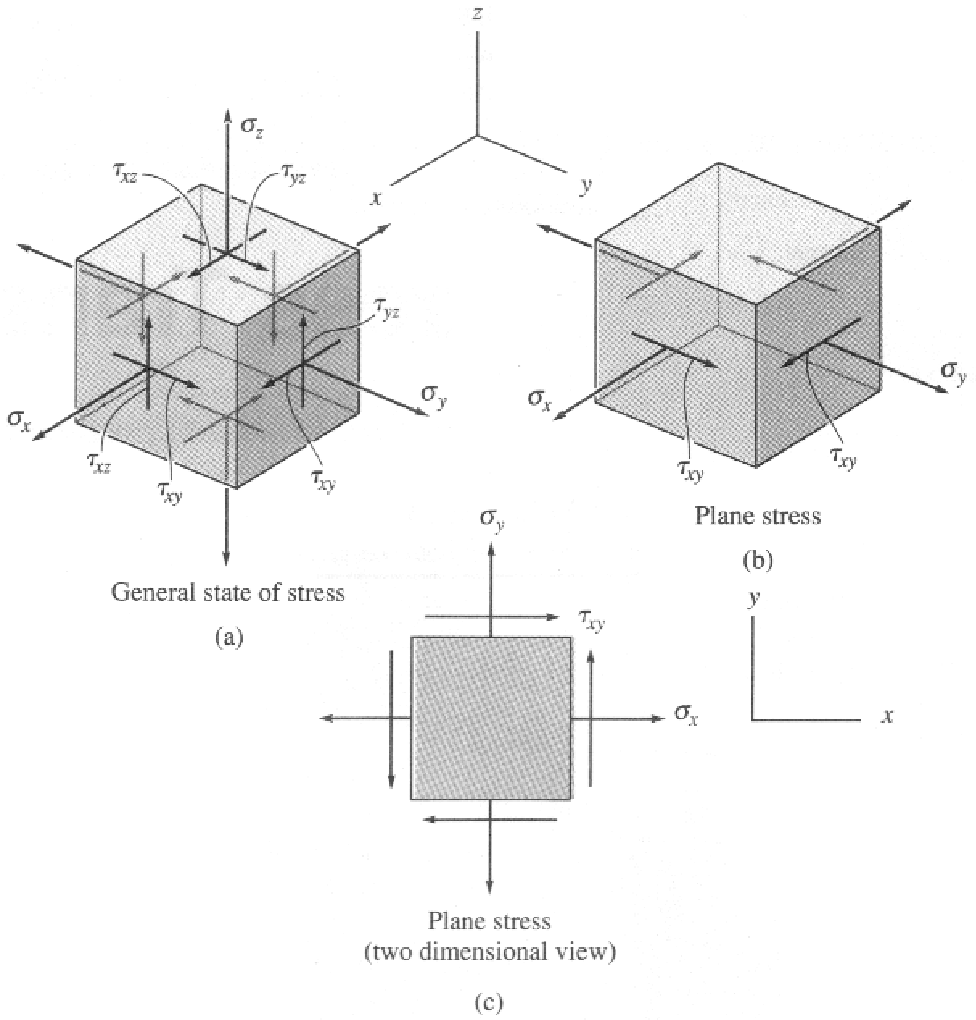
การแปลงหน่วยแรง (Stress Transformation)

เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

9.1 การแปลงหน่วยแรงในระนาบ (Plane-Stress Transformation)

โดยทั่วไปแล้ว สภาวะของหน่วยแรงที่จุดๆ หนึ่งบนวัตถุ (ซึ่งจะแสดงได้โดยใช้ cubic volume element ที่ตัดออกมาจากวัตถุนั้น ดังที่กล่าวไปแล้วในบทที่ 1 จะประกอบด้วยหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่เป็นอิสระต่อกันทั้งหมด 6 หน่วยแรง โดยหน่วยแรงดังกล่าวจะกระทำอยู่บนด้านต่างๆ ทั้ง 6 ด้านของ cubic volume element ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ 9-1a แต่โดยส่วนใหญ่แล้ว ชิ้นส่วนของโครงสร้างหรือเครื่องจักรกลจะถูกกระทำโดยหน่วยแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกันและเป็นอิสระต่อกันเพียงแค่ 3 หน่วยแรงเท่านั้น ดังที่ได้ศึกษาไปแล้วในบทที่ 8 ซึ่งในกรณีนี้ สภาวะของหน่วยแรงดังกล่าวที่เรียกว่า plane stress ดังที่แสดงในรูปที่ 9-1b

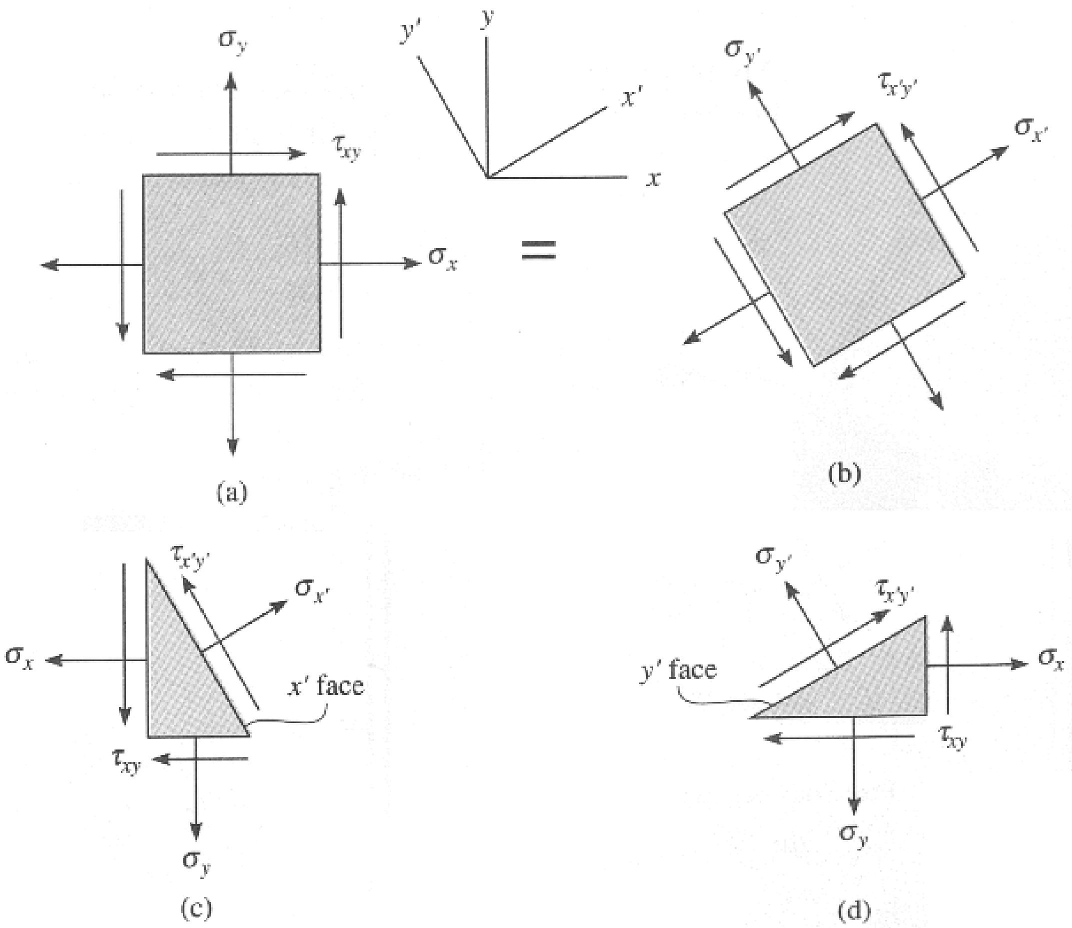
โดยทั่วไปแล้ว สภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress ในระนาบ $x-y$ จะประกอบด้วยหน่วยแรงตั้งฉาก 2 หน่วยแรงคือ σ_x และ σ_y และหน่วยแรงเฉือน 1 หน่วยแรงคือ τ_{xy} ซึ่งกระทำอยู่บนด้านทั้งสี่ของ element ดังที่แสดงในรูปที่ 9-1c



รูปที่ 9-1

ถ้าเราทราบค่าของหน่วยแรงทั้งสามบน element ดังที่แสดงในรูปที่ 9-2a แล้ว เราจะหาสภาวะของหน่วยแรงบน element ดังกล่าวในระบบแกนอื่นๆ เช่น ระบบแกน $x'-y'$ เป็นต้น ที่ทำมุม θ กับระนาบ $x-y$ ได้ ดังที่แสดงในรูปที่

9-2b โดยที่ค่าของหน่วยแรงบน element ในระบบแกน $x'-y'$ หรือ $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, และ $\tau_{x'y'}$ จะมีค่าต่างกับค่าของหน่วยแรงบน element ในระบบแกน $x-y$ แต่ค่าของหน่วยแรงบน element ในระบบแกนทั้งสองจะแสดงถึงสภาวะของหน่วยแรงที่จุดเดียวกัน



รูปที่ 9-2

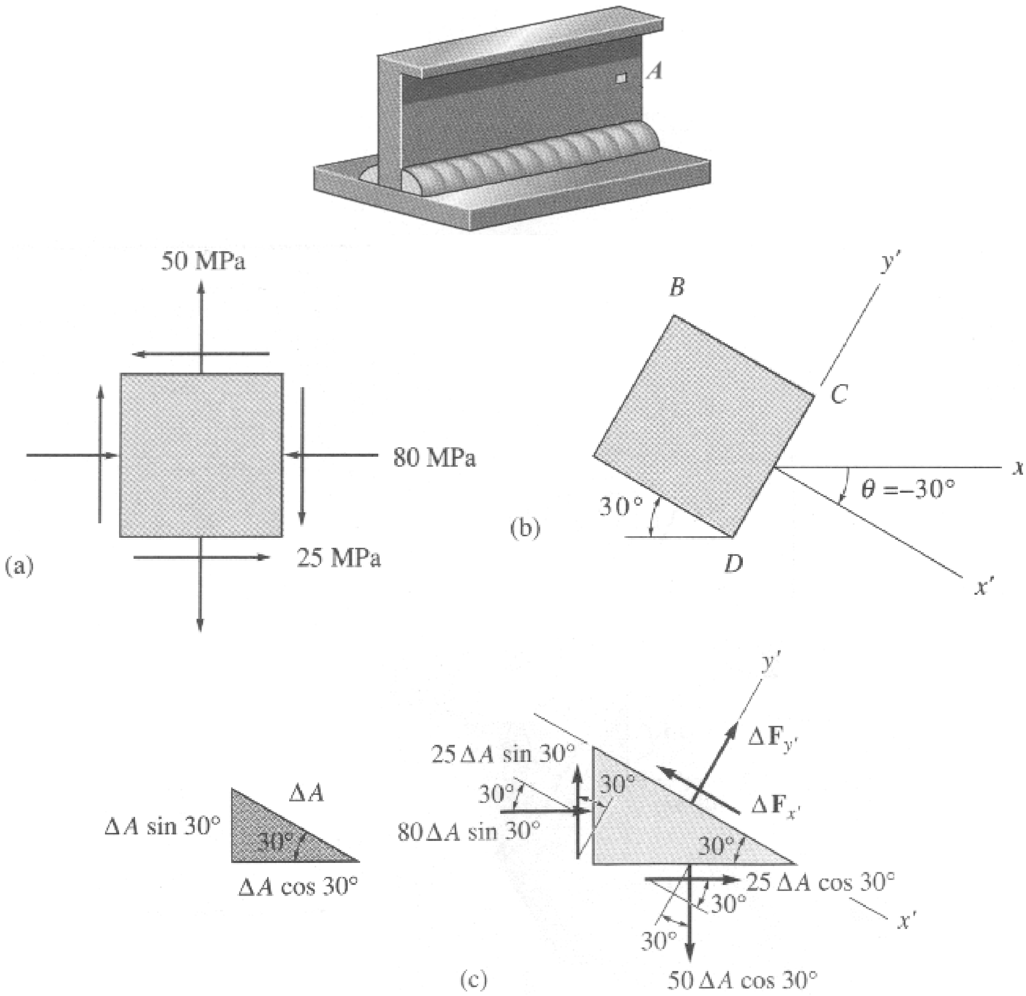
การหาค่าของหน่วยแรง $\sigma_{x'}$ และ $\tau_{x'y'}$ บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x' นั้นจะทำได้ดังนี้

1. ทำการตัด element ในระบบแกน $x-y$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-2b โดยให้หน้าตัดดังกล่าวตั้งฉากกับแกน x' ดังที่แสดงในรูปที่ 9-2c
2. หาค่าแรงที่เกิดจากหน่วยแรง σ_x และ τ_{xy} โดยการคูณค่าหน่วยแรงด้วยพื้นที่ที่หน่วยแรงนั้นกระทำ
3. เขียนแผนภาพ free-body diagram ของแรงต่างๆ
4. ใช้สมการความสมดุลของแรงหาค่าขององค์ประกอบของแรงที่อยู่ในระบบแกน $x'-y'$ และหารค่าแรงที่ได้ด้วยพื้นที่ที่หน่วยแรงนั้นกระทำอยู่

ในลักษณะที่คล้ายกัน เราจะหาค่าของหน่วยแรง $\sigma_{y'}$ และ $\tau_{x'y'}$ ได้โดยการตัด element ในระบบแกน $x-y$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-2b โดยให้หน้าตัดดังกล่าวตั้งฉากกับแกน y' ดังที่แสดงในรูปที่ 9-2d แล้วทำการหาค่าของ $\sigma_{y'}$ ในลักษณะเช่นเดียวกับการหาค่า $\sigma_{x'}$ โดยที่เราไม่จำเป็นที่จะต้องหาค่าของ $\tau_{x'y'}$ เพราะมีค่าเท่ากับค่า $\tau_{x'y'}$ ที่หามาได้ในขั้นตอนที่ 4

ตัวอย่างที่ 9-1

กำหนดให้สภาวะของหน่วยแรงที่กระทำอยู่บน stress element ที่จุด A บนองค์อาคารของโครงสร้างมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-1a จงหาสภาวะของหน่วยแรงที่กระทำอยู่บน stress element ที่หมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30^o ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-1b



รูปที่ Ex 9-1

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของ stress element ที่ถูกตัดโดยแกน x' ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-1c กำหนดให้พื้นที่หน้าตัดของรอยตัดมีค่าเท่ากับ ΔA ดังนั้น พื้นที่หน้าตัดแนวแนวนอนของ element จะมีค่าเท่ากับ

$$\Delta A\cos 30^o$$

และนั้น พื้นที่หน้าตัดแนวแนวดิ่งของ element จะมีค่าเท่ากับ

$$\Delta A\sin 30^o$$

จากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกน x' และแกน y' เราจะได้

$\sum F_{x'} = 0;$

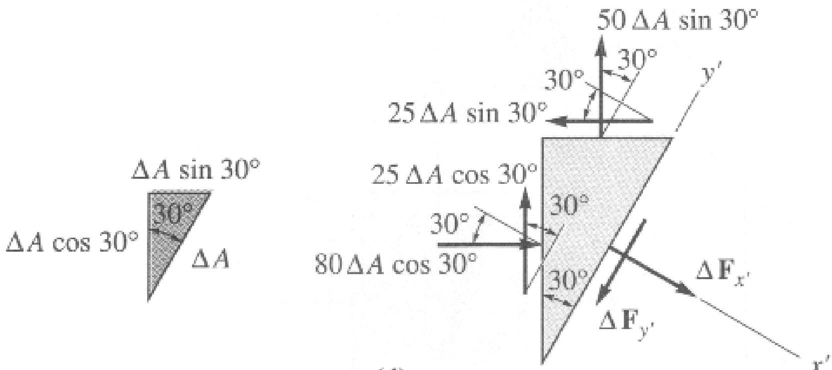
$$-\Delta F_{x'} + (50\Delta A\cos 30^o)\sin 30^o + (25\Delta A\cos 30^o)\cos 30^o$$
$$+ (80\Delta A\sin 30^o)\cos 30^o - (25\Delta A\sin 30^o)\sin 30^o = 0$$
$$\Delta F_{x'} = 68.8\Delta A$$

$$\sum F_{y'} = 0;$$

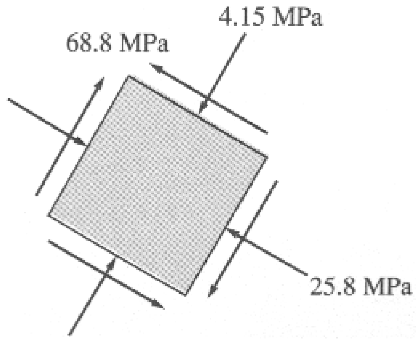
$$+\Delta F_{y'} - (50\Delta A\cos 30^o)\cos 30^o + (25\Delta A\cos 30^o)\sin 30^o$$
$$+(80\Delta A\sin 30^o)\sin 30^o + (25\Delta A\sin 30^o)\cos 30^o = 0$$
$$\Delta F_{y'} = -4.15\Delta A$$

เนื่องจาก $\Delta F_{y'}$ มีค่าเป็นลบ ดังนั้น $\Delta F_{y'}$ จะกระทำในทิศตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติในรูปที่ Ex 9-1c และหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดนี้จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_{y'} = \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta A} = 4.15\text{ MPa}$$
$$\tau_{x'y'} = \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta A} = 68.8\text{ MPa}$$



(d)



(e)

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของ stress element ที่ถูกตัดโดยแกน y' ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-1d กำหนดให้พื้นที่หน้าตัดของรอยตัดมีค่าเท่ากับ ΔA ดังนั้น พื้นที่หน้าตัดแนวแนวนอนของ element จะมีค่าเท่ากับ

$$\Delta A\sin 30^o$$

และพื้นที่หน้าตัดแนวแนวดิ่งของ element จะมีค่าเท่ากับ

$$\Delta A\cos 30^o$$

จากสมการความสมดุลของแรงในแนวแกน x' และแกน y' เราจะได้

$$\sum F_{x'} = 0;$$

$$\Delta F_{x'} - (25\Delta A\cos 30^o)\sin 30^o + (80\Delta A\cos 30^o)\cos 30^o$$
$$-(25\Delta A\sin 30^o)\cos 30^o - (50\Delta A\sin 30^o)\sin 30^o = 0$$
$$\Delta F_{x'} = -25.8\Delta A$$

$\sum F_{y'} = 0;$

$$-\Delta F_{y'} + (25\Delta A\cos 30^o)\cos 30^o + (80\Delta A\cos 30^o)\sin 30^o$$
$$-(25\Delta A\sin 30^o)\sin 30^o + (50\Delta A\sin 30^o)\cos 30^o = 0$$
$$\Delta F_{y'} = 68.8\Delta A$$

เนื่องจาก $\Delta F_{x'}$ มีค่าเป็นลบ ดังนั้น $\Delta F_{x'}$ จะกระทำในทิศตรงกันข้ามกับที่ได้สมมุติในรูปที่ Ex 9-1d และหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดนี้จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_{x'} = \frac{\Delta F_{x'}}{\Delta A} = 25.8\ \text{MPa}$$
$$\tau_{x'y'} = \frac{\Delta F_{y'}}{\Delta A} = 68.8\ \text{MPa}$$

รูปที่ Ex 9-1e แสดงสภาวะของหน่วยแรงที่กระทำอยู่บน stress element ที่หมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30^o ขอให้สังเกตทิศทางของหน่วยตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบน stress element และเราจะเห็นได้ว่า หน่วยแรงเฉือนที่ได้จากการพิจารณาทั้งสองกรณีมีค่าเท่ากัน Ans.

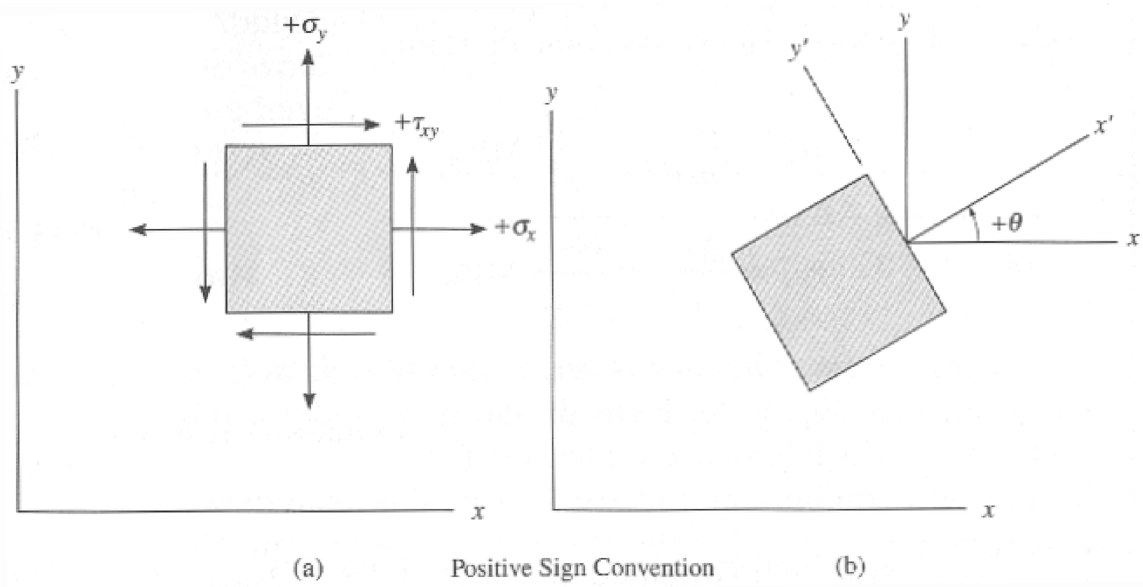
9.2 สมการการแปลงหน่วยแรงในระนาบ (General Equations of Plane-Stress Transformation)

สมการ plane-stress transformation ที่ใช้ในการเปลี่ยนสภาวะของหน่วยแรงจากระบบแกน $x-y$ ไปสู่ระบบแกน $x'-y'$ ที่ทำมุมกัน θ กับระบบแกน $x-y$ จะหาได้ดังต่อไปนี้

Sign Convention

รูปที่ 9-3 แสดง sign convention ของหน่วยแรงและมุม θ ที่มีค่าเป็นบวก โดยที่

1. หน่วยแรงตั้งฉากจะมีค่าเป็นบวกเมื่อเป็นหน่วยแรงดึง ดังที่แสดงในรูปที่ 9-3a
2. หน่วยแรงเฉือนจะมีค่าเป็นบวก เมื่อหน่วยแรงมีทิศพุ่งไปในแนวแกนที่เป็นบวกและกระทำอยู่บนหน้าตัดของ element ที่ตัดกับแกนที่เป็นบวก หรือเมื่อหน่วยแรงมีทิศพุ่งไปในแนวแกนที่เป็นลบและกระทำอยู่บนหน้าตัดของ element ที่ตัดกับแกนที่เป็นลบ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-3a
3. มุม θ จะมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางหมุนตามกฎมือขวาจากแกน x ไปยังแกน x' หรือหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังที่แสดงในรูปที่ 9-3b



รูปที่ 9-3

Normal and Shear Stress Components

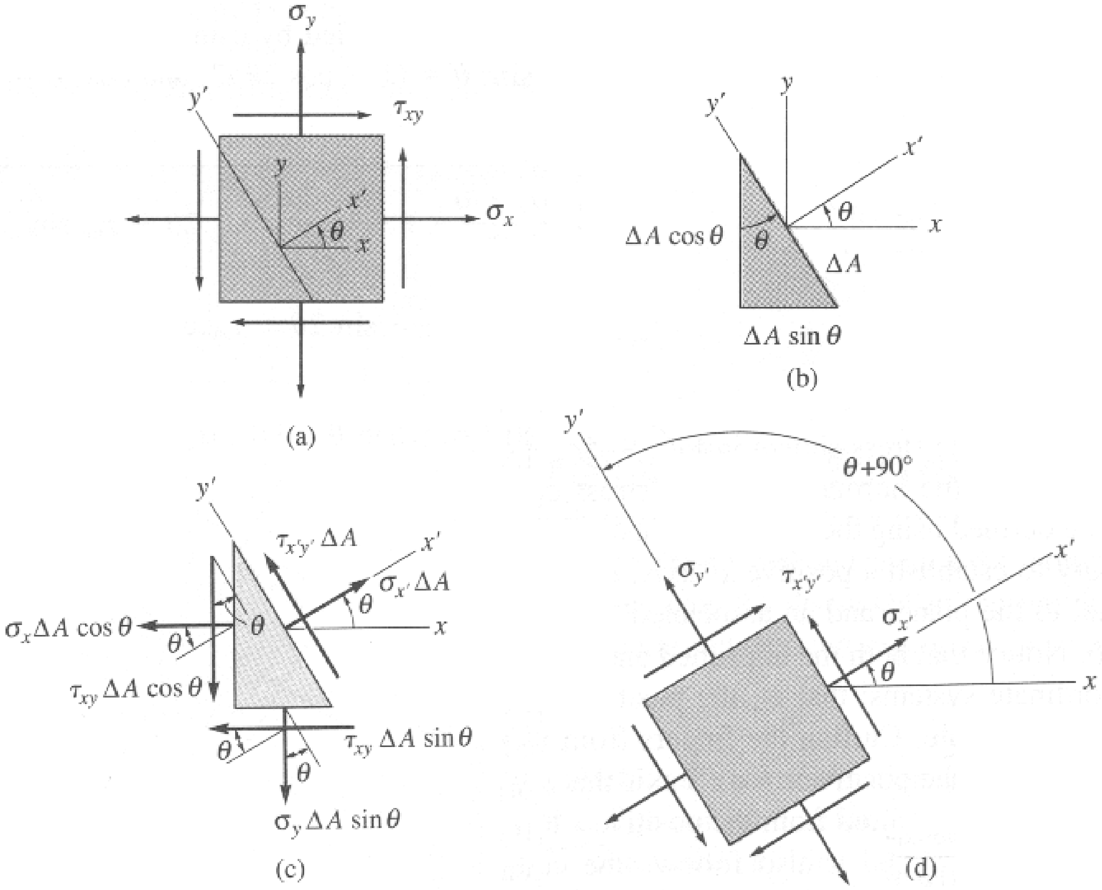
กำหนดให้ element ถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress ที่มีค่าเป็นบวกในระบบแกน $x-y$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-4a หน่วยแรงที่เกิดขึ้นบน element ในระบบแกน $x'-y'$ ที่ทำมุมกัน θ กับระบบแกน $x-y$ จะหาได้โดยการตัด element ดังกล่าวให้มีหน้าตัดที่ตั้งฉากกับแกน $+x'$ และชิ้นส่วนที่ถูกตัดออกมาจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 9-4b

กำหนดให้พื้นที่หน้าตัดของระนาบที่ถูกตัดมีค่าเท่ากับ ΔA ดังนั้น พื้นที่ของระนาบดังกล่าวในแนวแกน x และแนวแกน y จะมีค่าเท่ากับ $\Delta A\sin\theta$ และ $\Delta A\cos\theta$ ตามลำดับ ดังนั้น เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนของ element ดังกล่าวได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-4c

โดยใช้สมการสมดุลของแรงในแนวแกน x' และ y' เราจะหาองค์ประกอบของหน่วยแรงตั้งฉาก $\sigma_{x'}$ และหน่วยแรงเฉือน $\tau_{x'y'}$ ได้โดยที่

$$\sum F_{x'} = 0; \qquad \begin{aligned} &\sigma_{x'}\,\Delta A - (\tau_{xy}\,\Delta A\sin\theta)\cos\theta - (\sigma_y\,\Delta A\sin\theta)\sin\theta \\ &\quad - (\tau_{xy}\,\Delta A\cos\theta)\sin\theta - (\sigma_x\,\Delta A\cos\theta)\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy}(2\sin\theta\cos\theta)$$



รูปที่ 9-4

$$\sum F_{y'} = 0; \qquad \tau_{x'y'}\Delta A - (\tau_{xy}\Delta A\sin\theta)\sin\theta - (\sigma_y \Delta A \sin\theta)\cos\theta - (\tau_{xy}\Delta A\cos\theta)\cos\theta - (\sigma_x\Delta A\cos\theta)\sin\theta = 0$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

เนื่องจาก

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{(1-\cos 2\theta)}{2}$$

และ

$$\cos^2\theta = \frac{(1+\cos 2\theta)}{2}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (9\text{-}1)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (9\text{-}2)$$

สมการที่ 9-1 และ 9-2 นี้มักจะถูกเรียกว่า สมการของ plane-stress transformation เนื่องจากสมการทั้งสองนี้เปลี่ยนสภาวะของหน่วยแรงจากระบบแกนหนึ่งไปสู่อีกระบบแกนหนึ่ง

สมการของหน่วยแรงตั้งฉาก $\sigma_{y'}$ จะหามาได้จากการแทนมุม θ ในสมการที่ 9-1 ด้วยมุม $\theta + 90^o$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \tag{9-3}$$

จากสมการที่ 9-1 ถึง 9-3 เราจะเห็นได้ว่า ถ้าเราทราบค่าของหน่วยแรง σ_x , σ_y , และ τ_{xy} แล้ว เราจะหาหน่วยแรง $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, และ $\tau_{x'y'}$ ได้และเมื่อ $\theta = 0^o$ แล้ว เราจะได้ว่า

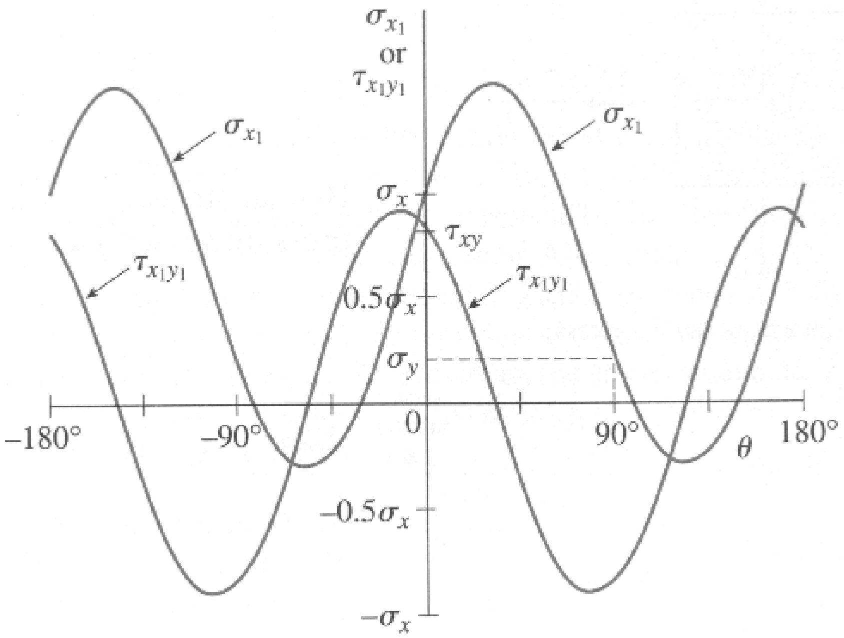
$$\sigma_{x'} = \sigma_x \text{ , } \sigma_{y'} = \sigma_y \text{ , และ } \tau_{x'y'} = \tau_{xy}$$

เมื่อทำการรวมสมการที่ 9-1 และ 9-3 เข้าด้วยกันแล้ว เราจะได้ว่า

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

ซึ่งแสดงว่า ผลรวมของหน่วยแรงตั้งฉากที่กระทำอยู่บนด้านที่ตั้งฉากกันของ element ที่ถูกกระทำโดย plane stress ที่จุดๆ หนึ่งจะมีค่าคงที่และเป็นอิสระต่อมุม θ

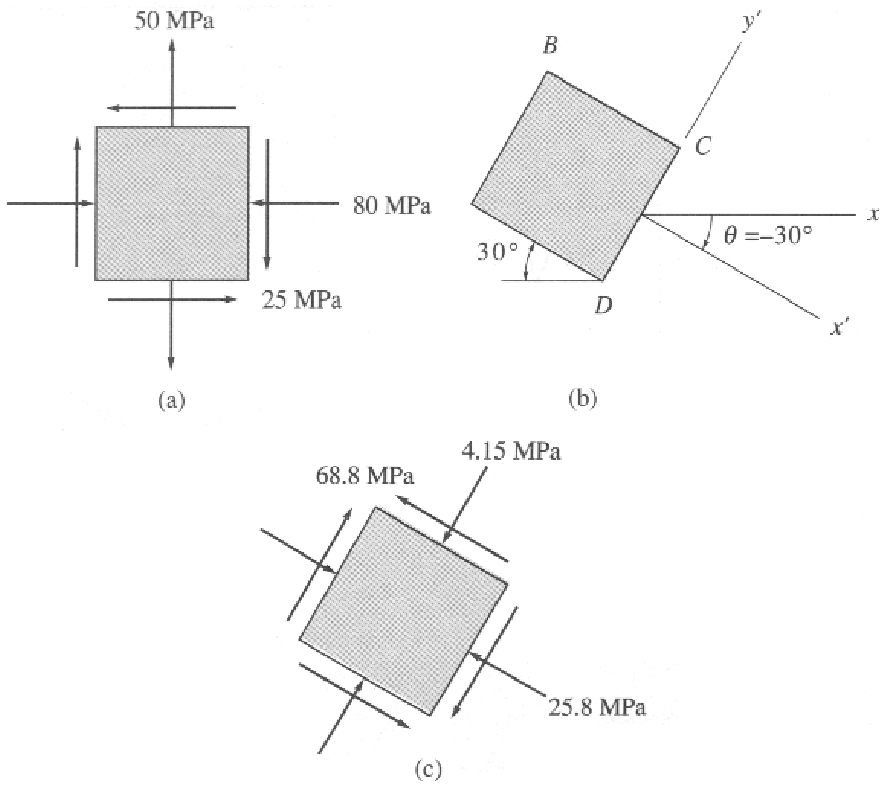
รูปที่ 9-5 เป็นตัวอย่างกราฟที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรง $\sigma_{x'}$ และ $\tau_{x'y'}$ เทียบกับมุม θ เมื่อกำหนดให้ $\sigma_y = 0.2\sigma_x$ และ $\tau_{xy} = 0.8\sigma_x$ จากรูป เราจะเห็นได้ว่า ค่าของหน่วยแรง $\sigma_{x'}$ และ $\tau_{x'y'}$ จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง เมื่อ element ถูกหมุนไปเป็นมุม θ และเมื่อมุม θ มีค่าบางค่าแล้ว ค่าของหน่วยแรงดังกล่าวจะมีค่าสูงสุด ต่ำสุด และเท่ากับศูนย์



รูปที่ 9-5

ตัวอย่างที่ 9-2

กำหนดให้ภาวะของหน่วยแรงที่จุดใดจุดหนึ่งบนองค์อาคารของโครงสร้างและกระทำอยู่บน stress element มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-2a จงหาสภาวะของหน่วยแรงที่กระทำอยู่บน stress element ที่หมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30^o ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-2b



รูปที่ Ex 9-2

จาก sign convention ที่เรากำหนด เราจะได้ว่า

$$\sigma_x = -80\,\text{MPa} \qquad \sigma_y = +50\,\text{MPa} \qquad \tau_{xy} = -25\,\text{MPa}$$

ในการหาหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนระนาบ CD ซึ่งตั้งฉากกับแกน x' ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-2b เราจะต้องทำการหมุน stress element ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30^o ซึ่งเราจะได้ว่า $\theta = -30^o$ ดังนั้น จากสมการที่ 9-1 และ 9-2 เราจะได้

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = \frac{-80+50}{2} + \frac{-80-50}{2}\cos 2(-30^o) + (-25)\sin 2(-30^o)$$

$$= -25.8\,\text{MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{-80-50}{2}\sin 2(-30^o) + (-25)\cos 2(-30^o)$$

$$= -68.8\,\text{MPa}$$

เครื่องหมายลบของหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่ได้แสดงว่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นจริงมีทิศทางตรงกันข้ามกับ sign convention ที่เราใช้

ในทำนองเดียวกัน หน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนระนาบ BC ซึ่งตั้งฉากกับแกน y' ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-2c จะหาได้จากสมการที่ 9-3

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{-80+50}{2} - \frac{-80-50}{2}\cos 2(-30^o) - (-25)\sin 2(-30^o)$$

$$= -4.15\ \text{MPa}$$

เครื่องหมายลบที่ได้แสดงว่าหน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นจริงมีทิศทางตรงกันข้ามกับ sign convention ที่เราใช้ รูปที่ Ex 9-1c แสดงหาสภาวะของหน่วยแรงที่กระทำอยู่บน stress element ที่หมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30^o <u>Ans.</u>

9.3 **หน่วยแรงหลักและหน่วยแรงเฉือนในระนาบสูงสุด** (Principal Stresses and Maximum In-Plane Shear Stresses)

In-Plane Principal Stresses

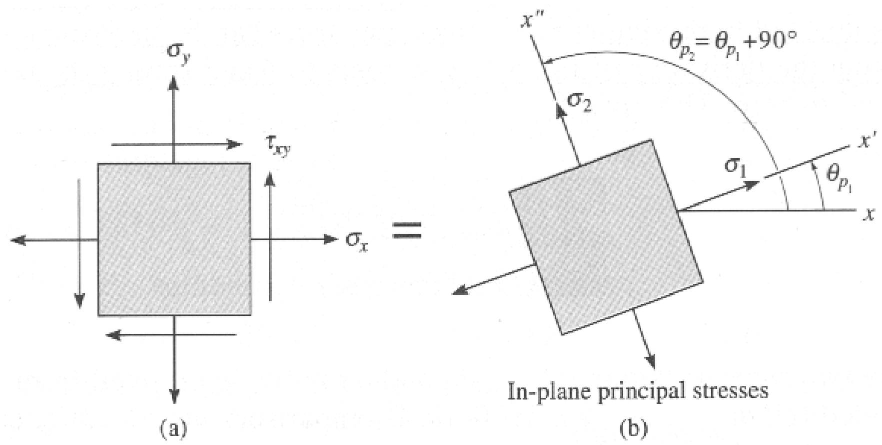
หน่วยแรงหลัก (principle stresses) เป็นหน่วยแรงตั้งฉากที่มีค่าสูงสุดและต่ำสุดที่เกิดขึ้นบน stress element ที่มีสภาวะของหน่วยแรงสภาวะหนึ่ง สมการ principal stresses จะหาได้ดังต่อไปนี้

1. ทำการ differentiate สมการที่ 9-1 เทียบกับมุม θ และให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งเราจะหามุมที่ stress element ถูกกระทำโดย principal stresses ได้ในรูป

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(2\sin 2\theta) + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

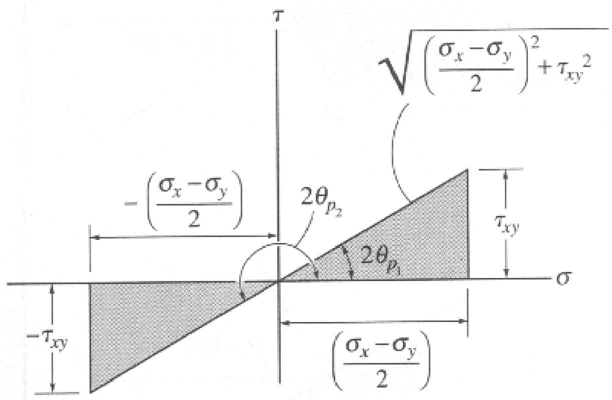
$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \qquad (9\text{-}4)$$

สมการที่ 9-4 นี้จะให้คำตอบเป็นมุมสองมุมคือ $2\theta_{p1}$ และ $2\theta_{p2}$ ซึ่งจะมีค่าต่างกัน 180^o (ดังนั้น มุม θ_{p1} และ θ_{p2} จะต่างกัน 90^o) และมุม θ_{p1} และ θ_{p2} นี้มักจะถูกเรียกว่า มุมหลัก (principal angles) ซึ่งจะบ่งบอกถึงทิศทางของระนาบหลัก (principal planes) ที่ principal stresses กระทำอยู่ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-6



รูปที่ 9-6

เมื่อ τ_{xy} และ $(\sigma_x - \sigma_y)$ มีค่าเป็นบวกพร้อมกันหรือเป็นลบพร้อมกันแล้ว สมการที่ 9-4 จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปกราฟฟิกได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-7 (ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว τ_{xy} และ $(\sigma_x - \sigma_y)$ อาจจะมีค่าเป็นบวกหรือลบไม่พร้อมกันก็ได้)



รูปที่ 9-7

จากรูป ความยาวของด้านที่ตรงกันข้ามกับมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉากจะหาได้จากสมการ

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

จากนั้น เราจะหาค่า $\sin$ และ $\cos ine$ ของมุม $2\theta_{p1}$ หรือ $2\theta_{p2}$ ได้

2. แทนค่า $\sin$ และ $\cos ine$ ของมุม $2\theta_{p1}$ และ $2\theta_{p2}$ ลงในสมการที่ 9-1 เราจะได้ว่า

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (9\text{-}5)$$

โดยที่ σ_1 เป็นหน่วยแรงตั้งฉากที่มีค่าสูงสุดและ σ_2 เป็นหน่วยแรงตั้งฉากที่มีค่าต่ำสุด

เมื่อเราแทนค่า $\sin$ และ $\cos ine$ ของมุม $2\theta_{p1}$ หรือ $2\theta_{p2}$ ลงในสมการที่ 9-2 เราจะได้ว่า $\tau_{x'y'} = 0$ ซึ่งหมายความว่าหน่วยแรงเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์บนระนาบหลัก (principal planes)

เมื่อเรานำสมการของหน่วยแรงหลัก (principal stress) σ_1 และ σ_2 มารวมกัน เราจะได้ว่า

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

ซึ่งแสดงว่า ผลรวมของหน่วยแรงตั้งฉากที่กระทำอยู่บนด้านที่ตั้งฉากกันของ element ที่ถูกกระทำโดย plane stress ที่จุดๆ หนึ่งจะมีค่าคงที่

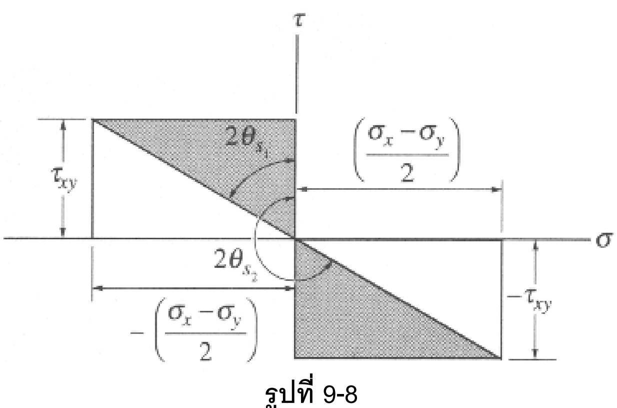
Maximum In-plane Shear Stress

มุมที่ stress element ถูกกระทำโดยแรงเฉือนสูงสุดจะหาได้จากการทำ differentiation สมการที่ 9-2 เทียบกับมุม θ และให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(2\cos 2\theta) - (2\tau_{xy}\sin 2\theta) = 0$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \qquad (9\text{-}6)$$

สมการที่ 9-6 นี้จะให้คำตอบเป็นมุมสองค่าคือ $2\theta_{s1}$ และ $2\theta_{s2}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-8

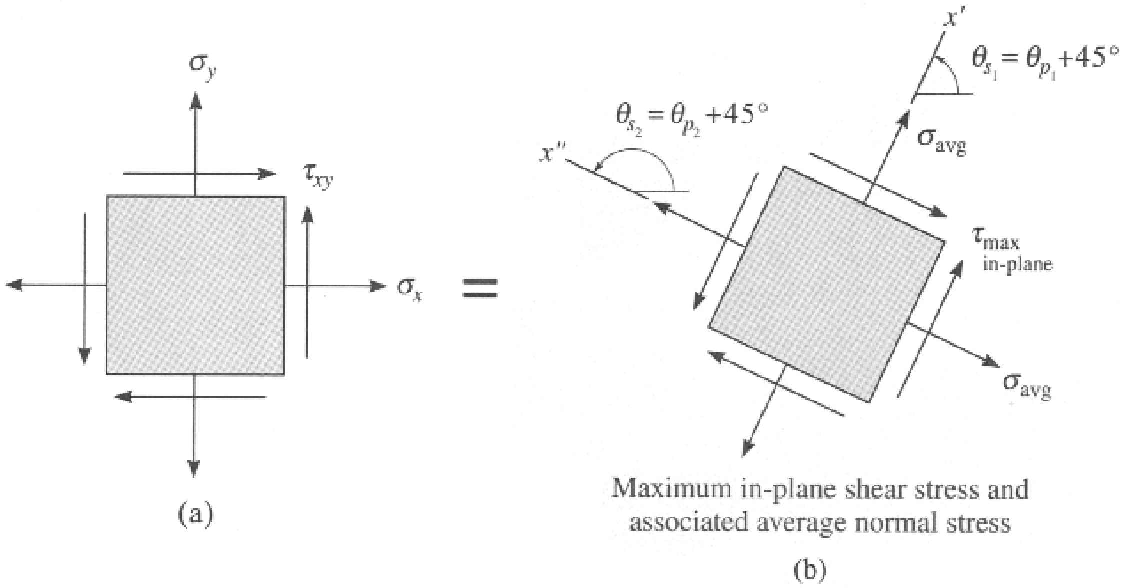


รูปที่ 9-8

โดยการเปรียบเทียบรูปที่ 9-7 กับรูปที่ 9-8 เราจะเห็นได้ว่า มุม $2\theta_s$ จะต่างกับมุม $2\theta_p$ เท่ากับ 90^o ดังนั้น ค่ามุม θ_s จะต่างกับค่ามุม θ_p เท่ากับ 45^o ดังที่แสดงในรูปที่ 9-9

โดยการแทนค่า $\sin$ และ $\cos ine$ ของมุม $2\theta_{s1}$ หรือ $2\theta_{s2}$ จากรูปที่ 9-8 ลงในสมการที่ 9-2 เราจะได้ว่า สมการของหน่วยแรงเฉือนสูงสุดบน element อยู่ในรูป

$$\tau_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{9-7}$$



รูปที่ 9-9

เมื่อแทนค่า sin และ cosine ของมุม $2\theta_{s1}$ หรือ $2\theta_{s2}$ ลงในสมการที่ 9-1 เราจะได้ว่า หน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนระนาบที่เกิดหน่วยแรงเฉือนสูงสุดจะหาได้จากสมการ

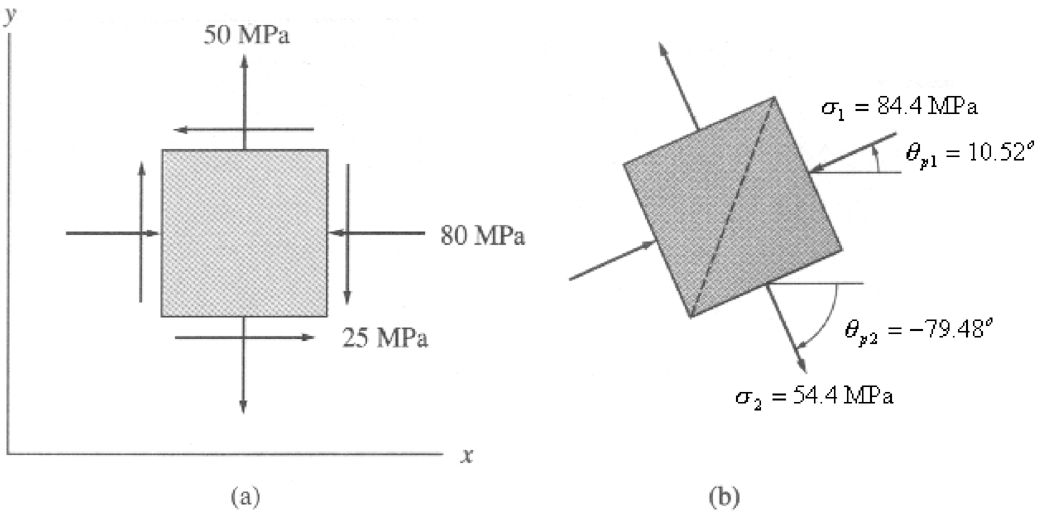
$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{9-8}$$

นอกจากนั้นแล้ว จากสมการที่ 9-5 ถ้าเอาสมการ σ_1 ตั้ง แล้วลบด้วยสมการ σ_2 จากนั้น ทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับสมการที่ 9-7 เราจะได้ว่า

$$\tau_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

ตัวอย่างที่ 9-3

จงหาสภาวะของหน่วยแรงในรูปของ principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element ที่จุดใดจุดหนึ่งบนองค์อาคารของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-3a



รูปที่ EX 9-3

จาก sign convention ที่เรากำหนด เราจะได้ว่า

$$\sigma_x = -80 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = +50 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa}$$

หาสภาวะของหน่วยแรงในรูปของ principal stresses

มุมที่ stress element หมุนไปแล้วทำให้สภาวะของหน่วยแรงบน stress element ดังกล่าวเปลี่ยนไปเป็นสภาวะของหน่วยแรงในรูปของ principal stresses หรือมุมของ principal planes จะหาได้จากสมการที่ 9-4

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{-25}{(-80-50)/2}$$

$$2\theta_{p1} = 21.04^o$$

$$\theta_{p1} = 10.52^o$$

เครื่องหมายบวกแสดงว่ามีทิศทางหมุน**ทวนเข็ม**นาฬิกาจากแกน x ไปยังแกน x'

เนื่องจากมุม θ_{p1} ต่างจากมุม θ_{p2} เป็นมุม 90^o ดังนั้น

$$\theta_{p2} = -79.48^o$$

เครื่องหมายลบแสดงว่ามีทิศทางหมุน**ตามเข็ม**นาฬิกาจากแกน x ไปยังแกน x'

ค่าของ principal stresses ที่เกิดขึ้นบน stress element จะหาได้จากสมการ

$$\sigma_{\substack{1\\2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-80+50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-80-50}{2}\right)^2 + (-25)^2}$$

$$= -15 \pm 69.64 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = -84.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 54.4 \text{ MPa}$$

มุมที่ถูกต้องระหว่างแกน x กับแกนตั้งฉากกับระนาบของ principal planes ที่ principal stress σ_1 กระทำอาจจะหามาได้โดยการแทน $\theta_{p1} = 10.52^o$ ลงในสมการที่ 9-1

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = \frac{-80+50}{2} + \frac{-80-50}{2}\cos 21.04^o + (-25)\sin 21.04^o$$

$$= -84.4\ \text{MPa}$$

และ principal stress σ_2 จะกระทำอยู่บนระนาบของ principal planes ที่มีแกนตั้งฉากทำมุม $\theta_{p2} = -78.69^o$ กับแกน x

สภาวะของหน่วยแรงในรูปของ principal stresses จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-3b Ans.

หาสภาวะของหน่วยแรงในรูปของ maximum in-plane shear stress

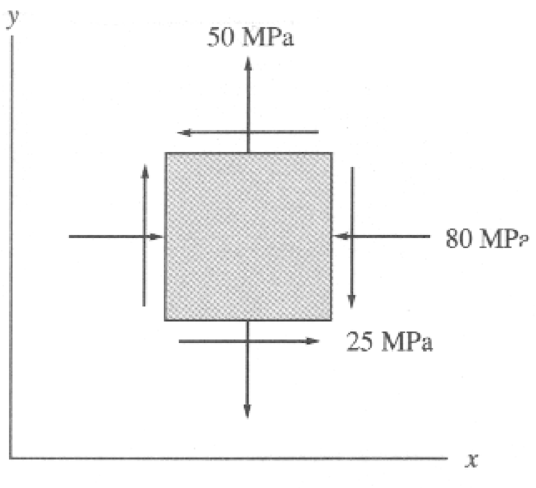
ระนาบของ maximum in-plane shear stress จะหาได้จากการหมุน stress element ที่มีสภาวะของหน่วยแรงแบบ principal stresses **ทวนเข็ม**นาฬิกาไปเป็นมุม 45^o ดังนั้น

$$\theta_{s1} = 45^o + 10.52^o = 55.52^o$$

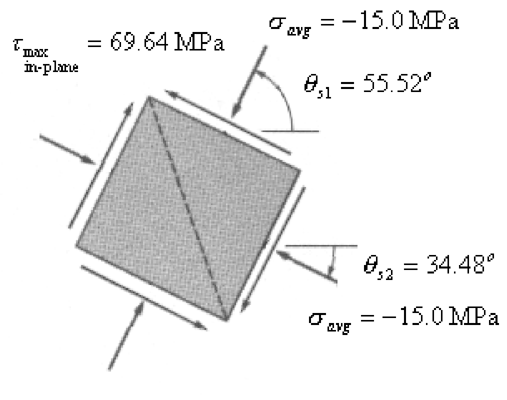
เครื่องหมายบวกแสดงว่ามีทิศทางหมุน**ทวนเข็ม**นาฬิกาจากแกน x ไปยังแกน x'

$$\theta_{s2} = 45^o - 79.48^o = -34.48^o$$

เครื่องหมายลบแสดงว่ามีทิศทางหมุน**ตามเข็ม**นาฬิกาจากแกน x ไปยังแกน x' ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-3d



(c)



(d)

หรือจะคำนวณหาได้โดยใช้สมการที่ 9-6

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(-80-50)/2}{-25}$$

$$2\theta_{s2} = -68.96^o$$

$$\theta_{s2} = -34.48^o$$

เนื่องจากมุม θ_{s1} ต่างจากมุม θ_{s2} เป็นมุม 90^o ดังนั้น

$$\theta_{s1} = 90^o - 34.48^o = 55.52^o$$

หน่วยแรงเฉือนสูงสุด (maximum in-plane shear stress) บน element จะหาได้โดยใช้สมการที่ 9-2 หรือสมการที่ 9-7 ก็ได้

จากสมการที่ 9-2 สำหรับมุม $2\theta_{s2} = -68.96^o$ เราจะได้ว่า

$$\tau_{x'y'} = -\frac{-80-50}{2}\sin(-68.96^o) + (-25)\cos(-68.96^o)$$
$$= -69.64 \text{ MPa}$$

ซึ่งแสดงว่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นที่มุม $2\theta_{s2} = -68.96^o$ มีทิศทางเป็นลบ และสำหรับมุม $2\theta_{s1} = 111.04^o$ เราจะได้ว่า

$$\tau_{x'y'} = -\frac{-80-50}{2}\sin 111.04^o + (-25)\cos 111.04^o$$
$$= +69.64 \text{ MPa}$$

ซึ่งแสดงว่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นที่มุม $2\theta_{s1} = 111.04^o$ มีทิศทางเป็นบวก

จากสมการที่ 9-7 เราจะได้ว่า

$$\tau_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = \sqrt{\left(\frac{-80-50}{2}\right)^2 + (-25)^2} = 69.64 \text{ MPa}$$

ซึ่งบอกแต่ขนาดของหน่วยแรงเฉือนสูงสุด แต่ไม่ได้บอกว่าหน่วยแรงดังกล่าวมีทิศทางไปทางใด

หน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนระนาบที่เกิดหน่วยแรงเฉือนสูงสุดจะหาได้จากสมการที่ 9-8

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{-80+50}{2} = -15.0 \text{ MPa}$$

ดังนั้น เราจะเขียนสภาวะของหน่วยแรงในรูปของ maximum in-plane shear stress ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 9-3d <u>Ans.</u>

9.4 วงกลมมอร์ - หน่วยแรงในระนาบ (Mohr's Circle-Plane Stress)

เมื่อเราทราบค่าของสภาวะของหน่วยแรงบน element ในระบบแกนอ้างอิงแล้ว เราอาจจะใช้วงกลมของมอร์ (Mohr's circle) ในการหาสภาวะของหน่วยแรงบน stress element ที่อยู่ในแกนๆ หนึ่งที่ทำมุม θ เทียบกับแกนอ้างอิงได้ Mohr's circle นี้เป็นวิธีการที่ช่วยให้เราเห็นการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนที่มุม θ ใดๆ ที่ element นั้นหมุนไปจากแกนอ้างอิงได้ง่ายขึ้น

ในการพัฒนา Mohr's circle เราจะเริ่มจากการเขียนสมการที่ 9-1 และ 9-2 ให้อยู่ในรูป

$$\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (9\text{-}9)$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (9\text{-}10)$$

จากสมการที่ 9-9 และ 9-10 เราจะกำจัดตัวแปร θ ได้โดยการยกกำลังสองสมการทั้งสองและนำมาบวกกัน ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

ในกรณีที่เราทราบค่าของ σ_x , σ_y , และ τ_{xy} แล้ว เราจะเขียนสมการข้างบนได้ใหม่ในรูป

$$\left[\sigma_{x'} - \sigma_{avg}\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \qquad (9\text{-}11)$$

เมื่อ

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

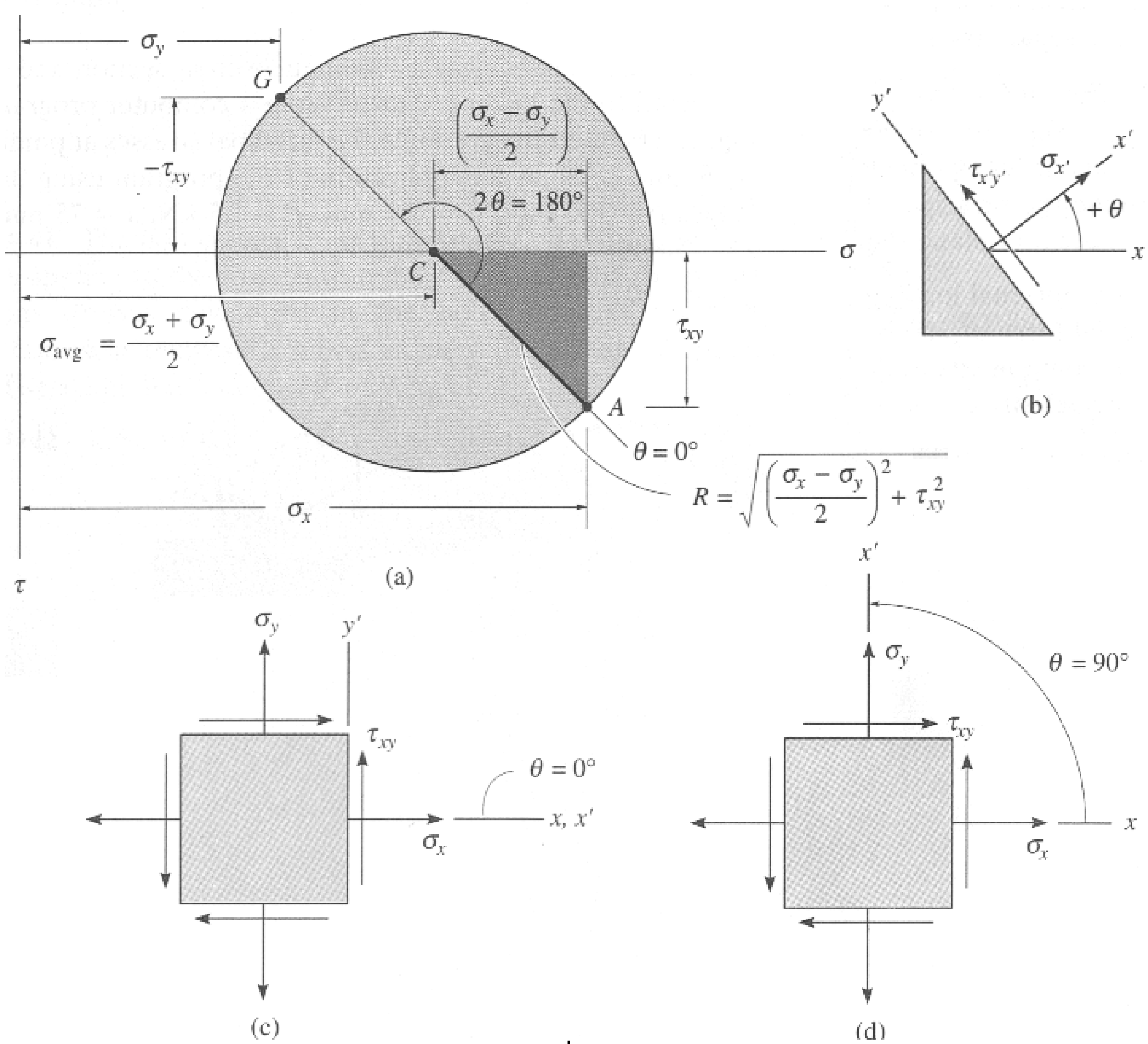
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (9\text{-}12)$$

ซึ่งสมการที่ 9-11 นี้จะเป็นสมการที่อยู่ในรูปของสมการของวงกลม

เมื่อเราตั้งแกนอ้างอิงโดยให้ σ เป็นแกนนอนที่มีค่าเป็นบวกเมื่อมีทิศชี้ไปทางขวามือและให้ τ เป็นแกนดิ่งที่มีค่าเป็นบวกเมื่อมีทิศชี้ดิ่งลงแล้ว เราจะได้ว่า สมการที่ 9-11 เป็นสมการของวงกลม ซึ่งมีรัศมี R (สมการที่ 9-12) และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน σ ที่จุด C $(\sigma_{avg}, 0)$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-10a วงกลมที่ได้นี้จะถูกเรียกว่า วงกลมของมอร์ (Mohr's circle) ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นมาโดยวิศวกรชาวเยอรมันชื่อ Otto Mohr และเราจะหาค่าของ $\sigma_{x'}$ และ $\tau_{x'y'}$ ที่เกิดขึ้นบนระนาบใดๆ บนแกนที่ทำมุม θ กับแกนอ้างอิงได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-10b

พิจารณาในกรณีที่มุม $\theta = 0^o$ หรือในกรณีที่ แกน x ทับกับแกน x' ดังที่แสดงในรูปที่ 9-10c ในกรณีนี้ สมการที่ 9-1 และ 9-2 จะให้คำตอบคือ $\sigma_{x'} = \sigma_x$ และ $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}$ จาก Mohr's circle เราจะได้ว่า จุดนี้จะเป็นจุดอ้างอิง $A\,(\sigma_x, \tau_{xy})$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-10a ดังนั้น รัศมีของวงกลมคือ CA โดยที่ค่าของ CA จะหาได้จากสมการที่ 9-12

ในกรณีที่มุม $\theta = 90^o$ หรือในกรณีที่ แกน x' ทับกับแกน y ดังที่แสดงในรูปที่ 9-10d เราจะได้ว่า สมการที่ 9-1 และ 9-2 จะให้คำตอบคือ $\sigma_{x'} = \sigma_y$ และ $\tau_{x'y'} = -\tau_{xy}$ จาก Mohr's circle เราจะได้ว่า จุดนี้จะเป็นจุดอ้างอิง G $(\sigma_y, -\tau_{xy})$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-10a โดยการตรวจสอบ เราจะเห็นว่า เส้นรัศมี CG จะทำมุมกับเส้นรัศมี CA เท่ากับ 2θ หรือ 180^o



รูปที่ 9-10

Stress Components on an Arbitrary Plane

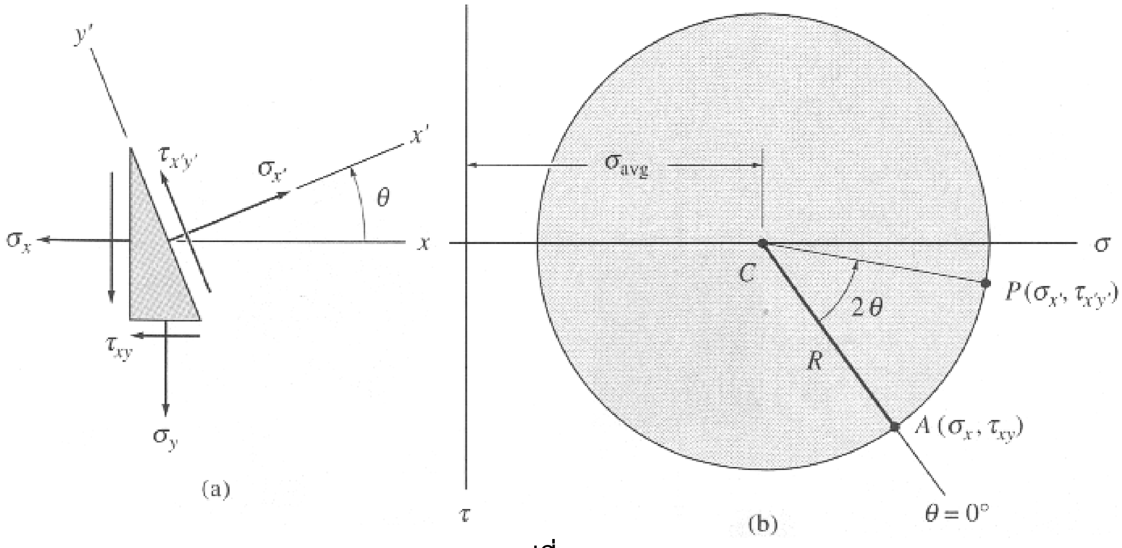
ค่าหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือน $\sigma_{x'}$ และ $\tau_{x'y'}$ ที่กระทำอยู่บนระนาบใดๆ ที่ตั้งฉากกับแกน x' ซึ่งแกน x' นี้ทำมุม θ กับแกน x ดังที่แสดงในรูปที่ 9-11a จะหาได้จากการใช้ตรีโกณมิติในการหาพิกัดของจุด P ที่ทำมุม 2θ ซึ่งวัดจากเส้นรัศมีอ้างอิง CA ($\theta = 0^o$) ถึงเส้นรัศมี CP ดังที่แสดงในรูปที่ 9-11b ในทิศทางเดียวกับมุม θ

เราควรที่จะทราบไว้ด้วยว่า ในกรณีที่แกน τ มีทิศทางที่เป็นบวกตรงกันข้ามกับที่เรากำลังใช้อยู่นี้หรือมีทิศทางเป็นบวกเมื่อแกน τ มีทิศชี้ขึ้นแล้ว มุม 2θ ใน Mohr's circle จะต้องมีทิศตรงกันข้ามกับมุม θ บน element

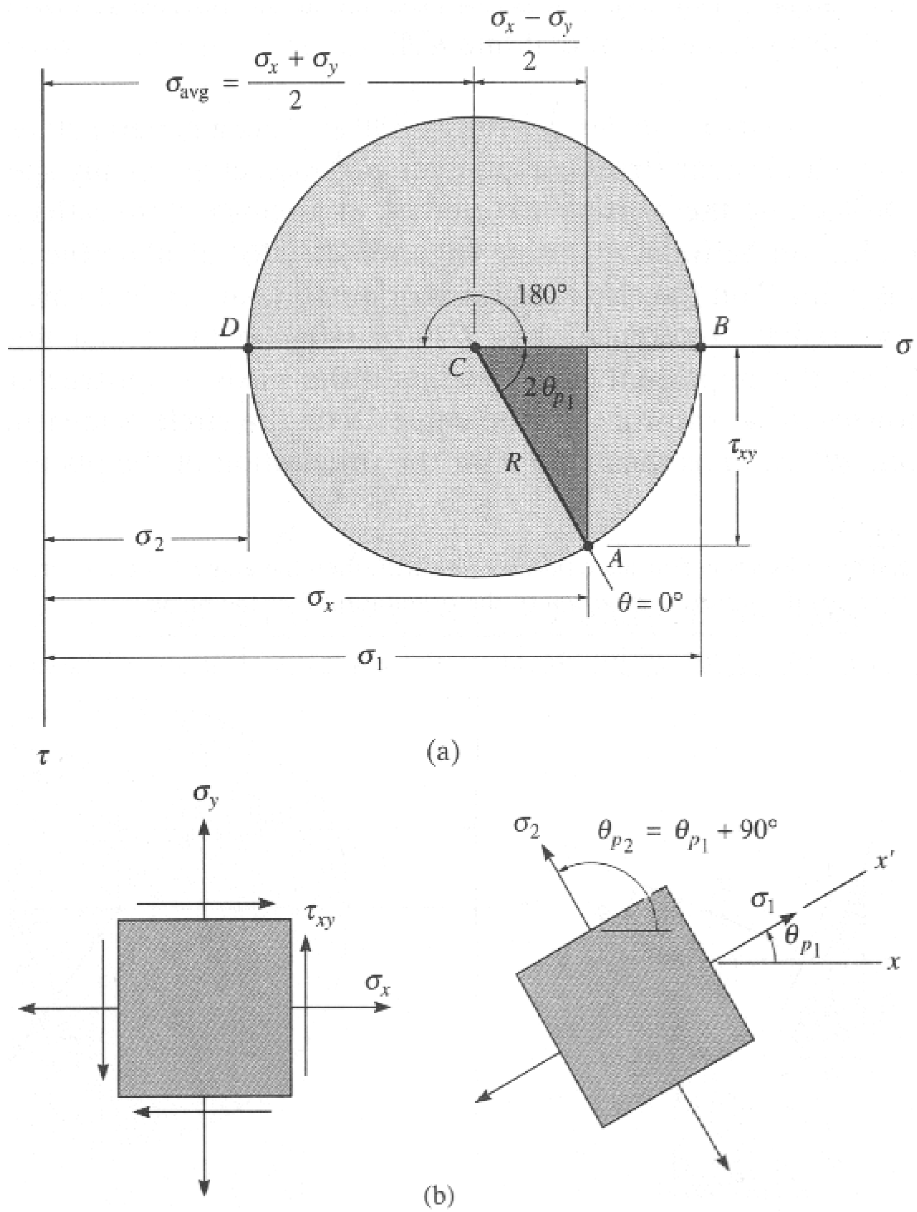
Principal Stresses

พิจารณารูปที่ 9-12a เราจะเห็นได้ว่า จุด B และจุด D ซึ่งเป็นจุดที่ Mohr's circle ตัดกับแกน σ และเป็นจุดที่แสดงค่าของหน่วยแรงตั้งฉากที่มีค่าสูงสุดและต่ำสุดบน stress element ที่ถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรง ดังที่แสดงในรูปที่ 9-12b นอกจากนั้นแล้ว เราจะเห็นว่า ที่จุด B และจุด D ค่าของหน่วยแรงเฉือนจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น จุดทั้งสองนี้จะเป็นจุดที่แสดงถึงค่าหน่วยแรงหลัก (principal stresses) ของสภาวะของหน่วยแรงบน element ดังกล่าว

จากรูปที่ 9-12a เราจะได้ว่า สมการ principal stresses $\sigma_1 = \sigma_{avg} + R$ และ $\sigma_2 = \sigma_{avg} - R$ ซึ่งเป็นสมการเดียวกันกับสมการที่ 9-5



รูปที่ 9-11



รูปที่ 9-12

จากรูปที่ 9-12a มุมที่วัดจากเส้นรัศมีอ้างอิง CA ($\theta = 0^o$) ถึงเส้นรัศมี CB ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกามีค่าเท่ากับ $2\theta_{p1}$ จากสามเหลี่ยมที่ระบายสีทึบ มุมนี้จะหาได้จากสมการ

$$\tan 2\theta_{p1} = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

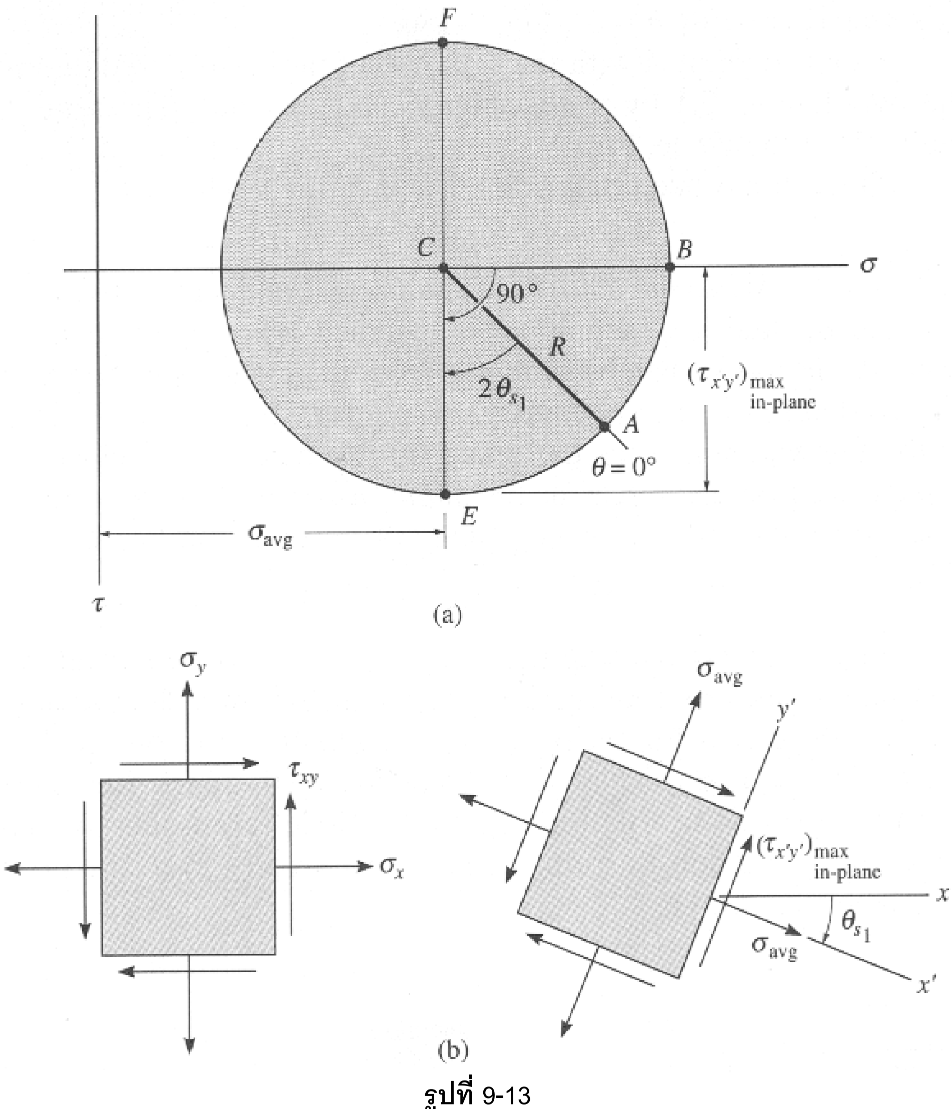
ซึ่งเป็นสมการเดียวกันกับสมการที่ 9-4

เมื่อเราได้มุม θ_{p1} แล้ว เราจะหาระนาบหลัก (principal plane) ของ element ดังกล่าวได้ โดยการหมุนแกนอ้างอิง x ทวนเข็มนาฬิกาไปที่แกน x' ดังที่แสดงในรูปที่ 9-12b

จากรูปที่ 9-12a เราจะเห็นว่า เส้นรัศมี CB จะทำมุมกับเส้นรัศมี CD เท่ากับ 2θ หรือ 180^o ดังนั้น ระนาบของหน่วยแรง σ_1 และของหน่วยแรง σ_2 จะทำมุมกัน $180^o/2 = 90^o$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-12b

Maximum In-Plane Shear Stress

จาก Mohr's circle ดังที่แสดงในรูปที่ 9-13a จุด $E(\sigma_{avg}, R)$ หรือจุด $F(\sigma_{avg}, -R)$ จะเป็นจุดที่แสดงค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุด ซึ่งมีสมการเช่นเดียวกับในสมการที่ 9-7 และ 9-8



รูปที่ 9-13

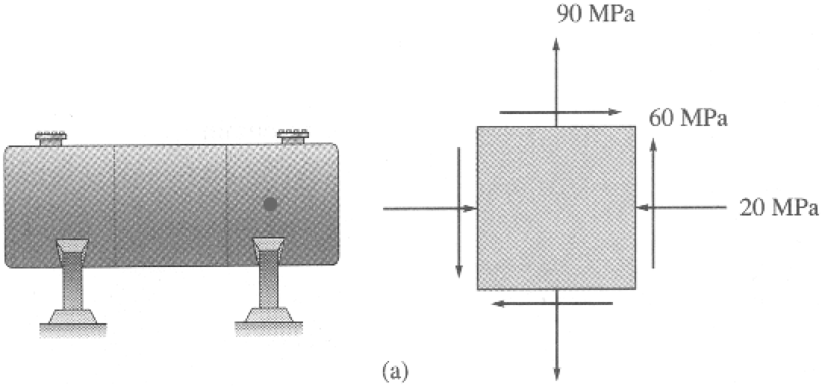
เนื่องจากเส้นรัศมี CE ทำมุมกับเส้นรัศมี CB เท่ากับ 90^o ดังนั้น ระนาบบน element ที่มีค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดจะทำมุม $90^o/2 = 45^o$ กับ principal plane

มุม $2\theta_{s1}$ ที่เส้นรัศมี CA กระทำต่อเส้นรัศมี CE ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจะคำนวณได้โดยใช้ตรีโกณมิติ

เมื่อเราได้ค่ามุม θ_{s1} แล้ว เราจะหาระนาบบน element ดังกล่าวได้ โดยการหมุนแกนอ้างอิง x ตามเข็มนาฬิกาไปที่แกน x' ดังที่แสดงในรูปที่ 9-13b และค่าของหน่วยแรงบนระนาบนี้จะเป็นพิกัดของจุด E คือ σ_{avg} และ R

ตัวอย่างที่ 9-4

กำหนดให้สภาวะของหน่วยแรงที่จุดวงกลมสีดำบนถังความดันมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ EX 9-4a จงหาสภาวะของหน่วยแรงในรูปของ principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element



(a)

รูปที่ Ex 9-4

จาก sign convention ที่เรากำหนด เราจะได้ว่า

$$\sigma_x = -20\text{ MPa} \qquad \sigma_y = +90\text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 60\text{ MPa}$$

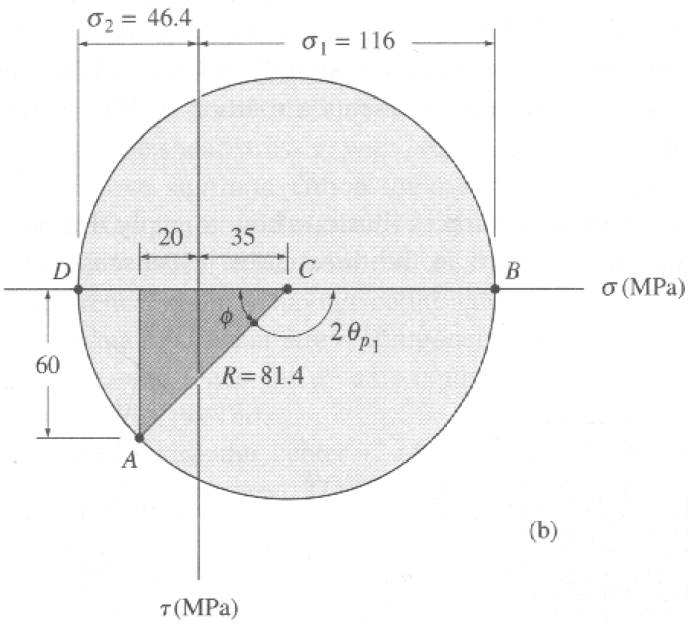
จุดศูนย์กลางของ Mohr's circle อยู่ที่พิกัด $(\sigma_{avg},0)$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20+90}{2} = 35\text{ MPa}$$

รัศมีของ Mohr's circle

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20-90}{2}\right)^2 + 60^2} = 81.4\text{ MPa}$$

กำหนดให้ Mohr's circle มีแกนของหน่วยแรงตั้งฉาก σ เป็นแกนนอนและแกนของหน่วยแรงเฉือน τ เป็นแกนตั้ง โดยให้แกนบวกมีทิศพุ่งลง ดังนั้น เราจะเขียน Mohr's circle ได้ดังที่แสดงในรูปที่ EX 9-4b



(b)

สภาวะของหน่วยแรงบนหน้าตัดที่ตั้งฉากกับแกน x ของ stress element จะเขียนให้อยู่ในรูปพิกัดของ Mohr's circle (σ,τ) ได้เป็น $(-20,+60)$ ซึ่งคือจุด A ที่อยู่บน Mohr's circle

หาสภาวะของหน่วยแรงในรูปของ principal stresses

จาก Mohr's circle ดังที่แสดงในรูปที่ EX 9-4b เราจะได้ว่า สภาวะของหน่วยแรง principal stresses จะหาได้โดยใช้พิกัดของจุด B และจุด D บน Mohr's circle โดยที่

$$\sigma_1 = 35 + 81.4 = 116.4\,\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 35 - 81.4 = -46.4\,\text{MPa}$$

และหน่วยแรงเฉือนที่สภาวะของหน่วยแรง principal stresses จะมีค่าเป็นศูนย์

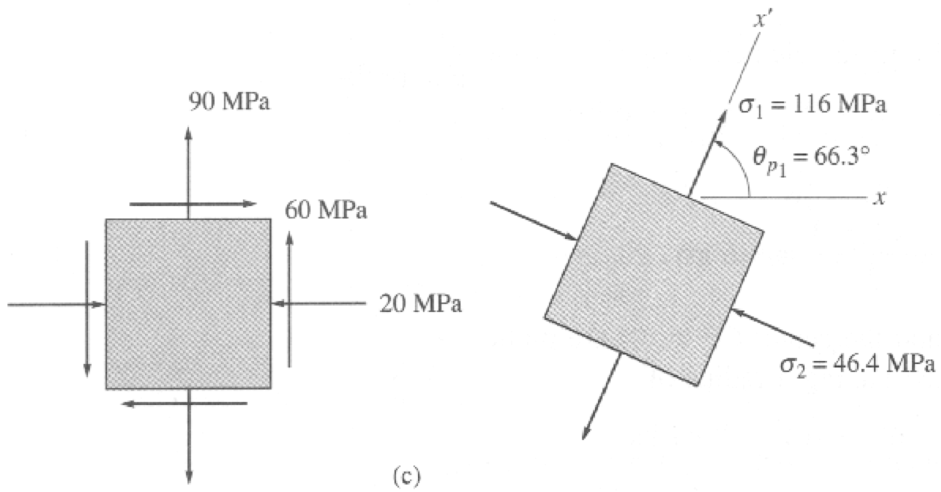
ทิศทางการหมุนของ stress element ที่ถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรง principal stresses จะหาได้โดยการหมุนเส้นรัศมี AC ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $2\theta_{p_1}$ จนทับกับเส้นรัศมี BC ของ Mohr's circle โดยที่

$$2\theta_{p_1} = 180^o - \phi = 180^o - \tan^{-1}\frac{60}{55} = 132.5^o$$

ดังนั้น แกน x ของ stress element จะต้องถูกหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปในแนวของแกน x' เป็นมุม

$$\theta_{p1} = \frac{132.5^o}{2} = 66.3^o$$

รูปที่ EX 9-4c แสดงสภาวะของหน่วยแรงของ principal stresses <u>Ans.</u>



(c)

หาสภาวะของหน่วยแรงในรูปของ maximum in-plane shear stress

จาก Mohr's circle ดังที่แสดงในรูปที่ EX 9-4d เราจะได้ว่า สภาวะของหน่วยแรง maximum in-plane shear stress จะหาได้โดยใช้พิกัดของจุด E และจุด F บน Mohr's circle โดยที่ maximum in-plane shear stress จะมีค่าเท่ากับ

$$\tau_{\substack{\max \\ in-plane}} = 81.4\,\text{MPa}$$

และค่าหน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้น stress จะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_{avg} = 35\,\text{MPa}$$

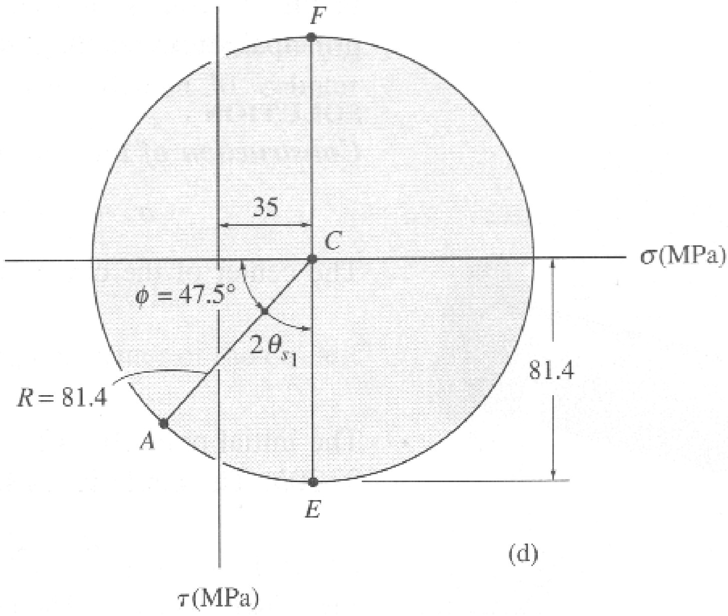
ทิศทางการหมุนของ stress element ที่ถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรง maximum in-plane shear stress จะหาได้โดยการหมุนเส้นรัศมี AC ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $2\theta_{s1_1}$ จนทับกับเส้นรัศมี EC ของ Mohr's circle โดยที่

$$2\theta_{s_1} = 90^o - \phi = 90^o - 47.5^o = 42.5^o$$

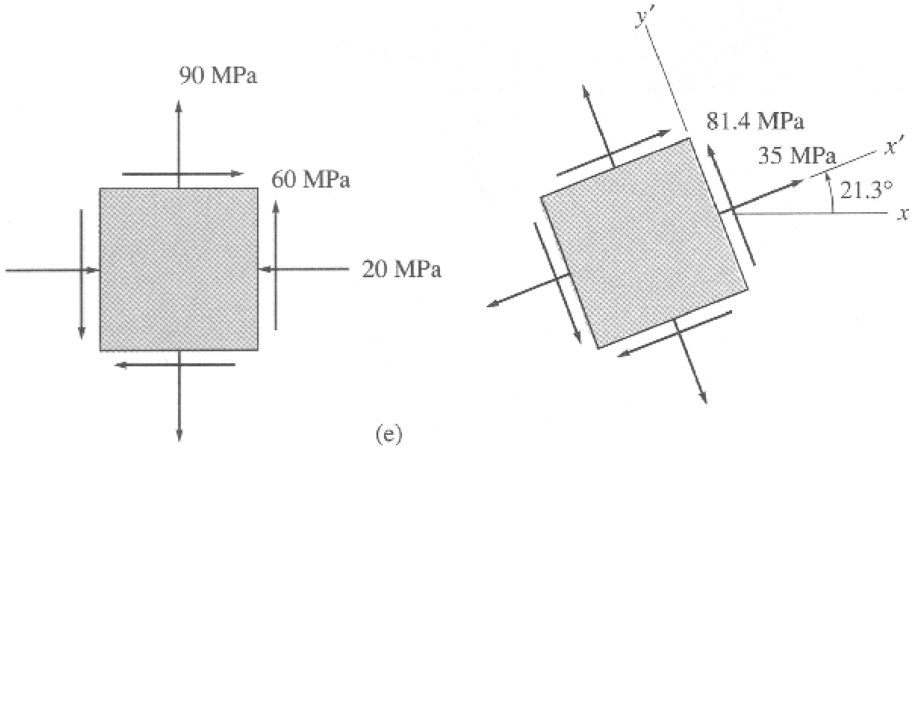
ดังนั้น แกน x ของ stress element จะต้องถูกหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปในแนวของแกน x' เป็นมุม

$$\theta_{p1} = \frac{42.5^o}{2} = 21.3^o$$

รูปที่ EX 9-4e แสดงสภาวะของหน่วยแรงของ principal stresses Ans.



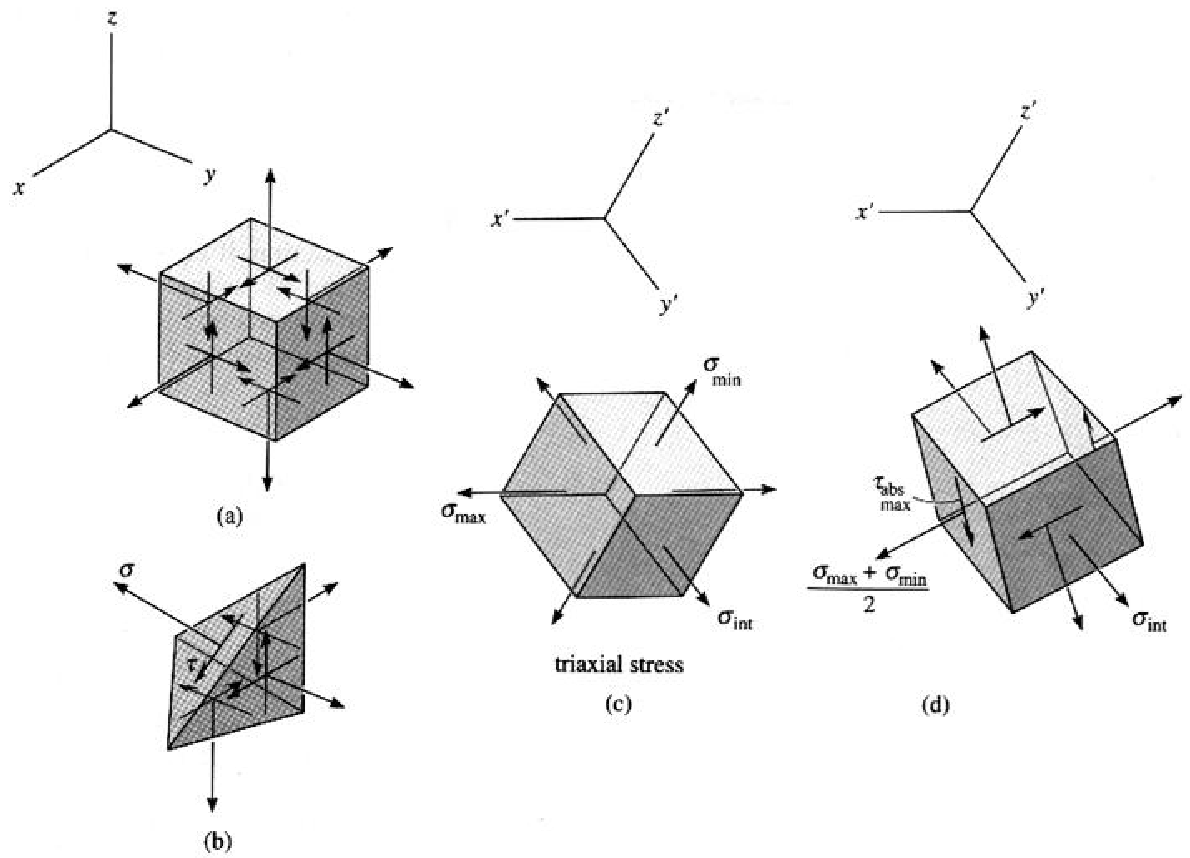
(d)



(e)

9.5 หน่วยแรงเฉือนในระนาบสูงสุดสัมบูรณ์ (Absolute Maximum Shear Stresses)

ในกรณีที่ element ถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงที่อยู่ในสามมิติสภาวะหนึ่ง ดังที่แสดงในรูปที่ 9-14a แล้วเราสามารถใช้ stress transformation หาสภาวะของหน่วยแรงบนระนาบใดๆ ของ element ดังกล่าวได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-14b และหาสภาวะ principal stresses ที่เกิดขึ้นบน element ดังกล่าวได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-14c โดยที่ principal stresses จะมีค่าเป็น $\sigma_{\max} \geq \sigma_{\text{int}} \geq \sigma_{\min}$ อย่างไรก็ตาม การทำ stress transformation ในกรณีนี้จะค่อนข้างยุ่งยากมาก ซึ่งเราจะได้ศึกษาต่อไปในวิชาขั้นสูงที่กล่าวถึง theory of elasticity



รูปที่ 9-14

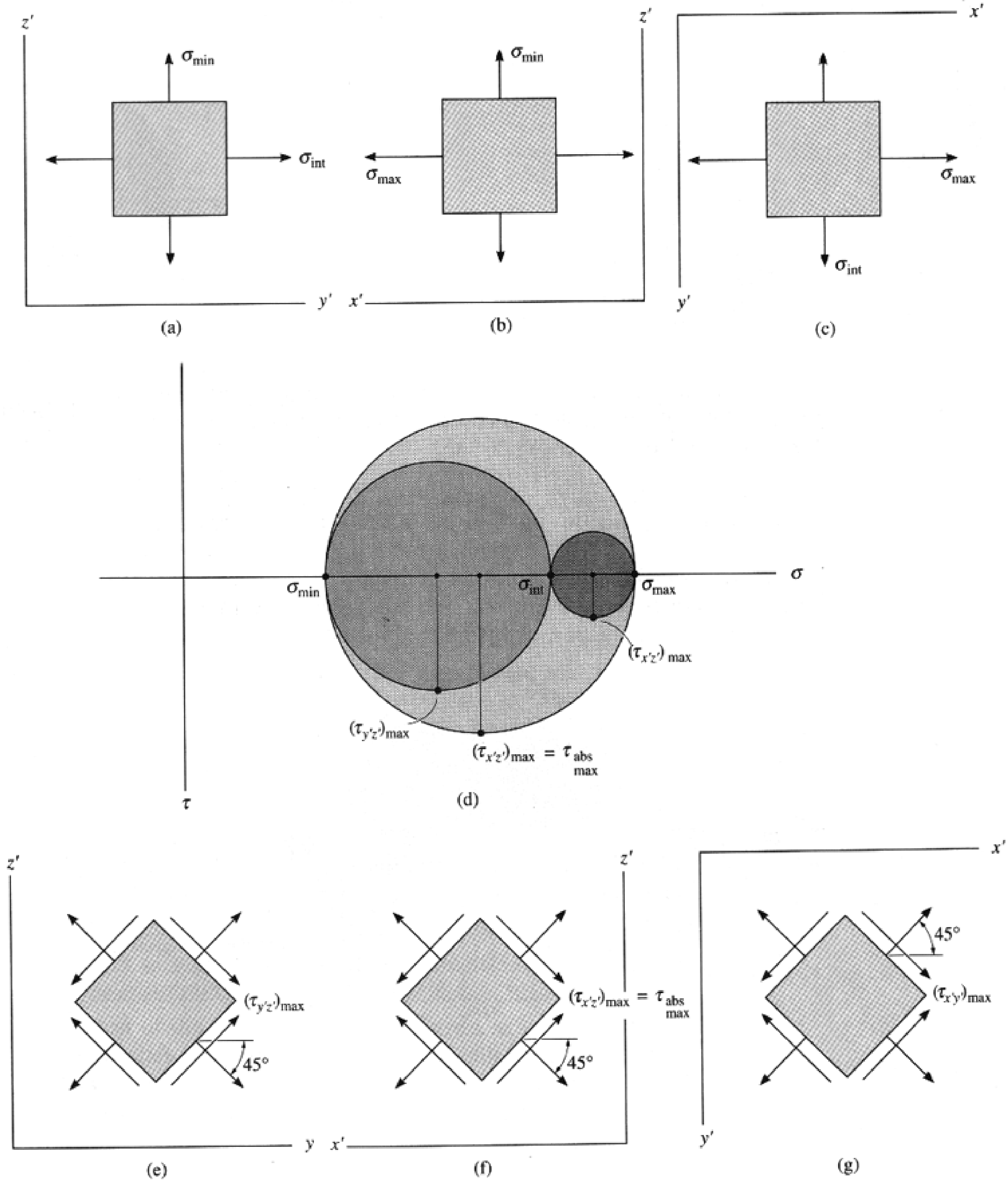
ใน section นี้ เราจะสมมุติว่า เราทราบค่า principal stresses และ principal planes ของ element ที่ถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงในสามมิติ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-14c ซึ่งสภาวะของ principal stresses นี้มักจะถูกเรียกว่า สภาวะ triaxial stress ถ้าเราพิจารณา element ดังกล่าวในระนาบ $y'-z'$, $x'-z'$, และ $x'-y'$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-15a ถึง 9-15c แล้ว เราจะสามารถเขียน Mohr's circle ของ element ดังกล่าวได้ดังที่แสดงในรูปที่ 9-15d และเราจะหาค่า maximum in-plane shear stress และหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยของแต่ละกรณีได้ เช่น ค่า maximum in-plane shear stress และหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยของ element ในระนาบ $y'-z'$ จะมีค่าเท่ากับ $(\tau_{y'z'})_{\max} = (\sigma_{\text{int}} - \sigma_{\min})/2$ และ $(\sigma_{y'z'})_{avg} = (\sigma_{\text{int}} + \sigma_{\min})/2$ ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-15e โดยที่ element ที่ถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงที่หามาได้จะทำมุม 45^o กับตำแหน่งของ element ดังที่แสดงในรูปที่ 9-15a ในลักษณะที่คล้ายกัน เราจะหาสภาวะ maximum in-plane shear stress และหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยบน element ในระนาบ $x'-z'$ และ $x'-y'$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-15f และ 9-15g ตามลำดับ

เมื่อเราเปรียบเทียบ Mohr's circle ทั้งสามวงในรูปที่ 9-15d เราจะเห็นว่า absolute maximum shear stress หรือ $\tau_{\substack{abs \\ \max}}$ จะหามาได้จาก Mohr's circle ที่มีรัศมีที่มากที่สุดที่เกิดขึ้นบน element ดังที่แสดงในรูปที่ 9-15b ดังนั้น

$$\tau_{\substack{abs \\ \max}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \tag{9-13}$$

และหน่วยแรงตั้งฉากเฉลี่ยจะหาได้จากสมการ

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \tag{9-14}$$



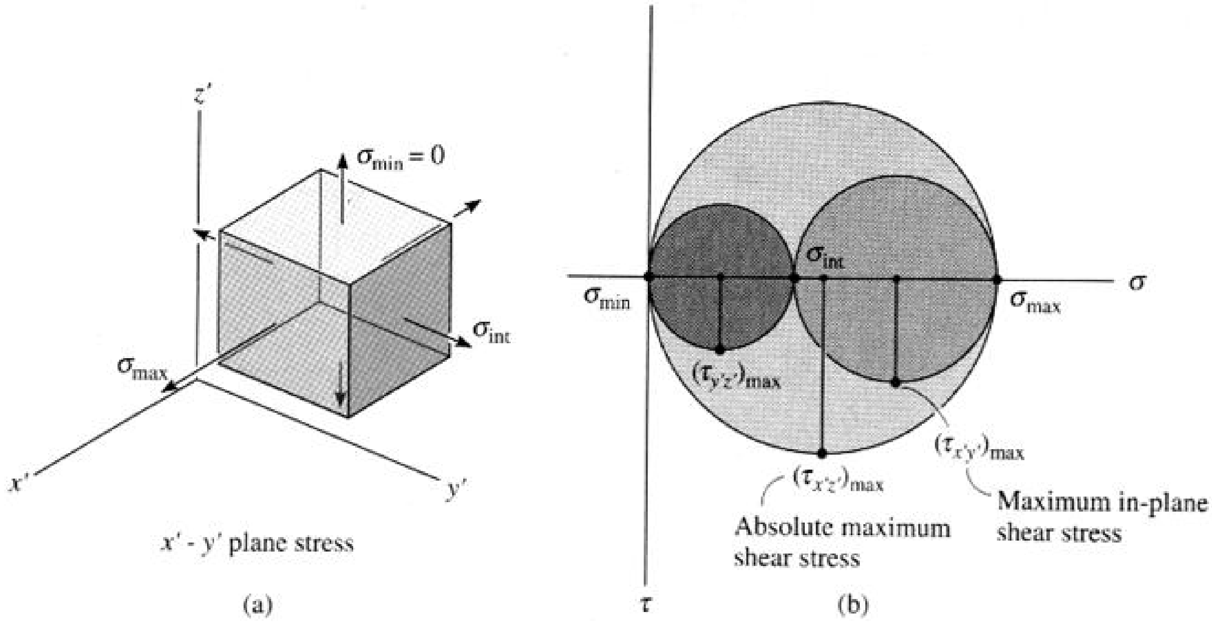
รูปที่ 9-15

Plane Stress

ในกรณีที่ stress element ถูกกระทำโดย principal stress $\sigma_{\max}$ อยู่ในแนวแกน x' principal stress σ_{int} อยู่ในแนวแกน y' และ principal stress $\sigma_{\min} = 0$ อยู่ในแนวแกน z' ที่ตั้งฉากกับระนาบ $x' - y'$ ดังที่แสดงในรูปที่ 9-16a แล้ว เราอาจจะพิจารณาสภาวะของหน่วยแรงดังกล่าวเป็นสภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress ได้

ถ้า $\sigma_{\max}$ และ σ_{int} เป็นหน่วยแรงดึงแล้ว เราจะเขียน Mohr's circle ของสภาวะของหน่วยแรง principal stresses ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 9-16b และค่า maximum in-plane shear stress $(\tau_{x'y'})_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\text{int}})/2$ จะไม่เป็นค่า absolute maximum shear stress แต่ค่า absolute maximum shear stress จะเกิดขึ้นในระนาบ $x' - z'$ ซึ่งอยู่นอกระนาบ $x' - y'$ ที่ principal stresses กระทำและมีค่าเท่ากับ

$$\tau_{\substack{abs \\ \max}} = (\tau_{x'z'})_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - 0}{2} = \frac{\sigma_{\max}}{2} \tag{9-15}$$

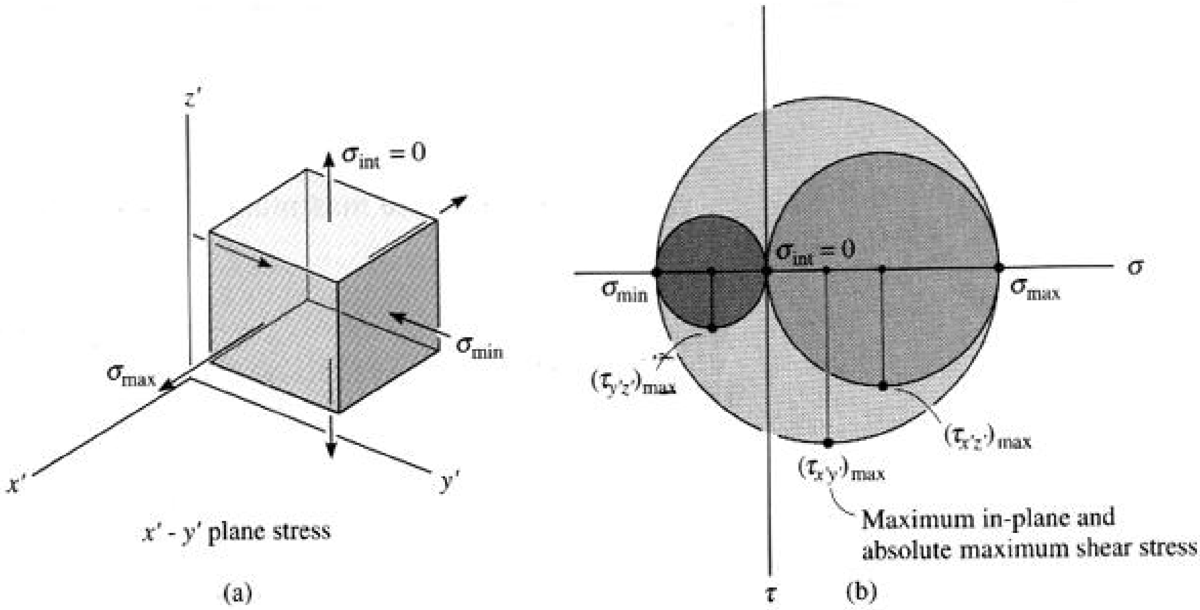


รูปที่ 9-16

ในกรณีที่ stress element ถูกกระทำโดย principal stress $\sigma_{\max}$ อยู่ในแนวแกน x' ซึ่งเป็นหน่วยแรงดึง principal stress $\sigma_{\text{int}} = 0$ อยู่ในแนวแกน z' ที่ตั้งฉากกับระนาบ $x' - y'$ และ principal stress $\sigma_{\min}$ อยู่ในแนวแกน y' ซึ่งเป็นหน่วยแรงกดอัด ดังที่แสดงในรูปที่ 9-17a แล้ว เราจะเขียน Mohr's circle ของสภาวะหน่วยแรง principal stresses ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 9-17b ซึ่งเราจะเห็นว่า ค่า absolute maximum shear stress จะเกิดขึ้นในระนาบ $x' - y'$ ซึ่งเป็นระนาบที่ principal stresses กระทำและมีค่าเท่ากับ

$$\tau_{\substack{abs \\ \max}} = (\tau_{x'y'})_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \tag{9-15}$$

การพิจารณาค่า absolute maximum in-plane shear stress ที่กล่าวถึงมานี้ มีความสำคัญมากในการออกแบบชิ้นส่วนของโครงสร้างหรือเครื่องจักรกลเช่น เพลา เป็นต้น ที่ทำด้วยวัสดุแบบ ductile material เนื่องจากกำลังของวัสดุดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับความสามารถของวัสดุในการรับแรงเฉือน



z'
$\sigma_{int} = 0$
σ_{min}
σ_{max}
x'
y'
x' - y' plane stress
(a)
$\sigma_{int} = 0$
σ
σ_{min}
σ_{max}
$(\tau_{y'z'})_{max}$
$(\tau_{x'z'})_{max}$
$(\tau_{x'y'})_{max}$
Maximum in-plane and
absolute maximum shear stress
τ
(b)

รูปที่ 9-17

ตัวอย่างที่ 9-5

กำหนดให้สภาวะของหน่วยแรงบน stress element หนึ่งมีค่าเป็น $\sigma_x = 100\text{ MPa}$, $\sigma_y = -60\text{ MPa}$, และ $\tau_{xy} = 80\text{ MPa}$ จงหาค่า principle stresses และค่า absolute maximum shear stress ของสภาวะของหน่วยแรงดังกล่าว

Principal normal stresses

จุดศูนย์กลางของ Mohr's circle อยู่ที่พิกัด $(\sigma_{avg}, 0)$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100-60}{2} = 20\text{ MPa}$$

รัศมีของ Mohr's circle

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{100-(-60)}{2}\right)^2 + 80^2} = 113.1\text{ MPa}$$

กำหนดให้ Mohr's circle มีแกนของหน่วยแรงตั้งฉาก σ เป็นแกนนอนและแกนของหน่วยแรงเฉือน τ เป็นแกนตั้ง โดยให้แกนบวกมีทิศพุ่งลง ดังนั้น เราจะเขียน Mohr's circle ได้ดังที่แสดงในรูปที่ EX 9-5 และเราจะได้ว่า สภาวะของหน่วยแรง principal stresses จะหาได้โดยใช้พิกัดของจุด B และจุด D บน Mohr's circle โดยที่

$$\sigma_1 = 20 + 113.1 = 133.1\text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 20 - 113.1 = -93.137\text{ MPa}$$

และทิศทางการหมุนของ stress element ที่ถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรง principal stresses จะหาได้โดยการหมุนเส้นรัศมี OA ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $2\theta_{p_1}$ จนทับกับเส้นรัศมี BC ของ Mohr's circle โดยที่

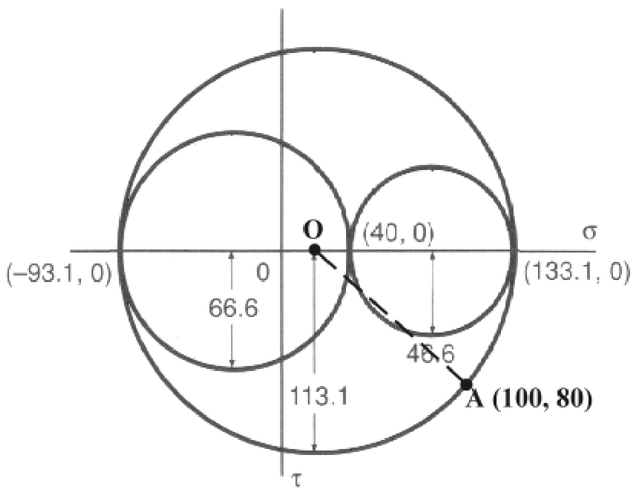
$$2\theta_{p_1} = \tan^{-1}\frac{80}{(100-(-80))/2} = 45.0^o$$

ดังนั้น แกน x ของ stress element จะต้องถูกหมุนทวนเข็มนาฬิกาไปในแนวของแกน x' เป็นมุม

$$\theta_{p1} = \frac{45.0^o}{2} = 22.5^o$$

เนื่องจาก principal stresses ในทิศทาง z มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\sigma_{max} = 133.1\text{ MPa} \qquad \sigma_{int} = 0\text{ MPa} \qquad \sigma_{min} = -93.137\text{ MPa}$$ <u>Ans.</u>



รูปที่ EX 9-5

Absolute maximum shear stress

จากสมการที่ 9-13 และ 9-14 เราจะได้ว่า

$$\tau_{\substack{abs \\ \max}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{133.137 - (-93.137)}{2} = 113.14\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{133.1 + (-93.1)}{2} = 20\ \text{MPa}$$

ซึ่งค่าดังกล่าวสามารถหาได้โดยการเขียน Mohr's circle ในระนาบ $y' - z'$, $x' - z'$, และ $x' - y'$ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 9-5 และค่า absolute maximum shear stress จะเป็นค่าเดียวกันกับ maximum in-plane shear stress ในระนาบ $x' - y'$ ที่หาได้จากการหมุน stress element เริ่มต้นในทิศทางตามเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม 22.5^o Ans.

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9

9-1 สภาวะของหน่วยแรงที่จุดๆ หนึ่งบนชิ้นส่วนของโครงสร้างมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-1

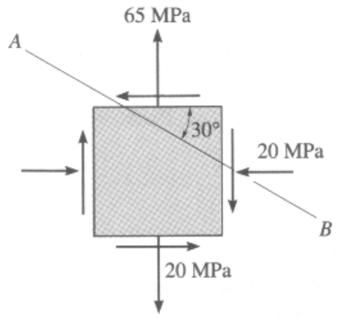
a.) จงหาหน่วยแรงต่างๆ ที่กระทำอยู่บนระนาบ AB

b.) จงหาสภาวะของหน่วยแรงเมื่อสภาวะของหน่วยแรงถูกหมุนเป็นมุมตามเข็มนาฬิกาโดยใช้สมการ stress-transformation

c.) จงหาสภาวะของหน่วยแรงเมื่อสภาวะของหน่วยแรงถูกหมุนเป็นมุมตามเข็มฯาฬิกาโดยใช้ Mohr's Circle

d.) จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element และทิศทางของ element โดยใช้สมการ stress-transformation

e.) จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element และทิศทางของ element โดยใช้ Mohr's Circle



รูปที่ Prob. 9-1

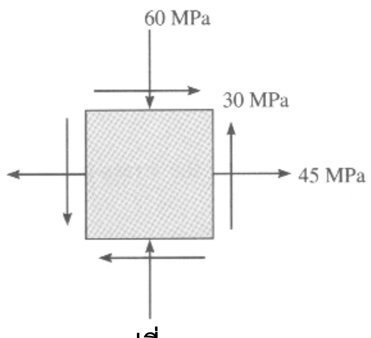
9-2 สภาวะของหน่วยแรงที่จุดๆ หนึ่งบนชิ้นส่วนของโครงสร้างมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-2

a.) จงหาสภาวะของหน่วยแรงเมื่อสภาวะของหน่วยแรงถูกหมุนเป็นมุมตามเข็มนาฬิกาโดยใช้สมการ stress-transformation

b.) จงหาสภาวะของหน่วยแรงเมื่อสภาวะของหน่วยแรงถูกหมุนเป็นมุมตามเข็มฯาฬิกาโดยใช้ Mohr's Circle

c.) จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element และทิศทางของ element โดยใช้สมการ stress-transformation

d.) จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element และทิศทางของ element โดยใช้ Mohr's Circle

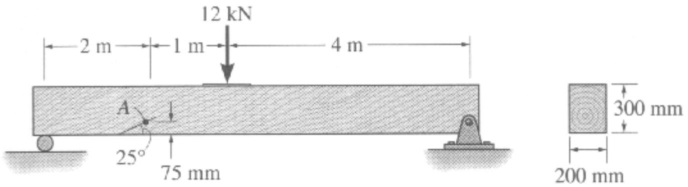


รูปที่ Prob. 9-2

9-3 คานไม้ถูกกระทำโดยแรง $12\ \mathrm{kN}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-3 ถ้าไม้เสี้ยนไม้ที่จุด A ทำมุม 25^o กับแนวนอน

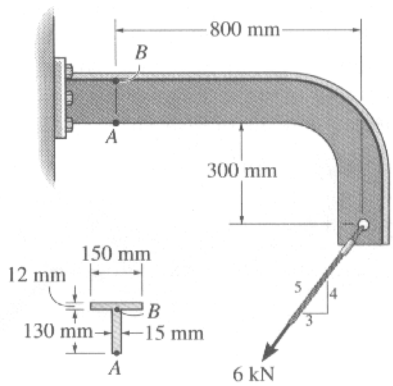
a.) จงหาหน่วยแรงตั้งฉาก (normal stress) ในแนวตั้งฉากกับเสี้ยนไม้และหน่วยแรงเฉือน (shear stress) ในแนวขนานกับเสี้ยนไม้

b.) จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element และทิศทางของ element



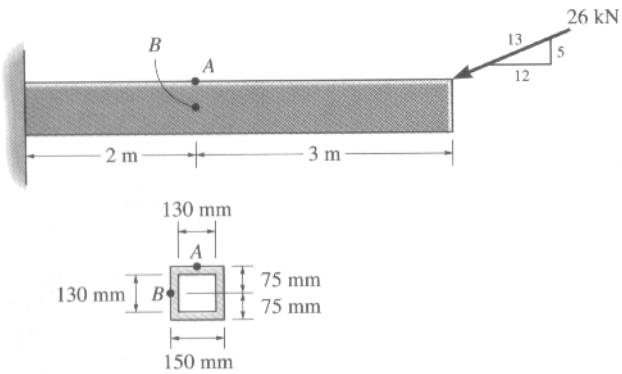
รูปที่ Prob. 9-3

9-4 จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element ที่จุด B ของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-4



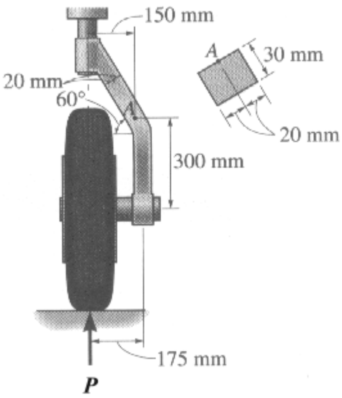
รูปที่ Prob. 9-4

9-5 จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element ที่จุด B ของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-5



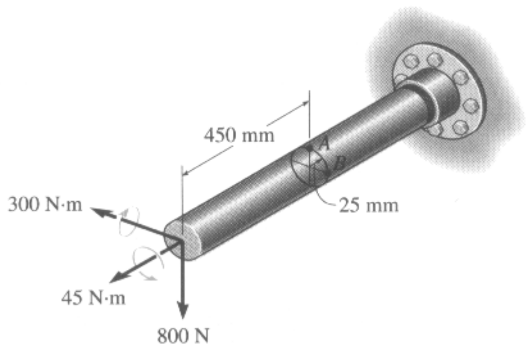
รูปที่ Prob. 9-5

9-6 จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element ที่จุด A ของชิ้นส่วนที่รองรับล้อของเครื่องบิน เมื่อกำหนดให้แรงกระทำมีค่า $P = 12\ \text{kN}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-6



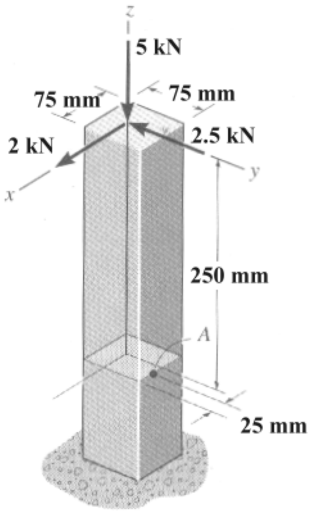
รูปที่ Prob. 9-6

9-7 จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element ที่จุด A และจุด B ของเพลาตัน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-7



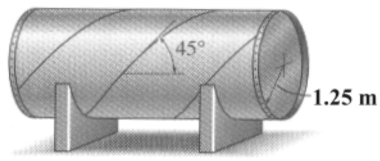
รูปที่ Prob. 9-7

9-8 กำหนดให้เสาหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกกระทำโดยแรงต่างๆ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-8 จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element ที่จุด A



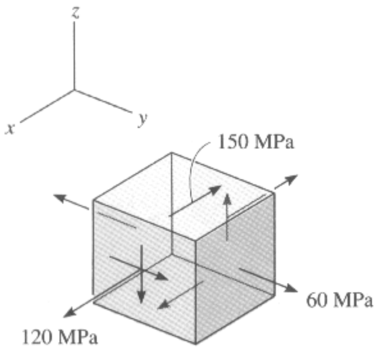
รูปที่ Prob. 9-8

9-9 กำหนดให้ cylindrical pressure vessel ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-9 มีรัศมีภายใน $1.25\ \mathrm{m}$ และหนา $15\ \mathrm{mm}$ และถูกกระทำโดยแรงดันภายใน $p = 8\ \mathrm{MPa}$ ถ้า pressure vessel ดังกล่าวมีรอยเชื่อมทำมุม 45^o กับแนวนอน จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses ที่เกิดขึ้นบนรอยเชื่อม



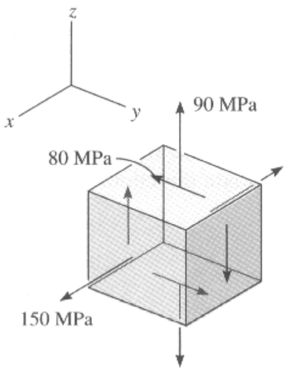
รูปที่ Prob. 9-9

9-10 จงหา principal stresses และ absolute maximum shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-10



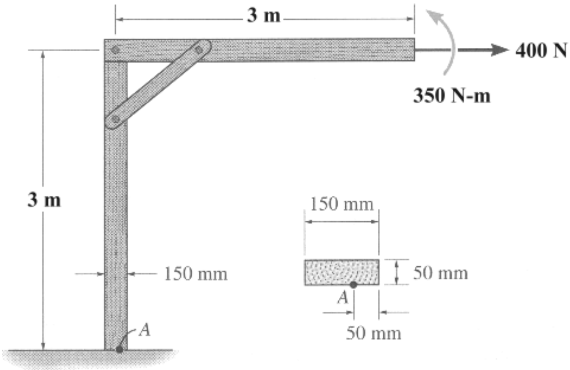
รูปที่ Prob. 9-10

9-11 จงหา principal stresses และ absolute maximum shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-11



รูปที่ Prob. 9-11

9-12 กำหนดให้ frame ไม้มีลักษณะและถูกกระทำโดนแรงและโมเมนต์ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 9-12 จงหา principal stresses และ absolute maximum shear stress ที่เกิดขึ้นบน stress element ที่จุด A



รูปที่ Prob. 9-12

บทที่ 10

การแปลงความเครียด (Strain Transformation)

เรียบเรียงโดย อ.ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

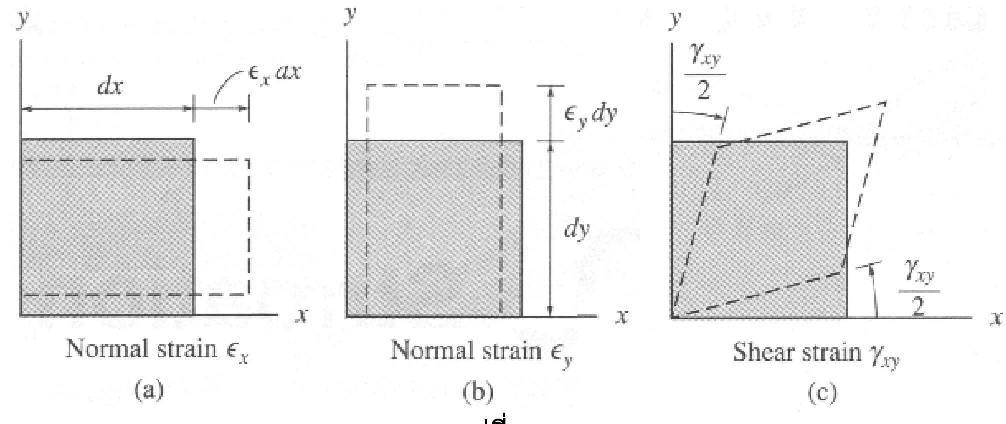
10.1 ความเครียดในระนาบ (Plane Strain)

จากบทที่ 2 เราได้ทราบไปแล้วว่า ภายใต้การกระทำของแรง วัตถุจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างขึ้น ซึ่งมักจะถูกวัดหรืออธิบายได้โดยใช้ปริมาณที่เรียกว่า ความเครียด (strain)

ในการพิจารณาถึงสภาวะของความเครียดที่เกิดขึ้นที่จุดๆ หนึ่ง เราจะทำการพิจารณาสภาวะของความเครียดที่เกิดขึ้นบน cubic volume element เล็กๆ ที่ล้อมรอบจุดนั้น โดยทั่วไปแล้ว สภาวะของความเครียดบน cubic volume element จะประกอบไปด้วยความเครียดทั้งหมด 6 ค่าคือ ความเครียดตั้งฉาก ε_x, ε_y, และ ε_z และความเครียดเฉือน γ_{xy}, γ_{yz}, และ γ_{zx} ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน ความเครียดทั้ง 6 ค่านี้จะมีค่าเปลี่ยนไปตามทิศทางการวางตัวของ cubic volume element ในลักษณะที่คล้ายคลึงกันกับหน่วยแรง

ในการทดสอบวัสดุ เราจะวัดค่าของความเครียดเหล่านี้ได้โดยใช้ strain gauge ซึ่งโดยปกติแล้ว เราจะสามารถทำได้ในบางทิศทางเท่านั้น ดังนั้น ถ้าเราสนใจที่จะทราบค่าของความเครียดในทิศทางอื่นๆ แล้ว เราจะต้องทำการแปลงความเครียด (strain transformation) เพื่อหาค่าของความเครียดในทิศทางนั้นๆ ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไปในบทนี้

เช่นเดียวกับในกรณีของหน่วยแรง ความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนโครงสร้างหรือเครื่องจักรกลจะถูกลดจำนวนให้อยู่ในรูปของสภาวะของความเครียดในระนาบเดียว (plane strain) ได้ โดยที่สภาวะของความเครียดแบบ plane strain ในระบบแกน $x-y$ จะประกอบไปด้วยความเครียดตั้งฉาก ε_x และ ε_y และความเครียดเฉือน γ_{xy} ซึ่งกระทำอยู่บนด้านทั้งสี่ด้านของ strain element ดังที่แสดงในรูปที่ 10-1 จากรูป เราจะเห็นได้ว่า ความเครียดตั้งฉาก ε_x และ ε_y จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความยาวในแกน x และแกน y ตามลำดับ และความเครียดเฉือน γ_{xy} จะทำให้เกิดการหมุนสัมพัทธ์ของหน้าตัดที่อยู่ติดกันบน element นั้น

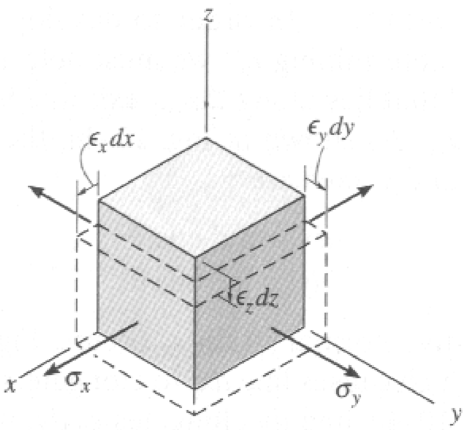


รูปที่ 10-1

ถึงแม้นว่า plane strain และ plane stress จะมีหน่วยแรงและความเครียดสามองค์ประกอบเท่ากันและอยู่บนระนาบเดียวกัน แต่โดยส่วนใหญ่แล้ว plane strain จะไม่ทำให้เกิด plane stress และ plane stress จะไม่ทำให้เกิด plane strain

พิจารณา cubic volume element ดังที่แสดงในรูปที่ 10-2 ซึ่งถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress σ_x และ σ_y ภายใต้หน่วยแรงทั้งสองนี้ เราจะเห็นได้ว่า cubic volume element จะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังที่แสดงโดยเส้นประ ซึ่งนอกจากจะทำให้มีความเครียดตั้งฉาก ε_x และ ε_y เกิดขึ้นแล้ว การเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวยัง

จะทำให้มีความเครียดตั้งฉาก ε_z เกิดขึ้นด้วย แต่ในกรณีที่ cubic volume element ถูกกระทำโดยสภาวะของความเครียดแบบ plane strain ε_x และ ε_y แล้ว เราจะเห็นได้ว่า cubic volume element จะมีเฉพาะหน่วยแรงตั้งฉาก σ_x และ σ_y เกิดขึ้นเท่านั้น แต่จะไม่มีหน่วยแรงตั้งฉาก σ_z เกิดขึ้นเลย ดังนั้น โดยทั่วไปแล้ว เราอาจจะกล่าวได้ว่า plane stress จะไม่เกิดขึ้นพร้อมกันกับ plane strain ยกเว้นในกรณีที่ Poisson's ratio มีค่าเท่ากับศูนย์ และเนื่องจากหน่วยแรงเฉือนและความเครียดเฉือนไม่มีความสัมพันธ์กับ Poisson's ratio ดังนั้น เมื่อหน่วยแรงเฉือน $\tau_{xz} = 0$ แล้ว ความเครียดเฉือน $\gamma_{xz} = 0$ และเมื่อหน่วยแรงเฉือน $\tau_{yz} = 0$ แล้ว ความเครียดเฉือน $\gamma_{yz} = 0$



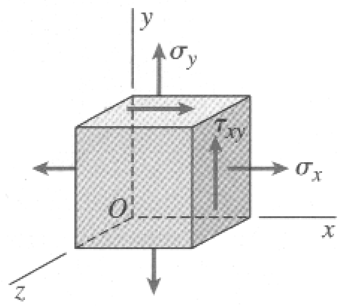
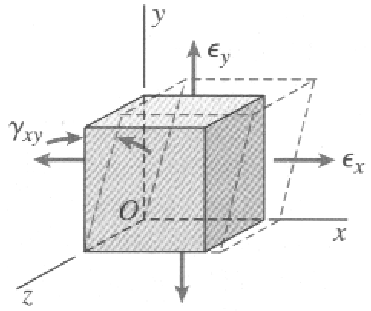
Plane stress, σ_x, σ_y, does not cause plane strain in the x–y plane since $\epsilon_z \neq 0$

รูปที่ 10-2

ตารางที่ 10-1 แสดงการเปรียบเทียบหน่วยแรงและความเครียดต่างๆ ที่เกิดขึ้นบน cubic volume element ที่ถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress และสภาวะของความเครียดแบบ plane strain ซึ่งเราจะกล่าวสรุปเงื่อนไขของการเกิด plane stress และ plane strain ได้ว่า

1. เงื่อนไขที่ก่อให้เกิด plane stress คือ $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$, และ $\tau_{yz} = 0$
2. เงื่อนไขที่ก่อให้เกิด plane strain คือ $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xz} = 0$, และ $\gamma_{yz} = 0$

ตารางที่ 10-1

	Plane stress	Plane strain
		
Stresses	$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$ σ_x , σ_y , และ τ_{xy} อาจมีค่าไม่เท่ากับศูนย์	$\tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$ σ_x , σ_y , σ_z , และ τ_{xy} อาจมีค่าไม่เท่ากับศูนย์
Strains	$\gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$ ε_x , ε_y , ε_z , และ γ_{xy} อาจมีค่าไม่เท่ากับศูนย์	$\varepsilon_z = 0 \quad \gamma_{xz} = 0 \quad \gamma_{yz} = 0$ ε_x , ε_y , และ γ_{xy} อาจมีค่าไม่เท่ากับศูนย์

10.2 สมการการแปลงความเครียดในระนาบ (General Equations of Plane-Strain Transformation)

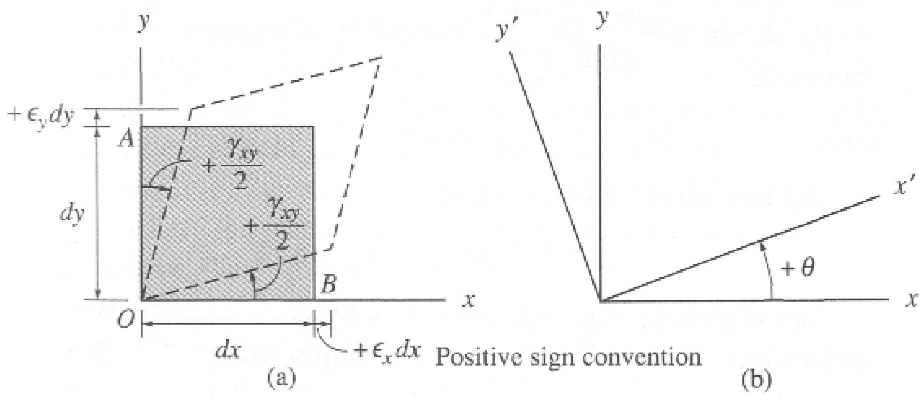
กำหนดให้ค่าของ plane strain ε_x , ε_y , และ γ_{xy} ที่เกิดขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งบนชิ้นส่วนของโครงสร้างหรือเครื่องจักรกลในระบบแกน $x-y$ เป็นค่าที่เราทราบ และเราต้องการหาค่าของ plane strain ε'_x , ε'_y , และ γ'_{xy} ที่อยู่ในระบบแกน $x'-y'$ เมื่อระบบแกน $x-y$ ทำมุมต่อระบบแกน $x'-y'$ เท่ากับ θ

Sign Convention

รูปที่ 10-3a แสดง sign convention ของความเครียดที่มีค่าเป็นบวกบน strain element โดยที่

1. ความเครียดตั้งฉาก ε_x และ ε_y จะมีค่าเป็นบวก เมื่อความเครียดตั้งฉากทั้งสองทำให้เกิดการยืดตัวไปในแนวแกน $+x$ และ $+y$ ตามลำดับ
2. ความเครียดเฉือน γ_{xy} จะมีค่าเป็นบวก เมื่อมุมภายใน AOB มีค่าลดลงน้อยกว่า 90^o

เราควรสังเกตด้วยว่า sign convention ของความเครียดนี้จะมีความสอดคล้องกับ sign convention ที่เราใช้ในกรณีของ plane stress ที่กล่าวถึงไปแล้วในบทที่ 9 คือ หน่วยแรง σ_x , σ_y , และ τ_{xy} ที่เป็นบวกจะทำให้เกิดความเครียด ε_x , ε_y , และ γ_{xy} ที่เป็นบวก นอกจากนั้นแล้ว มุม θ จะมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางหมุนตามกฎมือขวาจากแกน x ไปยังแกน x' หรือหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังที่แสดงในรูปที่ 10-3b



รูปที่ 10-3

Normal and Shear Strain Components

ในการที่จะหาสมการการแปลงความเครียด (strain transformation) ของความเครียดตั้งฉาก $\varepsilon_{x'}$ เราจะทำการหาค่าการยืดตัวของเส้นตรง dx' ในแนวแกน x' เมื่อ strain element ถูกกระทำโดยความเครียด ε_x , ε_y , และ γ_{xy} ที่มีค่าเป็นบวก จากรูปที่ 10-4a เราจะได้ว่า ส่วนของเส้นตรง dx' ในแนวแกน x และแกน y มีค่าเท่ากับ

$$dx = dx' \cos\theta$$
$$dy = dx' \sin\theta \qquad (10\text{-}1)$$

เมื่อความเครียดตั้งฉาก ε_x เกิดขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 10-4b แล้ว เส้นตรง dx จะเกิดการยืดตัว $\varepsilon_x dx$ ซึ่งทำให้เส้นตรง dx' เกิดการยืดตัว $\varepsilon_x dx \cos\theta$

ในลักษณะเดียวกัน เมื่อความเครียดตั้งฉาก ε_y เกิดขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 10-4c แล้ว เส้นตรง dy จะเกิดการยืดตัว $\varepsilon_y dy$ ซึ่งทำให้เส้นตรง dx' เกิดการยืดตัว $\varepsilon_y dy \sin\theta$

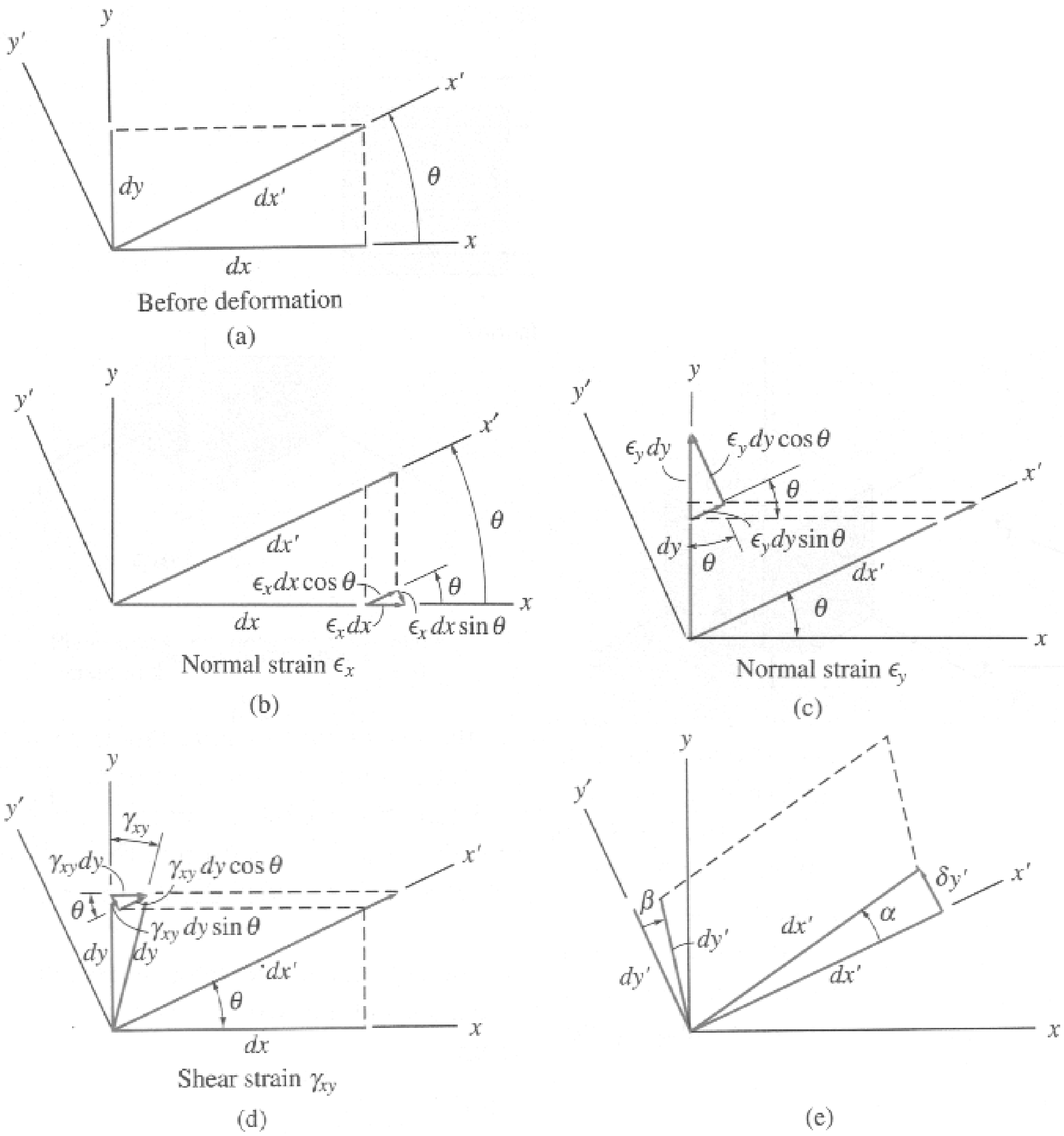
สุดท้าย สมมุติให้ dx ยังคงอยู่ที่ตำแหน่งเดิมในขณะที่วัตถุมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังนั้น ความเครียดเฉือน γ_{xy} ซึ่งเป็นค่าการเปลี่ยนแปลงมุมระหว่างเส้นตรง dx และเส้นตรง dy จะทำให้จุดปลายด้านบนของ dy เกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง $\gamma_{xy} dy$ ไปทางขวามือ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-4d และจะทำให้เส้นตรง dx' เกิดการยืดตัวเท่ากับ $\gamma_{xy} dy \cos\theta$

เมื่อเราทำการรวมค่าการยืดตัวทั้งสามค่าดังกล่าวเข้าด้วยกันแล้ว ค่าการยืดตัวลัพธ์ dx' จะมีค่าเท่ากับ

$$\delta x' = \varepsilon_x \, dx \cos\theta + \varepsilon_y \, dy \sin\theta + \gamma_{xy} \, dy \cos\theta$$

จากสมการที่ 2-2 เราจะได้ว่า ความเครียดตั้งฉากในแนวเส้นตรง dx' จะอยู่ในรูป $\varepsilon_{x'} = \delta x' / dx'$ ดังนั้น จากสมการที่ 10-1 เราจะได้ว่า

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta \qquad (10\text{-}2)$$



รูปที่ 10-4

ในการที่จะหาสมการ strain transformation ของความเครียดเฉือน $\gamma_{x'y'}$ เราจะทำการหามุมที่เส้นตรง dx' และ dy' หมุนไป เมื่อ strain element ถูกกระทำโดยความเครียด ε_x , ε_y , และ γ_{xy} ที่มีค่าเป็นบวก

พิจารณารูปที่ 10-4e ซึ่งแสดงการหมุนของเส้นตรง dx' ที่มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม α ซึ่งมุม α จะหาได้จากสมการ $\alpha = \delta y' / dx'$ โดยที่ $\delta y'$ จะเป็นผลรวมของการเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจาก ε_x รวมกับการเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจาก ε_y และรวมกับการเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจาก γ_{xy} โดยที่

จากรูปที่ 10-4b การเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจาก ε_x จะมีค่าเท่ากับ $-\varepsilon_x dx \sin\theta$

จากรูปที่ 10-4c การเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจาก ε_y จะมีค่าเท่ากับ $\varepsilon_y dy \cos\theta$

จากรูปที่ 10-4d การเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจาก γ_{xy} จะมีค่าเท่ากับ $-\gamma_{xy} dy \sin\theta$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\delta y' = -\varepsilon_x\, dx \sin\theta + \varepsilon_y\, dy \cos\theta - \gamma_{xy}\, dy \sin\theta$$

แทนค่าสมการที่ 10-1 และค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง $\delta y'$ ลงในสมการ $\alpha = \delta y'/dx'$ เราจะได้ว่า

$$\alpha = (-\varepsilon_x + \varepsilon_y)\sin\theta \cos\theta - \gamma_{xy}\sin^2\theta \qquad (10\text{-}3)$$

จากรูปที่ 10-4e เราจะเห็นว่า การหมุนของเส้นตรง dy' มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม β จากการวิเคราะห์เช่นเดียวกับที่ใช้ในการหามุม α หรือโดยการแทนค่า θ ลงในสมการที่ 10-3 ด้วยค่า $\theta + 90^o$ แล้วใช้ความสัมพันธ์ $\sin(\theta + 90^o) = \cos\theta$ และ $\cos(\theta + 90^o) = -\sin\theta$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\beta &= (-\varepsilon_x + \varepsilon_y)\sin(\theta + 90^o)\cos(\theta + 90^o) - \gamma_{xy}\sin^2(\theta + 90^o) \\ &= -(-\varepsilon_x + \varepsilon_y)\cos\theta \sin\theta - \gamma_{xy}\cos^2\theta\end{aligned}$$

เนื่องจากมุม α และมุม β เป็นมุมที่เส้นตรง dx' และ dy' ซึ่งเป็นด้านของ element ที่เริ่มต้นอยู่ในแนวแกน x' และแกน y' ตามลำดับ เกิดการหมุนไปจากแกนดังกล่าว และเนื่องจากมุม β หมุนไปในทิศทางที่ตรงกันข้ามกับมุม α ดังที่แสดงในรูปที่ 10-4e ดังนั้น element ดังกล่าวจะมีความเครียดเฉือนเกิดขึ้นเท่ากับ

$$\gamma_{x'y'} = \alpha - \beta = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin\theta \cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad (10\text{-}4)$$

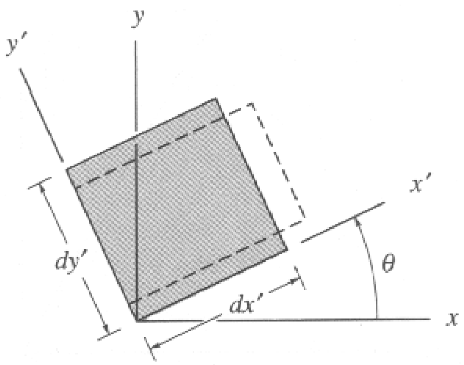
เนื่องจาก $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$, $\sin^2\theta = \dfrac{(1-\cos 2\theta)}{2}$, และ $\cos^2\theta = \dfrac{(1+\cos 2\theta)}{2}$ ดังนั้น เราจะเขียนสมการที่ 10-2 และ 10-4 ใหม่ได้เป็น

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \qquad (10\text{-}5)$$

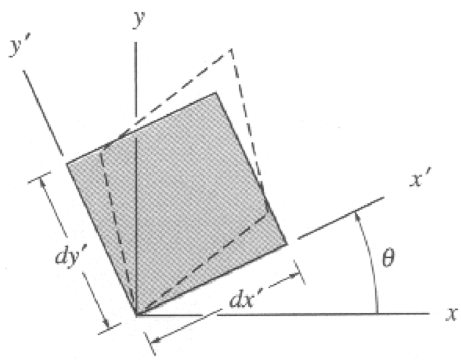
$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \qquad (10\text{-}6)$$

และความเครียด $\varepsilon_{y'}$ จะหามาได้จากการแทนค่ามุม θ ในสมการที่ 10-5 ด้วยค่ามุม $\theta + 90^o$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \qquad (10\text{-}7)$$



Positive normal strain, $\epsilon_{x'}$
(a)



Positive shear strain, $\gamma_{x'y'}$
(b)

รูปที่ 10-5

รูปที่ 10-5 แสดงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ element เมื่อค่าของความเครียดตั้งฉาก $\varepsilon_{x'}$ และความเครียดเฉือน $\gamma_{x'y'}$ มีค่าเป็นบวกแล้ว เราจะเห็นได้ว่า การเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวจะมีลักษณะที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ element เมื่อ element ดังกล่าวถูกกระทำโดยหน่วยแรงตั้งฉาก $\sigma_{x'}$ และหน่วยแรงเฉือน $\tau_{x'y'}$ ที่มีค่าเป็นบวก นอกจากนั้นแล้ว สมการของ plane-strain transformation (สมการที่ 10-5 ถึง 10-7) มีลักษณะที่คล้ายคลึงกับสมการของ plane-stress transformation (สมการที่ 9-1 ถึง 9-3) โดยการเปรียบเทียบ เราจะได้ว่า หน่วยแรงและความเครียดมีความสอดคล้องกัน ดังที่แสดงในตารางที่ 10-2

ตารางที่ 10-2

Stresses	Strains
σ_x	ε_x
σ_y	ε_y
$\sigma_{x'}$	$\varepsilon_{x'}$
$\sigma_{y'}$	$\varepsilon_{y'}$
τ_{xy}	$\gamma_{xy}/2$
$\tau_{x'y'}$	$\gamma_{x'y'}/2$

เมื่อเรานำความเครียดตั้งฉาก $\varepsilon_{x'}$ และ $\varepsilon_{y'}$ ในสมการที่ 10-5 และ 10-7 มารวมกันแล้ว เราจะได้ว่า

$$\varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

ซึ่งแสดงว่า ผลรวมของความเครียดตั้งฉากที่กระทำอยู่บนด้านที่ตั้งฉากกันของ element ที่ถูกกระทำโดย plane strain ที่จุดๆ หนึ่งที่เรากำลังพิจารณาอยู่จะมีค่าคงที่

In-Plane Principal Strains

เช่นเดียวกับในกรณีของการหา in-plane principal stresses เราจะหาทิศทางของ element ที่ถูกกระทำโดยความเครียดตั้งฉากเท่านั้น โดยที่ไม่มีความเครียดเฉือนเกิดขึ้นเลยได้ ซึ่งเราเรียกความเครียดตั้งฉากนี้ว่า principal strain

ในกรณีที่วัสดุเป็นวัสดุแบบ isotropic แล้ว ระบบแกนที่ principal strain นี้เกิดขึ้นจะเป็นระบบแกนเดียวกันกับที่ principal stress เกิดขึ้น ดังนั้น จากสมการที่ 9-4 และ 9-5 และจากความสัมพันธ์ของหน่วยแรงและความเครียด เราจะได้ว่า ทิศทางของระบบแกนที่เกิด principal strain จะหาได้จากสมการ

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \qquad (10\text{-}8)$$

และ principal strain ดังกล่าวจะหาได้จากสมการ

$$\varepsilon_{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (10\text{-}9)$$

Maximum In-plane Shear Strain

เช่นเดียวกับในกรณีของ in-plane principal strains เราจะหาค่าของทิศทางของระบบแกนที่ maximum in-plane shear strain เกิดขึ้น (ซึ่งทำมุม 45^o กับทิศทางของระบบแกนที่ in-plane principal strains เกิดขึ้น) ได้จากสมการที่ 9-6 ซึ่งจะอยู่ในรูป

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{\gamma_{xy}} \tag{10-10}$$

ในลักษณะเดียวกัน ค่า maximum in-plane shear strain จะหาได้จากสมการ

$$\frac{(\gamma_{x'y'})_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{10-11}$$

และค่าความเครียดเฉลี่ยที่เกิดขึ้นพร้อมกับ maximum in-plane shear strain จะหาได้จาก

$$\varepsilon_{avg} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \tag{10-12}$$

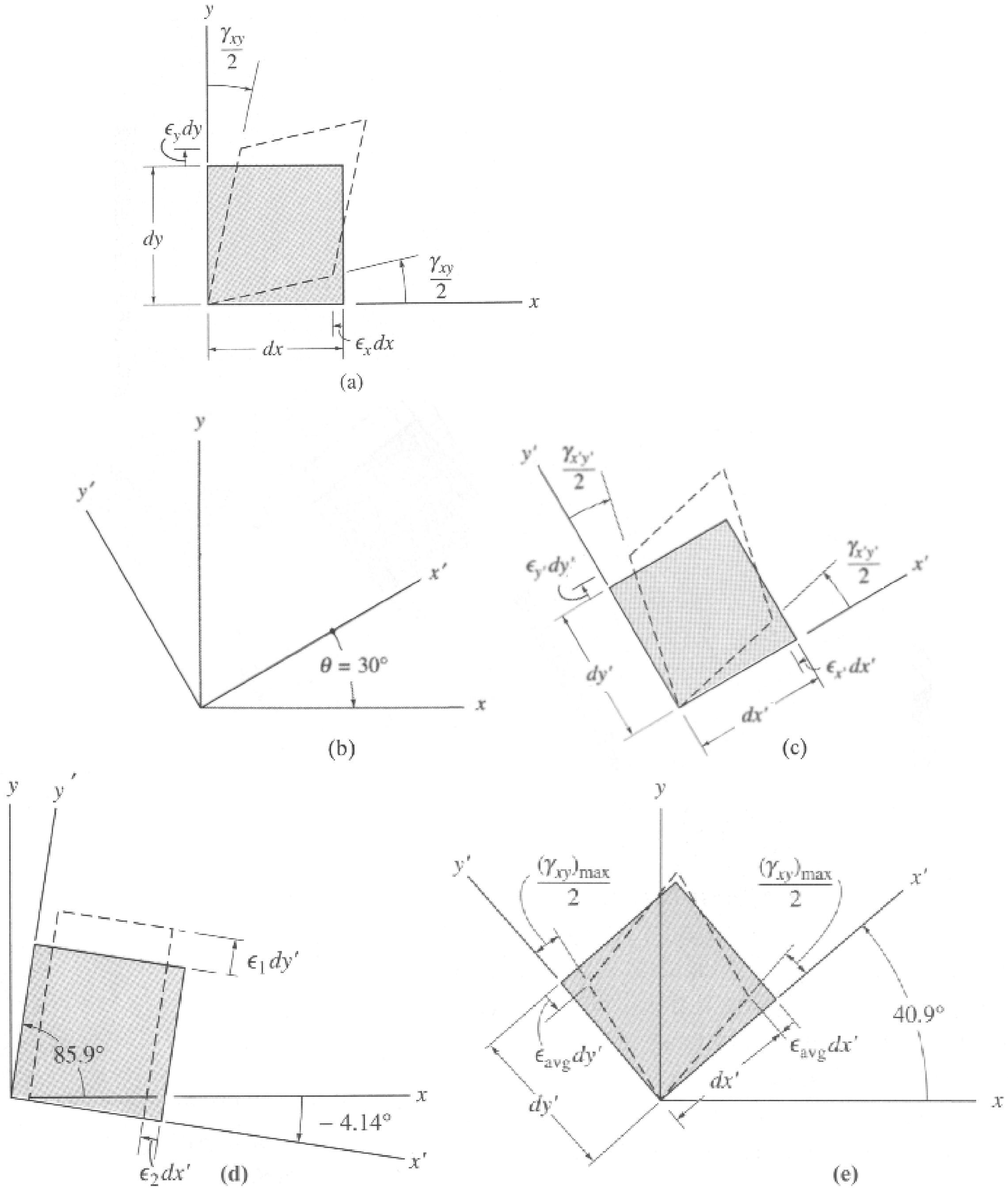
ตัวอย่างที่ 10-1

กำหนดให้ strain element ดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-1a มีสภาวะของ strain ดังต่อไปนี้ $\varepsilon_x = 500(10^{-6})$, $\varepsilon_y = -300(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 200(10^{6})$ จงหา

a.) สภาวะของ strain เมื่อ strain element หมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30^o

b.) Principal strains และทิศทางที่เกิด

c.) Maximum in-plane shear strain และทิศทางที่เกิด



รูปที่ EX 10-1

สภาวะของ strain เมื่อ strain element หมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30^o

เนื่องจากแกน x' ของ strain element หมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30^o จากแกน x ดังนั้น จาก sign convention ที่ใช้ $\theta = +30^o$

ค่าความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x' จะหาได้จากสมการที่ 10-5

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{x'} = \left[\frac{-350+200}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{-350-200}{2}\right](10^{-6})\cos(2(30^o)) + \frac{80(10^{-6})}{2}\sin(2(30^o))$$

$$\varepsilon_{x'} = -178(10^{-6})$$

ค่าความเครียดเฉือนในระนาบ $x' - y'$ จะหาได้จากสมการที่ 10-6

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left[\frac{-350-200}{2}\right](10^{-6})\sin(2(30^o)) + \frac{80(10^{-6})}{2}\cos(2(30^o))$$

$$\gamma_{x'y'} = 248(10^{-6})$$

ค่าความเครียดตั้งฉากในแนวแกน y' จะหาได้จากสมการที่ 10-7

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$\varepsilon_{y'} = \left[\frac{-350+200}{2}\right](10^{-6}) - \left[\frac{-350-200}{2}\right](10^{-6})\cos(2(30^o)) - \frac{80(10^{-6})}{2}\sin(2(30^o))$$

$$\varepsilon_{y'} = 28(10^{-6})$$

ดังนั้น เราจะเขียนสภาวะของ strain เมื่อ strain element หมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 30^o ได้ดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-1c **Ans.**

Principal strains และทิศทางที่เกิด

ทิศทางของ principal plane ที่มีสภาวะของ principal strains เกิดขึ้นจะหาได้สมการที่ 10-8

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{80(10^{-6})}{(-350-200)10^{-6}}$$

$$2\theta_p = -8.28^o \text{ และ } -8.28^o + 180^o = 171.8^o$$

$$\theta_p = -4.14^o \text{ และ } 85.9^o$$

จาก sign convention ที่ใช้ มุม θ มีค่าเป็นบวกแสดงว่าแกน x' ของ strain element หมุนทวนเข็มนาฬิกาไปจากแกน x

ค่าของ principal plane จะหาได้จากสมการที่ 10-9

$$\varepsilon_{\substack{1\\2}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{\substack{1\\2}} = \left[\frac{-350+200}{2}\right]10^{-6} \pm \left[\sqrt{\left(\frac{-350-200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right]10^{-6}$$

$$\varepsilon_{\substack{1\\2}} = -75.0(10^{-6}) \pm 277.9(10^{-6})$$

ดังนั้น

$$\varepsilon_1 = 203(10^{-6}) \text{ และ } \varepsilon_2 = -353(10^{-6})$$

เราจะตรวจสอบว่าค่าของ principal plane ค่าใดเป็นค่าที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดของ strain element ที่ทำมุมตั้งฉากกับแกน x' ที่หมุนไปเป็นมุม $\theta_p = -4.14^o$ จากแกน x ได้โดยใช้สมการที่10-5

$$\varepsilon_{x'} = \left[\frac{-350+200}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{-350-200}{2}\right](10^{-6})\cos(-8.28^o) + \frac{80(10^{-6})}{2}\sin(-8.28^o)$$

$$\varepsilon_{x'} = -353(10^{-6})$$

ดังนั้น $\varepsilon_2 = \varepsilon_{x'}$ และ strain element จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-1d <u>Ans.</u>

Maximum in-plane shear strain และทิศทางที่เกิด

strain element ที่มีสภาวะของ maximum in-plane shear strain เกิดขึ้นจะมีทิศทางที่หมุนไปจาก strain element ดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-1d เป็นมุมเท่ากับ 45^o

$$\theta_s = -4.14^o + 45^o = 40.9^o$$

ดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-1e หรือจะสามารถคำนวณหามาได้โดยใช้สมการที่ 10-10

จากสมการที่ 10-11 ค่า maximum in-plane shear strain จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{(\gamma_{x'y'})_{\substack{\max\\\text{in-plane}}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\frac{(\gamma_{x'y'})_{\substack{\max\\\text{in-plane}}}}{2} = \left[\sqrt{\left(\frac{-350-200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$(\gamma_{x'y'})_{\substack{\max\\\text{in-plane}}} = 556(10^{-6})$$

จากสมการที่ 10-11 ค่า ความเครียดเฉลี่ยที่เกิดขึ้นพร้อมกับ maximum in-plane shear strain จะมีค่าเท่ากับ

$$\varepsilon_{avg} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{-350+200}{2}(10^{-6}) = -75(10^{-6})$$

ทิศทางการเกิดขึ้นของความเครียดเฉือนที่เหมาะสมจะหาได้โดยการแทนค่ามุม $\theta_s = 40.9^o$ ลงในสมการที่ 10-6

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left[\frac{-350-200}{2}\right](10^{-6})\sin(2(40.9^o)) + \frac{80(10^{-6})}{2}\cos(2(40.9^o))$$

$$\gamma_{x'y'} = 556(10^{-6})$$

ดังนั้น $(\gamma_{x'y'})_{\substack{\max\\\text{in-plane}}}$ จะทำให้ strain element มีมุมระหว่างด้าน dx' และ dy' ลดลงจากมุม 90^o ดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-1e <u>Ans.</u>

10.3 วงกลมมอร์ - ความเครียดในระนาบ (Mohr's Circle-Plane Strain)

ในลักษณะเช่นเดียวกับ Mohr's circle ของ plane stress เราจะเขียนสมการของ Mohr's circle ของ plane strain ได้ในรูป

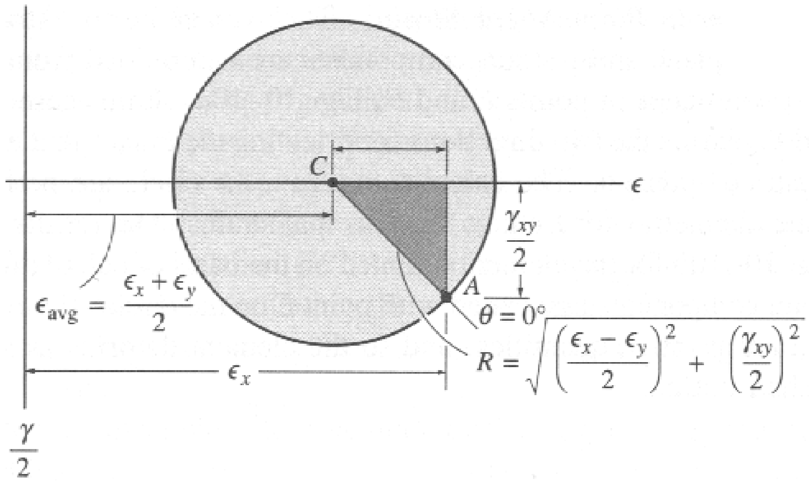
$$\left[\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{avg}\right]^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)^2 = R^2 \qquad (10\text{-}13)$$

เมื่อ

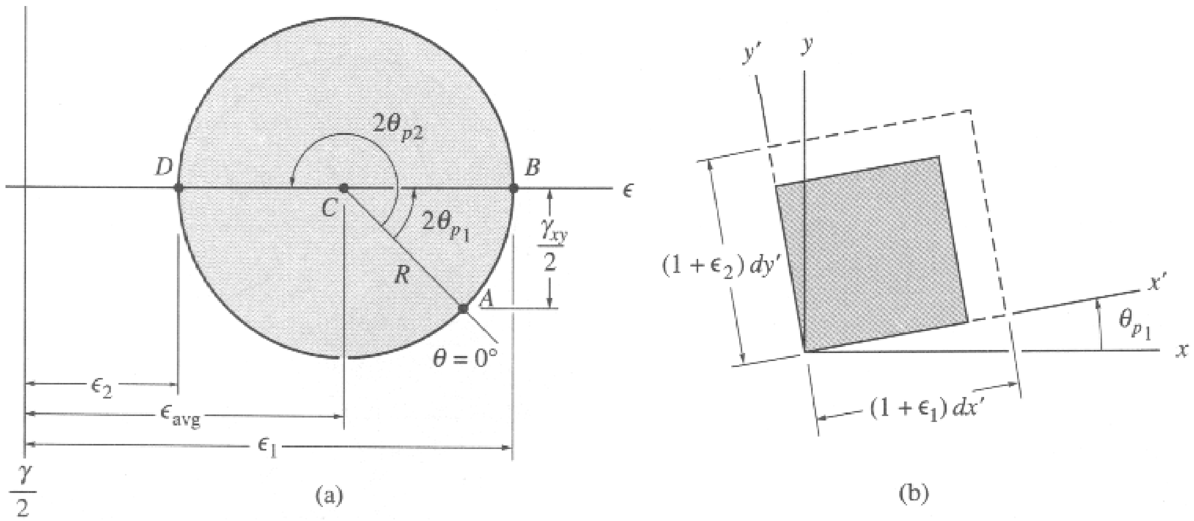
$$\varepsilon_{avg} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

สมการที่ 10-13 เป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน ε ที่จุด $C(\varepsilon_{avg}, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับ R และรูปร่างโดยทั่วไปของ Mohr's circle จะเขียนได้ดังที่แสดงในรูปที่ 10-6 โดยที่จุด A จะเป็นจุดที่แสดงสภาวะของความเครียดที่เกิดขึ้นอยู่บนด้านของ element ที่ตั้งฉากกับแกน x และมี coordinate เป็น $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$



รูปที่ 10-6

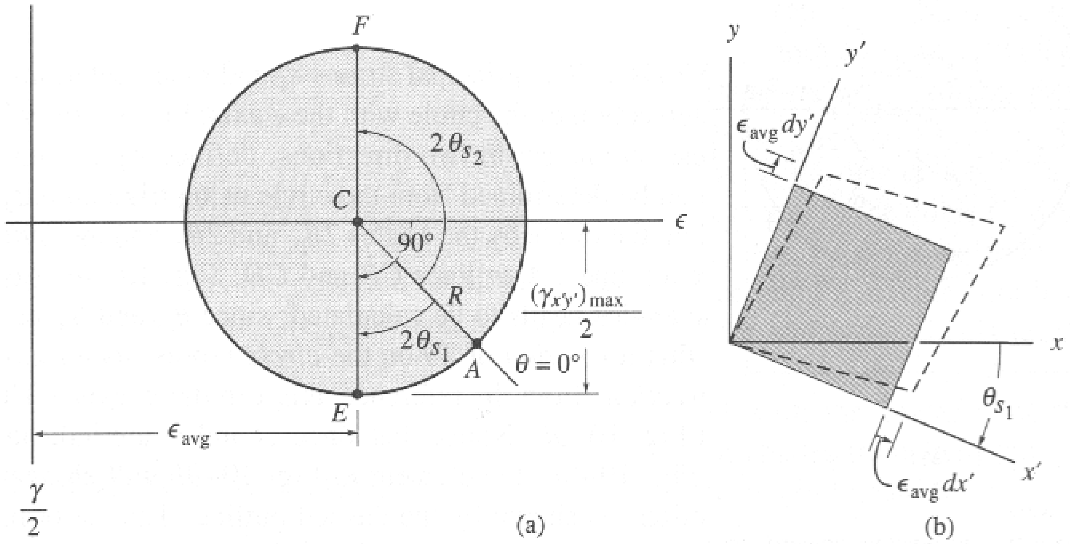


รูปที่ 10-7

จากรูปที่ 10-7a ค่าของ principal strains ε_1 และ ε_2 จะเป็นค่าพิกัดที่จุดที่ Mohr's circle ตัดกับแกน ε หรือจุด $B(\varepsilon_1, 0)$ และ $D(\varepsilon_2, 0)$ และทำมุม $2\theta_{p1}$ และ $2\theta_{p2}$ ตามลำดับ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จากเส้นรัศมีเริ่มต้น CA

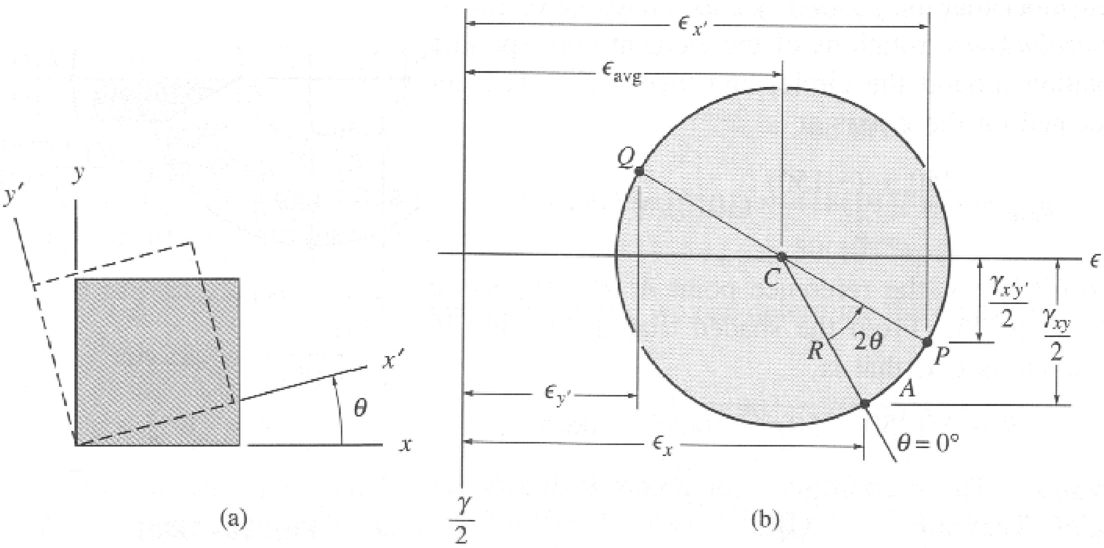
ค่าของมุม $2\theta_{p1}$ และ $2\theta_{p2}$ จะหาได้โดยการใช้ trigonometry เราควรที่จะทราบแล้วด้วยว่า element จะต้องหมุนไปจากระบบแกนอ้างอิง $x-y$ เป็นมุม θ_{p1} และ θ_{p2} เท่านั้น ซึ่งจะสมมูลกับการหมุนที่เกิดขึ้นบน Mohr's circle เป็นมุม $2\theta_{p1}$ และ $2\theta_{p2}$ และเมื่อเราทราบมุมใดมุมหนึ่งของมุม θ_{p1} และ θ_{p2} แล้ว เราจะหาค่าของอีกมุมหนึ่งได้ เนื่องจากมุมทั้งสองนี้ต่างกันอยู่ 90^o รูปที่ 10-7b แสดงการหมุนของ element เพื่อที่จะทำให้เกิด principal strain ε_1 ที่สอดคล้องกับการหมุนของ Mohr's circle $2\theta_{p1}$ โดยที่ระบบแกน $x'-y'$ จะหมุนเป็นมุม θ_{p1} จากแกน $x-y$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ element เนื่องจาก principal strains ε_1 และ ε_2 จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูป

ในลักษณะที่คล้ายคลึงกับการหาค่าของ principal strains เราจะหาค่าของ maximum in-plane shear strain ได้จากพิกัดของจุด E และจุด F บน Mohr's circle ซึ่งทำมุม $2\theta_{s1}$ และ $2\theta_{s2}$ จากเส้นรัศมีเริ่มต้น CA ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-8a ค่ามุมทั้งสองนี้จะหาได้โดยใช้ trigonometry นอกจากนั้นแล้ว เราจะเขียนสภาวะของความเครียดที่เกิดขึ้นที่จุด E บน element ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-8b



รูปที่ 10-8

สุดท้าย เราจะหาค่าของความเครียดตั้งฉาก $\varepsilon_{x'}$ และความเครียดเฉือน $\gamma_{x'y'}$ ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดใดๆ ของ element เล็กๆ ที่ตั้งฉากกับระบบแกน $x'-y'$ และทำมุม θ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกากับระบบแกนอ้างอิง $x-y$ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-9a ได้โดยการหมุนเส้นรัศมีเริ่มต้น CA ไปเป็นมุม 2θ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งแสดงโดยเส้นในแนวรัศมี CP จากนั้น ใช้ trigonometry ในการหาค่าพิกัดของจุด P บน Mohr's circle ดังที่แสดงในรูปที่ 10-9b นอกจากนั้นแล้ว ความเครียดตั้งฉาก $\varepsilon_{y'}$ จะหาได้โดยการหาค่าพิกัดของจุด Q บนแกน ε


y'
y
x'
θ
x
(a)
$\epsilon_{x'}$
ϵ_{avg}
Q
C
ε
$\frac{\gamma_{x'y'}}{2}$
$\frac{\gamma_{xy}}{2}$
2θ
R
P
A
$\epsilon_{y'}$
ϵ_x
θ = 0°
$\frac{\gamma}{2}$
(b)

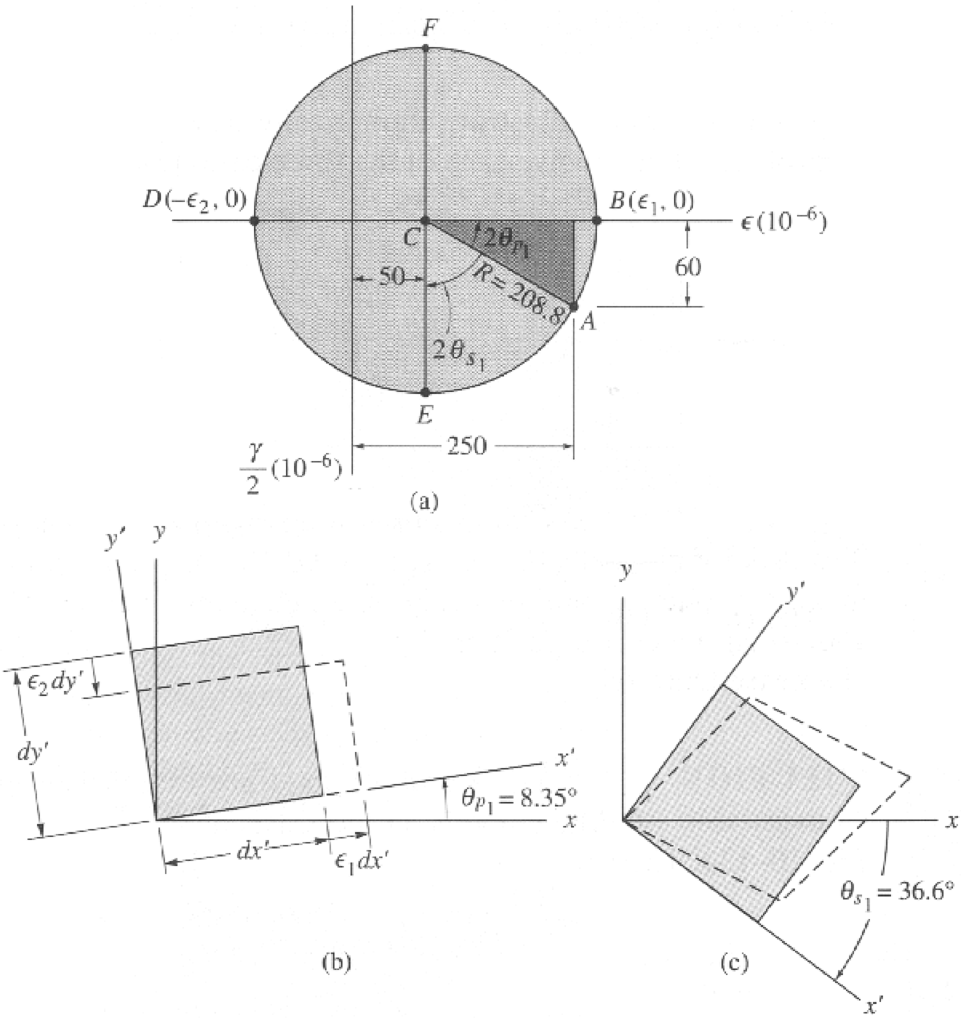
รูปที่ 10-9

ตัวอย่างที่ 10-2

กำหนดให้ strain element มีสภาวะของ strain ดังต่อไปนี้ $\varepsilon_x = 250(10^{-6})$, $\varepsilon_y = -150(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = 120(10^{6})$ จงหา

a.) Principal strains และทิศทางที่เกิด

b.) Maximum in-plane shear strain และทิศทางที่เกิด



รูปที่ EX 10-2

กำหนดให้แกน ε และแกน $\gamma/2$ มิทิศที่เป็นบวกไปทางขวามือและพุ่งลงในแนวดิ่ง ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-2a และจุดศูนย์กลางของ Mohr's circle อยู่บนแกน ε ที่จุด $C(\varepsilon_{avg}, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับ R โดยที่

$$\varepsilon_{avg} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{250 + (-150)}{2} 50(10^{-6}) = 50(10^{-6})$$

$$R = \left[\sqrt{\left(\frac{250 - (-150)}{2}\right)^2 + \left(\frac{120}{2}\right)^2}\right](10^{-6}) = 208.8(10^{-6})$$

พิกัดเริ่มต้นของสภาวะของ strain บน Mohr's circle จะมีค่าเท่ากับ $(\varepsilon, \gamma/2) = (250(10^{-6}), 60(10^{-6}))$ ซึ่งจะอยู่ที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-2a

Principal strains และทิศทางที่เกิด

ค่าของ principal strains จะเป็นค่าพิกัดที่จุดที่ Mohr's circle ตัดกับแกน ε ที่จุด B และจุด D ดังนั้น

$$\varepsilon_1 = (50 + 208.8)10^{-6} = 259(10^{-6})$$
$$\varepsilon_2 = (50 - 208.8)10^{-6} = -159(10^{-6})$$

ทิศทางการหมุนของระนาบที่ถูกกระทำโดย principal strains ε_1 จะหาได้จากการหมุนเส้นรัศมีเริ่มต้น CA ไปยังเส้นรัศมี CB ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\tan 2\theta_{p1} = \frac{60}{(250-50)}$$
$$\theta_{p1} = 8.35^o$$

สภาวะของ principal strains ที่เกิดขึ้นบน strain element หมุนไปเป็นมุม $\theta_{p1} = 8.35^o$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-b <u>Ans.</u>

Maximum in-plane shear strain และทิศทางที่เกิด

ค่าของ maximum in-plane shear strain จะเป็นค่าพิกัดที่จุด E และจุด F ดังนั้น

$$\frac{(\gamma_{x'y'})_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}}}{2} = 208.8(10^{-6})$$
$$(\gamma_{x'y'})_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = 418(10^{-6})$$

ค่าความเครียดเฉลี่ยที่เกิดขึ้นพร้อมกับ maximum in-plane shear strain จะมีค่าเท่ากับ

$$\varepsilon_{avg} = 50(10^{-6})$$

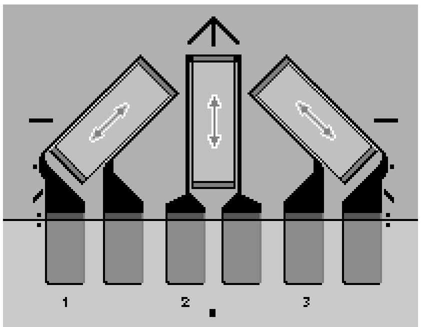
จาก Mohr's circle เราจะหาทิศทางการหมุนของ strain element $2\theta_{s1}$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาได้

$$2\theta_{s1} = 90^o - 2(8.35^o)$$
$$\theta_{s1} = 36.6^o$$

เนื่องจากค่าพิกัดที่จุด E มีค่าเป็นบวก ดังนั้น สภาวะของ maximum in-plane shear strain ที่เกิดขึ้นบน strain element ที่หมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ EX 10-c <u>Ans.</u>

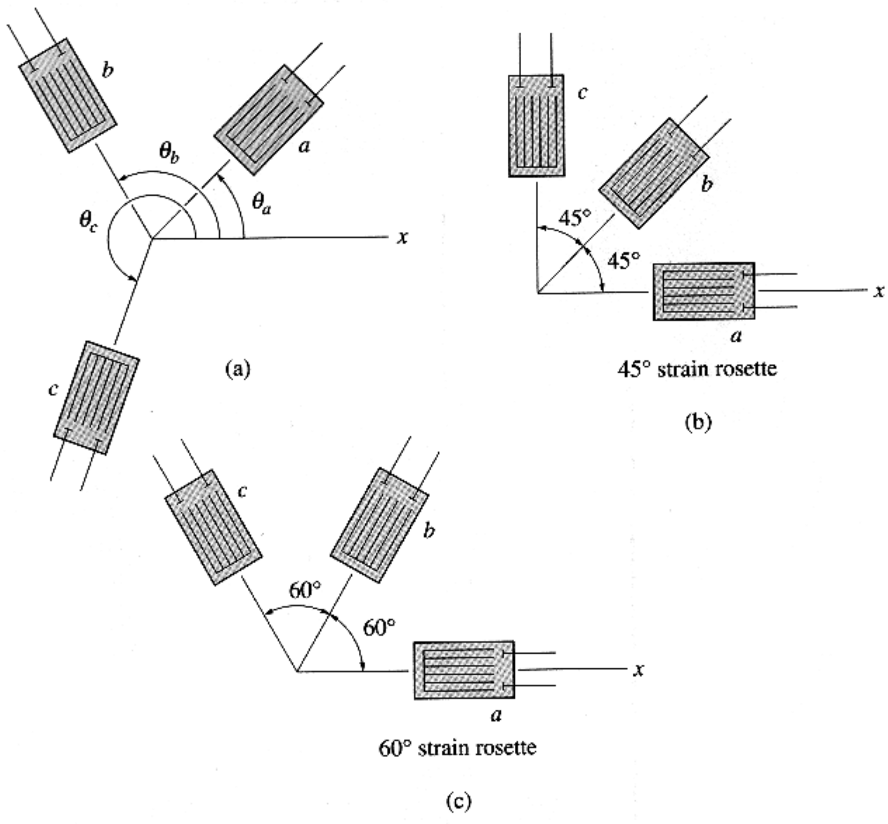
10.4 Strain Rosettes

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 3 ว่า ความเครียดตั้งฉากที่เกิดขึ้นในตัวอย่างทดสอบภายใต้แรงดึงจะถูกวัดได้โดยใช้ electrical-resistance strain gauge แต่ความเครียดตั้งฉากที่เกิดขึ้นในโครงสร้างมักจะถูกวัดโดยใช้ strain rosette และการคำนวณโดยใช้สมการ strain transformation ซึ่งสภาวะความเครียดที่คำนวณได้นี้จะเป็นสภาวะความเครียดที่เกิดจากสภาวะหน่วยแรงแบบ plane stress เนื่องจาก strain rosette ไม่สามารถวัดความเครียดในทิศทางตั้งฉากกับผิวของโครงสร้างได้ โดยทั่วไปแล้ว strain rosette จะมีลักษณะเป็น strain gauge สามตัวที่ติดตั้งอยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 10-10



รูปที่ 10-10

พิจารณา strain rosette ดังที่แสดงในรูปที่ 10-11a กำหนดให้แกนของ strain gauge a , b , และ c ใน strain rosette ทำมุมกับแกนอ้างอิง x เป็นมุม θ_a , θ_b , และ θ_c ตามลำดับ ถ้าค่าความเครียดที่อ่านได้จาก strain gauge ทั้งสามได้เป็น ε_a , ε_b , และ ε_c ตามลำดับแล้ว เราจะหาค่าความเครียดตั้งฉาก ε_x , ε_y , และ γ_{xy} ในระนาบ $x-y$ ที่จุดดังกล่าวได้โดยใช้สมการ strain-transformation (สมการที่ 10-2) โดยที่



รูปที่ 10-11

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2\theta_a + \varepsilon_y \sin^2\theta_a + \gamma_{xy} \sin\theta_a \cos\theta_a$$
$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2\theta_b + \varepsilon_y \sin^2\theta_b + \gamma_{xy} \sin\theta_b \cos\theta_b \qquad (10\text{-}13)$$
$$\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2\theta_c + \varepsilon_y \sin^2\theta_c + \gamma_{xy} \sin\theta_c \cos\theta_c$$

และเมื่อเราทำการแก้สมการที่ 10-13 แล้ว เราจะได้ค่าความเครียด ε_x, ε_y, และ γ_{xy} ซึ่งแสดงสภาวะความเครียดที่จุดดังกล่าวในระนาบ $x-y$

โดยทั่วไปแล้ว strain rosette มักจะมีรูปแบบที่ strain gauges ทั้งสามทำมุมต่อกันเท่ากับ 45^o หรือ 60^o ในกรณีที่ strain rosette มีรูปแบบที่ทำมุม 45^o ดังที่แสดงในรูปที่ 10-11b แล้ว เราจะได้ว่า $\theta_a = 0^o$, $\theta_b = 45^o$, และ $\theta_c = 90^o$ ดังนั้น จากสมการที่ 10-13 เราจะได้ว่า

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_c$$
$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

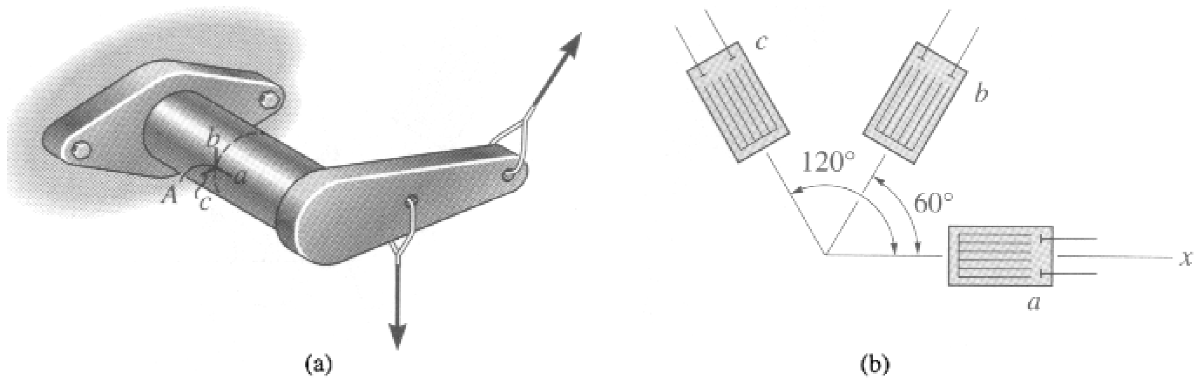
ในกรณีที่ strain rosette มีรูปแบบที่ทำมุม 60^o ดังที่แสดงในรูปที่ 10-11c แล้ว เราจะได้ว่า $\theta_a = 0^o$, $\theta_b = 60^o$, และ $\theta_c = 120^o$ ดังนั้น จากสมการที่ 10-13 เราจะได้ว่า

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{3}(2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)$$

หลังจากที่เราทราบค่าความเครียด ε_x, ε_y, และ γ_{xy} แล้ว เราจะใช้สมการ strain transformation หาค่า principal in-plane strains และ maximum in-plane shear strain ที่เกิดขึ้นที่จุดดังกล่าวได้

ตัวอย่างที่ 10-3

สภาวะความเครียดที่เกิดขึ้นที่จุด A บนเท้าแขน (bracket) ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-3a ถูกหามาได้โดยใช้ stain rosette ดังที่แสดงในรูป Ex 10-3b กำหนดให้ $\varepsilon_a = 60\ \mu\varepsilon$, $\varepsilon_b = 135\ \mu\varepsilon$, and $\varepsilon_c = 264\ \mu\varepsilon$ จงหาค่า principal strains และทิศทางของการเกิด principal strains ของสภาวะความเครียดดังกล่าว



รูปที่ Ex 10-3

กำหนดให้แกน $+x$ มีทิศทาง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-3b ซึ่งเราจะได้ว่า $\theta_a = 0^o$, $\theta_b = 60^o$, และ $\theta_c = 120^o$ และจากสมการที่ 10-13

$$60(10^{-6}) = \varepsilon_x \cos^2 0^o + \varepsilon_y \sin^2 0^o + \gamma_{xy} \sin 0^o \cos 0^o$$

$$\varepsilon_x = 60(10^{-6})$$

$$135(10^{-6}) = \varepsilon_x \cos^2 60^o + \varepsilon_y \sin^2 60^o + \gamma_{xy} \sin 60^o \cos 60^o$$

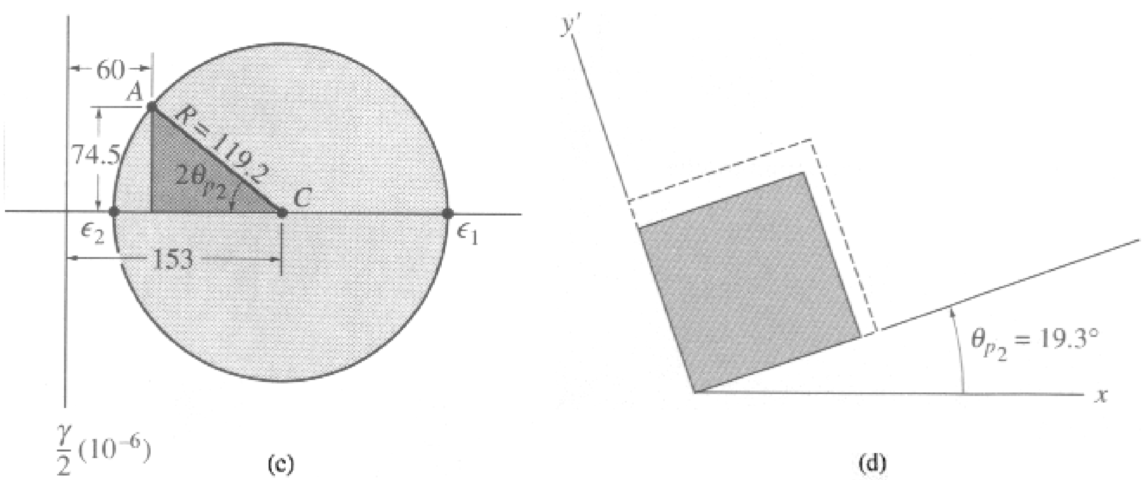
$$0.25\varepsilon_x + 0.75\varepsilon_y + 0.433\gamma_{xy} = 135(10^{-6})$$

$$264(10^{-6}) = \varepsilon_x \cos^2 120^o + \varepsilon_y \sin^2 120^o + \gamma_{xy} \sin 120^o \cos 120^o$$

$$0.25\varepsilon_x + 0.75\varepsilon_y - 0.433\gamma_{xy} = 264(10^{-6})$$

เราจะได้สภาวะความเครียด

$$\varepsilon_x = 60(10^{-6}) \text{ , } \varepsilon_y = 246(10^{-6}) \text{ , และ } \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$



ค่า principal strains และทิศทางการเกิด principal strains ของสภาวะความเครียดดังกล่าวจะหาได้จากสมการ $\varepsilon_{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$ และ $\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$ ตามลำดับ หรือโดยใช้ Mohr's circle ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-3c ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\varepsilon_1 = 272(10^{-6})$$
$$\varepsilon_2 = 33.8(10^{-6})$$

และ

$$2\theta_{p2} = \tan^{-1}\frac{74.5}{153-60} = 38.7^o$$
$$\theta_{p2} = 19.3^o$$

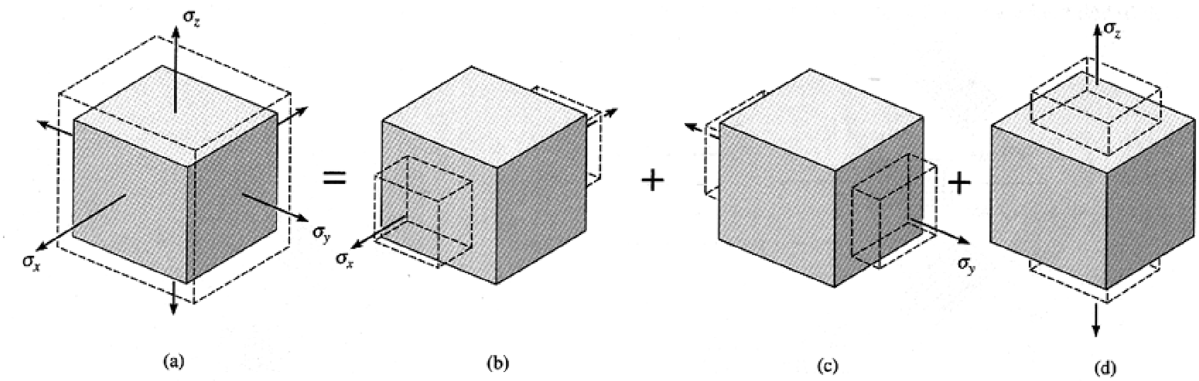
ซึ่งแสดงว่าสภาวะความเครียด principal strain จะหาได้จากการหมุนสภาวะความเครียด ε_x, ε_y, และ γ_{xy} ทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม 19.3^o ดังที่แสดงในรูป Ex 10-3d โดยที่เส้นประแสดงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดขึ้นบน element ดังกล่าว <u>Ans.</u>

10.5 ความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของวัสดุ (Material-Property Relationships)

ใน section นี้ เราต้องการหาความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติต่างๆ ของวัสดุ โดยกำหนดให้วัสดุเป็นวัสดุแบบ homogeneous และ isotropic และมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic ภายใต้แรงกระทำ ซึ่งข้อกำหนดนี้จะทำให้วัสดุมีพฤติกรรมสอดคล้องกับ principle of superposition และ Hooke's law

Generalized Hooke's Law

พิจารณา cubic volume element ดังที่แสดงในรูปที่ 10-12a ซึ่งถูกกระทำโดยสภาวะหน่วยแรง triaxial stress σ_x, σ_y, σ_z จาก principle of superposition เราจะเขียนการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ cubic volume element ดังกล่าวได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-11b, 10-11c, และ 10-11d ตามลำดับ



รูปที่ 10-12

เริ่มต้นให้เราพิจารณาความเครียดตั้งฉากที่เกิดขึ้นในแนวแกน x เนื่องจากการกระทำของหน่วยแรงตั้งฉาก σ_x, σ_y, และ σ_z

เมื่อหน่วยแรง σ_x กระทำดังที่แสดงในรูปที่ 10-12b แล้ว cubic volume element จะเกิดการยืดตัวในแนวแกน x และทำให้เกิดความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x เท่ากับ

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

เมื่อหน่วยแรง σ_y กระทำดังที่แสดงในรูปที่ 10-12c แล้ว cubic volume element จะเกิดการหดตัวในแนวแกน x (Poisson's effects) และทำให้เกิดความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x เท่ากับ

$$\varepsilon''_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

เมื่อหน่วยแรง σ_z กระทำดังที่แสดงในรูปที่ 10-12d แล้ว cubic volume element จะเกิดการหดตัวในแนวแกน x (Poisson's effects) และทำให้เกิดความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x เท่ากับ

$$\varepsilon'''_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

เมื่อเรานำความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x มารวมกัน เราจะได้ว่า

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \tag{10-14a}$$

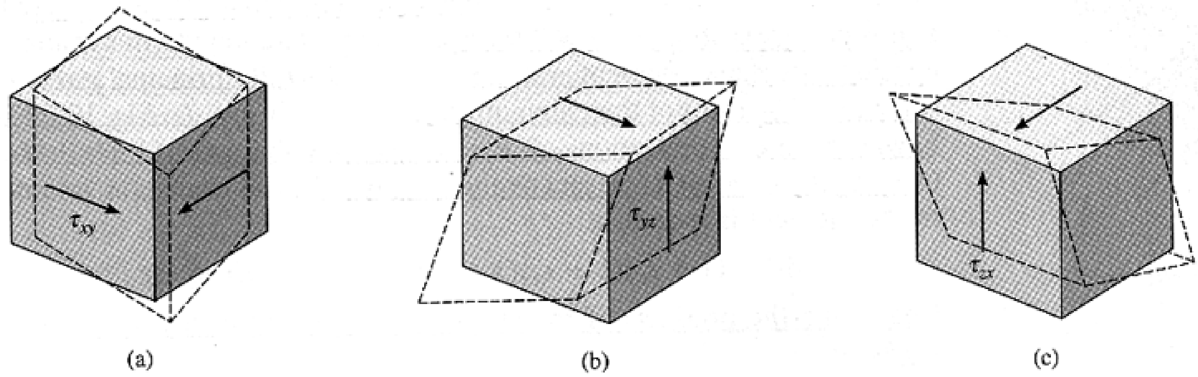
ในลักษณะเดียวกัน เราจะหาความเครียดตั้งฉากในแนวแกน y และ z ได้ในรูป

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \tag{10-14b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \tag{10-14c}$$

พิจารณา cubic volume element ซึ่งถูกกระทำโดยหน่วยแรงเฉือน τ_{xy}, τ_{yz}, และ τ_{zx} เราจะเขียนการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ cubic volume element ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 10-13a, 10-13b, และ 10-13c ตามลำดับ โดยที่

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \tag{10-15}$$



รูปที่ 10-13

Relationship Involving E, ν, and G

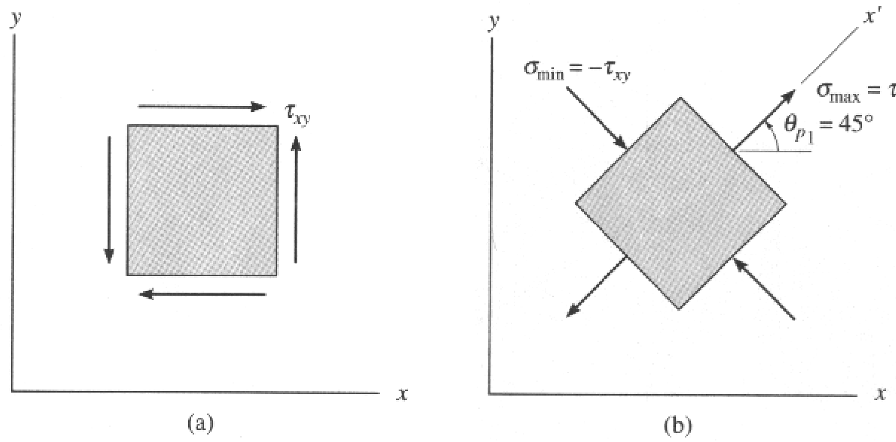
พิจารณา element ของวัสดุซึ่งอยู่ในสภาวะหน่วยแรงแบบ pure shear ดังที่แสดงในรูปที่ 10-14a เนื่องจาก $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ จากสมการ principal stresses

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

เราจะได้ว่า principal stresses ที่เกิดจากสภาวะของหน่วยแรงดังกล่าวอยู่ในรูป

$$\sigma_{\max} = \tau_{xy}$$
$$\sigma_{\min} = -\tau_{xy}$$

เมื่อ element ดังกล่าวเกิดการหมุนทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ไปเป็นมุม 45^o ดังที่แสดงในรูปที่ 10-14b



รูปที่ 10-14

เมื่อแทน $\sigma_{\max} = \tau_{xy}$, $\sigma_{\text{int}} = 0$, และ $\sigma_{\min} = -\tau_{xy}$ ลงในสมการแรกของสมการที่ 10-14 เราจะได้ความสัมพันธ์ของ principal strain $\varepsilon_{\max}$ และ shear stress ในรูป

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1+\nu) \tag{10-16}$$

จากสมการที่ 10-14 เมื่อ $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ แล้ว $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ จากสมการ principal strain

$$\varepsilon_{\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

เราจะได้ว่า principal strain ที่เกิดจากสภาวะของหน่วยแรงดังกล่าวอยู่ในรูป

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \tag{10-17}$$

จาก Hooke's law, $\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$ ดังนั้น สมการที่ 10-17 จะถูกเขียนใหม่ได้เป็น

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \tag{10-18}$$

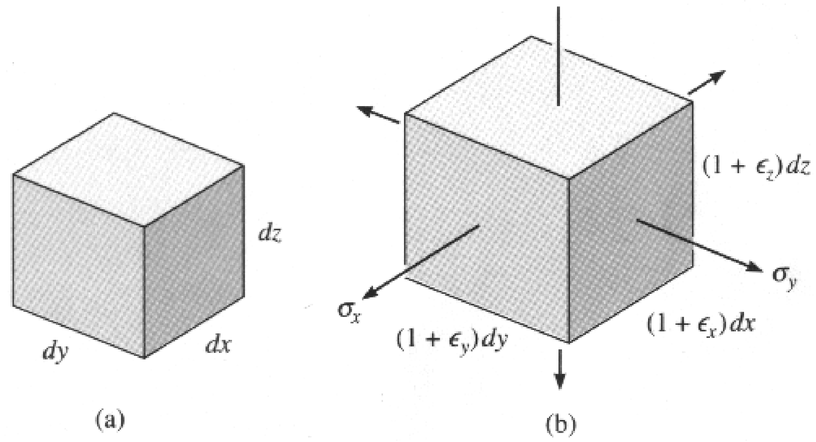
จากสมการที่ 10-16 และ 10-18 เราจะได้ว่า

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{10-19}$$

ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง modulus of elasticity และ shear modulus

Dilatation and Bulk Modulus

เราทราบมาแล้วว่า เมื่อโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงภายนอกแล้ว โครงสร้างจะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง โดยที่ความเครียดตั้งฉาก (normal strain) จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของ volume element เท่านั้นและ shear strain จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของ cubic volume element เท่านั้น



รูปที่ 10-15

พิจารณา volume element ซึ่งถูกกระทำโดย principal normal stresses σ_x, σ_y, และ σ_z ดังที่แสดงในรูปที่ 10-15a กำหนดให้ด้านต่างๆ ของ volume element ก่อนที่จะถูกกระทำโดยหน่วยแรง มีความยาว dx, dy, และ dz ในแนวแกน x, y, และ z ตามลำดับ เมื่อ volume element ถูกกระทำโดยหน่วยแรงแล้ว ด้านต่างๆ ดังกล่าวจะมีความยาวเปลี่ยนไปเป็น $(1+\varepsilon_x)dx$, $(1+\varepsilon_y)dy$, และ $(1+\varepsilon_x)dz$ ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-15b ดังนั้น ปริมาตรของ volume element จะมีการเปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ

$$\delta V = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)dxdydz - dxdydz$$

เนื่องจาก strains มีค่าน้อยมาก ดังนั้น เราจะไม่นำผลคูณของ strains มาพิจารณา ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dxdydz$$

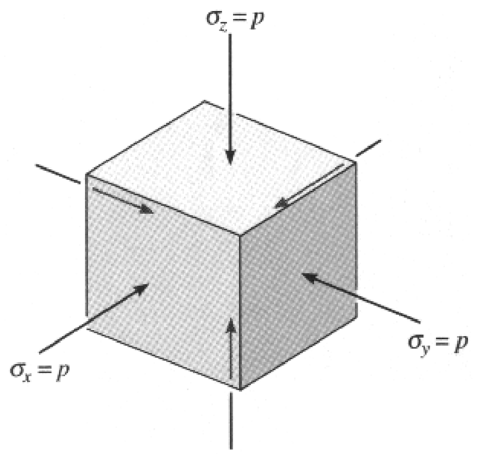
กำหนดให้ volumetric strain หรือ dilatation, e, เป็นการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของ volume element ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$e = \frac{\delta V}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \qquad (10.20)$$

จากสมการที่ 10-14 เราจะเขียนสมการของ dilatation ในรูปของ normal stresses ได้เป็น

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (10\text{-}21)$$

เมื่อ volume element ของวัสดุถูกกระทำโดยความดัน p ซึ่งมีค่าคงที่ค่าหนึ่งและกระทำตั้งฉากกับผิวของ volume element เท่านั้นแล้ว สภาวะของหน่วยแรงบน volume element จะถูกเรียกว่า hydrostatic stress ดังที่แสดงในรูปที่ 10-16 ในกรณีเช่นนี้ เราจะได้ว่า $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$



Hydrostatic stress

รูปที่ 10-16

เมื่อแทนสภาวะของหน่วยแรงดังกล่าวลงในสมการที่ 10-21 แล้วทำการจัดเทอมใหม่ เราจะได้ว่า

$$\frac{p}{e} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (10\text{-}22)$$

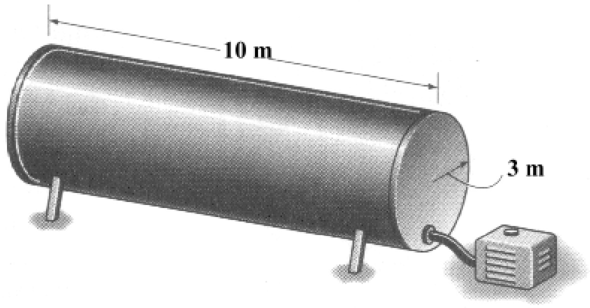
เนื่องจากสมการนี้มีลักษณะที่คล้ายคลึงกับสมการ $\sigma / \varepsilon = E$ ดังนั้น เราจะเรียกอัตราส่วน p/e ว่า volume modulus of elasticity หรือ bulk modulus k ดังนั้น

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (10\text{-}23)$$

จากสมการ เราจะเห็นได้ว่า ถ้า ν มีค่ามากกว่า 0.5 แล้ว ค่า k จะมีค่าเป็นลบหรือปริมาตรของ volume element มีค่าลดลงเมื่อแท่งวัสดุถูกกระทำโดยแรงดึง ซึ่งเป็นไปไม่ได้ทางกายภาพ ดังนั้น ν จะมีค่ามากกว่า 0.5 ไม่ได้

ตัวอย่างที่ 10-4

กำหนดให้ pressure vessel ผนังบางทำด้วยเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-4 มีปลายปิดทั้งสองด้าน มีความยาว 10 m มีผนังหนา 5 mm และมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 3 m จงหาค่าความยาว ค่าเส้นผ่าศูนย์กลาง และค่าความหนาของถังที่เปลี่ยนแปลงไป เมื่อถังดังกล่าวบรรจุอากาศที่มีความดัน 2 MPa และเหล็กมี $E = 200\text{ GPa}$ และ $\nu = 0.30$



รูปที่ Ex 10-4

กำหนดให้แกน x มีทิศทางไปตามความยาวของถัง (longitudinal) แกน z มีทิศทางตั้งฉากกับผิวของถัง (normal) และแกน y มีทิศทางสัมผัสกับผิวของถัง (tangential)

เนื่องจากถังมีอัตราส่วนของรัศมีต่อความหนาของถัง, r/t, ที่น้อยมาก ดังนั้น

$$\sigma_x = \frac{pr}{2t} = \frac{2(1.5)}{2(0.005)} = 300\text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{pr}{t} = \frac{2(1.5)}{(0.005)} = 600\text{ MPa}$$

และหน่วยแรง σ_z จะมีค่าลดลงจาก $-p$ ที่ผิวด้านในของถังจนเป็นศูนย์ที่ผิวด้านนอก ดังนั้น เราจะสมมุติให้ หน่วยแรง σ_z มีค่าเท่ากันศูนย์

จากสมการที่ 10-14 เราจะได้ว่า

$$\varepsilon_x = \frac{1}{200(10^3)}\left[300 - 0.3(600+0)\right] = 0.00060$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{200(10^3)}\left[600 - 0.3(300+0)\right] = 0.00255$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{200(10^3)}\left[0 - 0.3(300+600)\right] = -0.00135$$

เนื่องจาก $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta L}{L}$, $\varepsilon_y = \dfrac{\Delta(\pi d)}{\pi d} = \dfrac{\Delta d}{d}$, และ $\varepsilon_z = \dfrac{\Delta t}{t}$ ดังนั้น ความยาวที่เปลี่ยนแปลงไปของถังมีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับ

$$\Delta L = 0.00060(10)10^3 = +6\text{ mm}$$ <u>Ans.</u>

เส้นผ่าศูนย์กลาง ที่เปลี่ยนแปลงไปของถังมีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับ

$$\Delta d = 0.00255(3)10^3 = +7.65\text{ mm}$$ <u>Ans.</u>

และความหนาที่เปลี่ยนแปลงไปของถังมีค่าลดลงเท่ากับ

$$\Delta t = -0.00135(5) = -6.75(10^{-3})\text{ mm}$$ <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 10-5

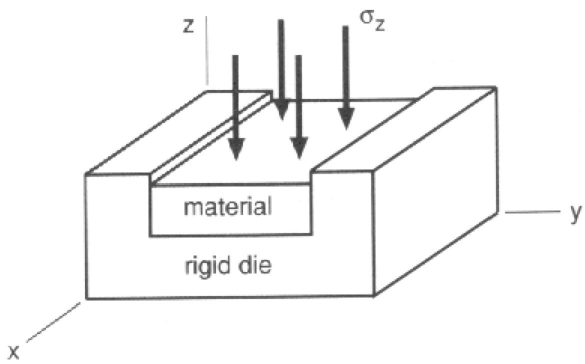
กำหนดให้ตัวอย่างทดสอบถูกกระทำโดยหน่วยแรงกดอัด (compressive stress) σ_z ถูกยึดรั้งทางด้านข้างในแนวแกน y และเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ในแนวแกน x ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-5 สมมุติว่าวัสดุที่ใช้ทำตัวอย่างทดสอบเป็นวัสดุแบบ isotropic และ homogeneous และภายใต้แรงกระทำ วัสดุยังคงมีพฤติกรรมแบบ linear-elastic จงหาสมการของค่าต่างๆ เหล่านี้ ซึ่งอยู่ในรูปของหน่วยแรงกดอัด σ_z

a.) สมการของหน่วยแรงในแนวแกน y

b.) สมการของความเครียดในแนวแกน z

c.) สมการของความเครียดในแนวแกน x

d.) สมการความแกร่ง $E' = \sigma_z / \varepsilon_z$ ในแนวแกน z



รูปที่ Ex 10-5

เนื่องจากตัวอย่างทดสอบถูกยึดรั้งทางด้านข้างในแนวแกน y ดังนั้น $\varepsilon_y = 0$ และเนื่องจากตัวอย่างทดสอบเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ในแนวแกน x ดังนั้น $\sigma_x = 0$

จากสมการที่ 10-14 สมการของหน่วยแรงในแนวแกน y จะอยู่ในรูป

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$0 = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(0 + \sigma_z)\right]$$

$$\sigma_y = \nu\sigma_z$$ Ans.

สมการของความเครียดในแนวแกน z จะอยู่ในรูป

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(0 + \nu\sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_z$$ Ans.

สมการของความเครียดในแนวแกน x จะอยู่ในรูป

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[0 - \nu(\nu\sigma_z + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_z$$ Ans.

และสมการความแกร่ง $E' = \sigma_z / \varepsilon_z$ ในแนวแกน z จะอยู่ในรูป

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}$$ Ans.

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า ความแกร่ง E' จะมีค่ามากกว่า elastic modulus E ของวัสดุที่ได้จากการทดสอบแรงกดอัด ทั้งนี้เนื่องจากการยึดรั้งตัวอย่างทดสอบ

10.6 ทฤษฎีการวิบัติ (Theory of Failure)

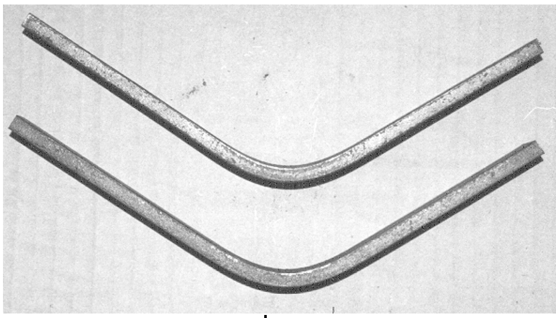
นิยามของการวิบัติ

การวิบัติ (failure) เป็นการเปลี่ยนแปลงใดๆ ของขนาด รูปร่าง หรือคุณสมบัติของวัสดุของโครงสร้าง ซึ่งทำให้โครงสร้างดังกล่าวไม่สามารถทำหน้าที่ได้ตามที่ได้ออกแบบไว้ ผู้ออกแบบจะต้องทราบว่าโครงสร้างที่กำลังออกแบบนั้นจะมีการวิบัติในลักษณะใดได้บ้าง จากนั้น ผู้ออกแบบจะทำการกำหนดเกณฑ์กำหนดการวิบัติ (failure criteria) ที่จะใช้ทำนายการวิบัติของโครงสร้างที่ถูกต้องและเหมาะสม

รูปแบบของการวิบัติ (Modes of Failure)

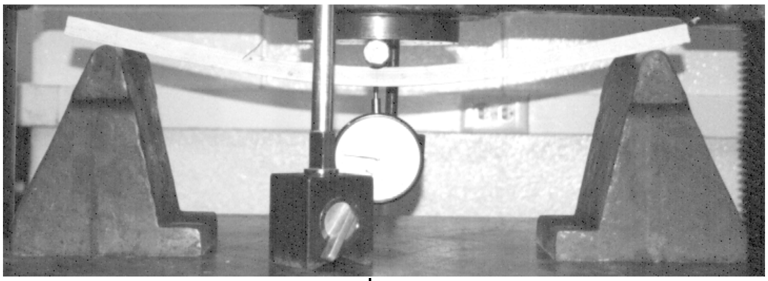
เมื่อชิ้นส่วนของโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงและน้ำหนักบรรทุกแล้ว การตอบสนองของชิ้นส่วนของโครงสร้างจะขึ้นอยู่กับชนิดของวัสดุที่ใช้ทำโครงสร้าง ประเภทของแรงกระทำ และสภาวะแวดล้อมของโครงสร้าง ดังนั้น ลักษณะของการวิบัติจะถูกแยกออกได้ดังนี้

Yielding failure คือการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบพลาสติก (plastic deformation) ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างภายใต้การกระทำของน้ำหนักบรรทุก ซึ่งทำให้โครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอย่างถาวรและไม่สามารถทำหน้าที่ได้ตามที่ได้ออกแบบไว้ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-17



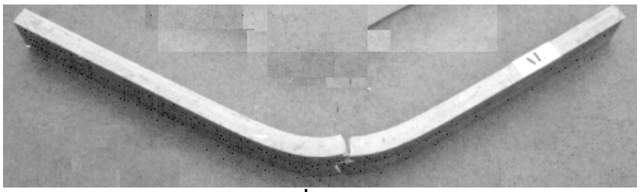
รูปที่ 10-17

Force induced elastic deformation คือการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบยืดหยุ่น (elastic deformation) ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างภายใต้การกระทำของน้ำหนักบรรทุก ซึ่งมีค่าสูงมากจนกระทั่งทำให้โครงสร้างไม่สามารถทำหน้าที่ได้ตามที่ได้ออกแบบไว้ เช่น คานที่มีการโก่งตัวสูงจะทำให้ผนังใต้คานเกิดการแตกร้าว เป็นต้น ดังที่แสดงในรูปที่ 10-18



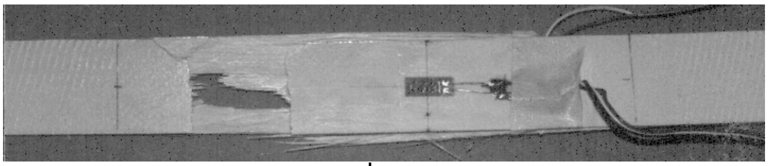
รูปที่ 10-18

Ductile failure คือการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบพลาสติก (plastic deformation) ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างที่มีพฤติกรรมแบบเหนียว (ductile) ซึ่งการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังกล่าวจะมีค่าสูงมากก่อนที่โครงสร้างจะเกิดการแตกแยกออกจากกัน ดังที่แสดงในรูปที่ 10-19



รูปที่ 10-19

Fracture หรือ **Brittle failure** คือการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบยืดหยุ่น (elastic deformation) ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างที่มีพฤติกรรมแบบเปราะ (brittle) เช่น พลาสติกเสริมใยแก้วและเหล็กหล่อ เป็นต้น ซึ่งมีค่าสูงมากจนกระทั่งโครงสร้างแตกออกจากกัน ดังที่แสดงในรูปที่ 10-20



รูปที่ 10-20

Fatigue failure เป็นการวิบัติแบบเปราะของโครงสร้างที่ทำด้วยวัสดุเหนียว เช่น เหล็กโครงสร้าง เป็นต้น เนื่องจากการกระทำของแรงหรือการกระทำของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบซ้ำไปซ้ำมาเป็นเวลานานพอสมควร

Buckling failure เป็นการวิบัติของโครงสร้างที่เกิดขึ้นในรูปของการโก่งตัวทางด้านข้างอย่างมาก เมื่อแรงที่กระทำต่อโครงสร้างมีค่าเพิ่มสูงขึ้นเพียงเล็กน้อยเท่านั้น และโครงสร้างดังกล่าวจะสูญเสียความสามารถในการทำหน้าที่ได้ออกแบบไว้ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-21

รูปที่ 10-21

Creep failure คือการเปลี่ยนแปลงรูปร่างแบบพลาสติก (plastic deformation) ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างภายใต้การกระทำของน้ำหนักบรรทุกเป็นเวลานาน โดยการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ จนมีค่าที่สูงมากจนกระทั่งทำให้โครงสร้างไม่สามารถทำหน้าที่ได้ตามที่ได้ออกแบบไว้ได้

เกณฑ์กำหนดการวิบัติ (Failure Criteria)

การวิเคราะห์หน่วยแรง (stress analysis) เพื่อหาค่า normal stresses และ shear stresses ที่เกิดขึ้นบนจุดที่วิกฤติที่สุดบนโครงสร้างแล้วนำมาหาค่า principal stresses ที่เกิดขึ้นที่จุดดังกล่าวไม่สามารถทำนายการวิบัติของโครงสร้างได้ ในการที่จะรู้ว่าโครงสร้างจะรองรับหน่วยแรงขนาดเท่าไรได้หรือในการที่เราจะทราบว่าโครงสร้างที่เรากำลังออกแบบมีกำลัง (strength) เท่าใดนั้น เราจะต้องใช้เกณฑ์กำหนดการวิบัติ (failure criteria) ทำนายกำลังของโครงสร้าง

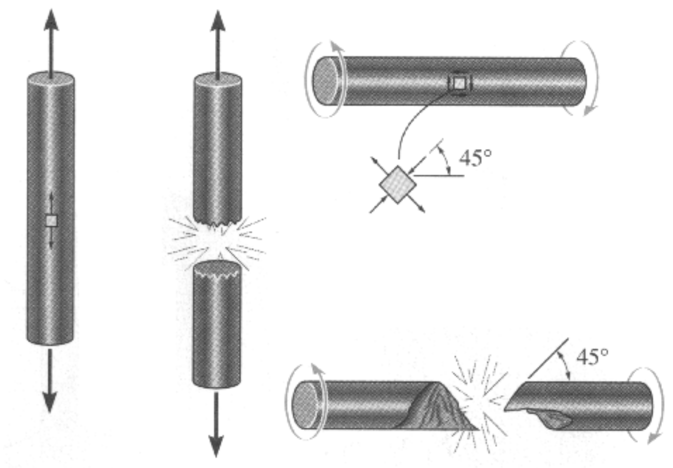
ในที่นี้ เราจะสนใจเฉพาะการวิบัติเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกแบบสถิตย์เท่านั้น ซึ่งประกอบด้วยการวิบัติแบบ force-induced failure, yielding failure, และ ductile failure ซึ่งเป็นการวิบัติของวัสดุเหนียว (ductile material) และ fracture ซึ่งเป็นการวิบัติของวัสดุเปราะ (brittle material)

วัสดุเปราะ (Brittle Materials)

Maximum principal normal stress fracture criterion

เราทราบมาแล้วว่า วัสดุเปราะ เช่น คอนกรีต เป็นต้น มีแนวโน้มที่จะวิบัติแบบทันทีทันใดโดยการแตกหัก (fracture) โดยไม่มีการ yielding เกิดขึ้น

ในการทดสอบแรงดึงต่อวัสดุเปราะ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-22a การแตกหักของตัวอย่างทดสอบจะเกิดขึ้นเมื่อค่าหน่วยแรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับค่าหน่วยแรงดึงประลัย (ultimate tensile stress) σ_{ult} ของวัสดุที่ใช้ทำตัวอย่างทดสอบ และในการทดสอบแรงแรงบิดต่อวัสดุเปราะ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-22b การแตกหักของตัวอย่างทดสอบจะเกิดขึ้นเนื่องจาก principal tensile stress ที่มุม 45^o กับแนวแกนของตัวอย่างโดยที่ principal compressive stress แทบจะไม่มีผลต่อการวิบัติของตัวอย่างทดสอบเลย ซึ่งจะสรุปได้ว่า ค่าหน่วยแรงดึงที่ทำให้ตัวอย่างทดสอบเกิดการแตกหักในกรณีของการทดสอบแรงบิดแทบจะไม่แตกต่างจากค่าหน่วยแรงดึงที่ใช้ในการทำให้ตัวอย่างทดสอบเกิดการแตกหักในกรณีของการทดสอบแรงดึง ดังนั้น maximum principal normal stress fracture criterion จึงกล่าวไว้ว่า “โครงสร้างที่ทำด้วยวัสดุเปราะจะเกิดการวิบัติเมื่อค่า maximum principal normal stress ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างดังกล่าวมีค่าเท่ากับหรือมากกว่าค่า ultimate stress ของวัสดุดังกล่าวที่ได้จากการทดสอบแรงดึง”



Failure of a brittle material in tension
(a)

Failure of a brittle material in torsion
(b)

รูปที่ 10-22

ในกรณีที่วัสดุในโครงสร้างถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress แล้ว การวิบัติของโครงสร้างจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\left.\begin{matrix} |\sigma_1| \\ |\sigma_2| \end{matrix}\right\} \geq \sigma_{ult} \qquad (10\text{-}24)$$

โดยที่ σ_1, σ_2 เป็นค่า principal normal stresses

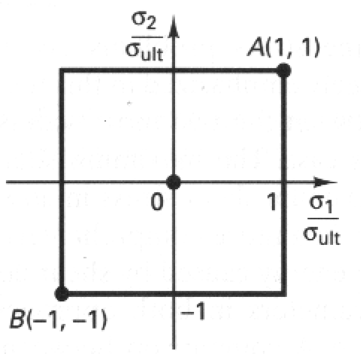
σ_{ult} เป็นค่า ultimate tensile (or compressive) strength ที่ได้จากการทำการทดสอบแรงดึงวัสดุ

ทำการจัดรูปสมการที่ 10-24 ใหม่ เราจะได้ว่า

$$\left| \pm \frac{\sigma_1}{\sigma_{ult}} \right| = 1 \quad \text{และ} \quad \left| \pm \frac{\sigma_2}{\sigma_{ult}} \right| = 1 \qquad (10\text{-}25)$$

รูปที่ 10-23 แสดงกราฟของสมการที่ 10-25 ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า จากรูป เมื่อพิกัดของอัตราส่วนของ principal stress ต่อ ultimate stress (σ_1/σ_{ult}, σ_2/σ_{ult}) ที่เกิดขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งบนโครงสร้างอยู่นอกรูปสี่เหลี่ยมด้านเท่าแล้ว วัสดุที่จุดดังกล่าวของโครงสร้างจะถูกพิจารณาว่าเกิดการวิบัติแบบ fracture แล้ว

จากการทดสอบพบว่า maximum principal normal stress fracture criterion นี้จะใช้ได้ดีกับวัสดุเปราะที่มี tensile stress-strain diagram และ compressive stress-strain diagram ที่คล้ายคลึงกัน

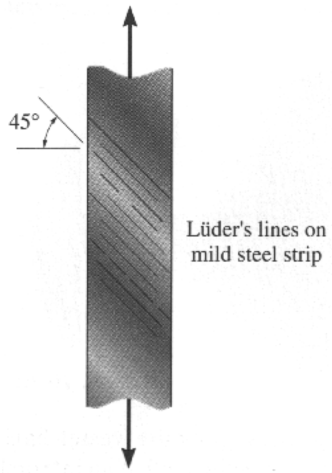


รูปที่ 10-23

วัสดุเหนียว (Ductile Materials)

Maximum shear stress yield criterion

จากการทดสอบแรงดึงพบว่า วัสดุเหนียว (ductile material) เช่น mild steel เป็นต้น มักจะเกิดการวิบัติแบบ yielding โดยการเลื่อน (slipping) ในระนาบที่วิกฤติของผลึกของวัสดุ เนื่องจากการกระทำของ shear stress ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 10-24 โดยที่ระนาบดังกล่าวจะทำมุมประมาณ 45^o กับแนวกระทำของแรงดึง

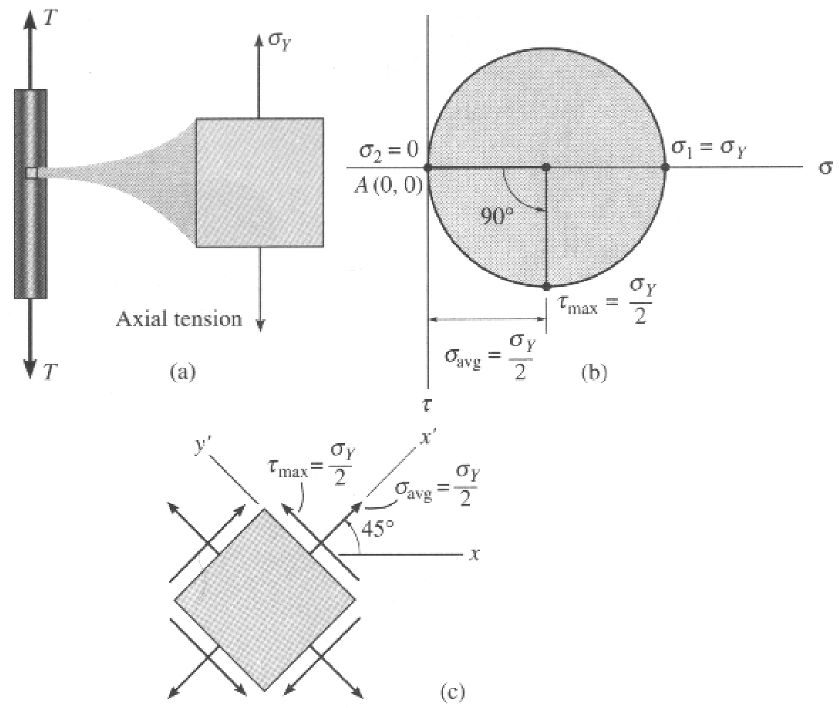


รูปที่ 10-24

พิจารณา element ที่ตัดออกมาจากตัวอย่างทดสอบแรงดึง ดังที่แสดงในรูปที่ 10-25a ซึ่งถูกกระทำโดยแรงดึงที่มีขนาดทำให้ normal tensile stress ที่เกิดขึ้นมีค่าเท่า yielding stress σ_y ของวัสดุ ค่าสูงสุดของ shear stress ที่กระทำต่อ element จะหาได้โดยใช้ Mohr's circle ดังที่แสดงในรูปที่ 10-25b และมีค่าเท่ากับ

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y}{2} \tag{10-26}$$

ซึ่งกระทำอยู่บนระนาบที่ทำมุม 45^o กับระนาบของ principal stress ดังที่แสดงในรูปที่ 10-25c ซึ่งสอดคล้องกับระนาบที่เกิดการวิบัติแบบ yielding ที่ได้จากการทดสอบ ดังที่แสดงในรูปที่ 10-24



รูปที่ 10-25

โดยใช้แนวความคิดดังกล่าว ในปี 1868 Henri Tresca ได้เสนอ maximum shear stress yield criterion โดยกล่าวว่า "การวิบัติแบบ yielding ของวัสดุจะเกิดขึ้นเมื่อค่า absolute maximum principal shear stress ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างมีค่าเท่ากับหรือมากกว่าค่า maximum shear stress ที่ทำให้เกิด yielding ในวัสดุของตัวอย่างทดสอบที่ถูกทดสอบแรงดึง"

ในทางคณิตศาสตร์ เมื่อวัสดุในโครงสร้างถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress แล้ว การวิบัติแบบ yielding จะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\tau_{\substack{abs\\ \max}} = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right| \geq \left|\tau_y\right| \tag{10-27}$$

โดยที่ $\tau_{\substack{abs\\ \max}}$ เป็นค่า absolute maximum principal shear stress

τ_y เป็นค่า maximum shear strength ของวัสดุที่ได้จากการทดสอบแรงดึง ซึ่งจะหาได้จากสมการ

$$\tau_y = \frac{\sigma_y - 0}{2} = \frac{\sigma_y}{2}$$

ดังนั้น เราจะเขียนสมการที่ 10-27 ได้ใหม่เป็น

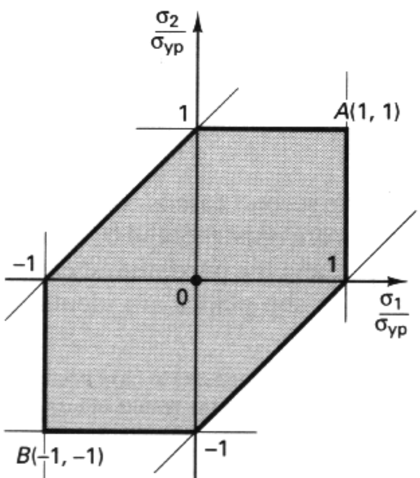
$$|\sigma_1 - \sigma_2| \geq |\sigma_y| \tag{10-28}$$

หรือ

$$\left| \pm \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_y} - \frac{\sigma_2}{\sigma_y} \right] \right| = 1$$ เมื่อ σ_1 และ σ_2 มีเครื่องหมายตรงกันข้าม

$$\left.\begin{aligned} \left| \pm \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_y} \right] \right| = 1 \\ \left| \pm \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_y} \right] \right| = 1 \end{aligned}\right\}$$ เมื่อ σ_1 และ σ_2 มีเครื่องหมายเหมือนกัน

เมื่อนำสมการที่ 10-28 มาเขียนกราฟแล้ว เราจะได้กราฟรูปหกเหลี่ยม ดังที่แสดงในรูปที่ 10-26 สภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งบนโครงสร้างมีพิกัดของอัตราส่วนของ principal stress ต่อ yielding stress (σ_1/σ_y, σ_2/σ_y) อยู่นอกรูปหกเหลี่ยมแล้ว วัสดุที่จุดดังกล่าวของโครงสร้างจะถูกพิจารณาว่าเกิดการวิบัติแบบ yielding แล้ว



รูปที่ 10-26

Maximum distortion energy yield criterion

เมื่อโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงภายนอกแล้ว โครงสร้างจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและวัสดุของโครงสร้างจะเก็บกักพลังงานไว้ภายใน ซึ่งอยู่ในรูปของ strain energy ค่า strain energy ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรจะถูกเรียกว่า strain energy density u ซึ่งจาก section 2-3 เราทราบมาแล้วว่า เมื่อวัสดุถูกกระทำโดย normal stress เท่านั้นแล้ว

$$u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

แต่ถ้าวัสดุถูกกระทำโดย principal stresses σ_1, σ_2, และ σ_3 ดังที่แสดงในรูปที่ 10-27a และวัสดุยังคงมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่นแล้ว strain energy density ที่สะสมอยู่ในวัสดุจะหาได้จากสมการ

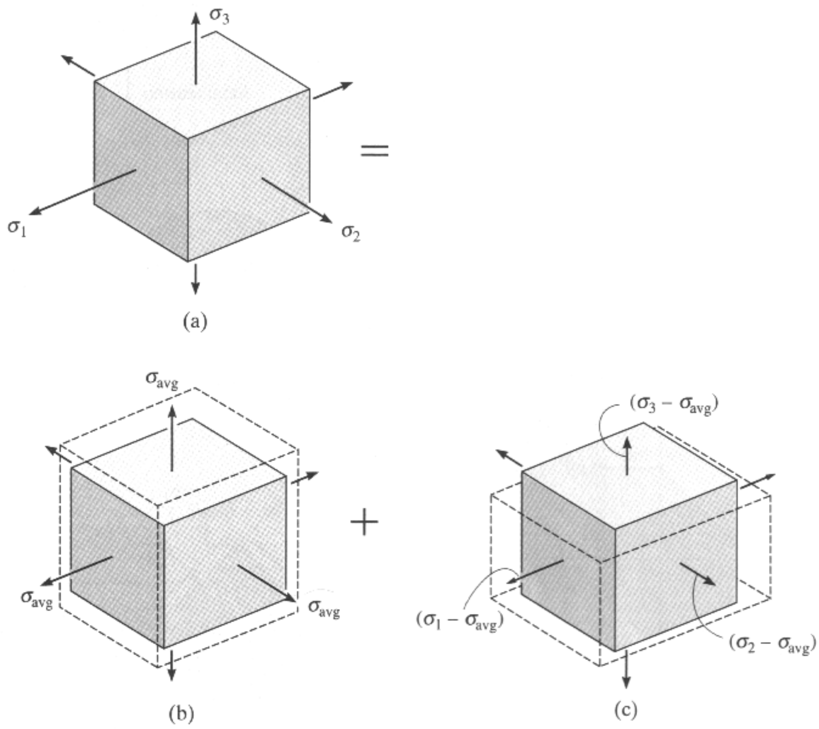
$$u = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 \tag{10-29}$$

จาก strain-stress relations สมการที่ 10-14 และ 10-15 ในรูปของ principal strains และ principal stresses เราจะเขียนสมการที่ 10-29 ได้ใหม่ในรูป

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right] \tag{10-30}$$

สมการของ strain energy density นี้จะถูกแยกพิจารณาออกได้เป็น 2 ส่วนคือ

1. strain energy density เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงปริมาตรหรือ dilation strain energy density, u_v, ดังที่แสดงในรูปที่ 10-27b
2. strain energy density เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือ distortion strain energy density, u_d , ดังที่แสดงในรูปที่ 10-27c



รูปที่ 10-27

Strain energy density เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงปริมาตร u_v จะเกิดจากค่า principal stresses เฉลี่ย

$$\sigma_{avg.} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

ซึ่งจะทำให้เกิดค่า strain เฉลี่ย

$$\varepsilon_{avg.} = \frac{1}{E}(1-2\nu)\sigma_{avg.}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$u_v = 3\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)\left(\frac{1-2\nu}{E}\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)$$

$$u_v = \frac{3}{2}\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2 \tag{10-31}$$

และ strain energy density เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง u_d จะหาได้จากสมการ $u_d = u - u_v$ ดังนั้น

$$u_d = \frac{1}{2E}\left(\frac{1+\nu}{3}\right)\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right) \tag{10-32}$$

จากการทดสอบพบว่า วัสดุจะไม่เกิดการ yielding ขึ้นเมื่อถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงดังที่แสดงในรูปที่ 10-26b (hydrostatic) ดังนั้น ในปี 1904 M. Huber ได้เสนอ Maximum distortion energy yield criterion โดยกล่าวว่า "การวิบัติแบบ yielding ของวัสดุในโครงสร้างจะเกิดขึ้นเมื่อค่า distortion strain energy density ของวัสดุในโครงสร้างมีค่าเท่ากับหรือมากกว่า distortion strain energy density ที่จุดวิบัติของตัวอย่างทดสอบที่ถูกทดสอบโดยการทดสอบแรงดึงและทำด้วยวัสดุดังกล่าว"

Distortion strain energy density ที่จุดวิบัติของตัวอย่างทดสอบจะหาได้จากสมการ

$$u_{d,y} = \left(\frac{1+\nu}{3E}\right)\sigma_y^2 \tag{10-33}$$

จาก maximum distortion energy yield criterion เราจะได้ว่า ที่จุดวิบัติ สมการที่ 10-32 จะต้องเท่ากับสมการที่ 10-33 ดังนั้น

$$\frac{1}{2E}\left(\frac{1+\nu}{3}\right)\left((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right) = \left(\frac{1+\nu}{3E}\right)\sigma_y^2$$

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2 \tag{10-34}$$

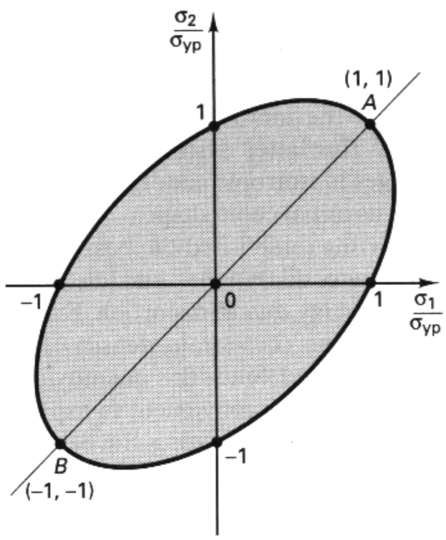
เมื่อวัสดุในโครงสร้างถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress แล้ว วัสดุในโครงสร้างจะเกิดการวิบัติเมื่อ

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2)^2+(-\sigma_1)^2 = 2\sigma_y^2$$

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2 = \sigma_y^2$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2-\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right)^2 = 1 \tag{10-35}$$

เมื่อทำการเขียนกราฟของสมการที่ 10-35 แล้ว เราจะเห็นได้ว่า failure envelop จะมีรูปร่างเป็นวงรี ดังที่แสดงในรูปที่ 10-28 สภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งบนโครงสร้างที่มีพิกัดของอัตราส่วนของ principal stress ต่อ yielding stress (σ_1/σ_y, σ_2/σ_y) อยู่นอกรูปวงรีแล้ว วัสดุที่จุดดังกล่าวของโครงสร้างจะถูกพิจารณาว่าเกิดการวิบัติแบบ yielding จากการทดสอบพบว่า maximum distortion energy yield criterion นี้เหมาะที่จะใช้กับโครงสร้างที่ทำด้วยวัสดุแบบ isotropic materials ที่วิบัติโดยการ yielding หรือ ductile rupture

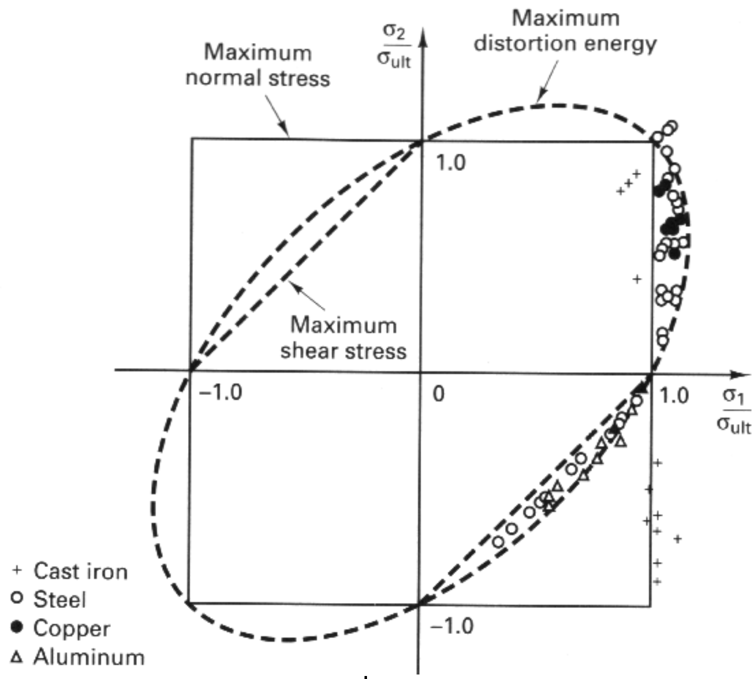


รูปที่ 10-28

การเปรียบเทียบเกณฑ์กำหนดการวิบัติต่างๆ

รูปที่ 10-29 แสดงผลที่ได้จากการทดสอบวัสดุชนิดต่างๆ ซึ่งถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress เทียบกับ failure criteria 3 แบบที่ได้เสนอใน section ที่ผ่านมา จากรูป เราจะสามารถสรุปได้ว่า

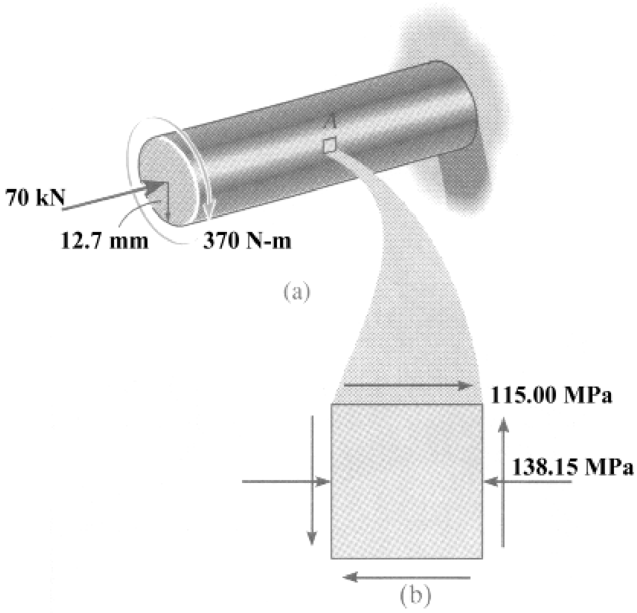
1. Maximum principal stress criterion เหมาะที่จะใช้กับวัสดุแบบ isotropic ที่วิบัติโดย brittle fracture
2. Maximum distortion energy criterion เหมาะที่จะใช้กับวัสดุแบบ isotropic ที่วิบัติโดย yielding หรือ ductile rupture
3. Maximum shearing stress criterion มีความเหมาะสมเท่าๆ กับ maximum distortion energy criterion สำหรับวัสดุแบบ isotropic ที่วิบัติโดย yielding หรือ ductile rupture



รูปที่ 10-29

ตัวอย่างที่ 10-6

เพลาตัน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-6a มีรัศมี $12.7\ \mathrm{mm}$ และทำด้วยเหล็กซึ่งมี $\sigma_y = 250\ \mathrm{MPa}$ จงตรวจสอบว่าแรงกระทำต่อเพลาทำให้เพลาเกิดการวิบัติโดย maximum shearing stress criterion และ maximum distortion energy criterion หรือไม่



รูปที่ Ex 10-6

กำหนดให้แกน x อยู่ในแนวแกนของเพลา

หน่วยแรงตั้งฉากเนื่องจากแรงในแนวแกนมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_x = \frac{70}{\pi(0.0127)^2} = 138.15\ \mathrm{MPa}$$

หน่วยแรงเฉือนสูงสุด เนื่องจากแรงบิดมีค่าเท่ากับ

$$\tau_{xy} = \frac{370(0.127)}{\dfrac{\pi(0.0127)^4}{2}} = 115.0\ \mathrm{MPa}$$

ซึ่งเราจะได้สภาวะของหน่วยแรงที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-6b ซึ่งจากบทที่ 9 เราจะได้ว่า principal normal stresses ของสภาวะของหน่วยแรงดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_{\substack{1\\2}} = \frac{-138.15+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-138.15-0}{2}\right)^2 + 115.0^2}$$

$$\sigma_1 = 65.07\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_2 = -203.23\ \mathrm{MPa}$$

จาก maximum shearing stress criterion และเนื่องจาก principal normal stresses มีเครื่องหมายที่ตรงกันข้าม ดังนั้น

$$\left|\pm\left[\frac{\sigma_1}{\sigma_y} - \frac{\sigma_2}{\sigma_y}\right]\right| \overset{?}{\le} 1$$

$$\left\| \left[\frac{65.07}{250} - \frac{-203.23}{250} \right] \right\| = 1.073 > 1.0$$

ดังนั้น แรงกระทำดังกล่าวทำให้เพลาเกิดการวิบัติตาม maximum shearing stress criterion <u>Ans.</u>

จาก maximum distortion energy criterion

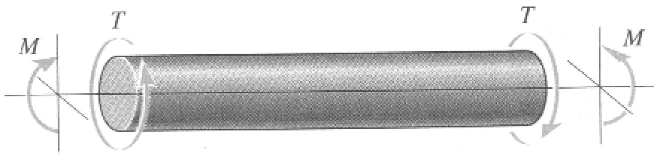
$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y} \frac{\sigma_2}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_y} \right)^2 \overset{?}{\leq} 1$$

$$\left(\frac{65.07}{250} \right)^2 - \left(\frac{65.07}{250} \frac{-203.23}{250} \right) + \left(\frac{-203.23}{250} \right)^2 = 0.940 < 1.0$$

ดังนั้น แรงกระทำดังกล่าวไม่ทำให้เพลาเกิดการวิบัติตาม maximum distortion energy criterion <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 10-7

เพลาเหล็กมี $\sigma_Y = 700\,\text{MPa}$, $E = 200\,\text{GPa}$, และ $\nu = 0.29$ ถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัด $M = 13.0\,\text{kN-m}$ และแรงบิด $T = 30.0\,\text{kN-m}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 10-7 กำหนดให้ส่วนความปลอดภัย $\text{SF} = 2.60$ จงหาว่าเพลาดังกล่าวควรมีเส้นผ่าศูนย์กลางที่น้อยที่สุดเท่าใดจึงจะไม่เกิดการวิบัติโดย maximum octahedral shearing stress criterion และ maximum shearing stress criterion



รูปที่ Ex 10-7

เพลาถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัด $M = 13.0\,\text{KN-m}$ และแรงบิด $T = 30.0\,\text{kN-m}$ เนื่องจากส่วนความปลอดภัย $\text{SF} = 2.60$ ดังนั้น เมื่อกำหนดให้แกน x อยู่ในแนวแกนของเพลา เราจะได้ว่า

$$\sigma_x = \text{SF}\frac{Mc}{I} = \frac{32(\text{SF})M}{\pi d^3}$$

$$\tau_{xy} = SF\frac{Tc}{J} = \frac{16(\text{SF})T}{\pi d^3}$$

จาก maximum octahedral shearing stress criterion

$$\tau_{oct(\max)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_Y$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{xz}^2 + 6\tau_{yz}^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_Y$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{2\sigma_x^2 + 6\tau_{xy}^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_Y$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

เมื่อแทนสมการของหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนลงในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$\sigma_Y = \frac{16(\text{SF})}{\pi d^3}\sqrt{4M^2 + 3T^2}$$

หรือ

$$d_{\min} = \left[\frac{16(\text{SF})}{\pi\sigma_Y}\sqrt{4M^2 + 3T^2}\right]^{1/3}$$

ดังนั้น

$$d_{\min} = 103\,\text{mm}$$

จาก maximum shearing stress criterion

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_Y}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_Y}{2}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_Y}{2}$$

เมื่อแทนสมการของหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนลงในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$d_{\min} = \left[\frac{32(\mathrm{SF})}{\pi \sigma_Y} \sqrt{M^2 + T^2} \right]^{1/3}$$

ดังนั้น $d_{\min} = 107 \text{ mm}$

จากการเปรียบเทียบเส้นผ่าศูนย์กลางที่คำนวณได้โดย maximum octahedral shearing stress criterion และ maximum shearing stress criterion เราจะได้ว่า เส้นผ่าศูนย์กลางของเพลาที่น้อยที่สุดที่สามารถรับแรงได้อย่างปลอดภัย คือ 107 mm <u>Ans.</u>

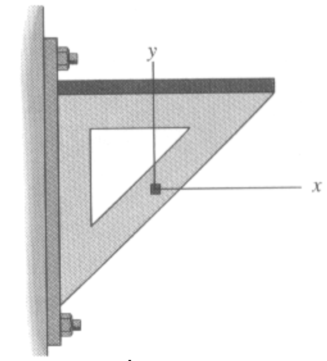
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 10

10-1 กำหนดให้สภาวะของความเครียดที่จุดๆ หนึ่งบนเท้าแขน (bracket) ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-1 มีองค์ประกอบดังนี้ $\varepsilon_x = -200(10^{-6})$, $\varepsilon_y = -650(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -175(10^{-6})$

a.) จงหาสภาวะของความเครียดเมื่อ element ที่จุดดังกล่าวหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\theta = 20^o$ โดยใช้สมการ strain-transformation และโดยใช้ Mohr's Circle

b.) จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal strains และ maximum in-plane shear strain ที่เกิดขึ้นบน element โดยใช้สมการ stress-transformation

c.) จงหาสภาวะของหน่วยแรง principal stresses และ maximum in-plane shear stress ที่เกิดขึ้นบน element โดยใช้ Mohr's Circle



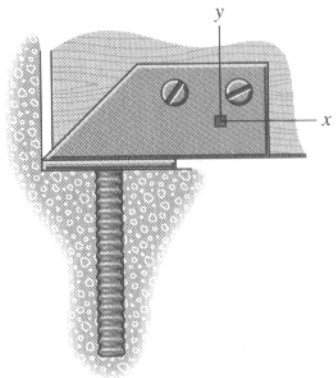
รูปที่ Prob. 10-1

10-2 กำหนดให้สภาวะของความเครียดที่จุดๆ หนึ่งบนเท้าแขน (bracket) ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-2 มีองค์ประกอบดังนี้ $\varepsilon_x = 150(10^{-6})$, $\varepsilon_y = 200(10^{-6})$, และ $\gamma_{xy} = -700(10^{-6})$

a.) จงหาสภาวะของความเครียดเมื่อ element ที่จุดดังกล่าวหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\theta = 30^o$ โดยใช้สมการ strain-transformation และโดยใช้ Mohr's Circle

b.) จงหาสภาวะของความเครียด principal strains และ maximum in-plane shear strain ที่เกิดขึ้นบน element และทิศทางที่เกิดสภาวะของความเครียดดังกล่าว โดยใช้สมการ stress-transformation

c.) จงหาสภาวะของความเครียด principal strains และ maximum in-plane shear strain ที่เกิดขึ้นบน element และทิศทางที่เกิดสภาวะของความเครียดดังกล่าว โดยใช้ Mohr's Circle

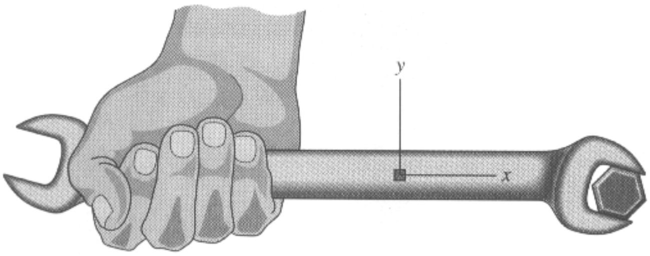


รูปที่ Prob. 10-2

10-3 กำหนดให้สภาวะของความเครียดที่จุดๆ หนึ่งบนประแจ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-3 มีองค์ประกอบดังนี้ $\varepsilon_x = 120(10^{-6})$, $\varepsilon_y = -180(10^{-6})$, และ $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$

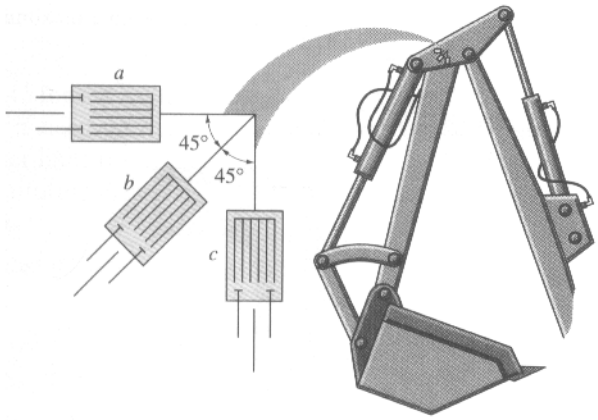
a.) จงหาสภาวะของความเครียด principal strains และ maximum in-plane shear strain ที่เกิดขึ้นบน element และทิศทางที่เกิดสภาวะของความเครียดดังกล่าว โดยใช้สมการ stress-transformation

b.) จงหาสภาวะของความเครียด principal strains และ maximum in-plane shear strain ที่เกิดขึ้นบน element และทิศทางที่เกิดสภาวะของความเครียดดังกล่าว โดยใช้ Mohr's Circle



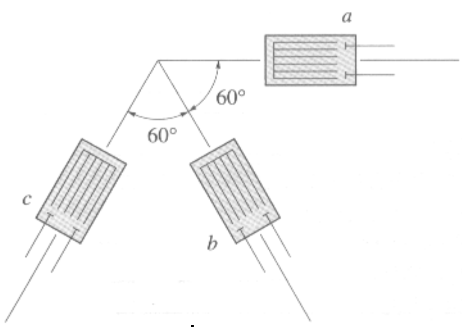
รูปที่ Prob. 10-3

10-4 45^o strain rosette ถูกนำไปติดบนแขนของรถตักดิน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-4 ซึ่งพบว่า $\varepsilon_a = 650(10^{-6})$, $\varepsilon_b = -300(10^{-6})$, และ $\varepsilon_c = 480(10^{-6})$ จงหาสภาวะของความเครียด principal strains และ maximum in-plane shear strain ที่เกิดขึ้นจุดที่ติด strain rosette และทิศทางที่เกิดสภาวะของ strains ดังกล่าว



รูปที่ Prob. 10-4

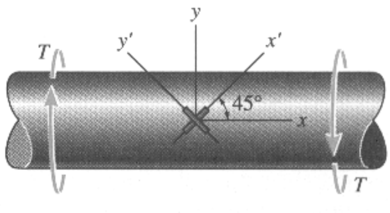
10-5 60^o strain rosette ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-5 ถูกนำไปติดบนแผ่นเหล็กและพบว่า $\varepsilon_a = 950(10^{-6})$, $\varepsilon_b = 380(10^{-6})$, และ $\varepsilon_c = -220(10^{-6})$ จงหาสภาวะของความเครียด principal strains และ maximum in-plane shear strain ที่เกิดขึ้นที่จุดที่ติด strain rosette



รูปที่ Prob. 10-5

10-6 กำหนดให้ principal strains ที่เกิดขึ้นบนผิวของถัง aluminum ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-6 มีค่าเท่ากับ $\varepsilon_1 = 630(10^{-6})$ และ $\varepsilon_2 = 350(10^{-6})$ จงหา principal stresses ที่สอดคล้องกับ principal strains ดังกล่าว เมื่อ $E_{al} = 70\,\text{GPa}$, $\nu = 0.33$

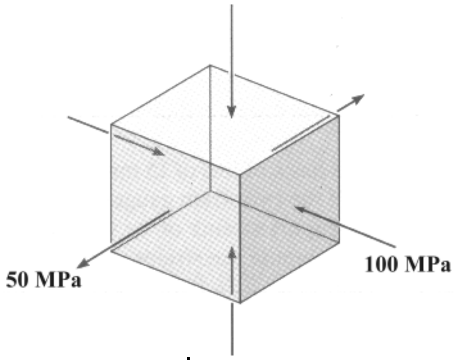
10-7 จงหาแรงบิด T ที่กระทำต่อเพลาเหล็กตันที่มีรัศมี $15\,\text{mm}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-7 ถ้า strain gauges สองตัวที่ติดบนเพลาให้ค่า strain $\varepsilon_{x'} = 150(10^{-6})$ และ $\varepsilon_{y'} = 200(10^{-6})$ และ $E_{st} = 200\,\text{GPa}$, $\nu = 0.3$



รูปที่ Prob. 10-7

10-8 ถ้าแรงบิดที่กระทำต่อเพลาเหล็กตันที่มีรัศมี $15\,\text{mm}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-7 มีค่า $T = 2\,\text{kN-m}$ และเมื่อ $E_{st} = 200\,\text{GPa}$, $\nu = 0.3$ จงหาค่า strain ที่เกิดขึ้นบนผิวของเพลาตันในแนวของ strain gauges

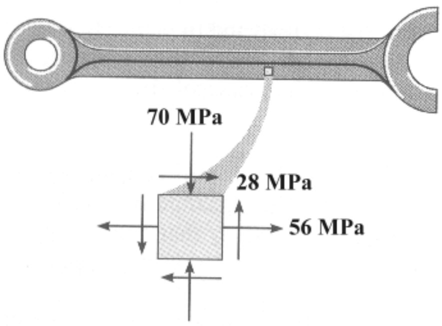
10-9 เมื่อ $E_{al} = 70\,\text{GPa}$, $\nu = 0.33$ จงหา principal strains ที่เกิดจากสภาวะของ principal stresses ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-9



รูปที่ Prob. 10-9

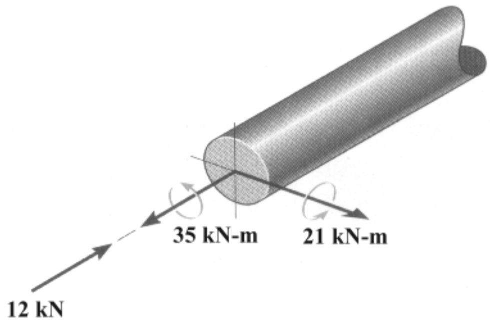
10-10 จงพิสูจน์ว่าเมื่อ thin-walled pressure vessel ทรงกลมที่มีรัศมีภายใน r_i และความหนา t ถูกกระทำโดยความดันภายใน p และจะมีปริมาตรภายในเพิ่มขึ้น $\Delta V = (2p\pi r^4 / Et)(1-\nu)$

10-11 กำหนดให้สภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-11 จงหาค่า yielding stress อย่างน้อยที่สุดของวัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลดังกล่าว โดยใช้ maximum shear stress theory และ maximum distortion energy density



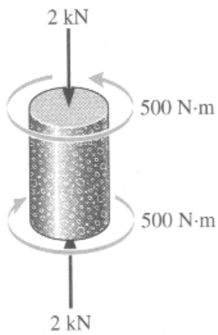
รูปที่ Prob. 10-11

10-12 กำหนดให้แรงภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดที่วิกฤติของเพลามีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-12 ถ้า $\sigma_Y = 680\,\text{MPa}$ และ $\tau_Y = 340\,\text{MPa}$ จงหาเส้นผ่าศูนย์กลางของเพลาดังกล่าว โดยใช้ maximum shear stress theory และ maximum distortion energy density



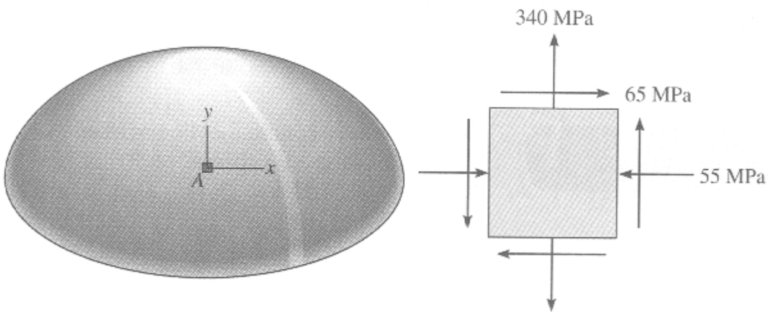
รูปที่ Prob. 10-12

10-13 กำหนดให้แท่งคอนกรีตเส้นผ่าศูนย์กลาง $50\,\text{mm}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-13 ถูกกระทำโดยแรงบิดขนาด $500\,\text{N-m}$ และแรงกดอัด $2\,\text{kN}$ ถ้า $\sigma_{ult} = 28\,\text{MPa}$ จงตรวจสอบว่าแท่งคอนกรีตวิบัติหรือไม่ โดยใช้ maximum normal stress theory



รูปที่ Prob. 10-13

10-14 สภาวะของหน่วยแรงที่จุดวิกฤติบน thin steel shell ($\sigma_Y = 650\,\text{MPa}$) มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 10-14 จงตรวจสอบว่าจุดดังกล่าวเกิดการวิบัติหรือไม่ โดยใช้ maximum normal stress theory และ maximum distortion energy density



รูปที่ Prob. 10-14

บทที่ 11

การออกแบบคานและเพลา (Design of Beams and Shafts)

เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

11.1 **พื้นฐานของการออกแบบคาน** (Basis for Beam Design)

คาน (beam) เป็นองค์อาคารของโครงสร้างที่ถูกออกแบบเพื่อรองรับน้ำหนักบรรทุกตามขวาง (transverse loads) น้ำหนักบรรทุกดังกล่าวจะทำให้เกิดแรงเฉือน (shear) และโมเมนต์ดัด (bending moment) ขึ้นภายในคาน ซึ่งจะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามแนวแกนของคาน ดังนั้น คานจะต้องถูกออกแบบคานให้มีกำลังที่พอเพียงในการต้านทานต่อหน่วยแรงที่เกิดจากแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดดังกล่าว การออกแบบคานในลักษณะนี้มักจะถูกเรียกว่า การออกแบบคานโดยใช้พื้นฐานของกำลัง (design on the basis of strength)

ในการออกแบบคานโดยใช้พื้นฐานของกำลังนั้น เราจะสมมุติให้:

1. คานทำด้วยวัสดุที่มีเนื้อเดียวกันตลอด (homogeneous material) และมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear-elastic)
2. หน้าตัดของคานมีแกนสมมาตรรอบระนาบที่แรงภายนอกกระทำ

ในทางปฏิบัติ เมื่อคานจะถูกออกแบบโดยใช้พื้นฐานของกำลังแล้ว คานดังกล่าวจะต้องถูกตรวจสอบไม่ให้มีการโก่งตัวมากกว่าที่ระบุไว้ในมาตรฐานการออกแบบ (design code) ทั้งนี้เพื่อให้แน่ใจว่าคานดังกล่าวสามารถที่จะใช้งานได้ตามวัตถุประสงค์ที่กำหนด

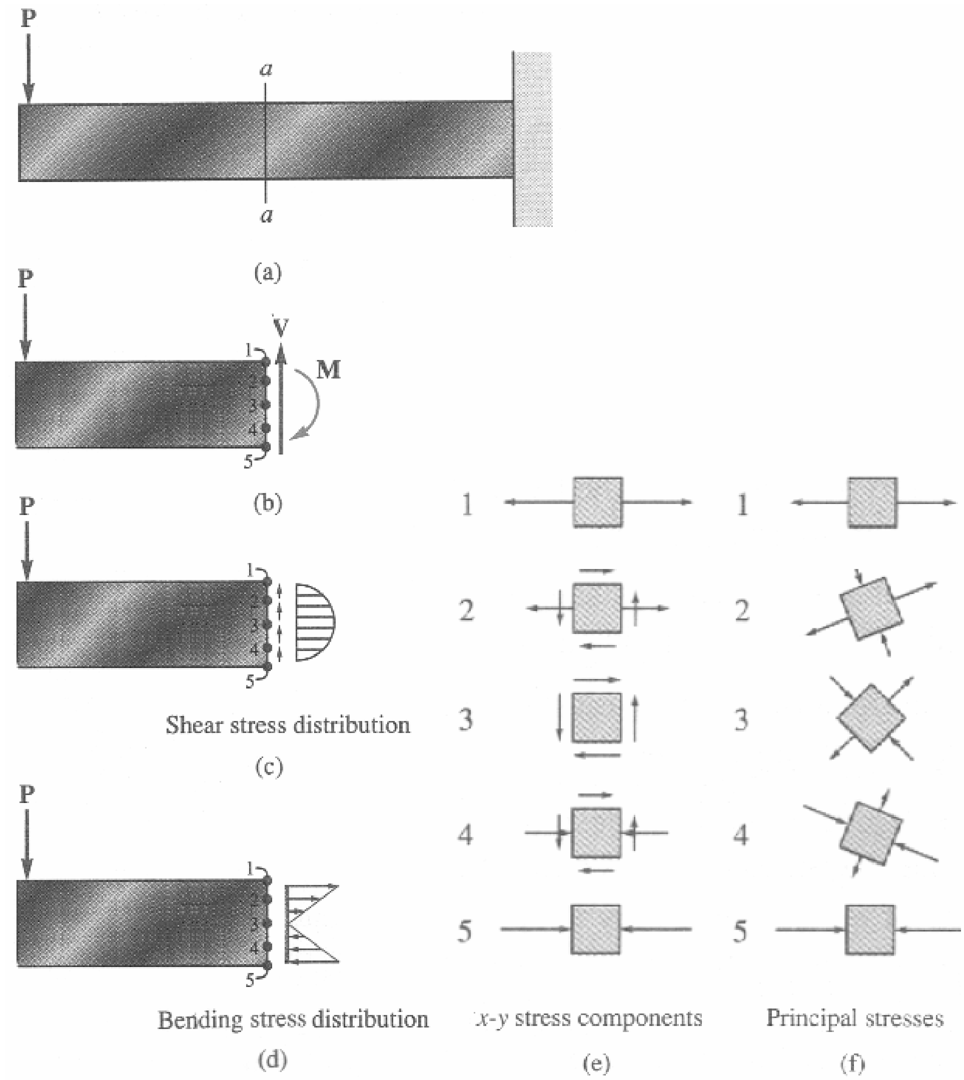
11.2 **การกระจายของหน่วยแรงบนหน้าตัดของคาน** (Stress Variations Throughout a Prismatic Beam)

พิจารณาคานยื่น (cantilever beam) ซึ่งมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและถูกกระทำโดยแรงกระทำเป็นจุด (concentrated load) P ที่ปลายคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 11-1a ภายใต้การกระทำของแรง P คานจะมีแรงเฉือนภายใน V และโมเมนต์ภายใน M เกิดขึ้นที่หน้าตัด $a-a$ ดังที่แสดงในรูปที่ 11-1b แรงเฉือนภายใน V นี้เกิดจากหน่วยแรงเฉือนที่มีการกระจายแบบพาราโบลา (parabola) ดังที่แสดงในรูปที่ 11-1c และโมเมนต์ภายใน M นี้เกิดจากหน่วยแรงดัดตั้งฉาก (flexural stress) ที่มีการกระจายเชิงเส้นตรง ดังที่แสดงในรูปที่ 11-1d

จากการกระจายของหน่วยแรงทั้งสองนี้ เราจะเขียนสภาวะของหน่วยแรงที่เกิดขึ้นที่จุด 1 ถึงจุด 5 ดังที่แสดงในรูปที่ 11-1b ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 11-1e จากรูป เราจะเห็นได้ว่า

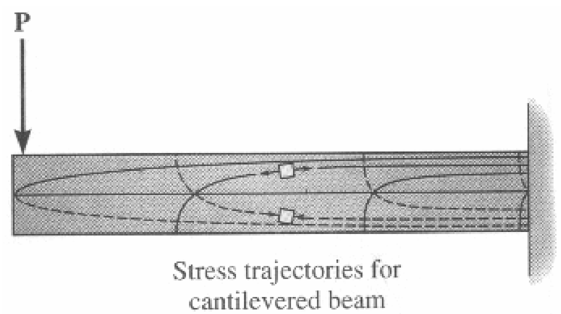
1. Element ที่จุด 1 และจุด 5 ซึ่งอยู่ที่ผิวด้านบนและด้านล่างของคาน ตามลำดับ จะถูกกระทำโดยหน่วยแรงตั้งฉากที่มีค่าสูงสุด
2. Element ที่จุด 3 ซึ่งอยู่บนแกนสะเทิน (neutral axis) ของคาน จะถูกกระทำโดยหน่วยแรงเฉือนที่มีค่าสูงสุด
3. Element ที่จุด 2 และจุด 4 ซึ่งอยู่ระหว่างผิวด้านบนกับแกน neutral axis และผิวด้านล่างกับแกน neutral axis ตามลำดับ จะถูกกระทำโดยหน่วยแรงตั้งฉากและหน่วยแรงเฉือนร่วมกัน

ในแต่ละสภาวะของหน่วยแรงดังกล่าว เราจะหาค่าหน่วยแรงหลัก (principal stresses) ที่เกิดขึ้นบน stress element เหล่านั้นได้โดยใช้วงกลมของมอร์ (Mohr's circle) ดังที่แสดงในรูปที่ 11-1f จากรูป เมื่อเราพิจารณา element ที่จุด 1 ถึง element ที่จุด 5 เรียงกันตามลำดับแล้ว เราจะสังเกตได้ว่า ระนาบที่เกิด principal stresses (principal plane) บน element ต่างๆ จะมีการหมุนทวนเข็มนาฬิกาจากแกนอ้างอิงจาก element ที่จุด 1 ถึง element ที่จุด 5 ตามลำดับ โดยที่ถ้าเราให้ทิศทางของ element ที่จุด 1 เป็นแกนอ้างอิงที่ 0^o แล้ว element ที่จุด 3 จะถูกหมุนไปเป็นมุม 45^o และ element ที่จุด 5 จะถูกหมุนไปเป็นมุม 90^o



รูปที่ 11-1

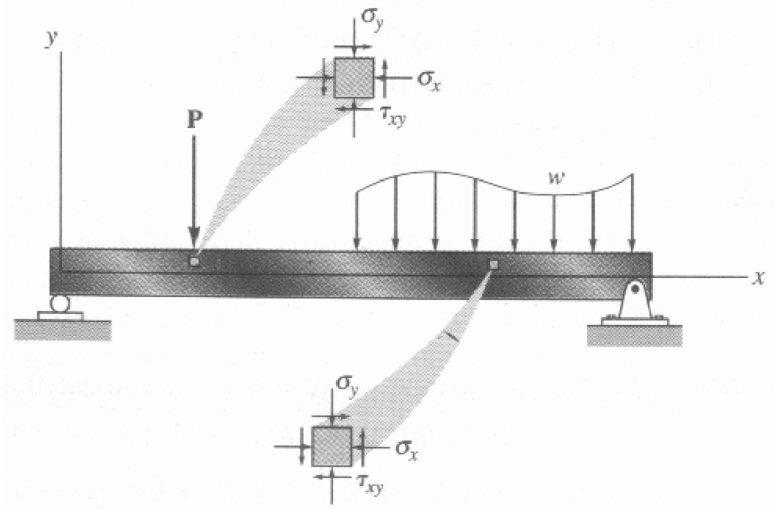
ถ้าเราทำการวิเคราะห์ในลักษณะดังกล่าวไปตามหน้าตัดต่างๆ ในแนวแกนของคาน แล้วทำการ plot ค่า principal stresses ที่เกิดขึ้นบน element ต่างๆ ที่มีค่าเท่ากัน เราจะได้ profile ของ principal stresses ที่เกิดขึ้นบนคานที่อยู่ในรูปของเส้นโค้ง (curve) ที่มักจะถูกเรียกว่า stress trajectories ดังที่แสดงในรูปที่ 11-2 โดยที่แต่ละเส้นของเส้นโค้งจะแสดงถึงทิศทางของ principal stresses ที่มีค่าคงที่ค่าหนึ่ง โดยที่เส้นทึบแสดงทิศทางของหน่วยแรงหลักดึง (tensile principal stresses) และเส้นประแสดงถึงทิศทางของหน่วยแรงหลักกดอัด (compressive principal stresses) เราควรสังเกตด้วยว่า เส้นทั้งสองจะตัดกับแกนสะเทิน (neutral axis) เป็นมุม 45^o และจะตัดกันเองเป็นมุม 90^o



รูปที่ 11-2

Localized Stresses

ในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงตั้งฉาก σ_x และหน่วยแรงเฉือน τ_{xy} ที่เกิดขึ้นในคานที่ผ่านมานั้น เราไม่ได้คำนึงถึงหน่วยแรงเข้มข้น (stress concentration) σ_y ในรูปของหน่วยแรงกดอัดที่เกิดขึ้นที่จุดที่แรงภายนอกกระทำต่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 11-3 ทั้งนี้เนื่องจากว่าเมื่ออัตราส่วนของความยาวต่อความลึกของคานมีค่าที่ค่อนข้างสูง ($L/d \geq 10$) แล้ว หน่วยแรงกดอัด σ_y นี้มักจะมีค่าที่น้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับค่าของหน่วยแรงตั้งฉาก σ_x และหน่วยแรงเฉือน τ_{xy} และถ้าแรงภายนอกกระทำผ่านแผ่นรับแรงแบกทาน (bearing plates) แล้ว หน่วยแรงกดอัด σ_y จะมีค่าลดลงจนเป็นศูนย์อย่างรวดเร็วตามความลึกของคาน



รูปที่ 11-3

11.3 **การออกแบบคาน** (Beam Design)

คานจะต้องถูกออกแบบให้มีกำลังที่เพียงพอในการต้านทานแรงกระทำภายนอกโดยให้หน่วยแรงดัดที่ยอมให้ (allowable bending stress) และหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ (allowable shear stress) ของวัสดุที่ใช้ทำคาน (ซึ่งมักจะถูกระบุอยู่ในมาตรฐานการออกแบบ) มีค่ามากกว่าหน่วยแรงดัด (bending stress) สูงสุดและหน่วยแรงเฉือน (shear stress) สูงสุดที่เกิดจากแรงกระทำภายนอกหรือ

$$\sigma_{\max} \leq (\sigma_b)_{allow}$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_{allow}$$

เมื่อคานมี span ที่ค่อนข้างยาวเมื่อเทียบกับความลึกของคานแล้ว ค่าโมเมนต์สูงสุดภายในที่เกิดขึ้นในคานจะควบคุมการออกแบบคาน ดังนั้น โดยปกติแล้ว เราจะออกแบบคานโดยให้คานมีกำลังรับหน่วยแรงดัดที่พอเพียงก่อน จากนั้น ทำการตรวจสอบว่าคานดังกล่าวมีกำลังพอเพียงในการรองรับแรงเฉือนหรือไม่ และสุดท้าย ทำการตรวจสอบการโก่งตัว (deflection) ของคาน ซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 12

จาก flexural formula $\sigma = Mc/I$ เราจะลดรูปตัวแปรของหน้าตัดของคาน ซึ่งประกอบด้วยค่า c และค่า I ลงได้โดยกำหนดให้อัตราส่วนของ I/c เป็น section modulus S ของหน้าตัดของคาน ดังนั้น เราจะได้ว่า section modulus ที่ต้องการใช้ในการรองรับหน่วยแรงดัดจะหาได้จากสมการ

$$S_{req'd} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{allow}} \tag{11-1}$$

เมื่อ $M_{\max} =$ ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นบนคาน ซึ่งหาได้จากแผนภาพ moment diagram

$\sigma_{allow} =$ ค่า allowable bending stress ของวัสดุที่ใช้ทำคาน ซึ่งระบุอยู่ในมาตรฐานการออกแบบ

เมื่อเราทราบค่า $S_{req'd}$ แล้ว เราจะทำการเลือก section modulus S ของหน้าตัดของคานมาตรฐานจากมาตรฐานการออกแบบ (design code) เช่น มาตรฐานการออกแบบของ AISC เป็นต้น โดยให้

$$S > S_{req'd}$$

ถ้าเราไม่พิจารณาการโก่งตัวของคานแล้ว เราจะเลือกใช้หน้าตัดของคานมาตรฐานที่มีค่า S ที่ใกล้เคียงกับค่าที่คำนวณได้จากสมการที่ 11-1 ที่มากที่สุด ซึ่งจะเป็นคานที่มีน้ำหนักเบาที่สุดและจะทำให้ค่าก่อสร้างคานมีราคาถูกที่สุด แต่เมื่อเราต้องพิจารณาค่าการโก่งตัวของคานแล้ว หน้าตัดของคานดังกล่าวอาจจะมีความแกร่งไม่พอเพียงตามที่กำหนดอยู่ในมาตรฐานก็ได้ ในกรณีนี้เราจะต้องเลือกใช้หน้าตัดของคานมาตรฐานที่ใหญ่ขึ้น

ในกรณีที่วัสดุมีค่า allowable bending stress เท่ากันทั้งในกรณีของหน่วยแรงดึงและหน่วยแรงกดอัด เช่น เหล็ก และ aluminum เป็นต้น แล้ว เราจะเลือกใช้คานที่มีหน้าตัดที่สมมาตรรอบแกนสะเทิน (neutral axis) ของหน้าตัดของคาน แต่ในกรณีที่ค่า allowable bending stress ดังกล่าวของวัสดุมีค่าที่ไม่เท่ากันแล้ว เราอาจจะต้องใช้หน้าตัดของคานที่ไม่สมมาตร เพื่อให้การออกแบบคานมีประสิทธิภาพมากขึ้น

หลังจากที่ได้ขนาดของคานที่มีกำลังพอเพียงในการต้านทานต่อหน่วยแรงดัด (flexural stress) แล้ว เราจะทำการหาหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำภายนอกโดยใช้ shear formula $\tau = VQ/It$ จากนั้น ทำการเปรียบเทียบค่าที่ได้กับค่า allowable shear stress τ_{allow} ของวัสดุที่ระบุอยู่ในมาตรฐานการออกแบบ ถ้า $\tau \le \tau_{allow}$ แล้ว หน้าตัดของคานดังกล่าวจะมีกำลังเพียงพอที่จะต้านทานต่อแรงเฉือนสูงสุด แต่ถ้า $\tau > \tau_{allow}$ แล้ว เราจำเป็นจะต้องเลือกขนาดหน้าตัดของคานให้ใหญ่ขึ้น ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว หน่วยแรงเฉือนจะควบคุมการออกแบบคานในกรณีที่

1. คานมี span ที่สั้น เมื่อเปรียบเทียบกับความลึกของคาน (span/depth < 10)
2. คานที่ออกแบบเป็นคานที่รองรับแรงกระทำเป็นจุดที่มีค่าค่อนข้างสูง
3. เมื่อคานเป็นคานที่ทำด้วยไม้ เนื่องจากว่าไม้จะมีกำลังรับแรงเฉือนน้อย เมื่อเปรียบเทียบกับกำลังรับแรงดึงและแรงกดอัด

Fabricated Beams

โดยทั่วไปแล้ว คานจะถูกสร้างขึ้นมาโดยใช้วัสดุชนิดต่างๆ และมีขนาดและรูปร่างที่แตกต่างกันมากมาย เพื่อที่จะนำไปใช้งานในโครงสร้างต่างๆ อย่างเหมาะสม

Steel Sections

คานเหล็กมักจะมีหน้าตัดที่เป็นไปตามมาตรฐาน ดังที่แสดงในภาคผนวกที่ 3 โดยที่หน้าตัดของคานเหล็กจะถูกเรียกโดยใช้รูปร่างของหน้าตัด เช่น หน้าตัดรูปตัว W (wide-flange section) หน้าตัดรูปตัว I และหน้าตัดรูปตัว C เป็นต้น และตามด้วยขนาดของความลึกของคานและน้ำหนักของคานต่อหนึ่งหน่วยความยาว ยกตัวอย่างเช่น

W410x85 แสดงถึงหน้าตัดของคานเหล็กแบบ wide-flange section หรือ W ที่มีความลึกของหน้าตัด 410 mm และมีน้ำหนัก 85 kg / m

C200x20 แสดงถึงหน้าตัดของคานเหล็กแบบรางน้ำหรือ C ที่มีความลึกของหน้าตัด 200 mm และมีน้ำหนัก 20 kg / m เป็นต้น

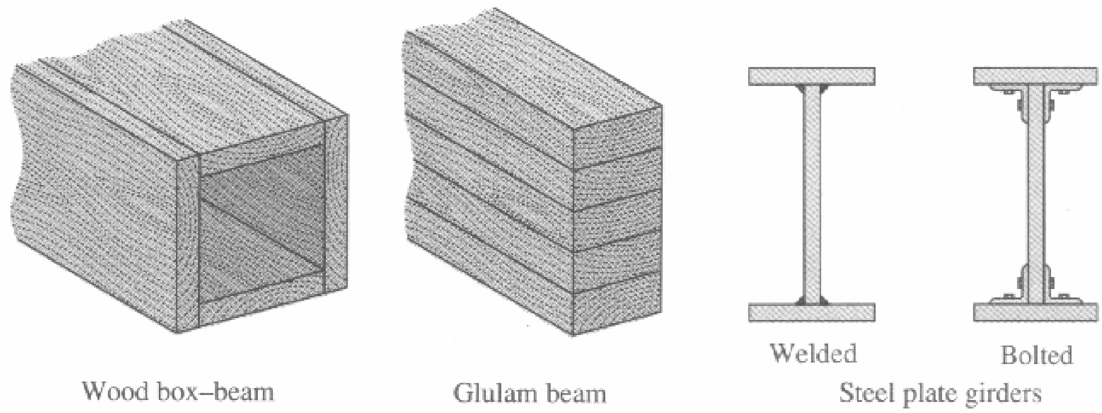
Wood Sections

คานไม้มักจะมีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าและถูกระบุอยู่ในมาตรฐานการออกแบบโดยใช้ขนาดหน้าตัดระบุ (nominal dimensions) และขนาดหน้าตัดที่แท้จริง ดังที่แสดงในภาคผนวกที่ 4 ซึ่งหน้าตัดของคานไม้ที่ถูกระบุโดยใช้ขนาดหน้าตัดระบุจะมีขนาดหน้าตัดที่ใหญ่กว่าขนาดหน้าตัดที่แท้จริง เช่น เมื่อหน้าตัดของคานไม้มีขนาดหน้าตัดระบุ 2x4 นิ้ว

แล้ว หน้าตัดของคานไม้ดังกล่าวจะมีขนาดหน้าตัดที่แท้จริงเท่ากับ 1.5 x 3.5 นิ้ว ดังนั้น ในการวิเคราะห์หาหน่วยแรงในคานไม้ เราจะต้องใช้ขนาดหน้าตัดที่แท้จริงของคานไม้ในการหาหน่วยแรงต่างๆ

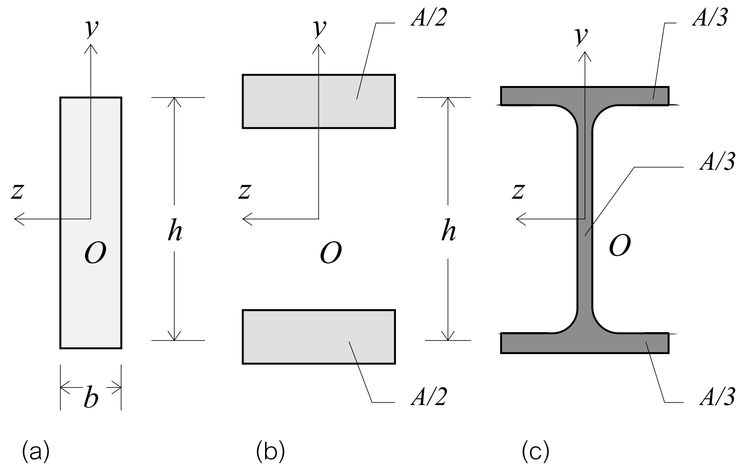
Built-up Sections

Built-up section เป็นหน้าตัดของคานที่ถูกสร้างขึ้นมาโดยใช้ชิ้นส่วนประกอบของหน้าตัดที่มากกว่าหนึ่งชิ้นส่วนมาเชื่อมต่อกันให้เป็นหน้าตัดเดียวกัน ดังที่แสดงในรูปที่ 11-4 Built-up section มักจะถูกนำมาใช้เมื่อแรงที่กระทำต่อคานมีค่ามากกว่าที่หน้าตัดมาตรฐานต่างจะสามารถรองรับได้ ตามที่เราได้ทราบมาแล้วว่า ความสามารถของคานในการต้านทานโมเมนต์ M จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่า section modulus $S = I / c$ ของคาน ดังนั้น S จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ I มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งในการที่จะเพิ่มค่า I ของหน้าตัดของคาน เราจะต้องวางวัสดุที่ใช้ทำคานให้ห่างออกจากแกนสะเทิน (neutral axis) ของคานให้มากขึ้นเท่าที่คู่มือออกแบบกำหนด ซึ่งถ้าระยะดังกล่าวมีค่ามากกว่าที่คู่มือออกแบบกำหนด หน้าตัดของคานดังกล่าวจะเสียเสถียรภาพได้ง่าย



รูปที่ 11-4

ในการจัดเรียงชิ้นส่วนของ built-up section เราควรจัดเรียงชิ้นส่วนเหล่านั้นให้มีรูปแบบที่มีค่า section modulus สูงสุด พิจารณาหน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 11-5 ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด A และความลึกของหน้าตัด h ที่เท่ากัน



รูปที่ 11-5

จากรูปที่ 11-5a คานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีค่า section modulus เท่ากับ

$$S = \frac{I}{c} = \frac{bh^2}{6} = \frac{Ah}{6} = 0.167\,Ah$$

ถ้าให้หน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 11-5b มีพื้นที่ของหน้าตัด $A/2$ อยู่เหนือและใต้แกน neutral axis เป็นระยะ $h/2$ แล้ว ค่า section modulus ของคานนี้จะมีค่าเท่ากับ

$$S = 2\left(\frac{A}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2\left(\frac{1}{h/2}\right) = 0.5Ah$$

ถ้าให้หน้าตัดของคานรูปตัว W ดังที่แสดงในรูปที่ 11-5c มีพื้นที่หน้าตัดของเอว (web) และของปีก (flange) ที่อยู่เหนือและใต้แกน neutral axis มีค่าเท่ากับ $A/3$ แล้ว ค่า section modulus ของคานนี้จะมีค่าเท่ากับ

$$I = \left(\frac{A}{3}\right)\left(\frac{h^2}{12}\right) + 2\left(\frac{A}{3}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{7}{36}Ah^2$$

$$S = \frac{7}{36}Ah^2\left(\frac{1}{h/2}\right) = 0.389Ah^2$$

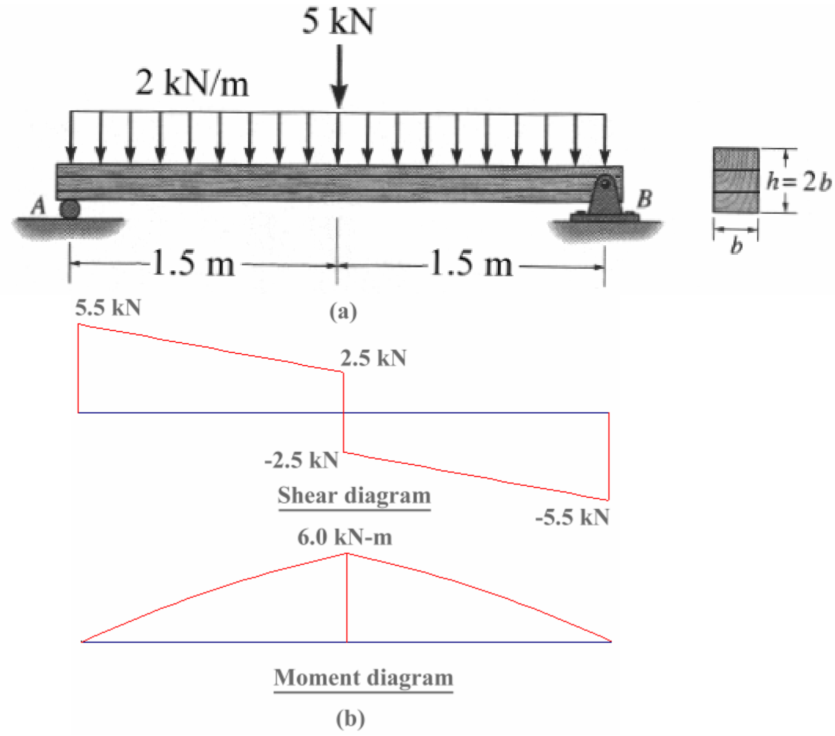
จากการเปรียบเทียบค่า section modulus ของคานทั้งสามแบบ เราจะพบว่า หน้าตัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 11-5b จะมีค่า section modulus สูงสุดและหน้าตัดของคานแบบ wide-flange จะมีค่า section modulus มากกว่าหน้าตัดของคานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว่าสองเท่า

ในการออกแบบคานแบบ built-up นั้น เราต้องออกแบบให้ชิ้นส่วนของคานดังกล่าวมีพฤติกรรมเหมือนคานปกติ ดังนั้น นอกจากที่เราจะต้องตรวจสอบค่าหน่วยแรงดัดและหน่วยแรงเฉือนอย่างที่เราต้องกระทำในคานโดยทั่วไปแล้ว เราจะต้องทำการตรวจสอบหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ตัวยึด (fasteners) เช่น ที่รอยเชื่อม ที่ตะปู และที่สลักเกลียว เป็นต้น ด้วยเพื่อที่จะทำให้หน้าตัดของคานดังกล่าวสามารถที่จะต้านทานหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่จุดเหล่านั้นได้ ซึ่งการตรวจสอบนี้จะทำได้โดยการใช้ shear flow formula ($q = VQ/I$) ที่ตำแหน่งที่ตัวยึดเหล่านั้นเชื่อมต่อชิ้นส่วนประกอบของหน้าตัดคานเข้าด้วยกัน ดังที่ได้กล่าวไปแล้วใน section ที่ 7.4

ตัวอย่างที่ 11-1

คานไม้สักช่วงเดี่ยวรองรับอย่างง่ายถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกและมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งได้จากการนำแท่งไม้สักที่มีความกว้าง b และความลึกเท่ากันสามแท่งมาประกอบเข้ากันอย่างแน่นหนา ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-1a กำหนดให้ไม้สักมีหน่วยแรงดัดประลัย $(\sigma_b)_{ult} = 24\,\text{MPa}$ หน่วยแรงเฉือนประลัย $\tau_{ult} = 4.8\,\text{MPa}$ และ factor of safety $\text{F.S.} = 2.0$

1.) จงทำการออกแบบหาขนาดของหน้าตัดของคานเมื่อ $h = 2b$
2.) ในกรณีที่ต้องการยึดแท่งไม้ทั้งสามด้วยกาวกำลังสูง จงหาหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นที่รอยต่อระหว่างแผ่นไม้
3.) ในกรณีที่ต้องการยึดแท่งไม้ทั้งสามด้วยสลักเกลียวที่มีค่าแรงเฉือนที่ยอมให้เท่ากับ $5.0\,\text{kN}$ จงหาระยะห่างระหว่างสลักเกลียว



รูปที่ Ex 11-1

ออกแบบหาขนาดของหน้าตัดของคาน

จากคุณสมบัติทางกลของไม้สัก เราจะหาค่าหน่วยแรงดัดที่ยอมให้และหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ดังนี้

$$(\sigma_b)_{allow} = \frac{(\sigma_b)_{ult}}{\text{F.S.}} = \frac{24}{2.0} = 12\,\text{MPa}$$

$$\tau_{allow} = \frac{\tau_{ult}}{\text{F.S.}} = \frac{4.8}{2.0} = 2.4\,\text{MPa}$$

โดยใช้แผนภาพ free-body diagram ของคานและสมการความสมดุล เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-1b และเราจะได้ว่า ค่าสูงสุดของ bending moment และแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในคานจะมีค่าเท่ากับ

$$M_{\max} = 6.0\,\text{kN - m}$$

$$V_{\max} = 5.5\,\text{kN}$$

โดยการออกแบบคานโดยพิจารณากำลังรับ bending moment ของคาน เราจะได้ว่า

$$\sigma_{allow} = \frac{M_{\max} c}{I}$$

โดยที่ $c = b$ และ moment of inertia จะอยู่ในรูป

$$I = \frac{b(2b)^3}{12} = \frac{2}{3}b^4$$

$$12(10^6) = \frac{6000b}{2b^4/3}$$

$$b = 0.091\,\text{m}$$

ดังนั้น คานไม้สักจะต้องมีความกว้างอย่างน้อย $0.091\,\text{m}$ และลึกอย่างน้อย $2(0.091) = 0.182\,\text{m}$

ตรวจสอบดูว่าคานไม้สักที่มีขนาดของหน้าตัดดังกล่าวจะสามารถรับแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานได้หรือไม่

จาก shear formula

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{V_{\max}}{A} = \frac{3}{2}\frac{5500}{0.091[2(0.091)]}$$

$$= 0.498\,\text{MPa} < \tau_{allow} = 2.4\,\text{MPa}$$

ดังนั้น หน้าตัดคานที่คำนวณได้โดยพิจารณากำลังรับโมเมนต์ดัดของคานจะมีกำลังพอเพียงในการรับแรงเฉือน <u>Ans.</u>

หาหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นที่รอยต่อระหว่างแผ่นไม้

เนื่องจากความสมมาตรของหน้าตัดของคานรอบแกนสะเทิน (neutral axis) ดังนั้น หน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นที่รอยต่อระหว่างแผ่นไม้ทั้งสองจะมีค่าเท่ากัน โดยที่แท่งไม้แต่ละแท่งมีความลึกเท่ากับ $0.182/3 = 0.061\,\text{m}$

$$I = \frac{0.091(0.182)^3}{12} = 45.717(10^{-6})\,\text{m}^4$$

$$Q = 0.091(0.061)0.061 = 338.61(10^{-6})\,\text{m}^3$$

จากสมการ shear formula

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max}Q}{It} = \frac{5500(338.61)10^{-6}}{45.717(10^{-6})0.091} = 0.448\,\text{MPa}$$

ดังนั้น กาวกำลังสูงจะต้องมีหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้อย่างน้อยเท่ากับ $0.448\,\text{MPa}$ <u>Ans.</u>

หาระยะห่างระหว่างสลักเกลียว

จากสมการ shear flow

$$q_{\max} = \tau_{\max}t = 0.448(0.091) = 40.74\,\text{kN/m}$$

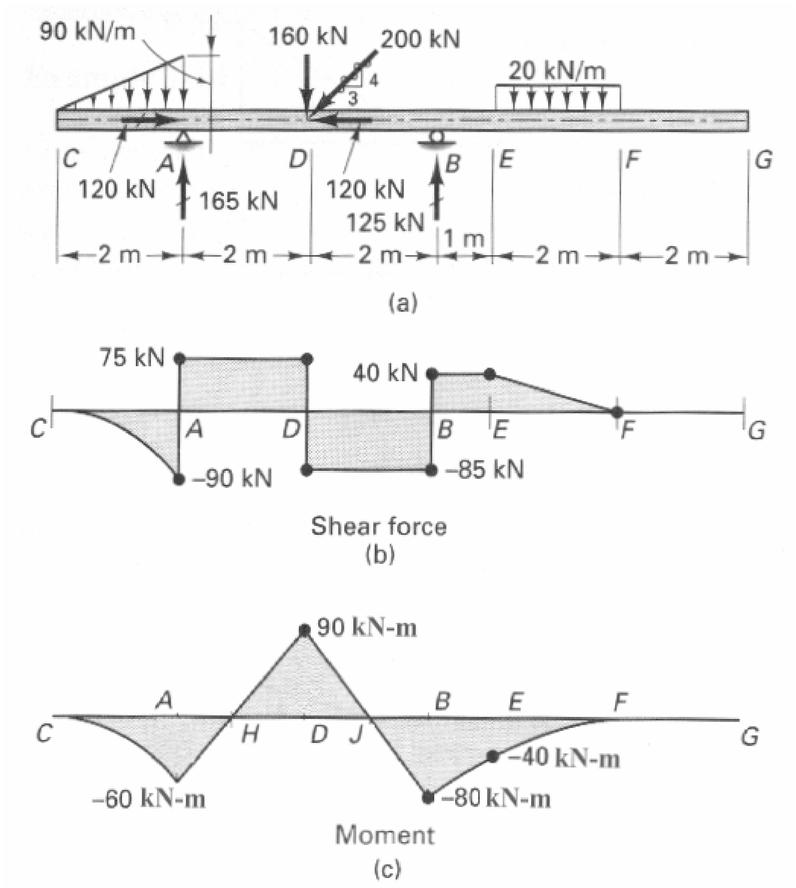
ดังนั้น ระยะห่างระหว่างสลักเกลียวจะมีค่าเท่ากับ

$$s = \frac{5.0}{40.74} = 0.122\,\text{mm}$$ <u>Ans.</u>

โดยทั่วไปแล้ว ขั้นตอนสุดท้ายของการออกแบบคานจะเป็นการตรวจสอบการโก่งตัวสูงสุดที่เกิดในคานว่ามีค่าน้อยกว่าที่กำหนดใน design code เช่น ความยาว span หารด้วย 360 เป็นต้น ซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 12

ตัวอย่างที่ 11-2

จงหาขนาดหน้าตัดของคานเหล็กซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-2a กำหนดให้เหล็ก A36 มีหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ $(\sigma_b)_{allow} = 150\ \mathrm{MPa}$ หน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ $\tau_{allow} = 100\ \mathrm{MPa}$



รูปที่ Ex 11-2

จากแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-1b และเราจะได้ว่า

$$M_{\max} = 90.0\ \mathrm{kN\text{-}m}$$

$$V_{\max} = 90.0\ \mathrm{kN}$$

โดยการออกแบบคานโดยพิจารณากำลังรับ bending moment ของคาน เราจะได้ว่า

$$S_{req'd} = \frac{M_{\max}}{(\sigma_b)_{allow}} = \frac{90000}{150(10^6)} = 600(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

จากตารางของหน้าตัดเหล็กมาตรฐาน เราจะได้หน้าตัดของคานที่มีกำลังเพียงพอในการต้านทานต่อ bending moment ดังนี้

$$\mathrm{I}350\times 175\times 41.4\ \mathrm{kg/m} \qquad S = 641(10^{-6})\ \mathrm{m}^3$$

$$\mathrm{W}200\times 65.7\ \mathrm{kg/m} \qquad S = 628(10^{-6})\ \mathrm{m}^3$$

เลือกใช้หน้าตัดของคานที่เบาที่สุดคือ $\mathrm{I}350\times 175\times 41.4\ \mathrm{kg/m}$ อย่างไรก็ตาม ขอให้สังเกตด้วยว่า หน้าตัดของคานดังกล่าวมีความลึกมากกว่าหน้าตัดของคาน $\mathrm{W}200\times 65.7\ \mathrm{kg/m}$ อยู่ $0.150\ \mathrm{m}$

ตรวจสอบดูว่าคาน $\mathrm{I}350\times 175\times 41.4\ \mathrm{kg/m}$ จะสามารถรับแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานได้หรือไม่

จากตารางของหน้าตัดเหล็กมาตรฐาน เราจะได้พื้นที่หน้าตัดของเอว (web) ของหน้าตัดคานมีค่าเท่ากับ

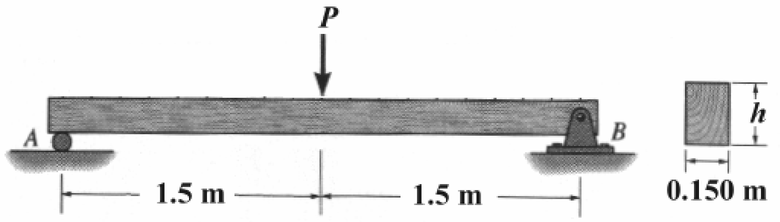
$$A_w = t_w d = 0.006(0.346) = 2.076(10^{-3})\ \mathrm{m}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max}}{A_w} = \frac{90000}{2.076(10^{-3})} = 43.35\ \mathrm{MPa} < \tau_{allow} = 100\ \mathrm{MPa}$$

ดังนั้น หน้าตัดคานที่ได้โดยพิจารณากำลังรับ bending moment ของคานจะมีกำลังพอเพียงในการรับแรงเฉือน <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 11-3

คานไม้ช่วงเดี่ยวรองรับอย่างง่ายมีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าถูกกระทำโดยแรงกระทำเป็นจุด P ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-3 จงทำการออกแบบหาความลึก h และค่าแรงกระทำเป็นจุด P สูงสุดที่ทำให้คานไม้มีหน่วยแรงภายในเกิดขึ้นเท่ากับหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ $(\sigma_b)_{allow} = 24\text{ MPa}$ และหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ $\tau_{all} = 0.35\text{ MPa}$ พร้อมกัน



รูปที่ Ex 11-3

โดยใช้แผนภาพ free-body diagram ของคานและสมการความสมดุล เราจะได้ว่า bending moment และแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานจะอยู่ในรูป

$$M_{\max} = 0.75P$$
$$V_{\max} = 0.50P$$

moment of inertia ของหน้าตัดคาน

$$I = \frac{0.150(h)^3}{12} = 0.0125h^3$$

โดยการออกแบบคานโดยพิจารณากำลังรับ bending moment ของคาน เราจะได้ว่า

$$\sigma_{allow} = \frac{M_{\max}c}{I}$$
$$10.5(10^6) = \frac{0.75Ph}{0.0125h^3}$$
$$P = 35{,}000h^2$$

โดยการออกแบบคานโดยพิจารณากำลังรับ แรงเฉือนของคาน เราจะได้ว่า

$$\tau_{all} = \frac{3}{2}\frac{V_{\max}}{A}$$
$$0.35(10^6) = \frac{3}{2}\frac{0.5P}{0.150h}$$
$$P = 70{,}000h$$

เนื่องจากคานไม้มีหน่วยแรงภายในเกิดขึ้นเท่ากับหน่วยแรงดัดที่ยอมให้และหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้พร้อมกัน ดังนั้น แรงกระทำเป็นจุด P ทั้งสองกรณีจะมีค่าเท่ากัน

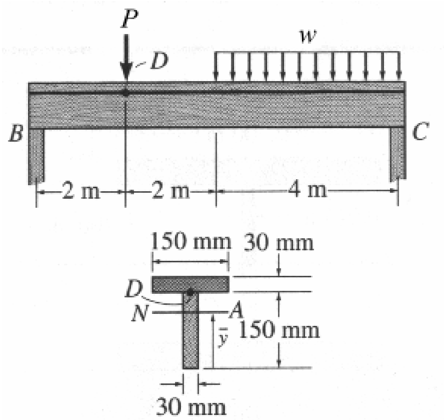
$$35{,}000h^2 = 70{,}000h$$
$$h = 0.20\text{ m}$$ <u>Ans.</u>

ซึ่งเราจะได้ค่าแรงกระทำเป็นจุด P สูงสุดที่คานสามารถรองรับได้มีค่าเท่ากับ

$$P_{\max} = 14\text{ kN}$$ <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 11-4

กำหนดให้คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 11-4 ถูกรองรับแบบ simple support และถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุก $w = 0.5\ \mathrm{kN/m}$ และ $P = 5\mathrm{kN}$ เมื่อหน้าตัดของคานมีลักษณะดังที่แสดงในรูป โดยมีระยะ $\bar{y} = 0.120\ \mathrm{m}$ มี moment of inertia $I = 27(10^6)\mathrm{mm}^4$ และวัสดุที่ใช้ทำคานมีหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ $40.0\ \mathrm{MPa}$ และหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้เท่ากับ $2.0\ \mathrm{MPa}$ ตะปูที่ใช้ในการเชื่อมปีก (flange) เข้ากับเอว (web) สามารถรับแรงเฉือนได้ $2\ \mathrm{kN}$ และมีระยะระหว่างตะปูเท่ากับ $50\ \mathrm{mm}$ จงทำการวิเคราะห์ว่าคานหน้าตัดดังกล่าวสามารถรองรับน้ำหนักบรรทุกได้อย่างปลอดภัยหรือไม่



รูปที่ Ex 11-4

โดยใช้แผนภาพ free-body diagram ของคานและสมการความสมดุล เราจะได้ว่า แรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์ดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานมีค่าเท่ากับ $V_{\max} = 4.25\ \mathrm{kN}$ และ $M_{\max} = 8.5\ \mathrm{kN\text{-}m}$ ตามลำดับ

ตรวจสอบกำลังรับแรงดัด

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I} = \frac{8500(0.120)}{27(10^{-6})} = 37.8\ \mathrm{MPa}$$

เนื่องจาก $\sigma_{\max} < \sigma_{allow} = 40.0\ \mathrm{MPa}$ ดังนั้น คานหน้าตัดดังกล่าวสามารถรองรับโมเมนต์ดัดสูงสุดได้อย่างปลอดภัย

ตรวจสอบกำลังรับแรงเฉือน

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max} Q}{It} = \frac{4250[0.030(0.120)0.060]}{27(10^{-6})0.030} = 1.13\ \mathrm{MPa}$$

เนื่องจาก $\tau_{\max} < \tau_{allow} = 2.0\ \mathrm{MPa}$ ดังนั้น คานหน้าตัดดังกล่าวสามารถรองรับแรงเฉือนสูงสุดได้อย่างปลอดภัย

ตรวจสอบระยะห่างระหว่างตะปู

$$q_{\max} = \frac{V_{\max} Q}{I} = \frac{4250[0.150(0.030)0.045]}{27(10^{-6})} = 31.875\ \mathrm{kN/m}$$

$$s = \frac{2.0}{31.875} = 0.0625\ \mathrm{m}$$

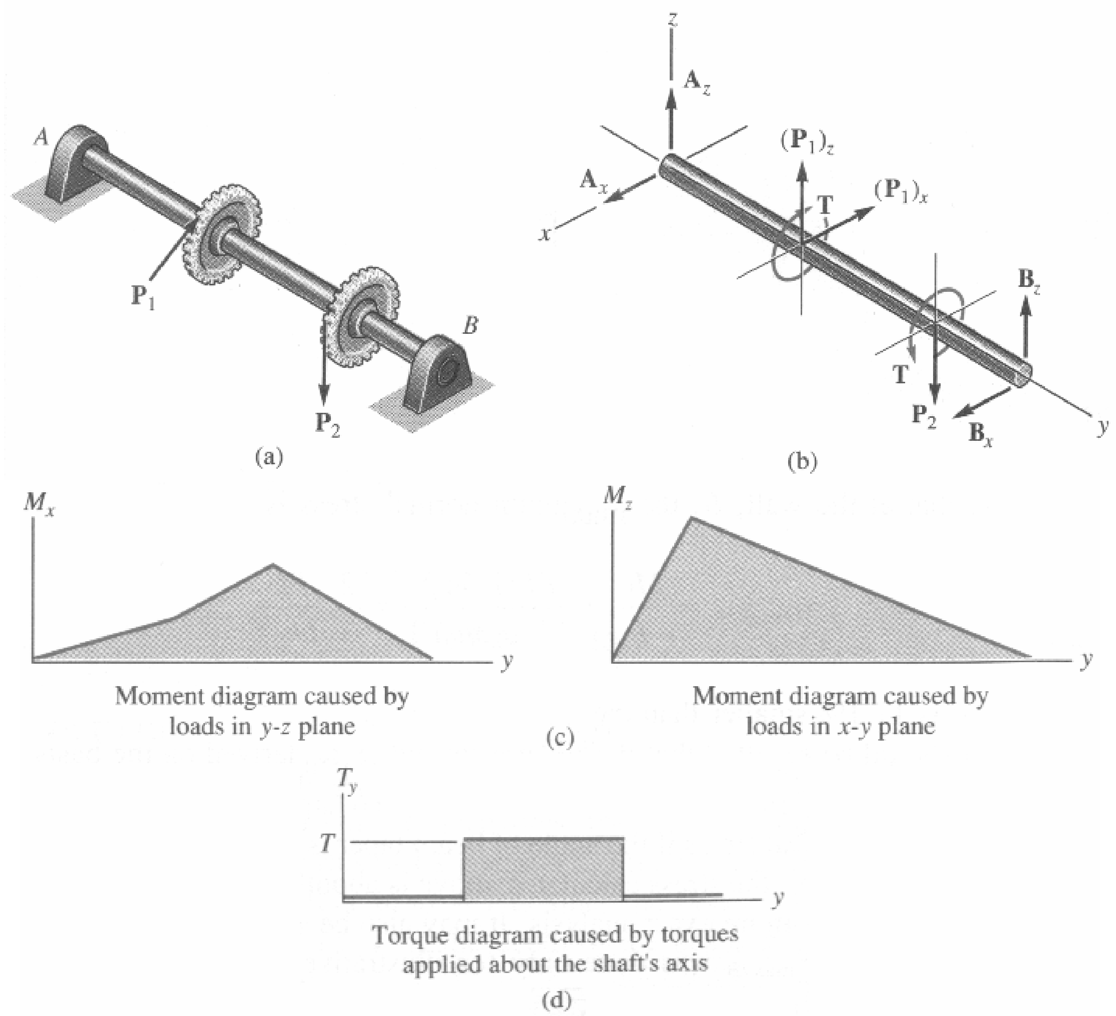
เนื่องจากระยะห่างระหว่างตะปูที่ต้องการมีค่ามากกว่าระยะห่างระหว่างตะปูที่ใช้ ดังนั้น ขนาดของตะปูระยะห่างระหว่างตะปูที่ใช้จึงสามารถรองรับแรงเฉือนได้อย่างปลอดภัย

โดยสรุปแล้ว คานหน้าตัดดังกล่าวสามารถรองรับน้ำหนักบรรทุกได้อย่างปลอดภัย <u>Ans.</u>

11.4 การออกแบบเพลา (Shaft Design)

เพลาที่มีหน้าตัดทรงกลมมักจะถูกใช้ในเครื่องจักรกลต่างๆ โดยทั่วไปแล้ว เพลาเหล่านี้จะถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัด (bending moment) และแรงบิด (torque) ร่วมกัน ใน section นี้ เราจะศึกษาการออกแบบเพลาที่มีหน้าตัดที่คงที่ เพื่อใช้ในการถ่ายแรงจากเฟือง (gear) หรือ pulley ที่ยึดติดอยู่กับเพลาดังกล่าว

พิจารณาเพลาที่แสดงในรูปที่ 11-6a ซึ่งถูกกระทำโดยแรง P_1 และ P_2 จากรูป เราจะแตกแรงกระทำดังกล่าวออกเป็นองค์ประกอบของแรงในทิศทางที่ตั้งฉากต่อกันได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 11-6b เมื่อเรานำองค์ประกอบของแรงที่ได้มาเขียนแผนภาพ moment diagrams เราจะได้แผนภาพ moment diagrams เนื่องจากแรงกระทำที่อยู่ในระนาบ $y-z$ และระนาบ $x-z$ ดังที่แสดงในรูปที่ 11-6c จากแผนภาพทั้งสอง เราจะหาค่าของโมเมนต์ดัดลัพธ์ภายในเพลาที่หน้าตัดใดๆ ได้โดยใช้สมการ $M=\sqrt{M_x^2+M_z^2}$ นอกจากนั้นแล้ว เนื่องจากเพลายังถูกกระทำโดยแรงบิดตลอดความยาวของเพลา ดังนั้น เราจะเขียนแผนภาพ torque diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 11-6d



รูปที่ 11-6

จากแผนภาพ moment diagrams และแผนภาพ torque diagram เราจะหาหน้าตัดของเพลาที่ถูกกระทำโดยโมเมนต์ลัพธ์ M สูงสุดและแรงบิด T สูงสุดได้ จากนั้น เราจะหาค่าของหน่วยแรงสูงสุดที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดนั้น โดยใช้สมการ flexural formula และสมการ torsion formula ตามลำดับ เราควรที่จะทราบด้วยว่า ในการออกแบบเพลาใน

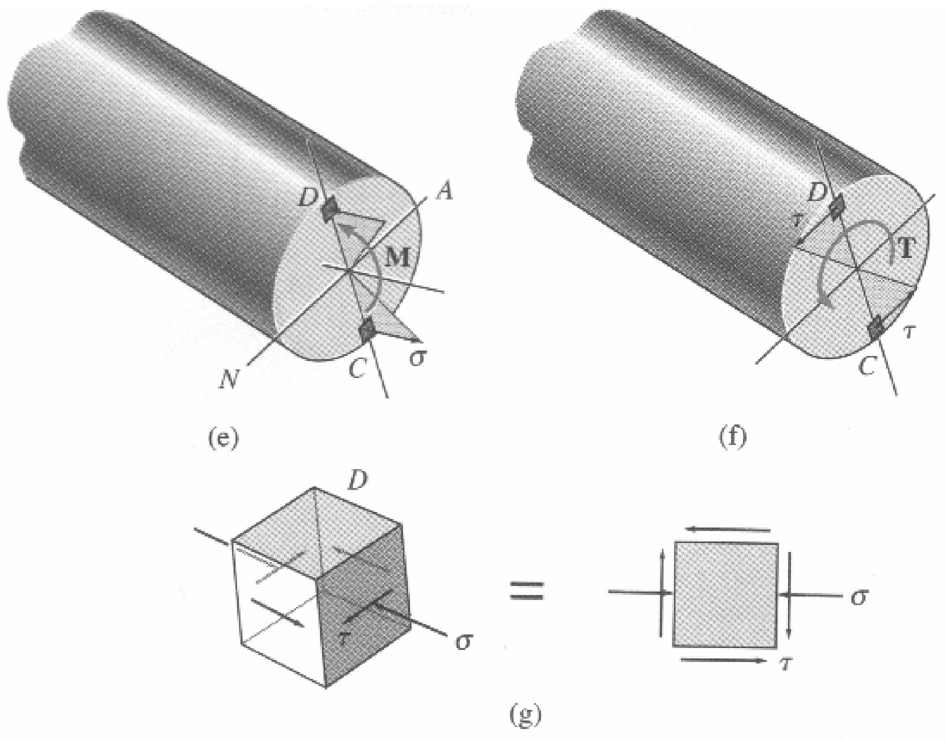
ลักษณะนี้ เราจะไม่นำหน่วยแรงเฉือน $\tau = VQ/It$ มาพิจารณา เนื่องจากหน่วยแรงเฉือนดังกล่าวมักจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าของหน่วยแรงที่เกิดจากโมเมนต์ลัพธ์ M และแรงบิด T

รูปที่ 11-6e และ 11-6f แสดงจุดบนหน้าตัดของเพลาที่ถูกกระทำโดยหน่วยแรงตั้งฉากสูงสุดและหน่วยแรงเฉือนสูงสุด ตามลำดับ โดยทั่วไปแล้ว จุดดังกล่าว (จุด C หรือจุด D) จะถูกกระทำโดยสภาวะของหน่วยแรงแบบ plane stress ดังที่แสดงในรูปที่ 11-6g โดยที่หน่วยแรงตั้งฉากสูงสุดจะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} c}{I}$$

และหน่วยแรงเฉือนสูงสุดจะมีค่าเท่ากับ

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max} c}{J}$$



รูปที่ 11-6 (ต่อ)

ถ้าเราทราบค่าหน่วยแรงดัดที่ยอมให้และหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ของวัสดุที่ใช้ทำเพลาแล้ว เราจะหาขนาดของเพลาได้โดยใช้สมการหน่วยแรงสูงสุดทั้งสองสมการและ theory of failure ที่เหมาะสม ซึ่งโดยปกติแล้ว วัสดุที่ใช้ทำเพลามักจะเป็นวัสดุเหนียว (ductile material) ดังนั้น เราจะใช้ maximum shear stress theory ดังที่กล่าวไปแล้วใน section ที่ 10.7 ในการวิเคราะห์ต่อไปนี้

จากสมการ stress transformation และสภาวะของหน่วยแรง ดังที่แสดงในรูปที่ 11-6g เราจะได้ว่า

$$\tau_{allow} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$

สำหรับเพลาที่มีหน้าตัดทรงกลม $I = \dfrac{\pi c^4}{4}$ และ $J = \dfrac{\pi c^4}{2}$ ดังนั้น

$$\tau_{allow} = \frac{2}{\pi c^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

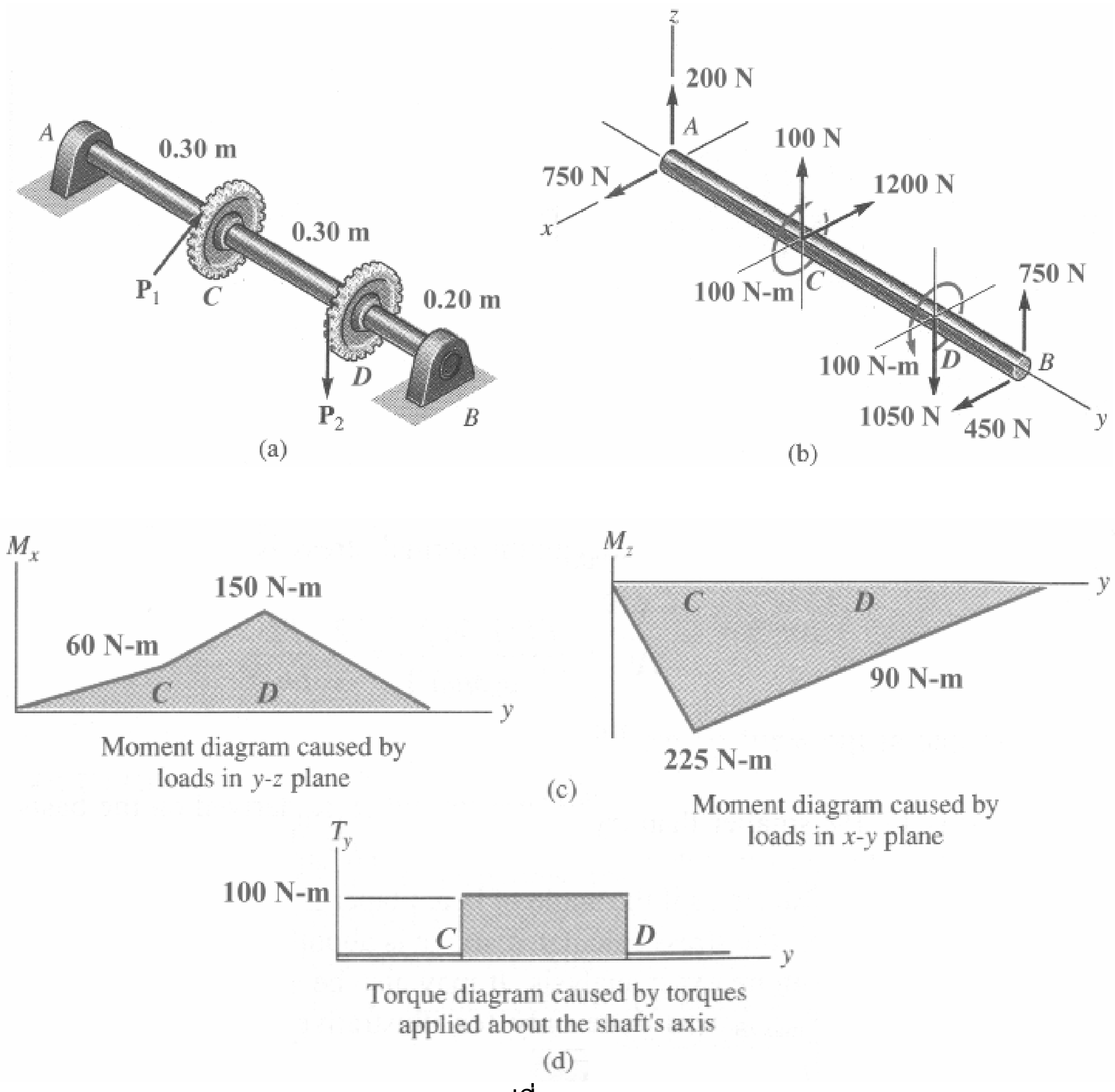
และเราสามารที่จะหาค่าของรัศมีของเพลาได้จาก

$$c = \left(\frac{2}{\pi \tau_{allow}} \sqrt{M^2 + T^2} \right)^{1/3} \tag{11-2}$$

ในกรณีที่วัสดุที่ใช้ทำเพลาเป็นวัสดุเปราะ (brittle material) แล้ว เราจะใช้ maximum normal stress theory ในการออกแบบ ซึ่งจะทำให้เราได้สมการที่ใช้ในการออกแบบเพลาที่แตกต่างจากที่ได้ในสมการที่ 11-2

ตัวอย่างที่ 11-5

จงหาขนาดเส้นผ่าศูนกลางของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ EX 11-5a ซึ่งถูกกระทำโดยแรง P_1 และแรง P_2 ที่ gear C และที่ gear D ตามลำดับ ซึ่งแรงทั้งสองก่อให้เกิดแรงกระทำเป็นจุดและแรงบิดกระทำต่อเพลาที่จุด C และที่จุด D ดังที่แสดงในรูปที่ EX 11-5b กำหนดให้ $\tau_{allow} = 50\,\text{MPa}$



รูปที่ EX 11-3

จากแผนภาพ free-body diagram ของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ EX 11-5b เราจะสามารถเขียนแผนภาพ moment diagram และ torque diagram ของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ EX 11-5c และ Ex 11-5d ตามลำดับ

จากแผนภาพ moment diagram เราจะได้ว่า ค่าสูงสุดของ moment ลัพธ์จะเกิดที่จุด C หรือที่จุด D โดยที่

$$M_C = \sqrt{60^2 + 225^2} = 232.9\ \text{N - m}$$

$$M_D = \sqrt{150^2 + 90^2} = 174.9\ \text{N - m}$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดของ moment ลัพธ์จะเกิดที่จุด C และขนาดเส้นผ่าศูนกลางของเพลาจะมีค่าเท่ากับ

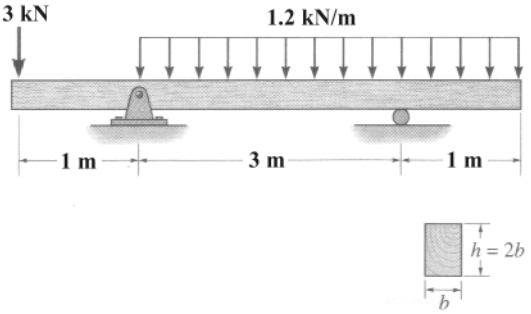
$$d = 2\left(\frac{2}{\pi(50)10^6}\sqrt{232.9^2 + 100^2}\right)^{1/3} = 0.0296\ \text{m} \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 11

11-1 คานไม้ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 11-1 มีหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ (allowable bending stress) $\sigma_{allow} = 0.760$ MPa และหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ (allowable shear stress) $\tau_{allow} = 0.480$ MPa

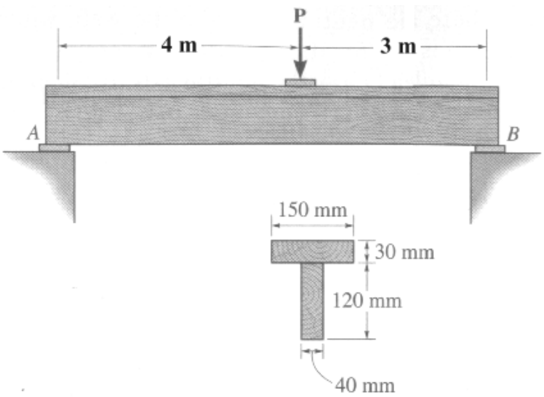
a.) จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน

b.) จงออกแบบหาความกว้าง b ของคาน



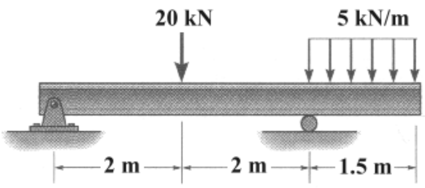
รูปที่ Prob. 11-1

11-2 คานไม้ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 11-2 มีหน่วยแรงดัดที่ยอมให้ (allowable bending stress) $\sigma_{allow} = 25$ MPa และหน่วยแรงเฉือนที่ยอมให้ (allowable shear stress) $\tau_{allow} = 0.700$ MPa จงหาขนาดของแรง P สูงสุดที่ยอมให้กระทำต่อคานคาน



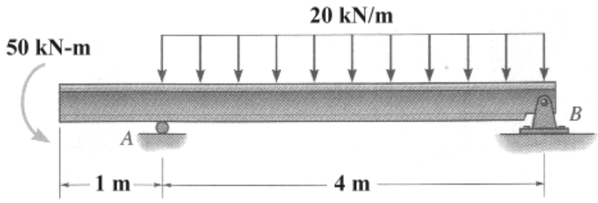
รูปที่ Prob. 11-2

11-3 จงหาขนาดหน้าตัด wide-flange ที่เบาที่สุดของคานเหล็ก A36 ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 11-3 ถ้าเหล็กมี $\sigma_{allow} = 165$ MPa และ $\tau_{allow} = 100$ MPa



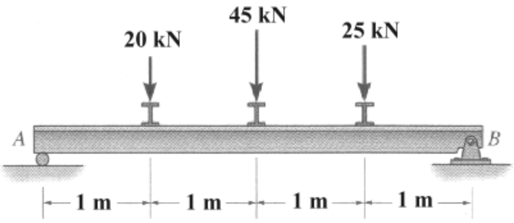
รูปที่ Prob. 11-3

11-4 จงตรวจสอบดูว่าคานเหล็ก A36 หน้าตัด $W310 \times 21$ kg/m ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 11-4 สามารถรองรับน้ำหนักบรรทุกได้อย่างปลอดภัยหรือไม่ ถ้ากำหนดให้เหล็กมี $\sigma_{allow} = 150$ MPa และ $\tau_{allow} = 85$ MPa



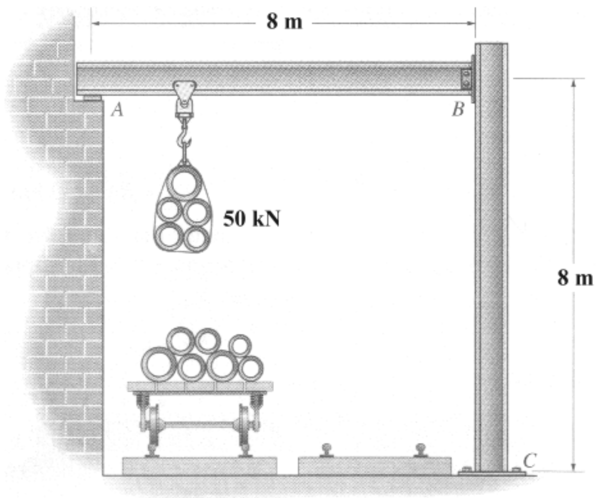
รูปที่ Prob. 11-4

11-5 จงหาขนาดหน้าตัด wide-flange ที่เบาที่สุดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 11-5 ถ้าเหล็กมี $\sigma_{allow} = 150\ \mathrm{MPa}$ และ $\tau_{allow} = 85\ \mathrm{MPa}$



รูปที่ Prob. 11-5

11-6 คานถูกใช้ในการขนถ่ายสินค้าสำหรับรถไฟมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 11-6 ถ้าน้ำหนักบรรทุกสูงสุดที่กระทำต่อคานมีค่าเท่ากับ $50\ \mathrm{kN}$ จงหาขนาดหน้าตัด wide-flange ที่เบาที่สุดของคาน เมื่อรอกไฟฟ้าสามารถเคลื่อนที่ได้ในช่วง $0.5\ \mathrm{m} \le x \le 7.5\ \mathrm{m}$ และ $\sigma_{allow} = 165\ \mathrm{MPa}$ และ $\tau_{allow} = 85\ \mathrm{MPa}$

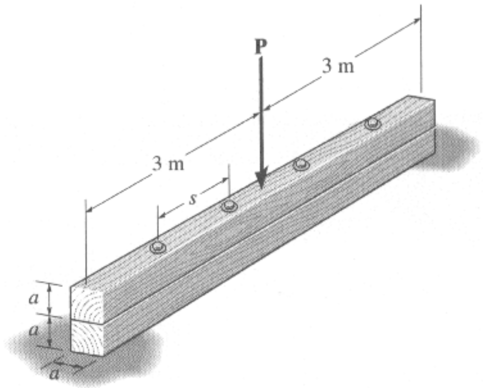


รูปที่ Prob. 11-6

11-7 กำหนดให้คานไม้รองรับแรงกระทำ $P = 16\ \mathrm{kN}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 11-7

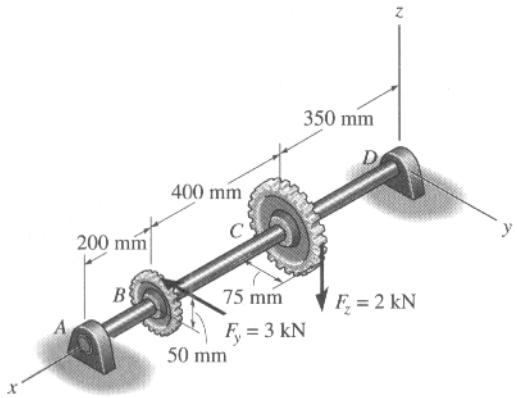
a.) จงหาขนาด a ของคานไม้เมื่อ $\sigma_{allow} = 30\ \mathrm{MPa}$ และ $\tau_{allow} = 0.800\ \mathrm{MPa}$

b.) จงหาระยะ s ระหว่างสลักเกลียว ถ้าสลักเกลียวสามารถรับแรงเฉือนได้ $2.5\ \mathrm{kN}$



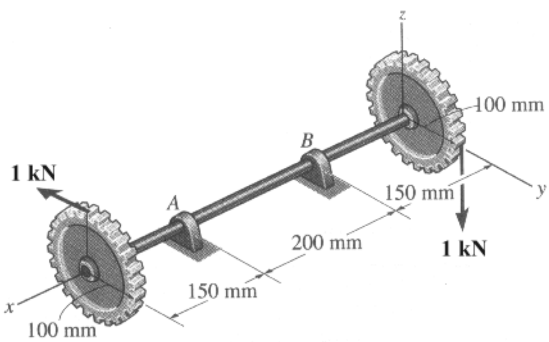
รูปที่ Prob. 11-7

11-8 bearing ที่จุด A และจุด D ของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 11-8 มีแรงปฏิกิริยาเฉพาะในแนวแกน y และแกน z จงหาขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางที่เล็กที่สุดที่เป็นจำนวนเต็มหน่วยมิลลิเมตรของเพลา เมื่อ $\sigma_{allow} = 130\ \mathrm{MPa}$ และ $\tau_{allow} = 60\ \mathrm{MPa}$ โดยใช้ maximum normal stress theory และ maximum distortion energy density



รูปที่ Prob. 11-8

11-9 จงหาขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางที่เล็กที่สุดที่เป็นจำนวนเต็มหน่วยมิลลิเมตรของเพลา ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 11-9 โดยใช้ maximum distortion energy density เมื่อ bearing ที่จุด A และจุด B ของเพลามีแรงปฏิกิริยาเฉพาะในแนวแกน y และแกน z และ $\sigma_{allow} = 130\ \mathrm{MPa}$



รูปที่ Prob. 11-9

บทที่ 12
การโก่งตัวของคาน (Deflection of Beams)

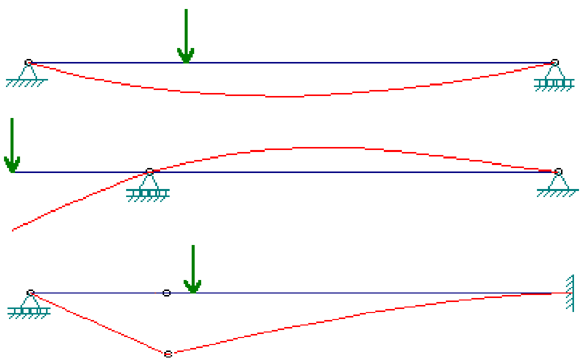
เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

12.1 แผนภาพการโก่งตัวและเส้นโค้งการโก่งตัว (Deflection Diagram and Elastic Curve)

เมื่อคานถูกกระทำโดยแรงตามขวาง (transverse loads) แล้ว คานจะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเกิดขึ้นในลักษณะของการโก่งตัวเป็นเส้นโค้ง ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า deflection curve ก่อนที่จะคำนวณหาค่าการโก่งตัว (deflection) ของคานได้ เราควรที่จะทำการร่าง (sketch) แผนภาพ deflection diagram ของคาน ซึ่งแผนภาพดังกล่าวจะแสดงถึงเส้นโค้งการโก่งตัว (elastic curve) ของคานที่ผ่านจุด centroid ของพื้นที่หน้าตัดของคาน elastic curve นี้จะช่วยให้เราเห็นลักษณะการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงสร้างอย่างคร่าวๆ ซึ่งจะช่วยในการตรวจสอบว่าค่าและรูปร่างการโก่งตัวของคานที่คำนวณได้น่าจะมีความถูกต้องหรือไม่

โดยทั่วไปแล้ว ถ้าเราทราบถึงว่าจุดรองรับ (support) แต่ละประเภทจะป้องกันไม่ให้เกิดมุมลาด (slope) และการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ที่จุดรองรับประเภทนั้นๆ อย่างไรแล้ว เราจะร่าง elastic curve ของคานขึ้นมาได้โดยไม่ยาก โดยสรุปแล้ว เราจะกล่าวได้ว่า จุดรองรับที่ต้านทานต่อแรงกระทำ เช่น หมุด (pin) และล้อเลื่อน (roller) เป็นต้น จะป้องกันไม่ให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง ส่วนจุดรองรับที่ต้านทานต่อแรงกระทำและโมเมนต์ เช่น จุดรองรับแบบยึดแน่น (fixed support) เป็นต้น จะป้องกันการไม่ให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งและการหมุน (rotation)

โดยใช้ข้อสรุปดังกล่าว เราจะร่าง elastic curve ของคานที่ถูกกระทำโดยแรงได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 12-1 โดยที่การโก่งตัวของคานที่ร่างขึ้นมานี้จะมีขนาดใหญ่กว่าความเป็นจริงมาก

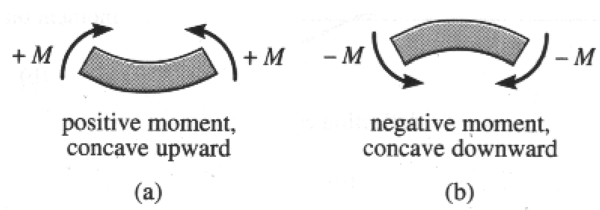


รูปที่ 12-1

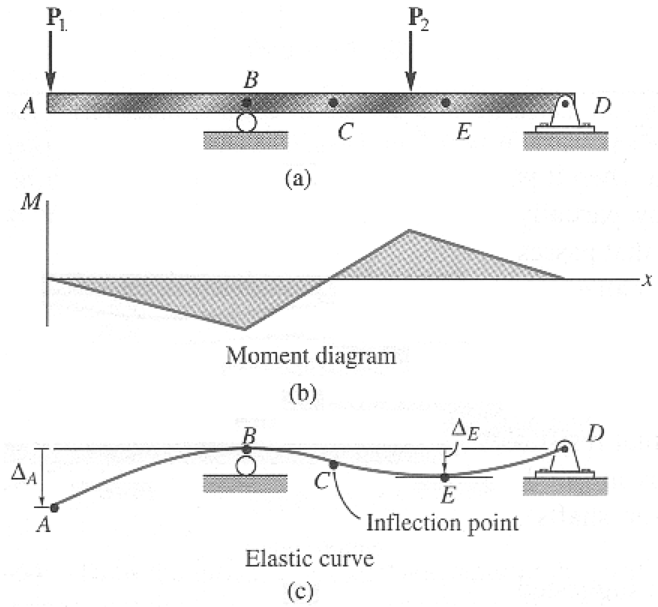
ในกรณีที่เราไม่สามารถร่าง elastic curve ขึ้นมาได้โดยง่าย เราควรที่จะเขียนแผนภาพ moment diagram ของคานขึ้นมาก่อน จากนั้น เราจะใช้ sign convention ดังที่แสดงในรูปที่ 12-2 ช่วยในการร่าง elastic curve ของคาน โดยที่

- โมเมนต์ที่มีค่าเป็นบวกจะทำให้คานเกิดการโค้งหงาย (concave upward)
- โมเมนต์ที่มีค่าเป็นลบจะทำให้คานเกิดการโค้งคว่ำ (concave downward)

พิจารณาคานดังที่แสดงในรูปที่ 12-3a ซึ่งมีแผนภาพ moment diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 12-3b คานนี้จะไม่มีการเปลี่ยนตำแหน่งเกิดขึ้นที่จุด B และจุด D เนื่องจากจุดรองรับของคานนี้ที่จุด B เป็น roller และที่จุด D เป็นหมุด นอกจากนั้นแล้ว ในช่วงของคานที่มีโมเมนต์เป็นลบ คานจะเกิดการโค้งคว่ำ และในช่วงของคานที่มีโมเมนต์เป็นบวก คานจะเกิดการโค้งหงาย และจุดเชื่อมต่อของการเกิดการโค้งคว่ำและเกิดการโค้งหงายนี้จะถูกเรียกว่า จุดดัดกลับ (inflection point) ซึ่งเป็นจุดที่มีค่าโมเมนต์เป็นศูนย์ จากหลักการดังกล่าว เราจะเขียนแผนภาพ deflection diagram ของคานนี้ได้ดังรูปที่ 12-3c

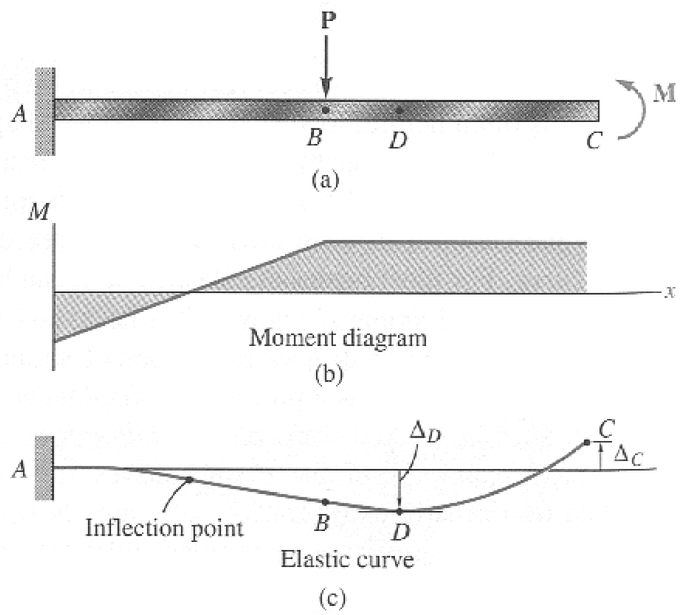


รูปที่ 12-2



รูปที่ 12-3

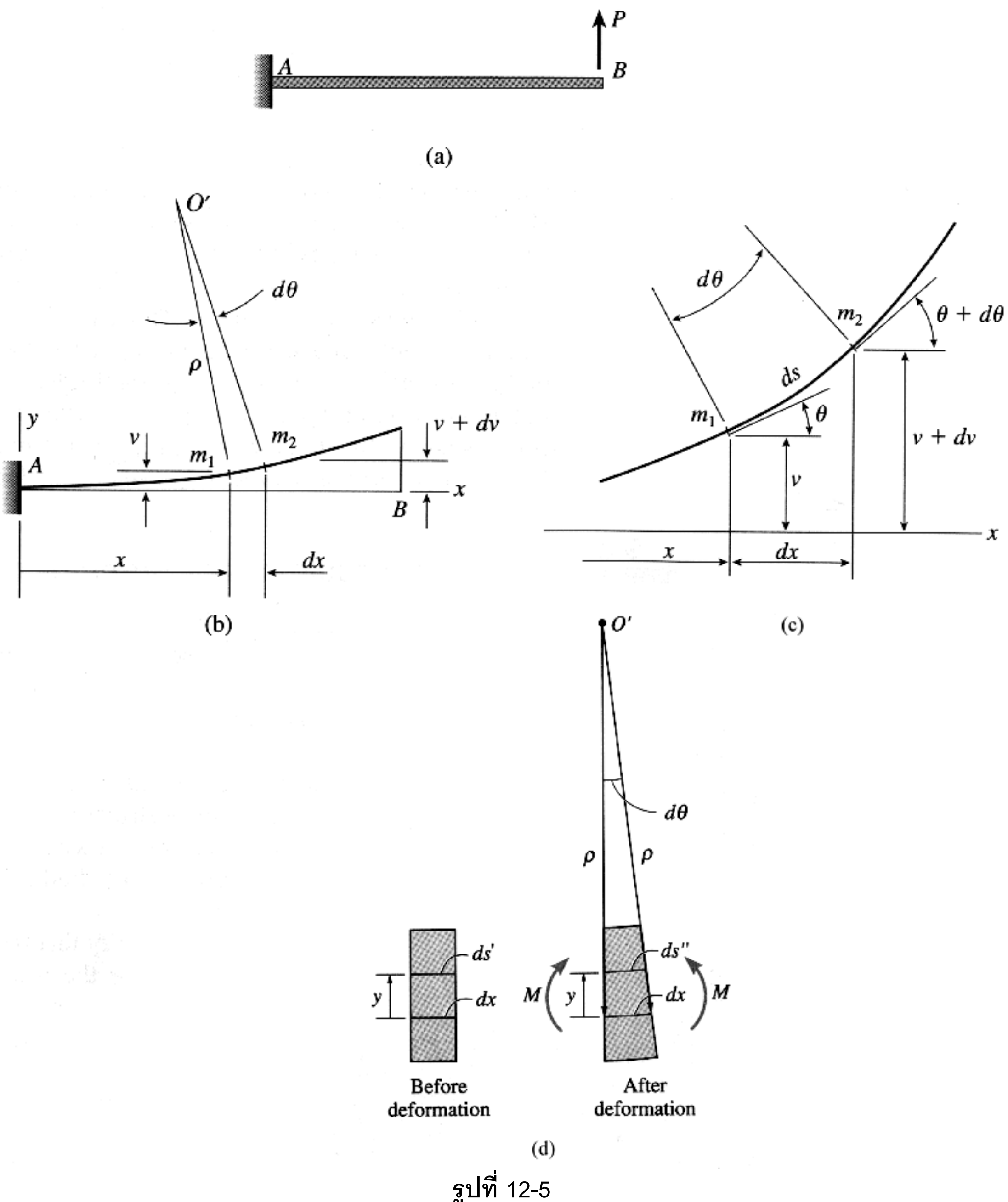
พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 12-4a ซึ่งมีแผนภาพ moment diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 12-4b คานนี้จะไม่มี slope และการเปลี่ยนตำแหน่งเกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบยึดแน่น ดังที่แสดงในรูปที่ 12-4c แต่จะมีทั้ง slope และการเปลี่ยนตำแหน่งเกิดขึ้นที่ปลายอิสระ C โดยใช้หลักการข้างต้น เราจะเขียนแผนภาพ deflection diagram ของคานนี้ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 12-4c



รูปที่ 12-4

12.2 **ทฤษฎีคานยืดหยุ่น** (Elastic Beam Theory)

พิจารณาคานยื่น (cantilevered beam) ที่มีจุดเริ่มต้นของระบบแกนอ้างอิงแบบตั้งฉาก x-y ที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 12-5a กำหนดให้แรงกระทำอยู่ในระนาบเดียวกันกับระนาบที่หน้าตัดของคานมีความสมมาตรและกระทำตั้งฉากกับแนวแกนของคาน ดังนั้น ภายใต้การกระทำของแรง คานจะเกิดการโก่งตัวในระนาบที่แรงกระทำเท่านั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 12-5b โดยที่ระนาบของหน้าตัดของคานที่ตั้งฉากกับแนวแกนของคานไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและยังคงตั้งฉากกับแนวแกนของคานเหมือนก่อนที่คานจะเกิดการโก่งตัว ดังที่แสดงในรูปที่ 12-5d นอกจากนั้นแล้ว เนื่องจากความยาวของคานมีค่ามากกว่าความลึกของคานมาก เราจะพิจารณาเฉพาะการโก่งตัวที่เกิดขึ้นจากโมเมนต์ดัดเท่านั้น



รูปที่ 12-5

Curvature **ของ** Differential Element

พิจารณา differential element ของคานระหว่างจุด m_1 (ที่ระยะ x จากจุด A) และจุด m_2 (ที่ระยะ $x+dx$ จากจุด A) ดังที่แสดงในรูปที่12-5b และ 12-5c โดยที่ระยะ dx มีค่าที่น้อยมาก กำหนดให้ความยาวของ differential element ที่แกนสะเทิน (neutral axis) ของหน้าตัดคานภายใต้การกระทำของแรงมีค่าเท่ากับ $ds = \rho\, d\theta$ ดังนั้น ความโค้ง (curvature) ของ differential element นี้จะหาได้จากสมการ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \tag{a}$$

และมุมลาด (slope) ของ differential element ที่แกน neutral axis ของคานระหว่างจุด m_1 และ m_2 จะมีอยู่ในรูป

$$\frac{dv}{dx} = \tan\theta \quad \text{หรือ} \quad \theta = \arctan\frac{dv}{dx} \tag{b}$$

จากวิชา calculus เนื่องจาก θ และ s มีความสัมพันธ์กับ x ดังนั้น เราจะเขียนสมการของความโค้ง (curvature) ได้เป็น

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}.\frac{dx}{ds}$$

และเมื่อทำการแทนสมการ (a) ลงในสมการ (b) เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}.\frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}(\arctan\frac{dv}{dx}).\frac{dx}{ds} \tag{c}$$

จากรูปที่ 12-5c ความยาวของ differential element จะหาได้จากสมการ

$$ds^2 = dx^2 + dv^2$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} \tag{d}$$

เมื่อทำการหารสมการ (d) ด้วย dx เราจะได้

$$\frac{ds}{dx} = [1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{1/2}$$
$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{[1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{1/2}} \tag{e}$$

จากวิชา calculus,

$$\frac{d}{dx}(\arctan\frac{dv}{dx}) = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{[1 + (\frac{dv}{dx})^2]} \tag{f}$$

แทนสมการ (e) และสมการ (f) ลงในสมการ (c) เราจะได้ สมการความโค้งของ differential element ของคานอยู่ในรูป

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{[1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{3/2}} \tag{12-1}$$

Moment-Curvature Relationships

ความสัมพันธ์ของโมเมนต์และความโค้งของ differential element จะหาได้ดังต่อไปนี้

พิจารณารูปที่ 12-5d ซึ่งเป็นภาพขยายของ differential element ของคานก่อนและหลังจากที่ถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัดภายใน M

ก่อนที่จะเกิดการการดัด: ความยาวของ differential element ที่แกนสะเทิน (neutral axis) และที่ระยะ y จะมีค่าเท่ากันคือ

$$dx = ds' = \rho\, d\theta$$

หลังจากที่เกิดการดัด: ความยาวของ differential element ที่แกน neutral axis ยังคงมีความยาวเท่าเดิม dx (จากคำนิยามของแกนสะเทิน) แต่ความยาวของ differential element ที่ระยะ y จากแกน neutral axis จะมีค่าเปลี่ยนจาก ds' เป็น ds'' โดยที่

$$ds'' = (\rho - y)d\theta$$

โดยใช้นิยามของความเครียดตั้งฉาก เราจะได้ว่า

$$\varepsilon = \frac{ds'' - ds'}{ds'} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho\, d\theta}{\rho\, d\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

ถ้าวัสดุที่ใช้ทำคานเป็นวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic) และมีเนื้อเดียวกัน (homogenous) และมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) แล้ว จาก Hooke's Law, $\sigma = E\varepsilon$ และ flexural formula, $\sigma = Mc/I$ เราจะได้ว่า ความเครียด (strain) ที่ตำแหน่ง y ซึ่งถูกกดอัดจะหาได้จากสมการ

$$\varepsilon = -\frac{My}{EI}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{12-2}$$

เมื่อ ρ เป็น radius of curvature ของ differential element

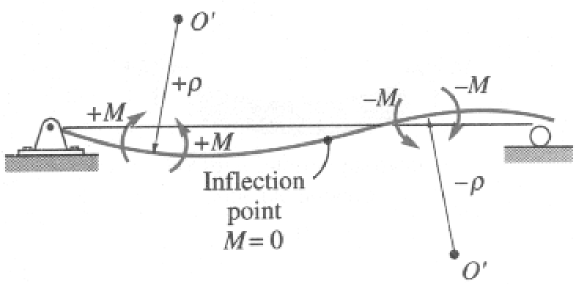
M เป็นโมเมนต์ดัดภายในที่กระทำอยู่บน differential element

E เป็น modulus of elasticity ของวัสดุที่ใช้ทำคาน

I เป็น moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคานรอบแกน neutral axis

ค่า EI มักจะถูกเรียกว่า ความแกร่งต่อการดัด (flexural rigidity) ซึ่งจะมีค่าเป็นบวกเสมอ

เครื่องหมายของรัศมีความโค้ง (radius of curvature) ρ นี้จะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของโมเมนต์ M เมื่อ M มีค่าเป็นบวกแล้ว ρ ก็จะมีค่าเป็นบวกด้วยและเมื่อ M มีค่าเป็นลบแล้ว ρ ก็จะมีค่าเป็นลบด้วย ดังที่แสดงตามรูปที่ 12-6



รูปที่ 12-6

Differential Equations of the Deflection Curve

แทนสมการที่ 12-1 ลงในสมการที่ 12-2 เราจะได้

$$\frac{M}{EI} = \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{[1+(\dfrac{dv}{dx})^2]^{3/2}} \tag{12-3}$$

สมการที่ 12-3 นี้เป็นสมการ nonlinear second order differential equation และมักจะถูกเรียกว่าสมการ elastica

สมการการโก่งตัว $v = f(x)$ ที่ได้จากสมการนี้จะเป็นค่าการโก่งตัวที่แท้จริงของคาน แต่จะหามาได้ยากมาก เนื่องจากสมการนี้เป็นสมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) อย่างไรก็ตาม โดยปกติแล้ว ค่าการโก่งตัวของคานจะถูกจำกัดที่ค่าใดค่าหนึ่ง (ซึ่งจะมีค่าน้อยมาก เช่น $L/360$ เมื่อ L เป็นความยาวของคาน เป็นต้น) เพื่อป้องกันการแตกร้าวของคานและผนังใต้คาน และการสั่นของคาน ดังนั้น ค่า slope $\dfrac{dv}{dx}$ ก็จะมีค่าน้อยกว่า 1 มากและเทอมความโค้ง $\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2$ ในสมการที่ 12-3 จะมีค่าประมาณศูนย์และจะไม่นำมาคิด ดังนั้น เราจะเขียนสมการที่ 12-3 ได้ใหม่เป็น

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{12-4}$$

จากสมมุติฐานดังกล่าว เราจะได้ว่า ความยาวของคานก่อนถูกกระทำโดยแรงจะมีค่าโดยประมาณเท่ากับความยาวของคานหลังจากที่ถูกกระทำโดยแรงหรือ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} = \left(\sqrt{1+(\frac{dv}{dx})^2}\right)dx \approx dx$$

12.3 **วิธีอินทีเกรทสองชั้น** (Double Integration Method)

สมการที่ 12-4 จะถูกเขียนให้อยู่ในรูปอื่นๆ ได้ดังต่อไปนี้

ถ้าเราทำการ differentiate สมการที่ 12-4 เทียบกับ x โดยที่ให้ $V = dM/dx$ แล้ว ทำการจัดรูปสมการใหม่ เราจะได้ความสัมพันธ์ของการโก่งตัว v กับแรงเฉือน V อยู่ในรูป

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = V(x) \tag{12-5}$$

ถ้าเราทำการ differentiate สมการที่ 12-5 เทียบกับ x โดยที่ให้ $dV/dx = -w$ แล้ว เราจะได้ความสัมพันธ์ของการโก่งตัว v กับแรงกระทำแผ่กระจาย (distributed load) w อยู่ในรูป

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = -w(x) \tag{12-6}$$

ในกรณีที่ flexural rigidity ของคานมีค่าคงที่ตลอดความยาวของคานแล้ว สมการที่ 12-4 ถึง 12-6 จะถูกเขียนใหม่ได้ในรูป

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -w(x) \tag{12-7}$$

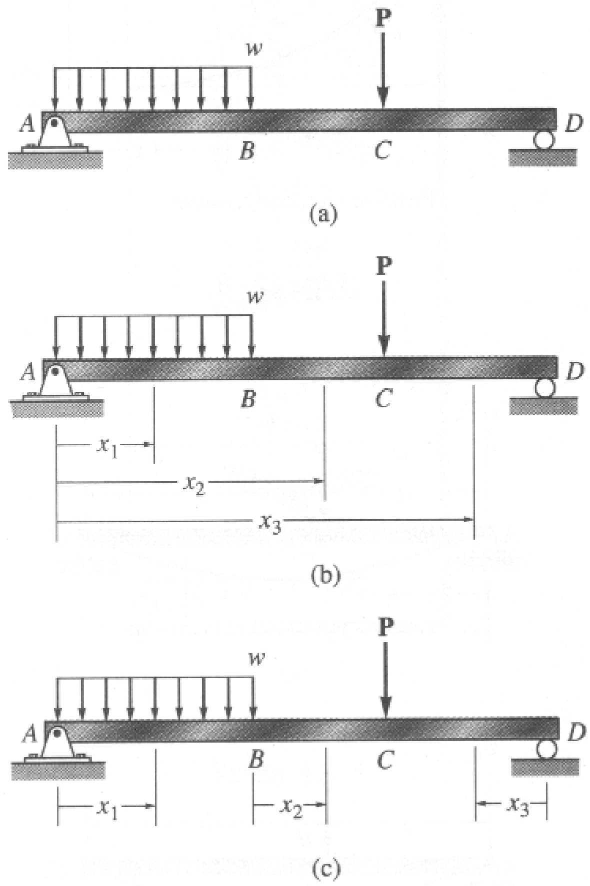
$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x) \tag{12-8}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \tag{12-9}$$

ในการหาค่า slope และ deflection ของคานโดยใช้สมการที่ 12-7 ถึง 12-9 เราต้องทำการอินทิเกรทสมการดังกล่าวอย่างต่อเนื่อง (successive integration) ในการทำการอินทิเกรทแต่ละครั้งนั้น เราจะได้ค่าคงที่ของการอินทิเกรท

(constant of integration) ซึ่งจะหาได้จากการใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) และเงื่อนไขความต่อเนื่อง (continuity conditions) ของคานและจะทำให้คำตอบที่ได้เป็นคำตอบเฉพาะของแต่ละคานนั้นๆ

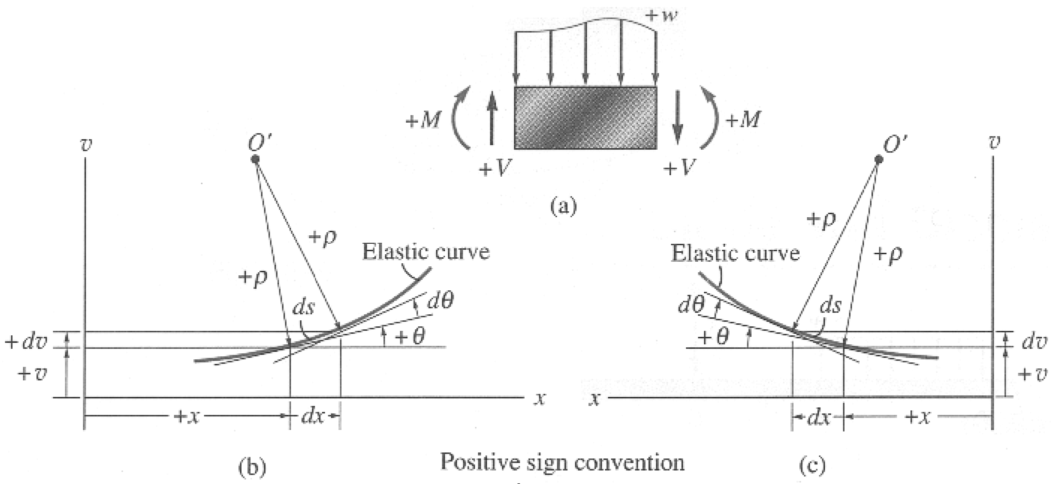
ถ้าแรงที่กระทำบนคานมีความไม่ต่อเนื่องหรือประกอบด้วยชุดของแรงแผ่กระจาย (distributed loads) และแรงกระทำเป็นจุด (concentrated loads) แล้ว เราจะหาสมการโมเมนต์ภายใน M ของแต่ละช่วงระหว่างแรงกระทำเหล่านั้นได้หลายสมการ ยกตัวอย่างเช่น พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 12-7a เราจะเขียนสมการโมเมนต์ในช่วง AB ช่วง BC และช่วง CD ในเทอมของพิกัด x_1 x_2 และ x_3 ได้ โดยที่เราจะเลือกใช้พิกัดอันใดอันหนึ่ง ดังที่แสดงในรูปที่ 12-7b หรือ 12-7c ในการเลือกพิกัดนั้นเราจะเลือกพิกัดที่ทำให้เราสามารถเขียนสมการของโมเมนต์ได้ไวที่สุด ซึ่งขึ้นอยู่กับความถนัดของแต่ละคน หลังจากที่เราทำการอินทิเกรทสมการที่ 12-9 และหาค่าคงที่ของการอินทิเกรทได้แล้ว เราจะได้สมการของ slope และ deflection ของคาน ซึ่งเกิดจากแรง P และ w



รูปที่ 12-7

Sign Convention

รูปที่ 12-8a แสดง sign convention ของแรงภายนอกและแรงภายในที่มีค่าเป็นบวก ซึ่งเราใช้ในการหาสมการที่ 12-9 นอกจากนั้นแล้ว รูปที่ 12-8b แสดง sign convention ของความลาดชัน (slope) และการโก่งตัว (deflection) ของคานที่มีค่าเป็นบวก ซึ่งในที่นี้ เราจะให้ deflection มีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางพุ่งขึ้น และ slope มีค่าเป็นบวก เมื่อหมุนทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ซึ่งการที่ slope และ deflection มีค่าเป็นบวกในทิศทางดังกล่าวนั้นเกิดจากการที่เมื่อ dx และ dv มีค่าเป็นบวกในทิศทางของ x และ v แล้ว ค่า $d\theta$ จะมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x

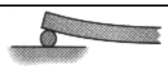
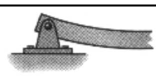
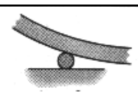
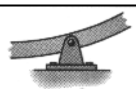
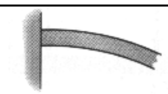
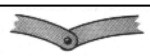


รูปที่ 12-8

Boundary และ Continuity Conditions

ค่าคงที่ของการอินทิเกรทที่ได้มาจากการอินทิเกรทสมการที่ 12-9 จะหามาได้จากค่า slope และ deflection ของคานที่เราทราบค่าที่จุดต่างๆ บนคาน ซึ่งค่าเหล่านี้มักถูกเรียกว่า boundary conditions ยกตัวอย่างเช่น ถ้าคานถูกรองรับโดยหมุด (pin) และล้อเลื่อน (roller) แล้ว ค่า deflection ในแนวดิ่งของคานที่จุดรองรับดังกล่าวจะมีค่าเป็นศูนย์ และถ้าคานถูกรองรับแบบยึดแน่น (fixed supports) แล้ว slope และ deflection ที่จุดดังกล่าวจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังที่แสดงในตารางที่ 12-1

ตารางที่ 12-1

Type of supports	Boundary conditions
 Roller	$\Delta = 0$ $M = 0$
 Pin	$\Delta = 0$ $M = 0$
 Roller	$\Delta = 0$
 Pin	$\Delta = 0$
 Fixed end	$\theta = 0$ $\Delta = 0$
 Free end	$V = 0$ $M = 0$
 Internal pin or hinge	$M = 0$

ถ้าคานถูกกระทำโดยแรงที่ไม่มีความต่อเนื่องดังที่ได้กล่าวไปแล้ว เราจะต้องใช้เงื่อนไขความต่อเนื่อง (continuity condition) ในการหาค่าคงที่ของการอินทิเกรท

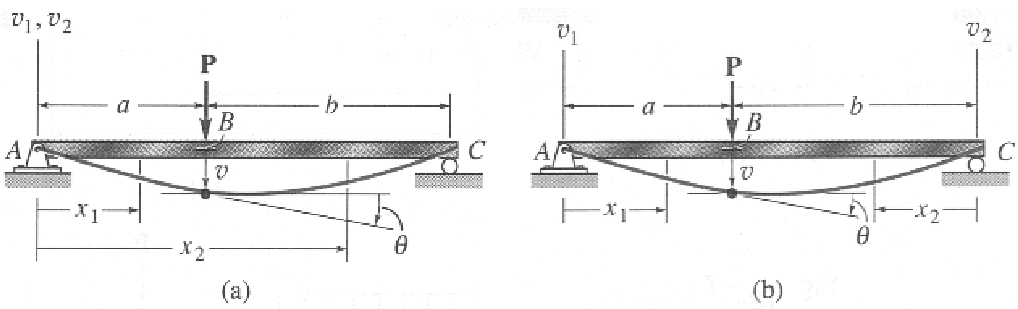
พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 12-9a จากรูป เนื่องจากคานไม่มีความต่อเนื่องที่จุด B ดังนั้น เราจะต้องใช้พิกัด x_1 และ x_2 ในช่วง AB และช่วง BC ในการเขียนสมการ slope และ deflection ซึ่งจะทำให้เกิดค่าคงที่ของการอินทิเกรททั้งสิ้น 4 ค่า โดยที่ค่าคงที่ของการอินทิเกรท 2 ค่าจะหาได้จากเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ของคาน และค่าคงที่ของการอินทิเกรทอีก 2 ค่าที่เหลือจะได้จากการพิจารณาค่า slope และ displacement ที่จุด B โดยที่ค่า slope และ displacement ที่หามาได้ในช่วง AB ที่จุด B หรือ $x_1 = a$ จะมีค่าเท่ากับค่า slope และ displacement ที่หามาได้ในช่วง BC ที่จุด B หรือ $x_2 = a$ เพื่อที่ว่า deflection curve ของคานจะมีความต่อเนื่องที่จุดนี้หรือถ้าเขียนเป็นสมการแล้ว เราจะได้ว่า

$$\theta_1(a) = \theta_2(a) \text{ และ } v_1(a) = v_2(a)$$

ในกรณีที่เราใช้พิกัด x_1 และ x_2 ดังที่แสดงในรูปที่ 12-9b แล้ว เราจะเขียนสมการของ continuity condition ที่จุด B ได้อยู่ในรูป

$$-\theta_1(a) = \theta_2(b) \text{ และ } v_1(a) = v_2(b)$$

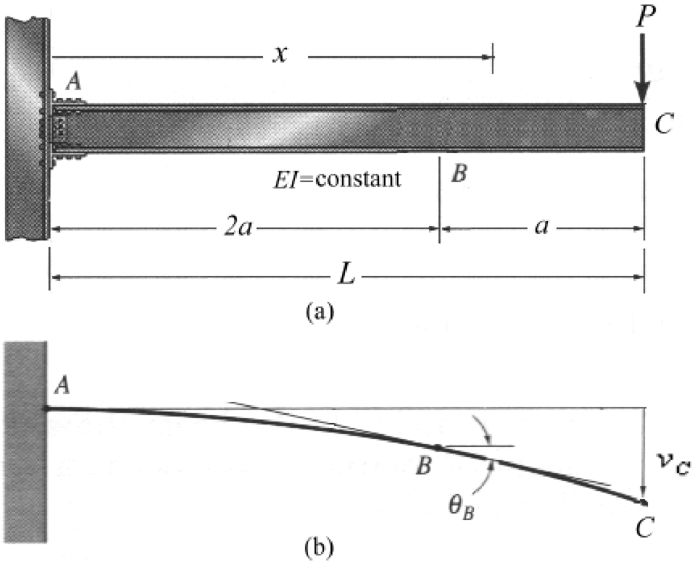
เครื่องหมายลบในสมการของ slope เกิดขึ้นเนื่องจากว่าพิกัด x_1 มีทิศทางบวกไปทางขวามือ เมื่อ $\theta_1(a)$ หมุนตามเข็มนาฬิกา จาก sign convention ที่เราใช้ $\theta_1(a)$ จะมีเครื่องหมายเป็นลบ ส่วน x_2 มีทิศทางบวกไปทางซ้ายมือ เมื่อ $\theta_2(b)$ หมุนตามเข็มนาฬิกา จาก sign convention ที่เราใช้ $\theta_2(b)$ จะมีเครื่องหมายเป็นบวก



รูปที่ 12-9

ตัวอย่างที่ 12-1

จงหาสมการของ slope ที่จุด B และการโก่งตัวที่จุด C ของคานยื่น ซึ่งถูกกระทำโดยแรง P และมี flexural rigidity EI คงที่ตลอดความยาวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 12-1a



รูปที่ Ex 12-1

จากลักษณะของคานและการกระทำของแรง เราจะร่างรูปร่างการโก่งตัวของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 12-1b กำหนดให้จุดเริ่มต้นของ coordinate x อยู่ที่จุด A ดังนั้น เราจะหาสมการของโมเมนต์ดัดได้ในรูป

$$M(x) = Px - PL = -P(L - x)$$

จากสมการของ elastic beam เราจะได้ว่า

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = Px - PL$$

$$EI\frac{dv}{dx} = P\frac{x^2}{2} - PLx + C_1$$

$$EIv = P\frac{x^3}{6} - PL\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

ในการวิเคราะห์หาสมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานยื่นนี้ เราต้องหาค่าคงที่ของการ integration 2 ค่าโดยใช้ boundary condition สองเงื่อนไขคือ $v = 0$ และ $\frac{dv}{dx} = 0$ ที่ $x = 0$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

ดังนั้น สมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานจะอยู่ในรูป

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(P\frac{x^2}{2} - PLx)$$

$$v = \frac{1}{EI}(P\frac{x^3}{6} - PL\frac{x^2}{2})$$

ที่จุด B , $x = 2a$,

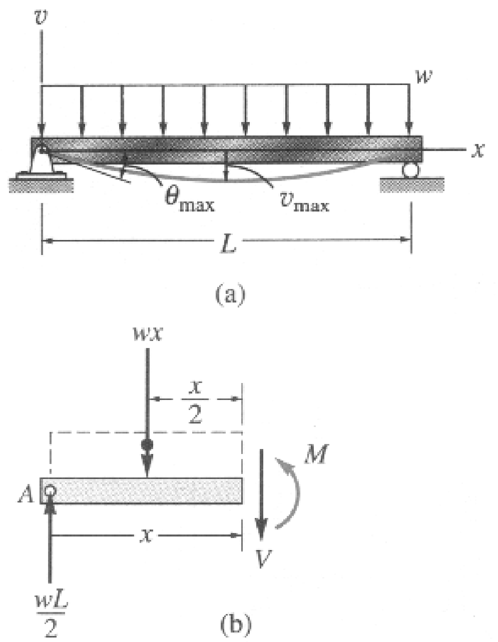
$$\theta = -2Pa(L - a)$$ Ans.

ที่จุด C , $x = L$,

$$v_C = -\frac{PL^3}{3EI}$$ <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 12-2

กำหนดให้คาน simply supported beam ซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ w และมี flexural rigidity EI คงที่ตลอดความยาวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 12-2 จงหาสมการของ slope สูงสุด $\theta_{\max}$ และสมการของการโก่งตัวสูงสุด $v_{\max}$ ของคาน



รูปที่ Ex 12-2

จากลักษณะของคานและการกระทำของแรง เราจะร่างรูปร่างการโก่งตัวของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 12-2a จากระบบแกนอ้างอิง เราจะหาสมการของโมเมนต์ดัดได้เป็น

$$M(x) = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

จากสมการของ elastic beam เราจะได้ว่า

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{wLx^2}{4} - \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$EIv = \frac{wLx^3}{12} - \frac{wx^4}{24} + C_1x + C_2$$

ในการวิเคราะห์หาสมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานโดยวิธี double integration ในที่นี้ เรามีค่าคงที่ของการ integration จากสมการของ elastic beam ทั้งสิ้น 2 ค่า ซึ่งจะหาได้โดยใช้ boundary condition สองเงื่อนไขคือ $v = 0$ ที่ $x = 0$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$C_2 = 0$$

และ $\frac{dv}{dx} = 0$ ที่ $x = L/2$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$C_1 = -\frac{wL^3}{24}$$

ดังนั้น สมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานจะอยู่ในรูป

$$\theta = \frac{dv}{dx} = -\frac{w}{24EI}(4x^3 - 6Lx^2 + L^3)$$

$$v = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3 x)$$

จากรูปร่างการโก่งตัวของคาน slope สูงสุด $\theta_{\max}$ เกิดขึ้นที่จุดรองรับทั้งสองของคาน $x = 0$ หรือ $x = L$

$$\theta_{\max} = -\frac{wL^3}{24EI}$$ Ans.

และการโก่งตัวสูงสุดของคานเกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางความยาวของคาน $x = L/2$

$$v_{\max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$$ Ans.

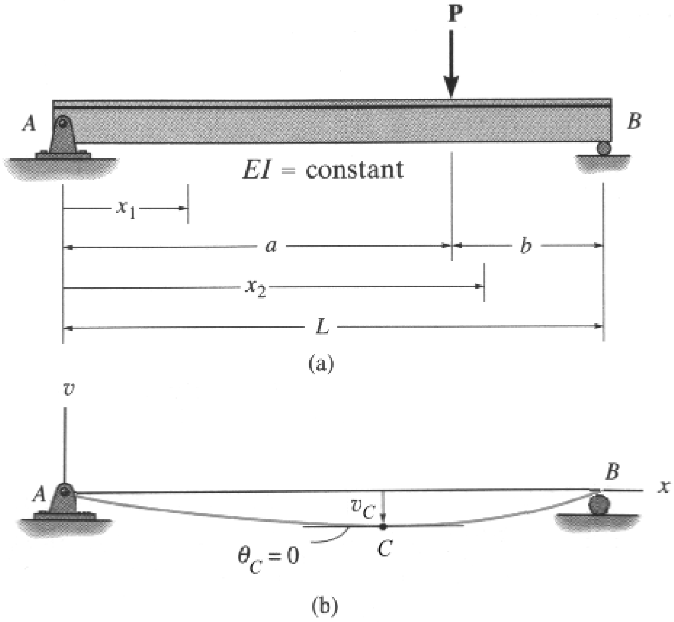
ตัวอย่างที่ 12-3

กำหนดให้คาน simply supported beam ซึ่งถูกกระทำโดยแรง P ที่ระยะ a จากจุดรองรับ A และมี flexural rigidity EI คงที่ตลอดความยาวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 12-3a จงหา

a.) สมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานเนื่องจากแรง P

b.) สมการของ slope ที่จุดรองรับ A และ B

c.) สมการการโก่งตัวสูงสุด พร้อมตำแหน่งที่เกิด เมื่อ $a = 2b$



รูปที่ Ex 12-3

สมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานเนื่องจากแรง P

จากลักษณะของคานและการกระทำของแรง เราจะร่างรูปการโก่งตัวของคานได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 12-3b และเราจะแบ่งการหาสมการของโมเมนต์ดัดออกเป็นสองช่วงโดยใช้ coordinate x_1 และ x_2 โดยที่

$0 \le x_1 \le a;$ $$M_1 = \frac{Pb}{L}x_1$$

$a \le x_2 \le b;$ $$M_2 = \frac{Pb}{L}x_2 - P(x_2 - a) = Pa(1 - \frac{x_2}{L})$$

จากสมการของ elastic beam เราจะได้ว่า เมื่อ $0 \le x_1 \le a;$

$$EI\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = \frac{Pb}{L}x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{Pb}{2L}x_1^2 + C_1$$

$$EI\, v_1 = \frac{Pb}{6L}x_1^3 + C_1 x_1 + C_2$$

จากสมการของ elastic beam เราจะได้ว่า เมื่อ $a \le x_2 \le b;$

$$EI\frac{dv_2^2}{dx^2} = Pa(1 - \frac{x_2}{L})$$

$$EI\frac{dv}{dx} = Pa(x_2 - \frac{x_2^2}{2L}) + C_3$$
$$EI\,v = Pa(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6L}) + C_3x_2 + C_4$$

ในการวิเคราะห์หาสมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานโดยวิธี double integration ของคานในที่นี้ เราจะเห็นได้ว่า เรามีค่าคงที่ของการ integration จากสมการของ elastic beam ทั้งสิ้น 4 ค่า ซึ่งสองค่าของค่าคงที่จะหาได้โดยใช้ boundary condition สองเงื่อนไขคือ

$v_1 = 0$ ที่ $x_1 = 0$;

$$C_2 = 0$$

$v_2 = 0$ ที่ $x_2 = L$;

$$0 = \frac{PaL^2}{3} + C_3L + C_4$$

และที่เหลืออีกสองค่าจะหาได้โดยใช้ continuity condition สองเงื่อนไขคือ

v_1 (ที่ $x_1 = a$) $= v_2$ (ที่ $x_2 = a$);

$$\frac{Pb}{6L}a^3 + C_1a = Pa(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6L}) + C_3a + C_4$$

$\frac{dv_1}{dx_1}$ (ที่ $x_1 = a$) $= \frac{dv_2}{dx_2}$ (ที่ $x_2 = a$);

$$\frac{Pb}{2L}a^2 + C_1 = Pa(a - \frac{a^2}{2L}) + C_3$$

เมื่อทำการแก้สมการทั้งสาม เราจะได้

$$C_1 = -\frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2)$$
$$C_3 = -\frac{Pa}{6L}(2L^2 + a^2)$$
$$C_4 = \frac{Pa^3}{6}$$

เมื่อแทนค่าคงที่ของการ integration ทั้งสี่ค่ากลับลงในสมการของ slope และสมการของการโก่งตัว เราจะได้

เมื่อ $0 \le x_1 \le a$;

$$\theta_1 = \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2 - 3x_1^2)$$
$$v_1 = -\frac{Pbx_1}{6EIL}(L^2 - b^2 - x_1^2)$$ Ans.

เมื่อ $a \le x_2 \le b$;

$$\theta_2 = \frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{Pa}{6EIL}(3x_2^2 + 2L^2 + a^2 - 6Lx_2)$$
$$v_2 = -\frac{Pa}{6EIL}(x_2^3 + (2L^2 + a^2)x_2 - 3Lx_2^2 - a^2L)$$ Ans.

สมการของ slope ที่จุดรองรับ A และ B

ที่จุดรองรับ A, $x_1 = 0$

$$\theta_1 = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2) = -\frac{Pb}{6EIL}(L+b)(L-b) = -\frac{Pab}{6EIL}(L+b) \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

ที่จุดรองรับ B , $x_2 = L$

$$\theta_2 = \frac{Pa}{6EIL}(L^2 - a^2) = \frac{Pa}{6EIL}(L+a)(L-a) = \frac{Pab}{6EIL}L+a) \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

สมการการโก่งตัวสูงสุดพร้อมตำแหน่งที่เกิดเมื่อ $a = 2b$

จากรูปร่างการโก่งตัวของคาน เมื่อ $a = 2b$ แล้ว เราจะเห็นได้ว่า ตำแหน่งที่เกิดค่าการโก่งตัวสูงสุดต้องอยู่ระหว่างจุดรองรับ A และจุดที่แรงกระทำ สมมุติว่าเป็นจุด C ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 12-3b โดยที่จุดนี้จะเป็นจุดที่มี slope เท่ากับศูนย์ ดังนั้น เราจะหาตำแหน่งของจุด C ได้จากสมการของ slope θ_1 และ $L = 3b$

$$(3b)^2 - b^2 - 3x_1^2 = 0$$

$$x_1 = 1.633b$$

และสมการของการโก่งตัวสูงสุดที่จุด C จะหามาได้จากการแทนค่า $x_1 = 1.633b$ ลงในสมการของการโก่งตัว v_1

$$v_{\max} = -0.48385\frac{Pb^3}{EI} \qquad \underline{\text{Ans.}}$$

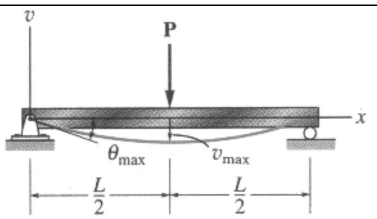
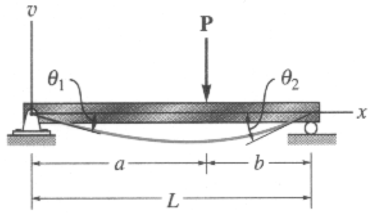
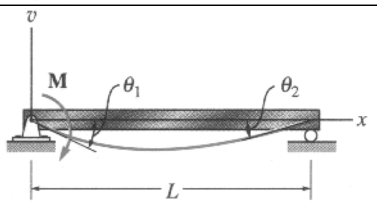
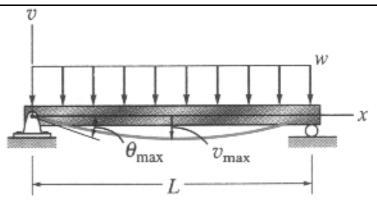
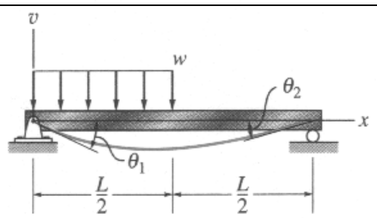
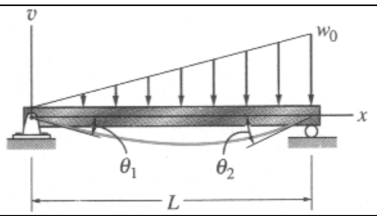
12.4 วิธี superposition (Method of Superposition)

ในทางปฏิบัติ ค่า slope และ deflection ของคานมักจะถูกหาโดยใช้วิธี superposition ซึ่งมีพื้นฐานมาจากหลักการ superposition (principle of superposition) เนื่องจากว่าสมการ deflection curve ของคาน $EI(d^4v/dx^4) = -w(x)$ เป็นไปตามข้อกำหนด principle of superposition โดยที่

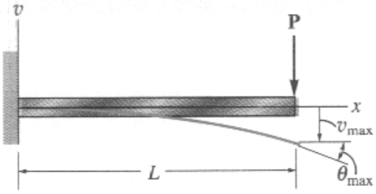
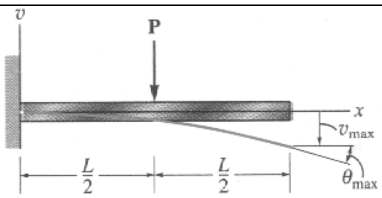
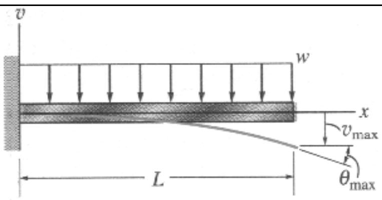
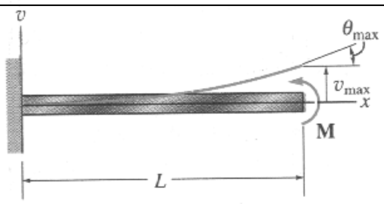
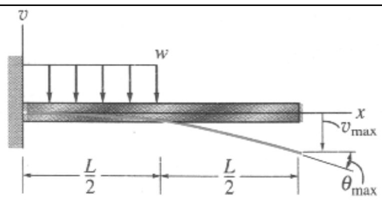
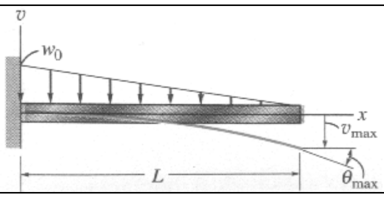
$$w(x) \ \alpha \ v(x) \quad \text{และ} \quad v(x) <<< 1$$

ดังนั้น ค่า slope และ deflection ของคานที่เกิดขึ้นจากแรงทั้งหมดจะหาได้จากผลรวมของค่า slope และ deflection เนื่องจากแรงแต่ละแรง ยกตัวอย่างเช่น ถ้า v_1 เป็นค่าการโก่งตัวที่จุดใดจุดหนึ่งของคานเนื่องจากแรง q_1 และถ้า v_2 เป็นค่าการโก่งตัวของคานที่จุดดังกล่าวเนื่องจากแรง q_2 แล้ว ค่าการโก่งตัวของคานที่จุดดังกล่าวเนื่องจากแรง $q_1 + q_2$ จะมีค่าเท่ากับ $v_1 + v_2$ เป็นต้น ตารางที่ 12-2 แสดงค่าของ slope และ deflection ของคานที่เราควรทราบ

ตารางที่ 12-2

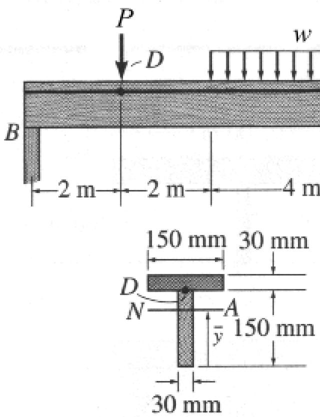
คาน	Slope	การโก่งตัว	สมการเส้นโค้งการโก่งตัว
	$\theta_{max} = -\frac{PL^2}{16EI}$	$v_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$	$v = -\frac{Px}{48EI}\left(3L^2 - 4x^2\right)$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_1 = -\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v\big\|_{x=a} = -\frac{Pba}{6EIL}\left(L^2 - b^2 - a^2\right)$	$v = -\frac{Pbx}{6EIL}\left(L^2 - b^2 - x^2\right)$ $0 \le x \le a$
	$\theta_1 = -\frac{ML}{3EI}$ $\theta_2 = \frac{ML}{6EI}$	$v_{max} = -\frac{ML^2}{\sqrt{243}EI}$	$v = -\frac{Mx}{6EIL}\left(x^2 - 3Lx + 2L^2\right)$ $0 \le x \le L$
	$\theta_{max} = -\frac{wL^3}{24EI}$	$v_{max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$	$v = -\frac{wx}{24EI}\left(x^3 - 2Lx^2 + L^3\right)$ $0 \le x \le L$
	$\theta_1 = -\frac{3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \frac{7wL^3}{384EI}$	$v\big\|_{x=L/2} = -\frac{5wL^4}{768EI}$ $v_{max} = -0.006563\frac{wL^4}{EI}$ ที่ $x = 0.4598L$	$v = -\frac{wx}{384EI}\left(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3\right)$ $0 \le x \le L/2$ $v = -\frac{wL}{384EI}\left(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3\right)$ $L/2 \le x \le L$
	$\theta_1 = -\frac{7w_oL^3}{360EI}$ $\theta_2 = \frac{w_oL^3}{45EI}$	$v_{max} = -0.00652\frac{w_oL^4}{EI}$ ที่ $x = 0.51436L$	$v = -\frac{w_ox}{360EIL}\left(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4\right)$ $0 \le x \le L$

ตารางที่ 12-2 (ต่อ)

คาน	Slope	การโก่งตัว	เส้นโค้งการโก่งตัว
	$\theta_{max} = -\dfrac{PL^2}{2EI}$	$v_{max} = -\dfrac{PL^3}{3EI}$	$v = -\dfrac{Px^2}{6EI}(3L - x)$ $0 \le x \le L$
	$\theta_{max} = -\dfrac{PL^2}{8EI}$	$v_{max} = -\dfrac{5PL^3}{48EI}$	$v = -\dfrac{Px^2}{6EI}(3L/2 - x)$ $0 \le x \le L/2$ $v = -\dfrac{PL^2}{24EI}(3x - L/2)$ $L/2 \le x \le L$
	$\theta_{max} = -\dfrac{wL^3}{6EI}$	$v_{max} = -\dfrac{wL^4}{8EI}$	$v = -\dfrac{wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2x)$ $0 \le x \le L$
	$\theta_{max} = \dfrac{ML}{EI}$	$v_{max} = \dfrac{ML^2}{2EI}$	$v = \dfrac{Mx^2}{2EI}$ $0 \le x \le L$
	$\theta_{max} = -\dfrac{wL^3}{48EI}$	$v_{max} = -\dfrac{7wL^4}{384EI}$	$v = -\dfrac{wx^2}{24EI}(x^2 - 2Lx + 3L^2/2)$ $0 \le x \le L/2$ $v = -\dfrac{wL^3}{192EI}(4x - L/2)$ $L/2 \le x \le L$
	$\theta_{max} = -\dfrac{w_oL^3}{24EI}$	$v_{max} = -\dfrac{w_oL^4}{30EI}$	$v = -\dfrac{w_ox^2}{120EIL}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$ $0 \le x \le L$

ตัวอย่างที่ 12-4

คาน simple beam ดังที่แสดงในรูปที่ EX 12-4 สามารถรองรับน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ $w = 0.5\,\mathrm{kN/m}$ และแรงกระทำเป็นจุด $P = 5\,\mathrm{kN}$ ได้อย่างปลอดภัย ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 11-4 ถ้ากำหนดให้ moment of inertia ของหน้าตัดของคานรอบแกนสะเทิน $I = 27(10^6)\,\mathrm{mm}^4$ วัสดุมีค่า modulus of elasticity $E = 20\,\mathrm{GPa}$ จงหาค่าการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลางคาน



รูปที่ EX 12-4

จากหลักการ superposition เราจะแยกพิจารณาคานออกเป็น 2 กรณีคือ คานซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุก $w = 0.5\,\mathrm{kN/m}$ และคานซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุก $P = 5\,\mathrm{kN}$

ค่าการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลางคานเนื่องจากน้ำหนักบรรทุก $w = 0.5\,\mathrm{kN/m}$

จากตารางที่ 12-2 เราจะเห็นได้ว่า น้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอในกรณีนี้อยู่ตรงกันข้ามกับคานที่แสดงในตารางที่ 12-2 แต่เนื่องจากจุดกึ่งกลางคานเป็นจุดเดียวกัน ดังนั้น

$$v = -\frac{5wL^4}{768EI} = -\frac{5}{768}\frac{(500)8^4}{20(10^9)27(10^{-6})} = -24.7\,\mathrm{mm}$$

ค่าการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลางคานเนื่องจากน้ำหนักบรรทุก $P = 5\,\mathrm{kN}$

เนื่องจากเราไม่สามารถหาค่าการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลางคานนี้ได้โดยตรง แต่เราจะหาค่าการโก่งตัวดังกล่าวได้โดยการหมุนคานในแนวนอนครึ่งรอบ จากนั้น ทำการสลับค่า a ให้เป็นค่า b และค่า b ให้เป็นค่า a ซึ่งสมการของการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลางคานในกรณีนี้จะเขียนได้ในรูป

$$v = -\frac{Pbx}{6EIL}\left(L^2 - b^2 - x^2\right)$$

โดยที่ $0 \le x \le 6$, $b = 2\,\mathrm{m}$, และ $x = 4\,\mathrm{m}$

$$v = -\frac{5000(2)4}{6(20)10^9(27)10^{-6}(8)}\left(8^2 - 2^2 - 4^2\right) = -67.9\,\mathrm{mm}$$

ดังนั้น ค่าการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลางคานจะมีค่าเท่ากับ

$$v\big|_{x=L/2} = -24.7 - 67.9 = -92.6\,\mathrm{mm}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 12-5

จงหาค่าการโก่งตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นในคานที่ได้ออกแบบไว้ในตัวอย่างที่ 11-1 เมื่อไม้สักมี $E = 10\ \mathrm{GPa}$ จากนั้นจงตรวจสอบว่าคานดังกล่าวมีอัตราส่วนของช่วงคาน (span) ต่อค่าการโก่งตัวเกิน 360 ตามที่กำหนดในมาตรฐานการออกแบบสำหรับคานที่รองรับผนังอิฐก่อหรือไม่ ถ้าไม่ จงทำการออกแบบคานดังกล่าวใหม่

จากตัวอย่างที่ 11-1 หน้าตัดของคานจะต้องมีความกว้าง $b = 0.091\ \mathrm{m}$ และความลึก $h = 0.180\ \mathrm{m}$ จึงจะสามารถรองรับน้ำหนักบรรทุกได้โดยปลอดภัย ดังนั้น moment of inertia ของหน้าตัดของคานรอบแกนสะเทิน (neutral axis) จะมีค่าเท่ากับ

$$I = \frac{0.091(0.182)^3}{12} = 45.717(10^{-6})\ \mathrm{m}^4$$

จากหลักการ superposition เราจะแยกพิจารณาคานออกเป็น 2 กรณีคือ คานซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุก $w = 2.0\ \mathrm{kN/m}$ และคานซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุก $P = 5\ \mathrm{kN}$ ซึ่งมีค่าการโก่งตัวสูงสุดเกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางคานทั้งสองกรณี

จากตารางที่ 12-2 สมการการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลางคานเนื่องจากน้ำหนักบรรทุก $w = 2.0\ \mathrm{kN/m}$ อยู่ในรูป

$$v = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

และสมการการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลางคานเนื่องจากน้ำหนักบรรทุก $P = 5\ \mathrm{kN}$ อยู่ในรูป

$$v = -\frac{PL^3}{48EI}$$

ดังนั้น ค่าการโก่งตัวสูงสุดที่จุดกึ่งกลางคานจะมีค่าเท่ากับ

$$v\Big|_{x=L/2} = -\frac{5(2000)3^4}{384EI} - \frac{5000(3^3)}{48EI} = \frac{4922}{200(10^9)45.717(10^{-6})} = -11\ \mathrm{mm}$$ Ans.

ตรวจสอบอัตราส่วนของช่วงคาน (span) ต่อค่าการโก่งตัว

$$\frac{L}{v} = \frac{3000}{11} = 273 < 360$$

ดังนั้น เราจะต้องออกแบบหาหน้าตัดของคานใหม่เพื่อให้คานมีความแกร่งอย่างเพียงพอในการรับน้ำหนักบรรทุกโดยจำกัดให้คานมีค่าการโก่งตัวสูงสุดเท่ากับ $L/360 = 3000/360 = 8.3\ \mathrm{mm}$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$8.3(10^{-3}) = \frac{4922}{200(10^9)I}$$

$$I = \frac{b(2b)^3}{12} = 59.3(10^{-6})$$

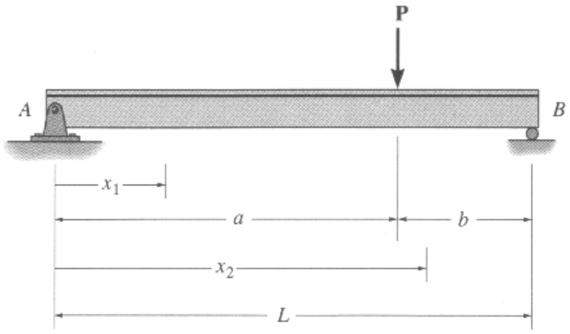
$$b = 0.097\ \mathrm{m}$$

$$h = 2b = 0.194\ \mathrm{m}$$

ดังนั้น หน้าตัดของคานจะต้องมีความกว้าง $b = 0.097\ \mathrm{m}$ และความลึก $h = 0.194\ \mathrm{m}$ จึงจะสามารถรองรับน้ำหนักบรรทุกได้โดยปลอดภัยและมีค่าการโก่งตัวน้อยกว่าที่กำหนดไว้ในมาตรฐานการออกแบบ Ans.

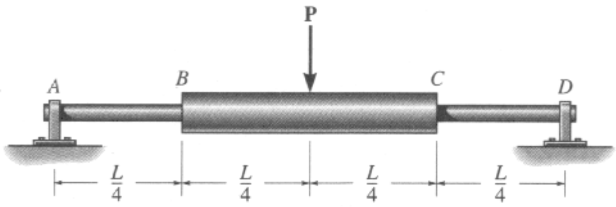
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 12

12-1 จงหาสมการของการโก่งตัวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 12-1 โดยใช้พิกัด x_1 และ x_2 เมื่อคานมีค่า flexural stiffness EI คงที่ตลอดความยาวคาน



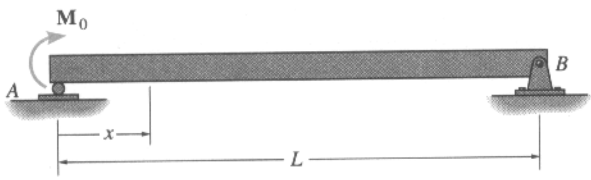
รูปที่ Prob. 12-1

12-2 จงหาสมการของการโก่งตัวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 12-2 เมื่อคานช่วง BC มีค่า flexural stiffness $2EI$ และคานช่วง AB และ CD มีค่า flexural stiffness EI



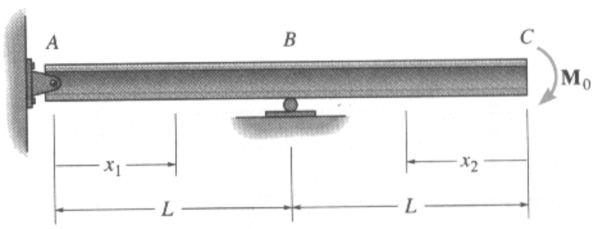
รูปที่ Prob. 12-2

12-3 จงหาสมการของการโก่งตัวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 12-3 โดยใช้พิกัด x เมื่อคานมีค่า flexural stiffness EI คงที่ตลอดความยาวคาน จากนั้น จงหาสมการของการโก่งตัวสูงสุดและค่าการหมุนสูงสุดที่เกิดขึ้นบนคาน



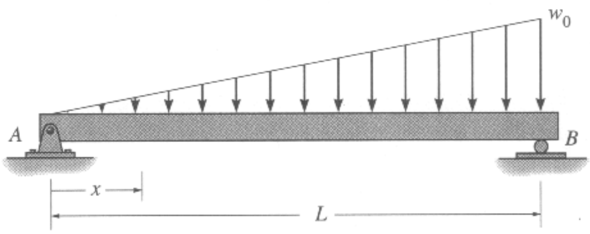
รูปที่ Prob. 12-3

12-4 จงหาสมการของการโก่งตัวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 12-4 โดยใช้พิกัด x_1 และ x_2 เมื่อคานมีค่า flexural stiffness EI คงที่ตลอดความยาวคาน จากนั้น จงหาสมการของการโก่งตัวสูงสุดและค่าการหมุนสูงสุดที่เกิดขึ้นบนคาน



รูปที่ Prob. 12-4

12-5 จงหาสมการของการโก่งตัวสูงสุดและค่าการหมุนสูงสุดที่เกิดขึ้นบนคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 12-5 เมื่อคานมีค่า flexural stiffness EI คงที่ตลอดความยาวคาน



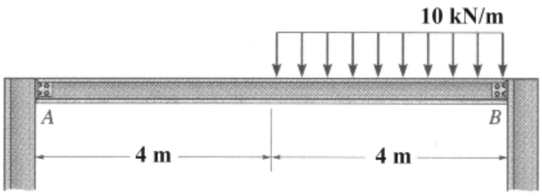
รูปที่ Prob. 12-5

12-6 จงตรวจสอบค่าการโก่งตัวสูงสุดของคานใน Prob. 11-2 ว่ามีค่าเกินข้อกำหนดของมาตรฐานการออกแบบ $L/240$ หรือไม่

12-7 จงตรวจสอบค่าการโก่งตัวสูงสุดของคานใน Prob. 11-3 ว่ามีค่าเกินข้อกำหนดของมาตรฐานการออกแบบ $L/240$ หรือไม่

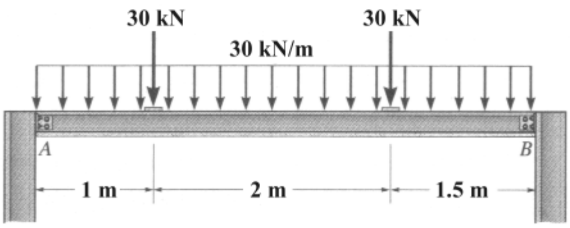
12-8 จงตรวจสอบค่าการโก่งตัวสูงสุดของคานใน Prob. 11-4 ว่ามีค่าเกินข้อกำหนดของมาตรฐานการออกแบบ $L/240$ หรือไม่

12-9 จงหาขนาดหน้าตัด wide-flange ที่เบาที่สุดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 12-9 ถ้ากำหนดให้เหล็ก A36 มี $\sigma_{allow} = 165\ \text{MPa}$ และ $\tau_{allow} = 100\ \text{MPa}$ จากนั้น จงตรวจสอบค่าการโก่งตัวสูงสุดของคานว่ามีค่าเกินข้อกำหนดของมาตรฐานการออกแบบ $L/360$ หรือไม่



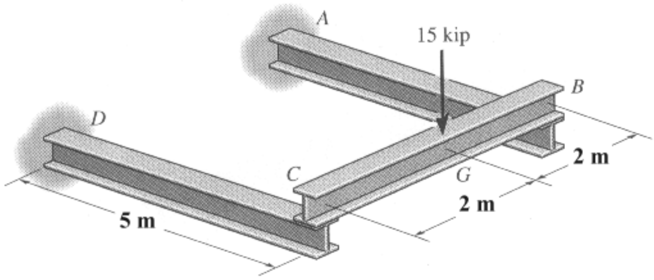
รูปที่ Prob. 12-9

12-10 จงหาขนาดหน้าตัด wide-flange ที่เบาที่สุดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 12-10 ถ้ากำหนดให้เหล็ก A36 มี $\sigma_{allow} = 165\ \text{MPa}$ และ $\tau_{allow} = 100\ \text{MPa}$ จากนั้น จงตรวจสอบค่าการโก่งตัวสูงสุดของคานว่ามีค่าเกินข้อกำหนดของมาตรฐานการออกแบบ $L/360$ หรือไม่



รูปที่ Prob. 12-10

12-11 จงตรวจสอบค่าการโก่งตัวสูงสุดของคาน CB คาน CD และคาน AB ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 12-11 ถ้าคานเหล็ก A36 มี $I_x = 49.1(10^6)\ \text{mm}^4$ (12-102)



รูปที่ Prob. 12-11

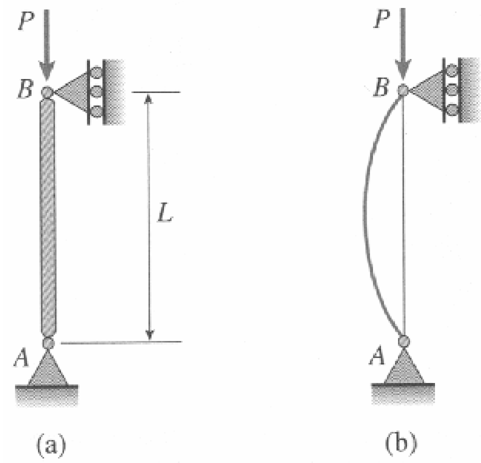
บทที่ 13
การโก่งเดาะของเสา (Buckling of Columns)

เรียบเรียงโดย ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

13.1 แรงวิกฤติ (Critical Loads)

เสา (column) เป็นองค์อาคารของโครงสร้างที่ยาวเรียว ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกดอัดในแนวแกนของเสา (axially compressive load) เมื่อเสาถูกกระทำโดยแรงกดอัดที่มีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ จนถึงถึงค่าๆ หนึ่ง ซึ่งเรียกว่า แรงวิกฤติ (critical load) หรือ P_{cr} ดังที่แสดงในรูปที่ 13-1a แล้ว เสาจะเกิดการวิบัติโดยการโก่งตัวทางด้านข้าง (lateral deflection หรือ sidesway) ดังที่แสดงในรูปที่ 13-1b ซึ่งถูกเรียกว่า การโก่งเดาะ (buckling) พฤติกรรมการโก่งเดาะนี้จะพิสูจน์ได้อย่างง่ายโดยการกดไม้บรรทัดพลาสติก

โดยทั่วไปแล้ว การโก่งเดาะของเสาจะนำไปสู่การวิบัติของโครงสร้างที่รุนแรงและเกิดขึ้นแบบทันทีทันใด ดังนั้น ในการออกแบบเสา นอกจากจะต้องออกแบบให้เสามีกำลังและความแกร่งอย่างเพียงพอแล้ว เสาจะต้องถูกออกแบบไม่ให้มีการโก่งเดาะเกิดขึ้นด้วย



รูปที่ 13-1

เพื่อให้เข้าใจในการเสียเสถียรภาพของเสาโดยการโก่งเดาะ พิจารณาระบบกลที่ประกอบด้วยแท่งวัตถุแกร่งสองแท่ง ซึ่งมีน้ำหนักที่น้อยมากจนไม่นำมาคิดในการพิจารณาความสมดุลของแท่งวัตถุ และถูกเชื่อมต่อกันด้วยหมุดและสปริงที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 13-2a

เมื่อแรงกดอัดในแนวแกน P มีค่าน้อยมากและเมื่อระบบกลถูกรบกวนสมดุลโดยการเลื่อนหมุดที่จุด A ออกมาจากตำแหน่งสมดุลเป็นค่าที่น้อยมาก Δ โดยที่ $\Delta = \theta L/2$ ดังที่แสดงในรูปที่ 13-2b แล้ว เราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของหมุดที่จุด A ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 13-2c จากสมการความสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

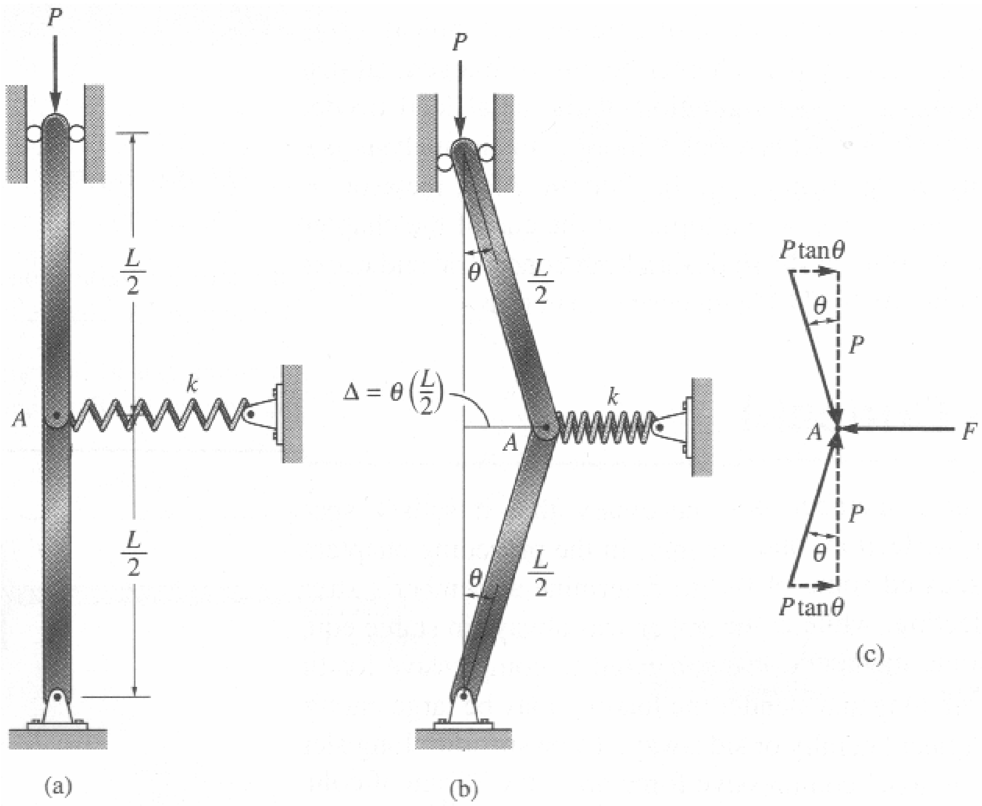
$$2(P\tan\theta) = k\Delta$$

เนื่องจากมุม $\theta << 1$ ดังนั้น $\tan\theta \cong \theta$ และสมการสมดุลของแรงในแนวนอนจะถูกเขียนใหม่ได้เป็น

$$2P\theta = \frac{k\theta L}{2}$$

เนื่องจากแรง P ที่ได้เป็นแรงที่จะทำให้ระบบกลเสียความสมดุล ดังนั้น โดยคำนิยามของ critical load เราจะได้

$$P_{cr} = \frac{kL}{4}$$



รูปที่ 13-2

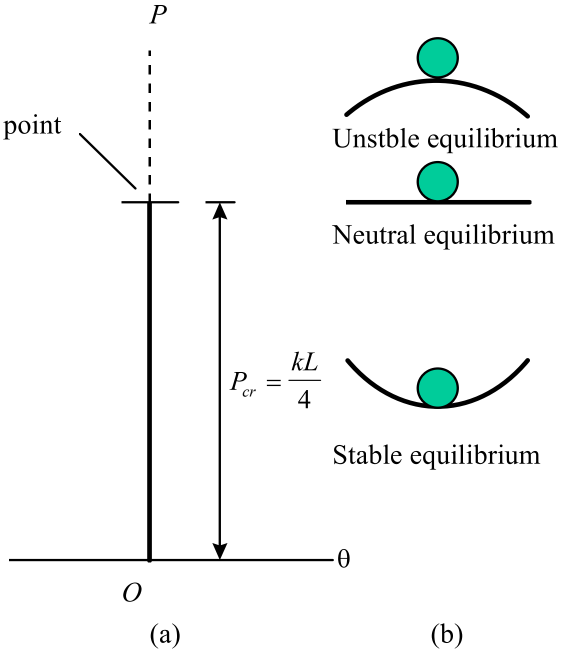
แรงกดอัดในแนวแกนนี้จะเป็นแรงที่ทำให้ระบบกลดังกล่าวอยู่ในสภาวะที่เรียกว่า สมดุลแบบเป็นกลาง (neutral equilibrium) เราควรสังเกตด้วยว่า P_{cr} เป็นอิสระกับมุม θ ดังนั้น การรบกวนอีกเล็กน้อยต่อระบบกลที่อยู่ในสภาวะ neutral equilibrium จะไม่ทำให้ระบบกลสูญเสียความสมดุลหรือเคลื่อนที่กลับไปยังตำแหน่งเริ่มต้นแต่จะทำให้ระบบกลค้างอยู่ที่ตำแหน่งของการโก่งตัวใหม่ที่เกิดจากการรบกวนดังกล่าว

ถ้าแรง $P < \dfrac{kL}{4}$ แล้ว ระบบกลจะอยู่ในสภาวะที่เรียกว่า สมดุลแบบมีเสถียรภาพ (stable equilibrium) เนื่องจากว่า ภายใต้แรง P นี้ เมื่อระบบกลถูกรบกวนโดยการเลื่อนที่หมุด A แล้ว แรงที่เกิดขึ้นในสปริงจะมีค่ามากพอที่จะทำให้ระบบกลเคลื่อนที่กลับมาอยู่ที่ตำแหน่งเริ่มต้นได้

ถ้าแรง $P > \dfrac{kL}{4}$ แล้ว ระบบกลจะอยู่ในสภาวะที่เรียกว่า สมดุลแบบไม่มีเสถียรภาพ (unstable equilibrium) เนื่องจากว่า ภายใต้แรง P นี้ เมื่อระบบกลถูกรบกวนโดยการเลื่อนที่หมุด A อีกเพียงเล็กน้อยแล้ว ระบบกลดังกล่าวจะสูญเสียความสมดุลและจะไม่สามารถที่จะกลับมาอยู่ที่ตำแหน่งเริ่มต้นได้

สภาวะทั้งสามแบบของระบบกลจะเขียนเป็นแผนภาพระหว่างแรงกดอัดในแนวแกน P กับมุม θ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-13a หรือจะเปรียบเทียบได้กับสภาวะของลูกบอลที่วางอยู่บนพื้นผิวที่มีลักษณะต่างๆ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-13b

จากรูปที่ 13-3a เส้นทึบที่อยู่ในแนวดิ่งจะแทนสภาวะ stable equilibrium ของเสา จุดที่เส้นทึบนี้ตัดกับเส้นทึบที่อยู่ในแนวนอนจะถูกเรียกว่า จุด bifurcation ซึ่งแสดงถึงสภาวะ neutral equilibrium ของเสา โดยที่เส้นทึบที่อยู่ในแนวนอนนี้จะมีขนาดที่สั้น เนื่องจากข้อสมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ที่ว่ามุม θ มีค่าที่น้อยมาก และการที่เส้นทึบในแนวนอนตัดผ่านเส้นทึบในแนวดิ่งไปทางซ้ายและทางขวานั้นเนื่องจากว่ามุม θ ที่เกิดขึ้นในระบบกลที่สภาวะ neutral equilibrium นั้นเป็นไปได้ทั้งตามเข็มและทวนเข็มนาฬิกา นอกจากนั้นแล้ว เส้นประที่อยู่ในแนวดิ่งที่อยู่เหนือจุด bifurcation จะแสดงถึงสภาวะ unstable equilibrium



รูปที่ 13-3

สภาวะทั้งสามแบบของระบบกลจะสามารถถูกอุปมาอุปมัยได้โดยการวางลูกบอลไว้บนพื้นผิวที่มีลักษณะต่างๆ ดังที่แสดงในรูปที่ 13-3b เมื่อพื้นผิวเป็นพื้นผิวโค้งหงายแล้ว สมดุลของลูกบอลจะเป็น stable equilibrium ซึ่งถ้าเราเลื่อนลูกบอลไปที่จุดใดๆ บนพื้นผิวแล้ว ลูกบอลจะเคลื่อนที่กลับมาที่จุดต่ำสุดของพื้นผิวเสมอ เมื่อพื้นผิวเป็นพื้นผิวโค้งคว่ำแล้ว สมดุลของลูกบอลจะเป็น unstable equilibrium ซึ่งถ้าลูกบอลถูกรบกวนเล็กน้อยแล้ว ลูกบอลก็จะไม่เคลื่อนที่กลับมาที่เดิม และสุดท้าย ถ้าพื้นผิวเป็นพื้นผิวที่ราบและเรียบแล้ว สมดุลของลูกบอลจะเป็น neutral equilibrium เนื่องจากถ้าเราเลื่อนลูกบอลไปอยู่ที่ใดแล้ว ลูกบอลก็จะอยู่ที่ตำแหน่งนั้น

13.2 **เสาในอุดมคติที่รองรับโดยหมุด** (Ideal Column with Pin Supports)

พิจารณาเสาที่ถูกรองรับโดยหมุด (pins) ที่ปลายทั้งสองของเสา และถูกกระทำโดยแรงกดอัดในแนวแกน P ดังที่แสดงในรูปที่ 13-4a สมมุติให้เสานี้เป็นเสา ideal column โดยที่

1. เป็นเสาที่ยาวเรียวและตั้งตรง ถูกรองรับโดยหมุดที่ไร้แรงเสียดทาน
2. ทำด้วยวัสดุที่มีเนื้อเดียวกันตลอดทั้งเสา (homogeneous material) และมีพฤติกรรมแบบ linear elastic
3. แรง P กระทำผ่านจุด centroid ของหน้าตัดของเสา
4. ภายใต้แรง P เสาจะเกิดการโก่งตัวอยู่ในระนาบเดียวเท่านั้น

เมื่อแรงกดอัด P มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนถึงค่าๆ หนึ่งแล้ว เสาจะเริ่มมีการโก่งตัวทางด้านข้าง v และเราจะเขียน free-body diagram ของเสาได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 13-4b จากสมการการโก่งตัวของคานเนื่องจากโมเมนต์ดัดภายใน

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \tag{13-1}$$

และเนื่องจาก $M = -Pv$ ดังนั้น

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv$$

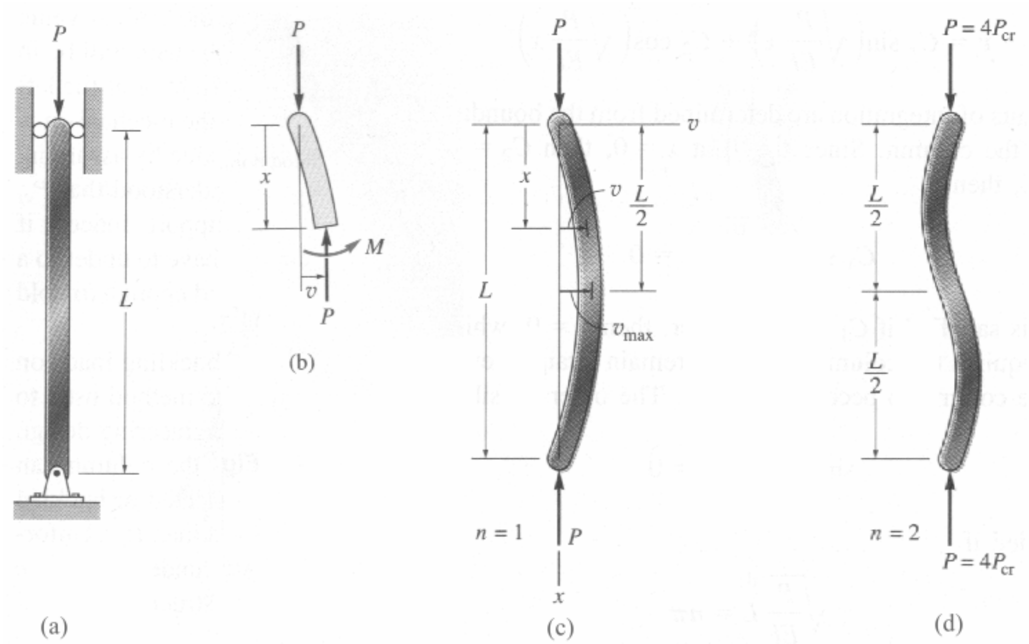
$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = 0 \qquad (13\text{-}2)$$

สมการที่ 13-2 เป็นสมการที่อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์แบบเอกพันธ์เชิงเส้นตรงอันดับที่สองซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ (Homogenous linear differential equation of second order with constant coefficients) ซึ่งเราจะแก้สมการนี้ได้โดยกำหนดให้ $k^2 = \dfrac{P}{EI}$ ดังนั้น เราจะเขียนสมการที่ 13-2 ใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2 v = 0$$

และคำตอบของสมการ ซึ่งเป็นค่าการโก่งตัวของเสาจะอยู่ในรูป

$$v = C_1 \sin\ kx + C_2 \cos\ kx \qquad (13\text{-}3)$$



รูปที่ 13-4

โดยใช้ boundary conditions ที่จุดรองรับทั้งสองของเสา ค่าคงที่ C_1 และ C_2 จะหาได้ดังนี้

ที่ $x = 0$, $v = 0$

$$C_2 = 0$$

ที่ $x = L$, $v = 0$

$$C_1 \sin\ kL = 0$$

โดยที่เงื่อนไข $C_1 \sin\ kL$ จะมีค่าเท่ากับศูนย์ก็ต่อเมื่อ $C_1 = 0$ หรือ $\sin\ kL = 0$ เท่านั้น ดังนั้น เราจะได้ว่า

ถ้า $C_1 = 0$ แล้ว $C_1 \sin\ kL = 0$ แสดงว่า kL จะมีค่าเป็นเท่าไรก็ได้ ซึ่งหมายความว่าแรง P จะมีค่าเท่าไรก็ได้ด้วย (เนื่องจากว่า $P = k^2(EI)$) ดังนั้นคำตอบ $C_1 = 0$ จึงเป็นคำตอบที่ไม่มีความสำคัญ (trivial solution)

ถ้า $\sin kL = 0$ และ C_1 มีค่าใดๆ แล้ว คำตอบนี้จะถูกต้องก็ต่อเมื่อค่า $kL = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$ แต่เนื่องจากว่า ถ้า $kL = 0$ (หรือ $k = 0$) แล้ว $P = k^2(EI) = 0$ ดังนั้น คำตอบที่เราสนใจคือ

$$kL = n\pi \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

เมื่อแทนสมการของ k กลับลงในสมการข้างต้นและจัดรูปสมการใหม่ เราจะได้ว่า

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{13-4}$$

แรงกดอัด P จะมีค่าที่น้อยที่สุดเมื่อ $n = 1$ ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า Euler load ตามชื่อของผู้ค้นพบคือ Leonard Euler นักคณิตศาสตร์ชาวสวิสเซอร์แลนด์ ในปี 1757 ดังนั้น แรงวิกฤติที่ทำให้เสาเกิดการโก่งเดาะจะหาได้จากสมการ

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{13-5}$$

โดยที่

$P_{cr} =$ แรงวิกฤติที่เสาทำให้เกิดการโก่งเดาะ โดยที่ $P_{cr} < P$ ซึ่งทำให้เกิดหน่วยแรงบนเสาเท่ากับ σ_{pl} แต่ในทางปฏิบัติจะใช้ค่า σ_y แทนค่า σ_{pl}

$E =$ modulus of elasticity ของวัสดุที่ใช้ทำเสา

$I =$ ค่าที่น้อยที่สุดของ moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของเสา

$L =$ ความยาวของเสาระหว่างหมุดรองรับที่ปลายของเสา

รูปร่างการโก่งตัวของเสาที่สอดคล้องกับแรงวิกฤติหรือ mode shape ของเสาจะอยู่ในรูป

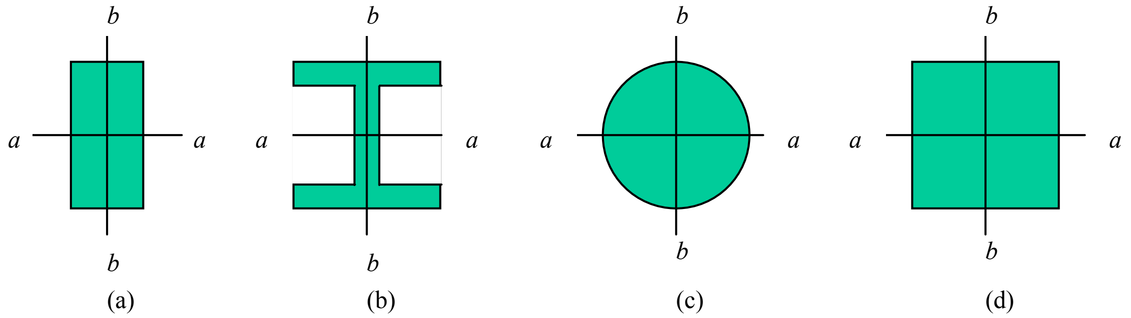
$$v = C_1 \sin\frac{\pi x}{L}$$

จากสมการ ค่าคงที่ C_1 เป็นค่าการโก่งตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางของเสาหรือ $v_{\max}$ และเราจะไม่สามารถหาค่าที่แน่นอนของ C_1 ได้ เนื่องจากว่า ค่าการโก่งตัวของเสาที่อยู่ในสภาวะ neutral equilibrium นี้มีค่าที่ไม่แน่นอน แต่จะต้องมีค่าที่น้อยมาก

เราควรที่จะทราบด้วยว่า ค่า n ในสมการที่ 13-4 แสดงถึงจำนวนของลูกคลื่น (wave) ที่เกิดขึ้นในรูปร่างของการโก่งตัวของเสา ถ้า $n = 2$ แล้ว รูปร่างของการโก่งของเสาจะมีจำนวนลูกคลื่นสองลูกคลื่นเกิดขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 13-4d และแรงวิกฤติของเสาจะมีค่าเท่ากับ $4P_{cr}$ ซึ่งกรณีนี้จะเป็นกรณีที่เสามีการรองรับทางด้านข้างที่จุดกึ่งกลางของเสา

จากสมการที่ 13-5 แรง P_{cr} จะขึ้นอยู่กับรูปร่างและขนาดหน้าตัดของเสา (I) ความยาวของเสา (L) และค่า modulus of elasticity (E) ของวัสดุที่ใช้ทำเสาเท่านั้น โดยที่แรง P_{cr} จะไม่ขึ้นอยู่กับกำลังของวัสดุที่ใช้ทำเสา ดังนั้น เราจะสรุปได้ว่า

1. หน้าตัดของเสาจะมีประสิทธิภาพสูงสุด เมื่อพื้นที่โดยส่วนใหญ่ของหน้าตัดของเสาถูกวางในบริเวณที่ไกลที่สุดจากแกน principal centroidal axis เช่น ในกรณีที่เสามีหน้าตัดแบบสี่เหลี่ยมกลวง หรือแบบ wide-flange เป็นต้น
2. เสาที่ทำด้วยเหล็กที่มีกำลังต่ำจะมีค่าแรงวิกฤติที่เท่ากับเสาที่ทำด้วยเหล็กที่มีกำลังสูงกว่า เนื่องจากว่าเสาที่ทำด้วยเหล็กทั้งสองชนิดมีค่า E เท่ากัน
3. เสาที่ไม่มีการค้ำยันทางด้านข้างจะเกิดการโก่งเดาะรอบแกนหลัก (principal axis) ของหน้าตัดที่มีค่า moment of inertia ที่น้อยที่สุดเสมอ (รอบแกน $b-b$) ดังที่แสดงในรูปที่ 13-5a และ 13-5b ดังนั้น เสาควรที่จะถูกออกแบบให้มีค่า moment of inertia เท่ากันในทุกๆ ทิศทาง อย่างเช่นในกรณีของเสาที่มีหน้าตัดรูปทรงกลมหรือสี่เหลี่ยมด้านเท่า ดังที่แสดงในรูปที่ 13-5c และ 13-5d เป็นต้น



รูปที่ 13-5

ในการออกแบบเสา ค่าหน่วยแรงวิกฤติที่เกิดขึ้นในเสาจะหาได้จากสมการ

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2}$$

กำหนดให้ $r = \sqrt{I/A}$ ซึ่งเป็นสมการของ radius of gyration ของพื้นที่หน้าตัดของเสา ดังนั้น

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{13-6}$$

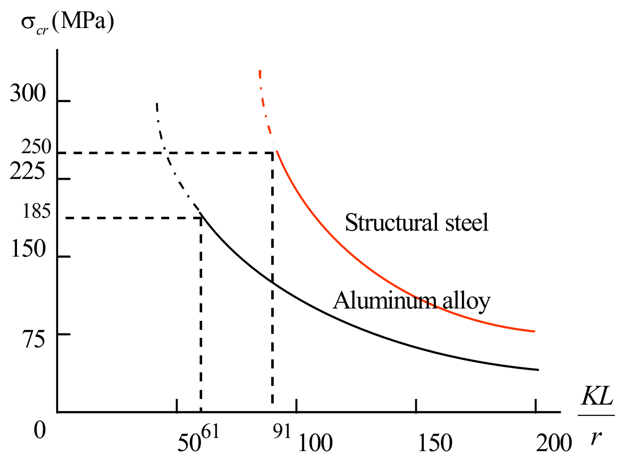
เมื่อ

σ_{cr} = หน่วยแรงวิกฤติของเสา โดยที่ $\sigma_{cr} < \sigma_{pl}$ (ในทางปฏิบัติแล้ว เราจะใช้ค่า σ_y แทนค่า σ_{pl})

r = ค่าที่น้อยที่สุดของ radius of gyration ของเสา

อัตราส่วน L/r จะถูกเรียกว่าอัตราส่วนความชะลูด (slenderness ratio) ซึ่งเป็นค่าที่ใช้วัดความสามารถในการดัดตัวได้ (flexibility) ของเสา

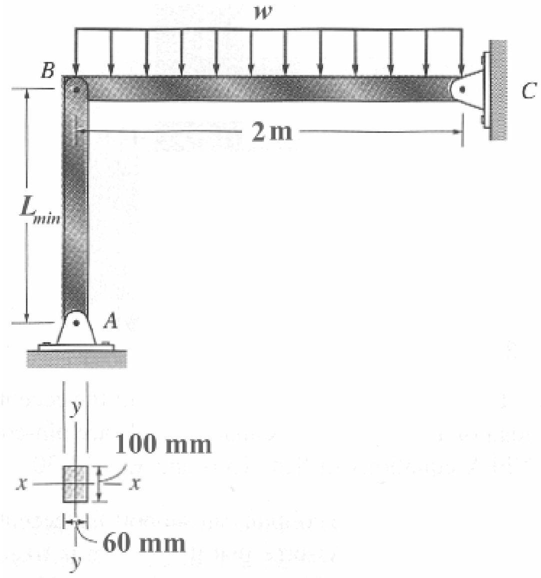
เมื่อเราทำการ plot กราฟโดยให้หน่วยแรงวิกฤติเป็นแกนตั้งและให้อัตราส่วนความชะลูดเป็นแกนนอนแล้ว เราจะได้กราฟของความสัมพันธ์ของหน่วยแรงวิกฤติและอัตราส่วนความชะลูด ซึ่งมักจะถูกเรียกว่า Euler's curve ดังตัวอย่างของ Euler's curve ของเสาที่ทำด้วย steel และ aluminum ซึ่งแสดงในรูปที่ 13-6 อย่างไรก็ตาม กราฟทั้งสองนี้จะใช้ได้เฉพาะในช่วงที่ค่าหน่วยแรงวิกฤติมีค่าน้อยกว่า proportional limit ของวัสดุทั้งสองเท่านั้น เนื่องจากว่าสมการของ Euler ขึ้นอยู่กับ Hooke's law แต่ในทางปฏิบัติ เรามักจะใช้ค่า yielding stress แทนค่า proportional limit ในการออกแบบเสาเนื่องจากว่า ค่าทั้งสองนี้มีขนาดที่ใกล้เคียงกันมากและเราจะสามารถหาค่าของ yielding stress ได้ง่ายกว่าค่า proportional limit



รูปที่ 13-6

ตัวอย่างที่ 13-1

จงหาความยาวของเสาไม้ AB ที่สั้นที่สุดที่เราจะหาแรงวิกฤติของเสาได้โดยใช้สมการของ Euler เมื่อเสาไม้มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 60×100 mm ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 13-1 และถูกรองรับโดยหมุดที่ปลายทั้งสองด้าน กำหนดให้ $E_w = 12.5$ GPa และ $\sigma_{pl} = \sigma_y = 8$ MPa จากนั้น จงหาค่าของแรงกระจายแบบสม่ำเสมอ (uniformly distributed load) w ที่กระทำต่อคาน BC



รูปที่ Ex 13-1

เนื่องจากเสาเหล็กมีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังนั้น การโก่งเดาะ (buckling) ของเสาจะเกิดรอบแกนที่มีค่า radius of gyration ต่ำที่สุดหรือรอบแกน $y-y$ โดยที่

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{100(60^3)}{12}\frac{1}{60(100)}} = 10\sqrt{3}\text{ mm}$$

และเนื่องจากเสาถูกรองรับโดยหมุดที่ปลายทั้งสองด้าน

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

$$\frac{L}{r} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{\pi^2(12.5)10^9}{8(10^6)}} = 124.2$$

ดังนั้น

$$L_{\min} = 124.2 r_{\min} = 124.2(10\sqrt{3}) = 2150\text{ mm}$$ Ans.

จากแผนภาพ free-body diagram ของคาน BC และสมการความสมดุลในแนวดิ่ง เราจะได้ความสัมพันธ์ของแรงกดอัดในแนวแกนของเสา ซึ่งเป็นแรงปฏิกิริยาของคานที่จุด B และแรง w ในรูป

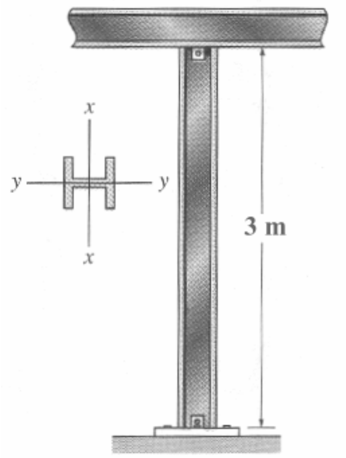
$$R_{By} = \frac{wL}{2} = w$$

เนื่องจากเสาวิบัติที่หน่วยแรงกดอัดมีค่าเท่ากับ $\sigma_{pl} = \sigma_y = 8$ MPa ดังนั้น

$$w = \sigma_y A = 8(10^6)60(100)10^{-6} = 48\text{ kN/m}$$ Ans.

ตัวอย่างที่ 13-2

กำหนดให้เสาเหล็ก $A36$ หน้าตัด $\mathrm{W}200\times 49.9\,\mathrm{kg/m}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 13-2 มีพื้นที่หน้าตัด $A = 6353\,\mathrm{mm}^2$ มี moment of inertia $I_x = 47.2\times 10^6\ \mathrm{mm}^4$ และ $I_y = 16.0\times 10^6\ \mathrm{mm}^4$ จงหาค่าแรงกดอัดในแนวแกนสูงสุดที่เสาดังกล่าวสามารถรับได้



รูปที่ Ex 13-2

เนื่องจาก $I_y < I_x$ ดังนั้น เสาจะเกิดการโก่งเดาะ (buckling) รอบแกน $y-y$ และแรงวิกฤติ (critical load) ของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(200)10^9(16.0)10^{-6}}{3^2} = 3509\,\mathrm{kN}$$

หน่วยแรงวิกฤติจะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{3509(10^3)}{6353(10^{-6})} = 552.3\,\mathrm{MPa}$$

เนื่องจากหน่วยแรงวิกฤติจะต้องมีค่าไม่เกิน yielding stress ของเหล็ก A36 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $250\,\mathrm{MPa}$ ดังนั้น การโก่งเดาะจะเกิดก่อนการวิบัติของวัสดุและแรงกดอัดในแนวแกนสูงสุดที่เสาสามารถรับได้จะมีค่าเท่ากับ

$$P_{\max} = \sigma_y A = 250(10^6)6362(10^{-6}) = 1590.5\,\mathrm{kN}$$ Ans.

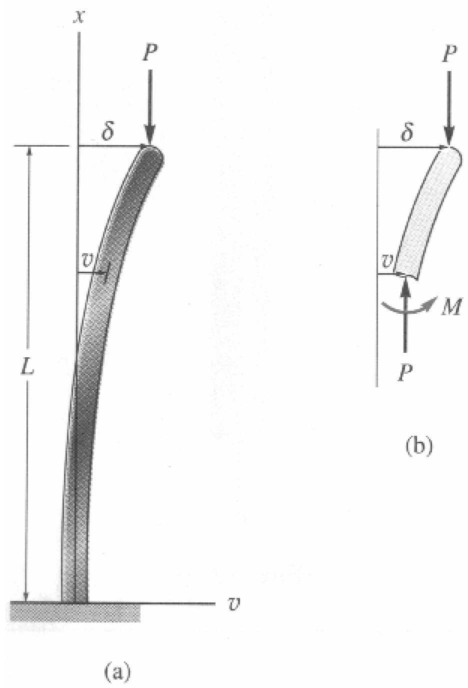
13.3 เสาที่ถูกรองรับแบบอื่น ๆ (Columns Having Various Types of Supports)

เมื่อเสามีการยึดรั้งที่ปลายเสา (end restraints) ที่แตกต่างกันแล้ว กำลังของเสาในการต้านทานต่อแรงกดอัดในแนวแกนจะมีค่าแตกต่างกันไป โดยที่เมื่อเสาถูกยึดรั้งที่ปลายเสาอย่างมาก เช่น แบบยึดแน่น เป็นต้น แล้ว เสาจะมีกำลังต้านทานต่อแรงกดอัดมากกว่าเสาที่มีการยึดรั้งน้อยๆ เช่น แบบหมุด เป็นต้น

พิจารณาเสาซึ่งถูกยึดแน่นที่ปลายด้านหนึ่งและเป็นอิสระที่ปลายอีกด้านหนึ่ง ดังที่แสดงในรูปที่ 13-7a ภายใต้แรงในแนวแกน P เสาดังกล่าวจะเกิดการโก่งตัว ดังที่แสดงในรูปที่ 13-7b โดยที่สมการของโมเมนต์ที่ระยะ x ใดๆ จะอยู่ในรูป $M = P(\delta - v)$ เมื่อเราแทนค่า M ลงในสมการการโก่งตัวของคาน เราจะได้ว่า

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = P(\delta - v) \tag{13-7}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}\delta$$



รูปที่ 13-7

เมื่อทำการแก้สมการที่ 13-7 แล้ว เราจะได้สมการของการโก่งตัวของเสาอยู่ในรูป

$$v = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta$$

และสมการของ slope ของการโก่งตัวของเสาจะอยู่ในรูป

$$\frac{dv}{dx} = C_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - C_2\sqrt{\frac{P}{EI}}\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

ค่าคงที่ C_1 และ C_2 จะหาได้โดยใช้ boundary conditions ของเสาที่ตำแหน่ง $x = 0$ ดังนั้น

ที่ตำแหน่ง $x = 0$, $v = 0$,

$$C_2 = -\delta$$

ที่ตำแหน่ง $x = 0$, $\frac{dv}{dx} = 0$,

$$C_1 = 0$$

เมื่อแทนค่าคงที่ C_1 และ C_2 ลงในสมการของการโก่งตัวของเสา เราจะได้

$$v = \delta\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)\right] \tag{13-8}$$

จากสมการที่ 13-8 และ boundary conditions ของเสา เราจะได้ว่า

ที่ตำแหน่ง $x = L$, $v = \delta$ ดังนั้น

$$\delta\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

ซึ่งการที่ $\delta\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$ จะเป็นไปได้สองกรณีคือ

1. เมื่อเทอม $\delta = 0$ และ $\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) \neq 0$
2. เมื่อเทอม $\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$ และ $\delta \neq 0$

โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ในลักษณะเช่นเดียวกับที่ได้กล่าวไปใน section ที่แล้ว เราจะเห็นได้ว่า คำตอบที่ได้จากกรณีที่ 1 จะเป็นคำตอบที่ไม่มีความสำคัญ (trivial solution) เนื่องจากว่าเสาจะไม่มีการโก่งตัวเกิดขึ้นเลยไม่ว่าค่าของแรง P จะมีค่าเท่าใดก็ตาม ดังนั้น คำตอบที่แท้จริงคือเมื่อ

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = \frac{n\pi}{2}$$

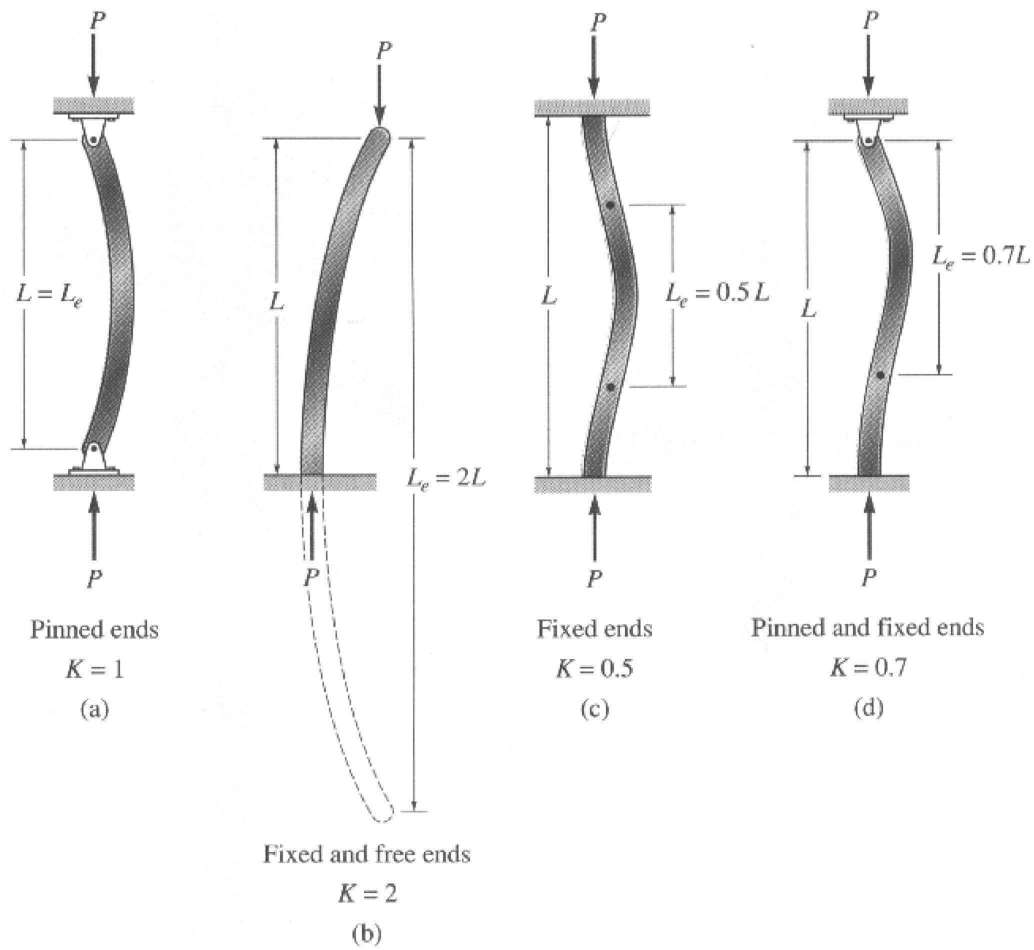
เนื่องจากแรงกดอัดในแนวแกนที่มีค่าน้อยที่สุดของเสาจะเกิดขึ้นเมื่อ $n = 1$ ดังนั้น

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \tag{13-9}$$

โดยการเปรียบเทียบสมการที่ 13-9 กับสมการของ Euler (สมการที่ 13-5) เราจะเห็นว่า ค่าแรงวิกฤติของเสาในกรณีนี้มีค่าน้อยกว่าค่าแรงวิกฤติของเสาที่มีการรองรับแบบ pined-pined ถึงสี่เท่า

Effective Lengths

ตามที่ได้กล่าวไปแล้ว ในการหาสมการของ Euler เราสมมุติให้ปลายของเสาทั้งสองด้านถูกยึดโดยหมุด โดยที่ความยาว L ของเสาจะเป็นระยะห่างระหว่างจุดที่มีโมเมนต์เป็นศูนย์บนเสา ถ้าเสามีการรองรับในลักษณะอื่นๆ แล้ว เราก็ยังสามารถใช้สมการของ Euler ในการหาแรงวิกฤติของเสาได้ โดยการให้ L เป็นความยาวระหว่างจุดดัดกลับ (inflection points) ที่เกิดขึ้นบนเสา ซึ่งเราจะเรียกความยาวของเสานี้ว่า ความยาวประสิทธิผล L_e (effective length) ของเสา



รูปที่ 13-8

พิจารณารูปที่ 13-8 เราจะเห็นได้จากรูปร่างการโก่งตัวของเสาว่า

1. สำหรับเสาที่ถูกยึดโดยหมุดทั้งสองปลาย ดังที่แสดงในรูปที่ 13-8a $L_e = L$
2. ในกรณีที่เสามีปลายหนึ่งถูกยึดแน่นและอีกปลายหนึ่งเป็นอิสระ ดังที่แสดงในรูปที่ 13-8b $L_e = 2L$
3. ในกรณีที่เสาถูกยึดแน่นทั้งสองปลาย ดังที่แสดงในรูปที่ 13-8c $L_e = 0.5L$
4. สำหรับเสาที่ถูกยึดแน่นปลายหนึ่งและอีกปลายหนึ่งเป็นหมุด $L_e = 0.7L$

ดังนั้น L_e จะขึ้นอยู่กับความต้านทานต่อการหมุนที่จุดรองรับและความต้านทานต่อการเคลื่อนที่ทางด้านข้างของเสา และเราจะเขียนสมการของความยาวประสิทธิผลได้เป็น

$$L_e = KL \tag{13-10}$$

โดยที่ K เป็น effective length factor และ L เป็นความยาวระหว่างจุดรองรับของเสา ดังนั้น สมการของ Euler จะอยู่ในรูป

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{13-11}$$

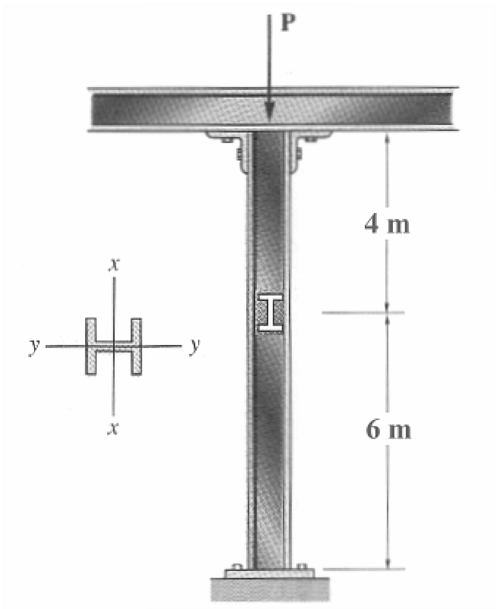
และหน่วยแรงวิกฤติจะอยู่ในรูป

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \tag{13-12}$$

โดยที่ KL/r เป็นอัตราส่วนความชะลูดประสิทธิผล (effective slenderness ratio) ของเสา

ตัวอย่างที่ 13-3

เสาเหล็ก A36 มีหน้าตัด $W150\times 22\,\mathrm{kg/m}$ ($A = 2.86(10^{-3})\,\mathrm{m}^2$, $I_x = 12.1(10^{-6})\,\mathrm{m}^4$, $I_y = 3.87(10^{-6})\,\mathrm{m}^4$) มีความยาว $L = 10\,\mathrm{m}$ ถูกรองรับแบบยึดแน่นที่ปลายด้านล่างและถูกรองรับโดยหมุดที่ปลายด้านบน ดังที่แสดงในรูปที่ EX 13-3 ถ้าเสาถูกค้ำยันในแนวแกน $x-x$ ที่ระยะ $6\,\mathrm{m}$ จากพื้น จงหากำลังรับแรงกดอัดสูงสุดของเสา



รูปที่ Ex 13-3

Radius of gyration ของเสารอบแกน $x-x$ และแกน $y-y$ จะมีค่าเท่ากับ

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{12.1(10^{-6})}{2.86(10^{-3})}} = 0.06504\,\mathrm{m}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{3.87(10^{-6})}{2.86(10^{-3})}} = 0.03679\,\mathrm{m}$$

จากรูป เราจะได้ว่า ช่วงของเสาความยาว $10\,\mathrm{m}$ ซึ่งถูกรองรับแบบ pinned-fixed ในการต้านทานต่อการโก่งเดาะรอบแกน $x-x$ ดังนั้น อัตราส่วนความชลูดประสิทธิผล (effective slenderness ratio) ของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_x = \frac{0.7(10)}{0.06504} = 107.6$$

ช่วงของเสาความยาว $6\,\mathrm{m}$ ซึ่งถูกรองรับแบบ pinned-fixed ในการต้านทานต่อการโก่งเดาะรอบแกน $y-y$ ดังนั้น อัตราส่วนความชลูดประสิทธิผล (effective slenderness ratio) ของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{0.7(6)}{0.03679} = 114.2$$

ช่วงของเสาความยาว $4\,\mathrm{m}$ ซึ่งถูกรองรับแบบ pinned-pinned ในการต้านทานต่อการโก่งเดาะรอบแกน $y-y$ ดังนั้น อัตราส่วนความชลูดประสิทธิผล (effective slenderness ratio) ของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{1.0(4)}{0.03679} = 108.7$$

เนื่องจากอัตราส่วนความชลูดประสิทธิผลมีค่าสูงสุด 114.2 ดังนั้น การโก่งเดาะของเสาจะเกิดรอบแกน $y-y$ ในช่วงของเสาที่มีความยาว $6\,\mathrm{m}$ และหน่วยแรงกดอัดสูงสุดของเสาจะมีค่าเท่ากับ

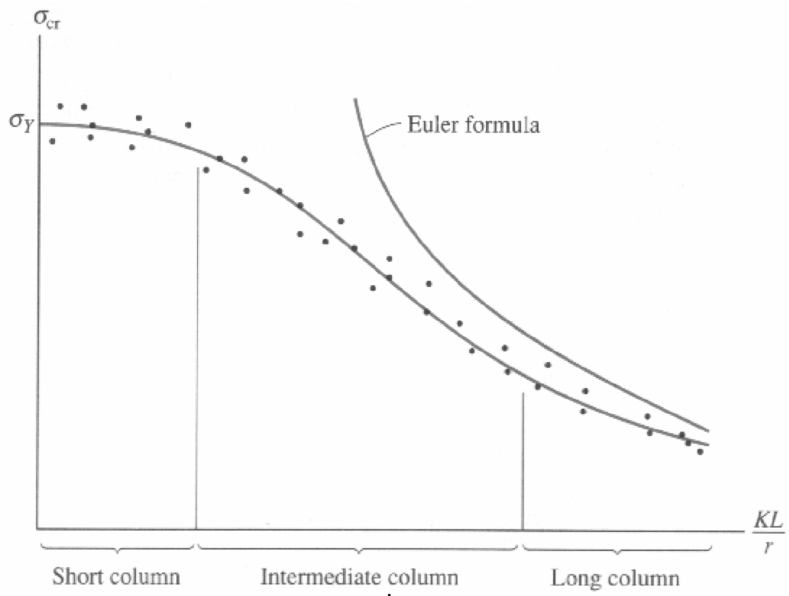
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)_y^2} = \frac{\pi^2 (200)10^9}{(114.2)^2} = 151.4\,\mathrm{MPa}$$

ซึ่งมีค่าน้อยกว่า yielding stress ของเหล็ก A36 $\sigma_y = 250\,\mathrm{MPa}$ ดังนั้น การโก่งเดาะจะเกิดก่อนการวิบัติของวัสดุและกำลังรับแรงกดอัดสูงสุดของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$P_{cr} = \sigma_{cr} A = 151.4(10^6)2.86(10^{-3}) = 433\,\mathrm{kN}$$ Ans.

13.4 การออกแบบเสาที่ถูกกระทำโดยแรงร่วมศูนย์ (Design of Column for Concentric Loading)

สมการของ Euler เป็นสมการที่ขึ้นอยู่กับสมมุติฐานต่างๆ หลายข้อดังที่ได้กล่าวไปแล้ว ซึ่งเสาที่อยู่ในสภาพความเป็นจริงจะมีลักษณะที่แตกต่างจากสมมุติฐานดังกล่าว จากการทดสอบเสาที่มีค่าอัตราส่วนความชะลูดต่างๆ พบว่า ข้อมูลที่ได้จากการทดสอบมีค่าต่ำกว่าทฤษฎีและมีการกระจายที่สูงมาก ดังที่แสดงในรูปที่ 13-9 ทั้งนี้เนื่องมาจากสาเหตุหลายประการเช่น แรงกดอัดอาจจะไม่ตรงจุด centroid ของเสา, ขนาดของเสาและวัสดุมีความไม่สมบูรณ์, หน่วยแรงคงค้าง (residual stresses), และการยึดรั้งปลายของเสา เป็นต้น ดังนั้น สมการที่ใช้ในการออกแบบเสาจึงเป็นสมการที่ได้มาจากการทดสอบเสา



รูปที่ 13-9

Steel Columns

จากการทดสอบพบว่า พฤติกรรมการวิบัติของเสาเหล็กจะถูกแบ่งออกตามอัตราส่วนความชลูดของเสาได้เป็น 3 แบบ ดังที่แสดงในรูปที่ 13-9 คือ เสายาว (long column), เสาสั้น (short column), และ intermediate column โดยที่

เสายาวเป็นเสาที่วิบัติแบบโก่งเดาะทางด้านข้าง (lateral buckling) ในขณะที่หน่วยแรงกดอัดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของเสามีค่าน้อยกว่า proportional limit ตลอดหน้าตัดของเสา การวิบัติในลักษณะนี้จะถูกเรียกว่า elastic buckling

เสาสั้นเป็นเสาที่เกิดการวิบัติเมื่อหน่วยแรงกดอัดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดของเสามีค่าเท่ากับ yielding stress ตลอดหน้าตัดของเสาและไม่มีการโก่งเดาะเกิดขึ้น ในทางปฏิบัติแล้ว เราแทบจะไม่เห็นเสาชนิดนี้เลยเนื่องจากเป็นเสาที่สั้นเกินกว่าจะนำมาใช้งานในโครงสร้างได้จริง

Intermediate column เป็นเสาที่เกิดการวิบัติเมื่อหน่วยแรงกดอัดที่เกิดขึ้นบนบางส่วนของหน้าตัดของเสามีค่าเท่ากับ yielding stress ดังนั้น เสาชนิดนี้จะวิบัติโดยการ yielding และโก่งเดาะในเวลาเดียวกัน การวิบัติในลักษณะนี้จะถูกเรียกว่า inelastic buckling

ข้อกำหนดการออกแบบโดยใช้หน่วยแรงที่ยอมให้ (ASD specification) ของ American Institute of Steel Construction (AISC) ได้แบ่งสมการในการออกแบบเสาเหล็กออกเป็น 2 ช่วงคือ ช่วง elastic และช่วง inelastic ดังที่แสดงในรูปที่ 13-10 โดย ASD specification ได้กำหนดให้ค่าอัตราส่วนความชะลูดที่เสามีพฤติกรรมเปลี่ยนจาก elastic เป็น inelastic หรือ $(KL/r)_c$ จะหาได้โดยสมมุติให้ residual stresses ที่เกิดขึ้นในเสาเหล็กมีค่าเฉลี่ยเท่ากับครึ่งหนึ่งของ

yielding stress ของเหล็ก ดังนั้น ถ้าหน่วยแรงกดอัดที่คำนวณได้จากสมการของ Euler มีค่ามากกว่าค่าส่วนที่เหลืออยู่ของกำลังของเหล็กหรือ $\sigma_y / 2$ แล้ว ผลรวมของค่าหน่วยแรงกดอัดทั้งหมดที่เกิดขึ้นพร้อมกันในเสาจะมีค่ามากกว่า σ_y และจะทำให้สมการของ Euler ใช้ไม่ได้ ดังนั้น เราจะได้

$$\frac{\sigma_y}{2} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}$$

$$(KL/r)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \tag{13-13}$$

ในช่วง elastic ซึ่งมีค่า $(KL/r)_c < KL/r < 200$ สมการที่ใช้ในการออกแบบเสาจะเป็นสมการของ Euler ที่ถูกหารด้วยส่วนปลอดภัย (factor of safety) เท่ากับ 23/12 หรือ

$$\sigma_{allow} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2} \tag{13-14}$$

ในช่วง inelastic ซึ่งมีค่า $0 < \frac{KL}{r} < \left(\frac{KL}{r}\right)_c$ สมการที่จะใช้ในการออกแบบเสาจะอยู่ในรูปสมการพาราโบลา

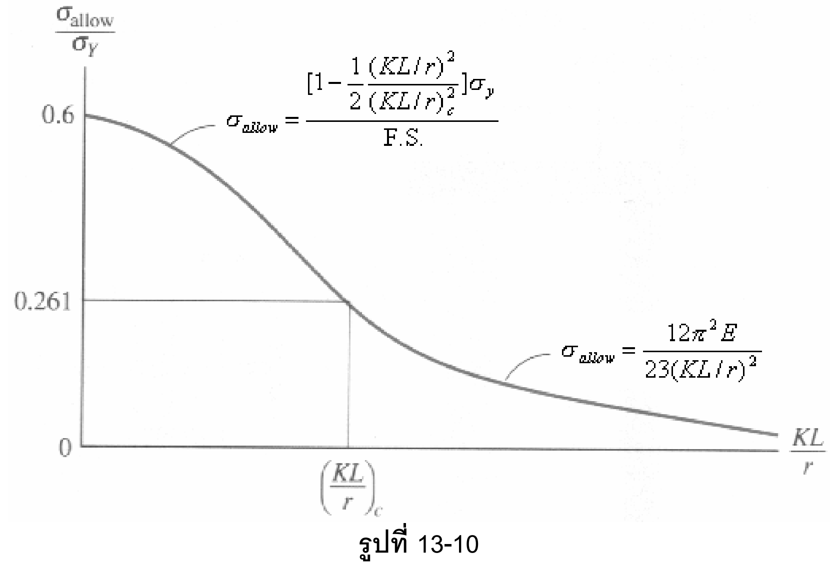
$$\sigma_{allow} = \frac{[1 - \frac{1}{2}\frac{(KL/r)^2}{(KL/r)_c^2}]\sigma_y}{\text{F.S.}} \tag{13-15}$$

เนื่องจากค่าที่ได้จากสมการนี้ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนความชะลูดของเสา โดยที่สมการนี้จะให้ค่าที่แน่นอนมากขึ้นเมื่ออัตราส่วนความชะลูดของเสามีค่าน้อยลง ดังนั้น ASD specification จึงกำหนดให้สมการของส่วนปลอดภัยอยู่ในรูป

$$\text{F.S.} = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(KL/r)}{(KL/r)_c} - \frac{1}{8}\frac{(KL/r)^3}{(KL/r)_c^3} \tag{13-16}$$

จากสมการ เราจะเห็นว่า F.S. = 5/3 ≈ 1.67 ที่ $KL/r = 0$ หรือเมื่อเสามีความยาวเป็นศูนย์ และ F.S. = 23/12 ≈ 1.92 ที่ $KL/r = (KL/r)_c$ หรือเมื่อเสามีความยาวเท่ากับเสายาว

เมื่อนำสมการทั้งสองมาเขียนกราฟ เราจะได้ column design curve ของเสาเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ 3-10



รูปที่ 13-10

Aluminum Columns

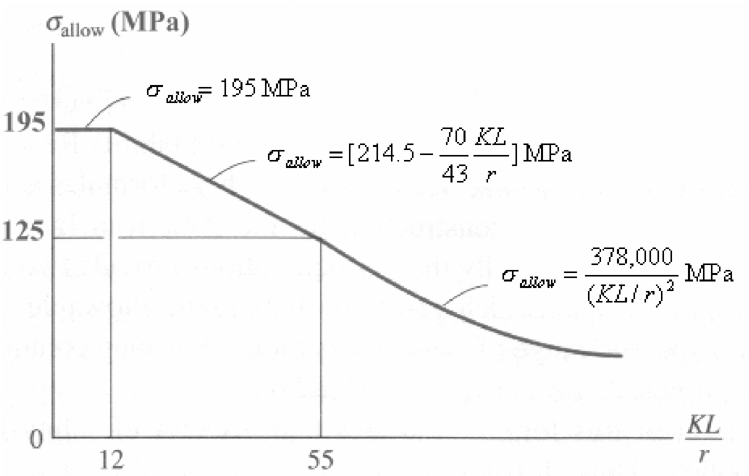
สมการที่ใช้ในการออกแบบเสา aluminum ได้ถูกกำหนดไว้ใน Specifications for the Aluminum Association ซึ่งประกอบด้วยสมการสามสมการขึ้นอยู่กับอัตราส่วนความชะลูดของเสา และเนื่องจาก aluminum มีคุณสมบัติที่แตกต่างกันตามชนิดของ aluminum ดังนั้น สมการที่ใช้ก็จะขึ้นอยู่กับชนิดของ aluminum ด้วย ยกตัวอย่างเช่น aluminum alloy 2014-T6 ซึ่งมักจะใช้ในการก่อสร้างจะมีสมการที่ใช้ในการออกแบบอยู่ในรูป

$$\sigma_{allow} = 195\,\text{MPa} \qquad 0 \le \frac{KL}{r} \le 12 \qquad (13\text{-}17)$$

$$\sigma_{allow} = [214.5 - \frac{70}{43}\frac{KL}{r}]\,\text{MPa} \qquad 12 < \frac{KL}{r} < 55 \qquad (13\text{-}18)$$

$$\sigma_{allow} = \frac{378{,}000}{(KL/r)^2}\,\text{MPa} \qquad 55 \le \frac{KL}{r} \qquad (13\text{-}19)$$

เมื่อเรานำสมการที่ 13-17 ถึง 13-19 มาเขียนกราฟ เราจะได้ column design curve ของเสา aluminum alloy 2014-T6 ดังที่แสดงในรูปที่ 13-11 ขอให้สังเกตด้วยว่า สมการที่ 13-19 จะอยู่ในรูปของสมการของ Euler



รูปที่ 13-11

Timber Columns

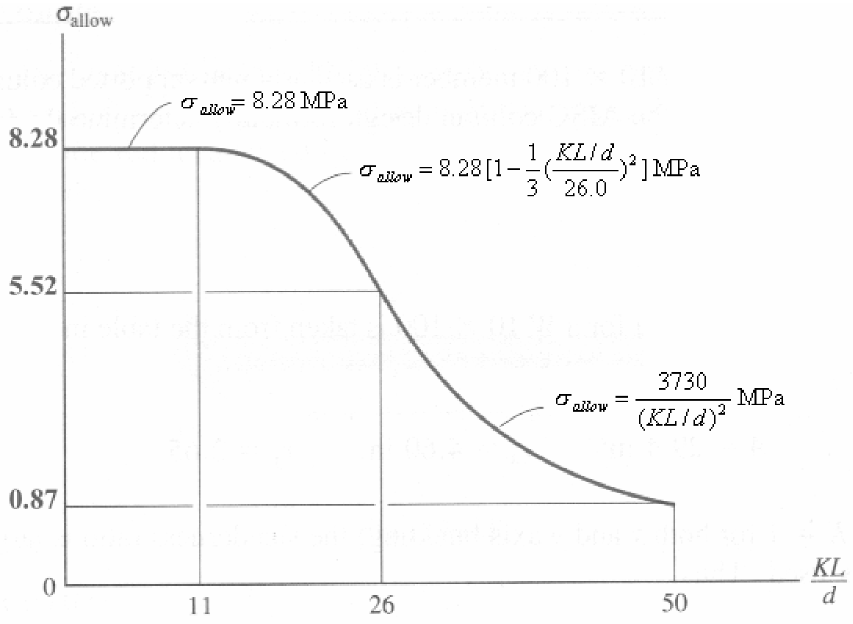
เสาไม้มักจะถูกออกแบบโดยใช้สมการที่ถูกกำหนดขึ้นมาโดย National Forest Products Association (NFPA) ซึ่ง NFPA ได้แบ่งสมการดังกล่าวออกเป็นสามสมการสำหรับเสาสั้น, intermediate column, และเสายาวดังต่อไปนี้

$$\sigma_{allow} = 8.28\,\text{MPa} \qquad 0 \le \frac{KL}{d} \le 11 \qquad (13\text{-}20)$$

$$\sigma_{allow} = 8.28[1 - \frac{1}{3}(\frac{KL/d}{26.0})^2]\,\text{MPa} \qquad 11 < \frac{KL}{d} < 26 \qquad (13\text{-}21)$$

$$\sigma_{allow} = \frac{3730}{(KL/d)^2}\,\text{MPa} \qquad 26 < \frac{KL}{d} \le 50 \qquad (13\text{-}22)$$

สมการที่ 13-20 ถึง 13-22 นี้เป็นสมการที่ใช้ในการออกแบบเสาไม้ที่มีหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีหน้าตัด $b \text{ X } d$ เมื่อ $d \le b$ และมีค่า modulus of elasticity $E_w = 12.5\,\text{GPa}$ ขอให้สังเกตด้วยว่า สมการที่ 13-22 เป็นสมการของ Euler ซึ่งมีส่วนความปลอดภัย $\text{F.S.} = 3.0$


σ_{allow}
$\sigma_{allow} = 8.28$ MPa
8.28
$\sigma_{allow} = 8.28[1-\frac{1}{3}(\frac{KL/d}{26.0})^2]$ MPa
5.52
$\sigma_{allow} = \frac{3730}{(KL/d)^2}$ MPa
0.87
0
11
26
50
$\frac{KL}{d}$

รูปที่ 13-12

ตัวอย่างที่ 13-4

จงหากำลังรับแรงกดอัดสูงสุดที่ยอมให้ของเสาในตัวอย่างที่ 13-3 โดยใช้สมการการออกแบบของ AISC

จากตัวอย่างที่ 13-3 เราทราบมาแล้วว่า เสาเหล็ก A36 ดังกล่าวมีพื้นที่หน้าตัด $A = 2.86(10^{-3})\,\mathrm{m}^2$ และ moment of inertia $I_x = 12.1(10^{-6})\,\mathrm{m}^4$, $I_y = 3.87(10^{-6})\,\mathrm{m}^4$ นอกจากนั้นแล้ว เสาจะเกิดการโก่งเดาะรอบแกน $y-y$ ในช่วงที่เสามีความยาว $6\,\mathrm{m}$ และอัตราส่วนความชลูดประสิทธิผล (effective slenderness ratio) ของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{0.7(6)}{0.03679} = 114.2$$

ค่าอัตราส่วนความชลูดวิกฤติที่แบ่งพฤติกรรมของเสาแบบ inelastic ออกจากพฤติกรรมของเสาแบบ elastic จะหาได้จากสมการ

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(200)10^9}{250(10^6)}} = 125.7$$

เนื่องจาก $0 < \dfrac{KL}{r} < \left(\dfrac{KL}{r}\right)_c$ ดังนั้น สมการที่จะใช้ในการออกแบบเสาจะอยู่ในรูป

$$\sigma_{allow} = \frac{[1 - \frac{1}{2}\frac{(KL/r)^2}{(KL/r)_c^2}]\sigma_y}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(KL/r)}{(KL/r)_c} - \frac{1}{8}\frac{(KL/r)^3}{(KL/r)_c^3}}$$

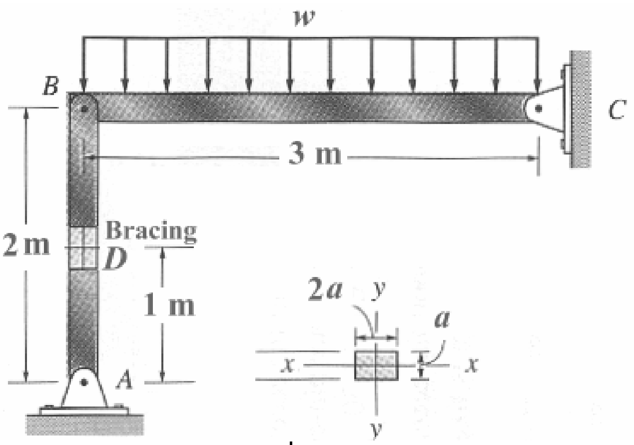
$$\sigma_{allow} = \frac{[1 - \frac{1}{2}\frac{(114.2)^2}{(125.7)^2}]250}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(114.2)}{(125.7)} - \frac{1}{8}\frac{(114.2)^3}{(125.7)^3}} = 76.7\,\mathrm{MPa}$$

และกำลังรับแรงกดอัดสูงสุดที่ยอมให้ของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$P_{allow} = \sigma_{allow} A = 76.7(10^6)2.86(10^{-3}) = 219\,\mathrm{kN}$$ <u>Ans.</u>

ตัวอย่างที่ 13-5

จงทำการออกแบบเสาไม้ AB ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 13-5 ซึ่งถูกค้ำยันที่กึ่งกลางความสูงของเสาในแนวแกน $y-y$ โดยใช้สมการของ National Forest Products Association (NFPA) กำหนดให้ $w = 8\,\text{kN/m}$



รูปที่ Ex 13-5

จากแผนภาพ free-body diagram ของคาน BC และสมการความสมดุลของ moment รอบจุด C เราจะหาแรงปฏิกิริยาของคานที่จุด B ซึ่งเป็นแรงกดอัดในแนวแกนของเสาได้เท่ากับ

$$P = \frac{wL}{2} = \frac{8(3)}{2} = 12\,\text{kN}$$

Radius of gyration ของเสารอบแกน $x-x$ และแกน $y-y$ จะมีค่าเท่ากับ

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{2a(a)^3}{12(a)2a}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{a(2a)^3}{12(a)2a}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

จากรูป เราจะได้ว่า ช่วงของเสาความยาว $2\,\text{m}$ ซึ่งถูกรองรับแบบ pinned-pinned ในการต้านทานต่อการโก่งเดาะรอบแกน $y-y$ ดังนั้น อัตราส่วนความชลูดประสิทธิผล (effective slenderness ratio) ของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_y = \frac{1.0(2)}{a/\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{a}$$

ช่วงของเสาความยาว $1\,\text{m}$ ซึ่งถูกรองรับแบบ pinned-pinned ในการต้านทานต่อการโก่งเดาะรอบแกน $x-x$ ดังนั้น อัตราส่วนความชลูดประสิทธิผล (effective slenderness ratio) ของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_x = \frac{1.0(1)}{a/2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{a}$$

ซึ่งเราจะได้ว่า อัตราส่วนความชลูดประสิทธิผลของเสารอบแกน $x-x$ และรอบแกน $y-y$ มีค่าเท่ากันและเสาจะเกิดการโก่งเดาะรอบแกน $x-x$ และ รอบแกน $y-y$ พร้อมกัน

เนื่องจากเราไม่ทราบค่าอัตราส่วนความชลูดของเสา ดังนั้น เราจะเริ่มโดยการออกแบบเสาเป็นเสาสั้นโดยสมมุติให้ $0 \le \frac{KL}{d} \le 11$ โดยที่ d เป็นขนาดความกว้างที่น้อยที่สุดของเสา ซึ่งมีค่าเท่ากับ a

$$\frac{P}{A} = 8.28\,\text{MPa}$$

$$\frac{12000}{a(2a)} = 8.28(10^6)$$

$$a = 0.0269 \text{ m}$$

ตรวจสอบค่าอัตราส่วนความชลูดของเสา

$$\left(\frac{KL}{d}\right) = \frac{1.0(2)}{0.0269} = 74.3 > 11$$

เนื่องจากค่าความชลูดที่ได้มีค่ามากกว่า 11 มาก ดังนั้น เราจะทำการออกแบบเสาโดยสมมุติให้เสาเป็นเสายาว โดยที่ $26 < \dfrac{KL}{d} \le 50$

$$\frac{P}{A} = \frac{3730}{(KL/d)^2} \text{ MPa}$$

$$\frac{12000}{a(2a)} = \frac{3730(10^6)}{(1.0(2)/a)^2}$$

$$a = 0.0424 \text{ m}$$

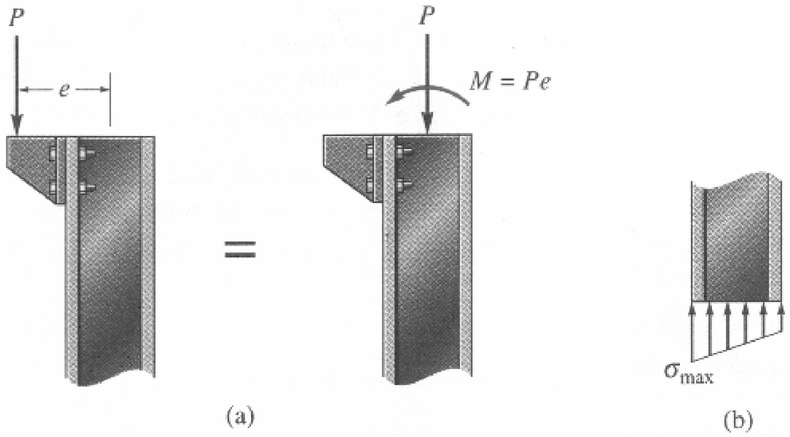
ตรวจสอบค่าอัตราส่วนความชลูดของเสา

$$\left(\frac{KL}{d}\right) = \frac{1.0(2)}{0.0424} = 47.2$$

ดังนั้น ขนาด a ของหน้าตัดเสาควรมีค่าอย่างน้อย 43 mm <u>Ans.</u>

13.5 การออกแบบเสาที่ถูกกระทำโดยแรงเยื้องศูนย์ (Design of Column for Eccentric Loading)

ในบางกรณี เสาจะถูกกระทำโดยแรงกดอัดในแนวแกน P ซึ่งกระทำเยื้องศูนย์ e จากจุด centroid ของหน้าตัดของเสา ดังที่แสดงในรูปที่ 13-13a ซึ่งจะทำให้เกิดแรงกดอัดในแนวแกน P และโมเมนต์ดัด $M = Pe$ กระทำต่อหน้าตัดเสาในเวลาเดียวกัน โดยทั่วไปแล้ว เสาที่ถูกกระทำโดยแรงเยื้องศูนย์นี้จะถูกออกแบบได้สองวิธีดังนี้



รูปที่ 13-13

1. Use of Available Column Formulas

วิธีการนี้เป็นวิธีการที่ง่ายและใช้ได้ดีกับเสาสั้นและ intermediate column โดยที่

1. ใช้สมการ axial stress $\sigma = P/A$ และสมการ flexural formula $\sigma = Mc/I$ หาการกระจายของหน่วยแรงบนหน้าตัดของเสา
2. จากหลักการ superposition (principle of superposition) เราจะได้ว่า การกระจายของหน่วยแรงกดอัดเนื่องจากแรงกดอัดในแนวแกนและโมเมนต์ดัดจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 13-13b และค่าสูงสุดของหน่วยแรงกดอัดจะหาได้จากสมการ

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \tag{13-23}$$

3. กำหนดให้หน่วยแรง $\sigma_{\max}$ ที่หาได้ในข้อที่ 2 มีการกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดหน้าตัดของเสา
4. ทำการออกแบบเสาโดยให้หน่วยแรง $\sigma_{\max}$ นี้มีค่าน้อยกว่าหน่วยแรงที่ยอมให้ σ_{allow} หรือ

$$\sigma_{\max} < \sigma_{allow}$$

เราควรที่จะทราบไว้ด้วยว่า ค่าหน่วยแรง σ_{allow} ในกรณีนี้จะหามาโดยใช้ค่า slenderness ratio ที่มีค่ามากสุดของเสา โดยจะไม่พิจารณาว่าเสาถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัดในทิศทางใด และถ้าเราพบว่าค่าหน่วยแรง $\sigma_{\max} > \sigma_{allow}$ แล้ว เราจะต้องเพิ่มพื้นที่หน้าตัดของเสาให้ใหญ่ขึ้น แล้วทำการคำนวณและเปรียบเทียบค่าหน่วยแรง $\sigma_{\max}$ และ σ_{allow} จนได้ค่าหน่วยแรง $\sigma_{\max} < \sigma_{allow}$

2. Interaction Formula

ในวิธีการนี้ เราจะหาพื้นที่หน้าตัดของเสาที่จะใช้ในการรองรับแรงกดอัดในแนวแกนและโมเมนต์ดัดให้เป็นอิสระต่อกัน จากนั้น เราจะหาค่าของพื้นที่หน้าตัดของเสาทั้งหมดได้จากผลรวมของพื้นที่หน้าตัดของเสาที่จะใช้ในการรองรับแรงกดอัดในแนวแกนและพื้นที่หน้าตัดของเสาที่จะใช้ในการรองรับโมเมนต์ดัด

ถ้าให้หน่วยแรงกดอัดที่ยอมให้ (allowable compressive stress) ของเสาเป็น $(\sigma_a)_{allow}$ แล้ว พื้นที่หน้าตัดของเสาใช้ในการรองรับแรงกดอัดในแนวแกน P จะหาได้จากสมการ

$$A_a = \frac{P}{(\sigma_a)_{allow}}$$

ถ้าให้หน่วยแรงกดอัดที่ยอมให้ (allowable bending stress) ของเสาเป็น $(\sigma_b)_{allow}$ แล้ว พื้นที่หน้าตัดของเสาที่ใช้ในการรองรับโมเมนต์ดัด M จะหาได้จากสมการ

$$I = A_b r^2 = \frac{Mc}{(\sigma_b)_{allow}}$$

$$A_b = \frac{Mc}{r^2 (\sigma_b)_{allow}}$$

ดังนั้น พื้นที่หน้าตัดทั้งหมดของเสาใช้ในการรองรับแรงกดอัดในแนวแกน P และโมเมนต์ดัด M จะอยู่ในรูป

$$A_a + A_b \le A$$

$$\frac{P}{(\sigma_a)_{allow}} + \frac{Mc}{r^2 (\sigma_b)_{allow}} \le A$$

$$\frac{P/A}{(\sigma_a)_{allow}} + \frac{Mc/Ar^2}{(\sigma_b)_{allow}} \le 1$$

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{allow}} + \frac{\sigma_b}{(\sigma_b)_{allow}} \le 1 \qquad (13\text{-}24)$$

เมื่อ

$\sigma_a = \dfrac{P}{A} =$ axial stress เนื่องจากแรงในแนวแกน

$\sigma_b = \dfrac{Mc}{I} =$ bending stress เนื่องจากโมเมนต์ดัด

$(\sigma_a)_{allow} =$ allowable axial stress ที่ระบุอยู่ในมาตรฐานการออกแบบดังที่ได้กล่าวไปแล้ว

$(\sigma_b)_{allow} =$ allowable bending stress ที่ระบุอยู่ในมาตรฐานการออกแบบดังที่ได้กล่าวไปแล้ว

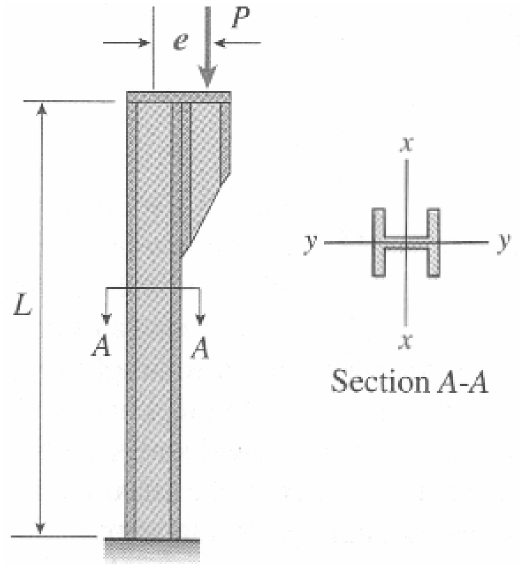
สมการที่ 13-24 จะถูกเรียกว่า interaction formula เนื่องจากว่าแต่ละเทอมในสมการแสดงถึงผลของแรงกดอัดในแนวแกนและโมเมนต์ดัดที่กระทำร่วมกัน

ตัวอย่างที่ 13-6

กำหนดให้เสาเหล็ก A36 $W310 \times 67\ kg/m$ ดังที่แสดงในรูปที่ EX 13-6 มีคุณสมบัติของหน้าตัดเสาดังนี้ ความลึก $d = 0.306\ m$, $L = 3.5\ m$, $A = 8.53(10^{-3})\ m^2$ และ moment of inertia $I_x = 145(10^{-6})\ m^4$, $I_y = 20.7(10^{-6})\ m^4$ และเหล็ก A36 มี $E_{st} = 200\ GPa$, $\sigma_y = 250\ MPa$, $(\sigma_a)_{allow} = 125\ MPa$ และ $(\sigma_b)_{allow} = 150\ MPa$

a.) จงหาค่าของแรงกดอัดในแนวแกน P เมื่อ $e = 0.30\ m$ โดยใช้สมการของเสา

b.) จงหาค่าของแรงกดอัดในแนวแกน P เมื่อ $e = 0.80\ m$ โดยใช้ Interaction Formula



รูปที่ EX 13-6

a.) **หาค่าของแรงกดอัดในแนวแกน P เมื่อ $e = 0.30\ m$ โดยใช้สมการของเสา**

เนื่องจากเสาถูกรองรับแบบ fixed-free ดังนั้น $K = 2.0$ และค่าอัตราส่วนความชลูดสูงสุดของเสาจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{KL}{r} = \frac{2(3.5)}{\sqrt{\dfrac{20.7(10^{-6})}{8.53(10^{-3})}}} = 142.1$$

ค่าอัตราส่วนความชลูดวิกฤติที่แบ่งพฤติกรรมของเสาเหล็กแบบ inelastic ออกจากพฤติกรรมของเสาเหล็กแบบ elastic จะหาได้จากสมการ

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 (200)10^9}{250(10^6)}} = 125.7$$

เนื่องจาก $(KL/r)_c < KL/r < 200$ ดังนั้น เสาเป็นเสายาวและหน่วยแรงที่ยอมให้ของเสาเหล็กจะมีค่าเท่ากับ

$$\sigma_{allow} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2} = \frac{12\pi^2 (200)10^9}{23(142.1)^2} = 51.0\ MPa$$

ค่าของแรงกดอัดในแนวแกน P_2 จะหาได้โดยการกำหนดให้ค่า $\sigma_{\max}$ มีการกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดหน้าตัดของเสา โดยที่

$$\sigma_{\max} = \frac{P_2}{A} + \frac{(P_2 e)c}{I_x} \le \sigma_{allow}$$

$$\frac{P_2}{8.53(10^{-3})} + \frac{[P_2(0.3)][0.306/2]}{145(10^{-6})} = 51(10^6)$$

$$P_2 = \frac{51(10^6)}{433.785} = 117.6\,\text{kN}$$ Ans.

b.) **ค่าของแรงกดอัดในแนวแกน $\boldsymbol{P}$ เมื่อ $\boldsymbol{e = 0.80\,\mathrm{m}}$ โดยใช้** Interaction Formula

จากสมการ Interaction Formula เราจะได้ว่า

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{allow}} + \frac{\sigma_b}{(\sigma_b)_{allow}} \le 1$$

โดยที่

$$\sigma_a = \frac{P_2}{8.53(10^{-3})} = 117.23(10^{-6})P_2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \frac{[P_2(0.80)](0.306/2)}{145(10^{-6})} = 844.14(10^{-6})P_2 \text{ MPa}$$

ค่าอัตราส่วนความชลูดของเสารอบแกน $x - x$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{KL}{r} = \frac{2(3.5)}{\sqrt{\dfrac{145(10^{-6})}{8.53(10^{-3})}}} = 53.7$$

เนื่องจาก $0 < \frac{KL}{r} < \left(\frac{KL}{r}\right)_c$ ดังนั้น เสาเป็นเสาสั้นและสมการที่จะใช้ในการหาหน่วยแรงกดอัดที่ยอมให้ของเสาจะอยู่ในรูป

$$\sigma_{allow} = \frac{[1 - \frac{1}{2}\frac{(53.7)^2}{(125.7)^2}]250}{\frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(53.7)}{(125.7)} - \frac{1}{8}\frac{(53.7)^3}{(125.7)^3}} = 125.0\,\text{MPa}$$

ดังนั้น

$$\frac{117.23(10^{-6})P_2}{125} + \frac{844.14(10^{-6})P_2}{150} \le 1$$

$$P_2 = \frac{1}{6.566(10^{-6})} = 152.3\,\text{kN}$$

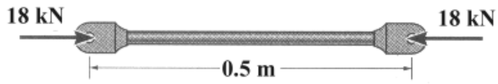
ตรวจสอบการใช้สมการ Interaction Formula

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{allow}} = \frac{117.23(10^{-6})152.3(10^3)}{125} = 0.143 < 0.15$$ O.K.

ดังนั้น ค่าของแรงกดอัดในแนวแกน P_2 มีค่าเท่ากับ $152.3\,\text{kN}$ Ans.

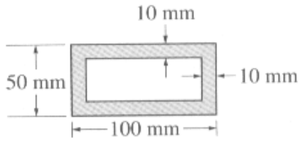
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 13

13-1 ชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลทำด้วยเหล็ก A36 ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-1 ถูกรองรับโดยหมุด (pin) ที่ปลายทั้งสอง และถูกกระทำโดยแรงกดอัดในแนวแกน $P = 18\,\mathrm{kN}$ จงหาขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลที่ไม่ก่อให้เกิดการโก่งเดาะ (buckling)



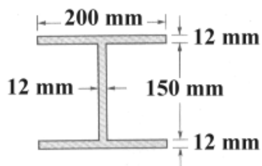
รูปที่ Prob. 13-1

13-2 กำหนดให้เสาเหล็ก A36 ยาว $5\,\mathrm{m}$ มีหน้าตัดดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-2 ถูกรองรับแบบยึดแน่นที่ปลายทั้งสองด้าน จงหาค่าแรงวิกฤติของเสา



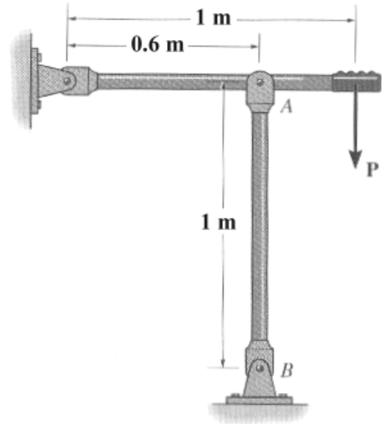
รูปที่ Prob. 13-2

13-3 กำหนดให้เสาเหล็ก A36 ยาว $5\,\mathrm{m}$ มีหน้าตัดดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-2 ถูกรองรับแบบยึดแน่นที่ปลายด้านหนึ่งและโดยหมุด (pin) ที่ปลายอีกด้านหนึ่ง จงหาค่าแรงวิกฤติของเสา



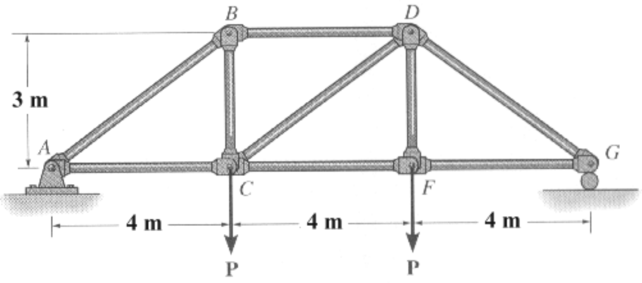
รูปที่ Prob. 13-3

13-4 จงหาค่าแรง P สูงสุดที่สามารถกระทำต่อเครื่องมือกล ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-4 ได้ โดยไม่ทำให้แท่งเหล็ก (A36) AB ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $31\,\mathrm{mm}$ เกิดการโก่งเดาะ (buckling)



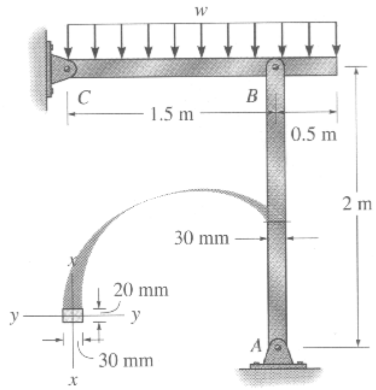
รูปที่ Prob. 13-4

13-5 ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-5 ถูกสมมุติให้เชื่อมต่อกันแบบหมุดทั้งสองปลาย ถ้าชิ้นส่วน BD เป็นท่อเหล็ก A36 กลวงมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก $50\,\mathrm{mm}$ และหนา $3.0\,\mathrm{mm}$ จงหาค่าของแรง P ที่สามารถกระทำต่อโครงข้อหมุนได้โดยที่ชิ้นส่วน BD ไม่เกิดการโก่งเดาะ ใช้ factor of safety เท่ากับ 2.0



รูปที่ Prob. 13-5

13-6 จงตรวจสอบว่าเสาเหล็กของ frame ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-6 สามารถรองรับน้ำหนักบรรทุกหรือไม่ เมื่อ factor of safety เท่ากับ 3.0 และ $E_{st} = 200\,\mathrm{GPa}$, $\sigma_Y = 360\,\mathrm{MPa}$



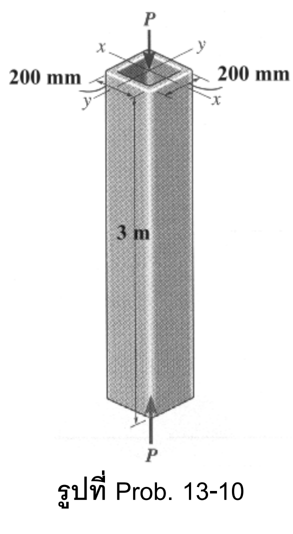
รูปที่ Prob. 13-6

13-7 จงหาความยาวสูงสุดของเสาเหล็ก $\mathrm{A36}$ หน้าตัด $\mathrm{W250 \times 18}$ ที่ถูกรองรับแบบยึดแน่นที่ปลายด้านหนึ่งและโดยหมุด (pin) ที่ปลายอีกด้านหนึ่งและถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน $125\,\mathrm{kN}$ โดยใช้สมการของ AISC

13.8 จงหาขนาดหน้าตัดที่เบาที่สุดของเสาเหล็ก $\mathrm{A36}$ ยาว $4.0\,\mathrm{m}$ ที่ถูกรองรับแบบหมุด (pin) ที่ปลายทั้งสองด้าน และถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน $200\,\mathrm{kN}$ โดยใช้สมการของ AISC

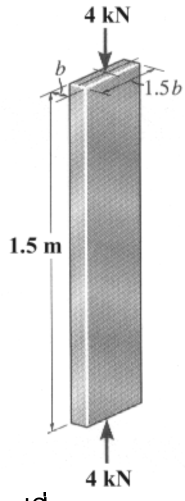
13.9 จงหาขนาดหน้าตัดที่เบาที่สุดของเสาเหล็ก $\mathrm{A36}$ ยาว $4.5\,\mathrm{m}$ ที่ถูกรองรับแบบยึดแน่น (fixed) ที่ปลายทั้งสองด้านและถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน $300\,\mathrm{kN}$ โดยใช้สมการของ AISC

13-10 จงหาค่าของแรง P ที่ยอมให้กระทำต่อท่อ aluminum alloy 2014-T6 หนา $12\,\mathrm{mm}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-10 ซึ่งถูกรองรับแบบหมุด (pin) ที่ปลายทั้งสองด้าน



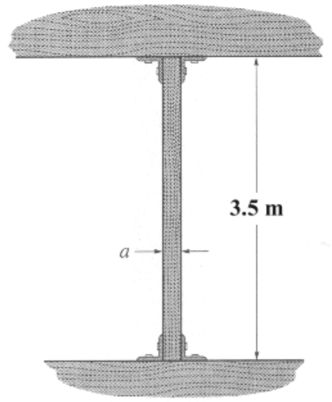
รูปที่ Prob. 13-10

13-11 จงหาออกแบบหาขนาดของแท่ง aluminum alloy 2014-T6 ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-11 ซึ่งถูกรองรับแบบหมุด (pin) ที่ปลายทั้งสองด้าน



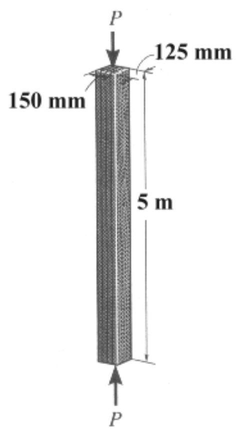
รูปที่ Prob. 13-11

13-12 จงหาออกแบบหาขนาดของเสาไม้หน้าตัดสี่เหลี่ยมด้านเท่า ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-12 ซึ่งแบบยึดแน่นที่ปลายด้านหนึ่งและโดยหมุด (pin) ที่ปลายอีกด้านหนึ่งและถูกกระทำโดยแรงขนาด $100\,\mathrm{kN}$



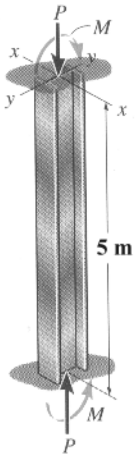
รูปที่ Prob. 13-12

13-13 เสาไม้ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-13 มีความยาว $5.0\,\mathrm{m}$ ถูกรองรับแบบหมุด (pin) ที่ปลายทั้งสองด้าน จงหาค่าของแรงในแนวแกนที่ยอมให้กระทำต่อเสา



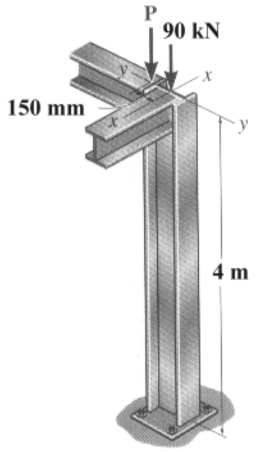
รูปที่ Prob. 13-13

13-14 เสาเหล็ก $\mathrm{A36}$ หน้าตัด $\mathrm{W200 \times 22}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-14 ถูกรองรับแบบยึดแน่นที่ปลายทั้งสองด้าน และถูกกระทำโดยโมเมนต์ $M = 20\,\mathrm{kN\text{-}m}$ จงหาค่าของแรง P ที่ยอมให้กระทำต่อเสา ถ้า $(\sigma_b)_{allow} = 165\,\mathrm{MPa}$



รูปที่ Prob. 13-14

13-15 เสาเหล็ก $\mathrm{A36}$ หน้าตัด $\mathrm{W250 \times 28}$ ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 13-15 ถูกรองรับแบบหมุด (pin) ที่ปลายทั้งสองด้าน จงหาค่าของแรงเยื้องศูนย์ P ที่ยอมให้กระทำต่อเสา



รูปที่ Prob. 13-15

หนังสืออ้างอิง

1. Hibberler, R.C., " Mechanics of materials," 3rd Ed., Prentice-Hall, New Jersey, NY, 1997
2. Gere, J.M., "Mechanics of materials, " 4th Ed., PWS Publishing, Boston, MA, 1997
3. Popov, E.P., " Engineering Mechanics of Solids, " International Ed., Prentice-Hall, New Jersey, NY, 1999
4. Dowling, N.E., " Mechanical Behavior of Materials, " 2nd Ed., Prentice-Hall, New Jersey, NY, 1999
5. "ศัพท์วิทยาการวิศวกรรมโยธา" คณะกรรมการวิชาการวิศวกรรมโยธา, วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย, 2540

ภาคผนวกที่ 1

คุณสมบัติทางกลของวัสดุชนิดต่างๆ ในทางวิศวกรรม

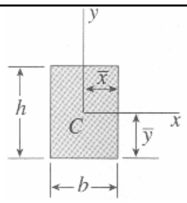
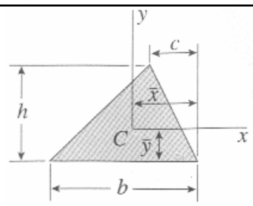
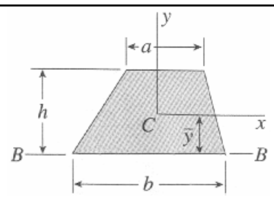
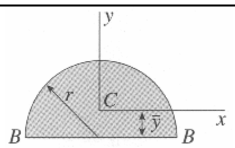
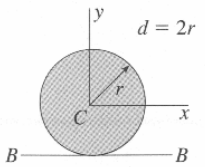
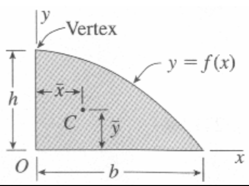
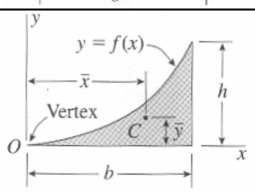
U.S. Custom Units

Material	γ	E	G	Yield Strength, σ_y			Ultimate Strength, σ_u				ν	α
Units	$\frac{lb}{in^3}$	Msi	Msi	ksi			ksi			%		$\frac{10^{-6}}{^{o}F}$
	Weight density	Modulus of elasticity	Shearing Modulus	Tens.	Comp.	Shear	Tens.	Comp.	Shear	Elongation in 2 in. specimen	Poisson's ratio	Coeff. of thermal expansion
Aluminum alloys												
2014-T6	0.101	10.6	3.9	60	60	25	68	68	42	10	0.35	12.8
6061-T6	0.098	10.0	3.7	37	37	19	42	42	27	12	0.35	13.1
Gray Cast iron												
ASTM 20	0.260	10	3.9	-	-	-	26	97	-	0.6	0.28	6.7
Concrete (comp.)												
Low strength	0.086	3.20	-	-	-	1.8	-	-	-	-	0.15	6.0
High strength	0.086	4.20	-	-	-	5.5	-	-	-	-	0.15	6.0
Brass	0.316	14.6	5.4	11.4	11.4	-	35	35	-	35	0.35	9.8
Bronze	0.319	15.0	5.6	50	50	-	95	95	-	20	0.34	9.6
Magnesium alloys	0.066	6.48	2.5	22	22	-	40	40	22	1	0.30	14.3
Plastics												
Nylon	0.030	0.3-0.5	-	-	-	-	6-12	-	-	20-100	0.40	40-80
Polyethylene	0.031	0.1-0.2	-	-	-	-	1-4	-	-	15-300	0.40	80-160
FRP												
30% glass	0.050	10.5	-	-	-	-	13	19	-	-	0.33	7.0
Rubber	0.033	0.1-0.6	0.03-0.2	0.2-1	-	-	1-3	-	-	95-800	0.45-0.5	70-110
Steel												
A36	0.284	29.0	11.0	36.0	36.0	-	58	58	-	30	0.32	6.5
Stainless 304	0.284	28.0	11.0	30.0	30.0	-	75	75	-	40	0.27	9.6
Wood (bending)												
Douglas Fir	0.017	1.75	-	5-8			8-12			-	-	-
Oak	0.021	1.70	-	6-9			8-14			-	-	-
Pine	0.019	1.90	-	6-9			8-14			-	-	-
Wood												
(comp // to grain)												
Douglas Fir	0.017	-	-	-	4-8	-	-	6-10	-	-	-	-
Oak	0.021	-	-	-	4-6	-	-	5-8	-	-	-	-
Pine	0.019	-	-	-	4-8	-	-	6-10	-	-	-	-

S.I. Units

Material	γ	E	G	Yield Strength, σ_y			Ultimate Strength, σ_u				ν	α
Units	$\frac{kN}{m^3}$	GPa	GPa	MPa			MPa			%		$\frac{10^{-6}}{^oC}$
	Weight density	Modulus of elasticity	Shearing Modulus	Tens.	Comp.	Shear	Tens.	Comp.	Shear	Elongation in 2 in. specimen	Poisson's ratio	Coeff. of thermal expansion
Aluminum alloys												
2014-T6	27.9	73.1	27	414	414	172	469	469	290	10	0.35	23
6061-T6	27.1	68.9	26	255	255	131	290	290	186	12	0.35	24
Gray Cast iron												
ASTM 20	71.9	67.0	27	-	-	-	179	669	-	0.6	0.28	12
Concrete (comp.)												
Low strength	23.8	22.1	-	-	-	12	-	-	-	-	0.15	11
High strength	23.8	29.0	-	-	-	38	-	-	-	-	0.15	11
Brass	87.4	101	37	70	70	-	241	241	-	35	0.35	18
Bronze	88.3	103	38	345	345	-	655	655	-	20	0.34	17
Magnesium alloys	18.3	44.7	18	152	152	-	276	276	152	1	0.30	26
Plastics												
Nylon	8.6-11	2.1-3.4	-	-	-	-	60	-	-	20-100	0.40	70-140
Polyethylene	9.4-14	0.7-1.4	-	-	-	-	7-28	-	-	15-300	0.40	140-290
FRP												
30% glass	14.5	72.4	-	-	-	-	90	131	-	-	0.33	7.0
Rubber	9-13	0.0007-0.004	0.0002-0.001	1-7	-	-	7-20	-	-	95-800	0.45-0.5	130-200
Steel												
A36	78.5	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0.32	12
Stainless 304	78.6	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0.27	17
Wood (bending)												
Douglas Fir	4.7-5.5	11-13	-	30-50			50-80			-	-	-
Oak	6.3-7.1	11-12	-	40-60			50-100			-	-	-
Pine	5.5-6.3	11-14	-	40-60			50-100			-	-	-
Wood (comp // to grain)												
Douglas Fir	4.7-5.5	-	-	-	30-50	-	-	40-70	-	-	-	-
Oak	6.3-7.1	-	-	-	30-40	-	-	30-50	-	-	-	-
Pine	5.5-6.3	-	-	-	30-50	-	-	40-70	-	-	-	-

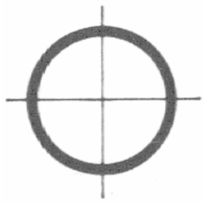
ภาคผนวกที่ 2
พื้นที่และ moment of inertia ของหน้าตัด

	Area	Moment of inertia
 Rectangular area	bh	$I_x = \frac{1}{12}bh^3$ $I_y = \frac{1}{12}hb^3$
 Triangular area	$\frac{1}{2}bh$	$I_x = \frac{1}{36}bh^3$
 Trapezoidal area	$\frac{1}{2}h(a+b)$	
 semicircle	$\frac{\pi r^2}{2}$	$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$
 Circular area	πr^2	$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$ $I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$
Semiparabolic area 	$\frac{2}{3}ab$	$I_x = \frac{16}{105}bh^3$ $I_y = \frac{2}{15}hb^3$
 Exparabolic area	$\frac{1}{3}ab$	$I_x = \frac{1}{21}bh^3$ $I_y = \frac{1}{5}hb^3$

ภาคผนวกที่ 3

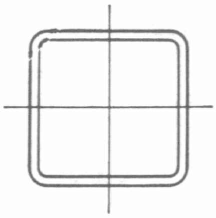
คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กมาตรฐาน

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กกลวงกลม



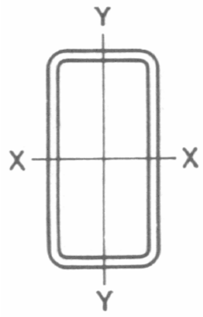
ชื่อขนาด	เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก (D) mm	ความหนา (t) mm	น้ำหนัก (w) kg/m	พื้นที่หน้าตัดขวาง (A) cm^2	Moment of Inertia $(I_x = I_y)$ cm^4	Section Modulus $(S_x = S_y)$ cm^3	Radius of Gyration $(r_x = r_y)$ cm
15	21.3	2.0	0.95	1.21	0.57	0.54	0.69
20	26.9	2.3	1.40	1.78	1.36	1.01	0.87
25	33.7	2.6	1.99	2.54	3.09	1.84	1.10
32	42.4	2.6	2.55	3.25	6.46	3.05	1.41
40	48.3	2.9	3.25	4.14	10.70	4.43	1.61
50	60.3	2.9	4.11	5.23	21.59	7.16	2.03
65	76.1	3.2	5.75	7.33	48.78	12.82	2.58
80	88.9	3.2	6.76	8.62	79.21	17.82	3.03
100	114.3	3.6	9.83	12.52	191.98	33.59	3.92
		4.5	12.19	15.52	234.32	41.00	3.89
125	139.7	4.0	13.39	17.05	392.86	56.24	4.80
		5.0	17.30	21.19	480.70	68.81	4.75
150	165.1	4.5	17.82	22.70	732.57	88.74	5.68
		6.0	25.05	30.00	950.68	115.16	5.45
175	193.7	5.0	23.27	29.64	1320.24	136.32	6.67
		6.0	27.77	35.38	1559.74	161.05	6.64
200	219.1	5.0	26.40	33.63	1928.04	176.00	7.57
		6.0	31.53	40.17	2281.96	208.30	7.54
225	244.5	6.0	35.29	44.96	3198.57	261.64	8.43
		8.0	46.66	59.44	4160.46	340.32	8.37

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กกลวงสี่เหลี่ยมจตุรัส



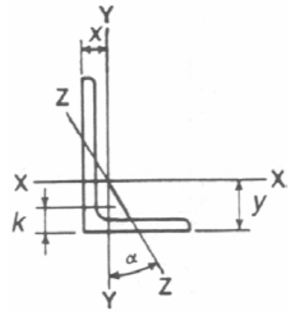
ชื่อขนาด	ความหนา (t) mm	น้ำหนัก (w) kg/m	พื้นที่หน้าตัด (A) cm^2	Moment of Inertia (I) cm^4	Section Modulus (S) cm^3	Radius of Gyration (r) cm
25×25	1.6	1.12	1.432	1.28	1.02	0.34
38×38	1.6	1.78	2.264	4.92	2.59	1.47
50×50	1.6	2.38	3.032	11.71	4.68	1.96
	2.3	3.34	4.252	15.86	6.34	1.93
60×60	1.6	2.88	3.672	20.68	6.89	2.37
	2.3	4.06	5.172	28.31	9.44	2.34
75×75	2.3	5.14	6.552	57.10	15.23	2.95
	3.2	7.01	8.927	75.53	20.14	2.91
90×90	2.3	6.23	7.932	100.79	22.40	3.56
	3.2	8.51	10.847	134.51	29.89	3.52
100×100	2.3	6.95	8.852	139.73	27.95	3.97
	3.2	9.52	12.127	187.28	37.46	3.93
125×125	3.2	12.03	15.327	375.64	60.10	4.95
	4.0	14.87	18.948	457.23	73.16	4.91
150×150	5.0	22.26	28.356	982.12	130.95	5.89
	6.0	26.40	33.633	1145.90	152.79	5.84
175×175	5.0	26.18	33.356	1590.86	181.81	6.91
	6.0	31.11	39.633	1864.02	213.03	6.86
200×200	6.0	36.82	45.633	2832.74	283.27	7.88
	8.0	46.94	59.793	3621.62	362.16	7.78
250×250	6.0	45.24	57.633	5671.99	453.76	9.92
	8.0	59.50	75.793	7315.63	585.25	9.82
300×300	6.0	54.66	69.633	9963.65	664.24	11.96
	8.0	72.06	91.793	12925.05	861.67	11.87

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กกลวงสี่เหลี่ยมผืนผ้า



ชื่อขนาด	ความหนา (t) mm	น้ำหนัก (w) kg/m	พื้นที่หน้าตัดขวาง (A) cm^2	Moment of Inertia (I) cm^4		Section Modulus (S) cm^3		Radius of Gyration (r) cm	
				I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
50×25	1.6	1.75	2.232	7.02	2.37	2.81	0.95	1.77	1.03
	2.3	2.44	3.102	9.31	3.10	3.72	1.24	1.73	1.00
60×30	1.6	2.13	2.712	12.49	4.25	4.16	1.42	2.15	1.25
	2.3	2.98	3.792	16.82	5.65	5.61	1.88	2.11	1.22
75×45	2.3	4.06	5.172	38.86	17.61	10.36	4.69	2.74	1.84
	3.2	5.50	7.007	50.77	22.81	13.54	6.08	2.69	1.80
90×45	2.3	4.60	5.862	60.98	20.75	13.55	4.61	3.23	1.88
	3.2	6.25	7.967	80.24	27.01	17.83	6.00	3.17	1.84
100×50	2.3	5.14	6.552	84.83	28.95	16.97	5.79	3.60	2.10
	3.2	7.01	8.927	112.29	37.95	22.46	7.59	3.55	2.06
125×40	2.3	5.69	7.242	130.92	21.64	20.95	3.46	4.25	1.73
	3.2	7.76	9.887	173.84	28.19	27.81	4.51	4.19	1.69
125×75	3.2	9.52	12.127	256.93	116.80	41.11	18.69	4.60	3.10
	4.0	11.73	14.948	310.76	140.65	49.72	22.50	4.56	3.07
150×80	4.5	15.20	19.369	562.76	211.47	75.03	28.20	5.39	3.30
	6.0	19.81	25.233	710.20	264.42	94.69	35.26	5.31	3.24
150×100	4.5	16.62	21.169	658.06	351.96	87.74	46.93	5.58	4.08
	6.0	21.69	27.633	834.68	444.19	111.29	59.23	5.50	4.01
200×100	4.5	20.15	25.669	1331.44	454.64	133.14	45.46	7.20	4.21
	6.0	26.40	33.633	1703.30	576.91	170.33	57.69	7.12	4.14

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กฉากรูปตัว L แบบขาเท่ากันชนิดรีดร้อน

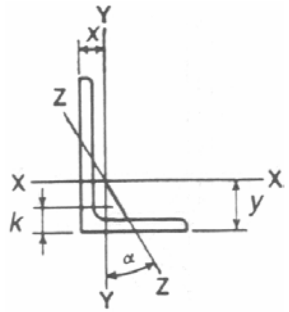


ชื่อขนาด	น้ำหนัก	ความหนา	รัศมีส่วนโค้ง		พื้นที่หน้าตัด	ระยะห่างจากศูนย์ถ่วง		Moment of Inertia			Section Modulus		Radius of Gyration		
		t	r_1	r_2	A	x	y	I_x	I_y	I_z	S_x	S_y	r_x	r_y	r_z
	kg/m	mm	mm	mm	cm^2	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm	cm
120×120	14.7	8	12	5	18.76	3.24	3.24	258	258	106	29.5	29.5	3.71	3.71	2.38
100×100	19.1	13	10	7	24.31	2.94	2.94	220	220	91.1	31.1	31.1	3.00	3.00	1.94
	14.9	10	10	7	19.00	2.82	2.82	175	175	72.0	24.4	24.4	3.04	3.04	1.95
	10.7	7	10	5	13.62	2.71	2.71	129	129	53.2	17.7	17.7	3.08	3.08	1.98
90×90	17.0	13	10	7	21.71	2.69	2.69	156	156	65.3	24.8	24.8	2.68	2.68	1.73
	13.3	10	10	7	17.00	2.57	2.57	125	125	51.7	19.5	19.5	2.71	2.71	1.74
	9.59	7	10	5	12.22	2.46	2.46	93.0	93.0	28.3	14.2	14.2	2.76	2.76	1.77
75×75	13.0	12	8.5	6	16.56	2.29	2.29	81.9	81.9	34.5	15.7	15.7	2.22	2.22	1.44
	9.96	9	8.5	6	12.69	2.17	2.17	64.4	64.4	26.7	12.1	12.1	2.25	2.25	1.45
	6.85	6	8.5	4	8.727	2.06	2.06	46.1	46.1	19.0	8.47	8.47	2.30	2.30	1.48
65×65	7.66	8	8.5	6	9.761	1.88	1.88	36.8	36.8	15.3	7.96	7.96	1.94	1.94	1.25
	5.91	6	8.5	4	7.527	1.81	1.81	29.4	29.4	12.2	6.26	6.26	1.98	1.98	1.27

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กฉากรูปตัว L แบบขาเท่ากันชนิดรีดร้อน (ต่อ)

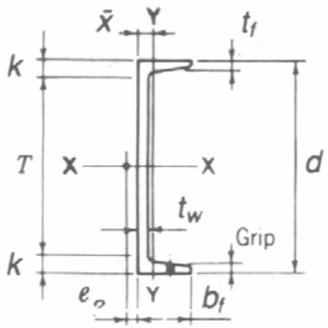
ชื่อขนาด	น้ำหนัก	ความหนา	รัศมีส่วนโค้ง		พื้นที่หน้าตัด	ระยะห่างจากศูนย์ถ่วง		Moment of Inertia			Section Modulus		Radius of Gyration		
		t	r_1	r_2	A	x	y	I_x	I_y	I_z	S_x	S_y	r_x	r_y	r_z
	kg/m	mm	mm	mm	cm^2	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm	cm
50×50	4.43	6	6.5	4.5	5.644	1.44	1.44	12.6	12.6	5.23	3.55	3.55	1.50	1.50	0.963
	3.06	4	6.5	3	3.892	1.37	1.37	9.06	9.06	3.76	2.49	2.49	1.53	1.53	0.983
40×40	2.95	5	4.5	3	3.755	1.17	1.17	5.42	5.42	2.25	1.91	1.91	1.20	1.20	0.744
	1.83	3	4.5	2	2.336	1.09	1.09	3.53	3.53	1.46	1.21	1.21	1.23	1.23	0.790
30×30	1.36	3	4	2	1.727	0.844	0.844	1.42	1.42	0.590	0.661	0.661	0.908	0.908	0.585
25×25	1.12	3	4	2	1.427	0.719	0.719	0.797	0.797	0.332	0.448	0.448	0.747	0.747	0.483

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กฉากรูปตัว L แบบขาไม่เท่ากันชนิดรีดร้อน



ชื่อขนาด	น้ำหนัก	$\tan\alpha$	ความหนา	รัศมีส่วนโค้ง		พื้นที่หน้าตัด	ระยะห่างจากศูนย์ถ่วง		Moment of Inertia			Section Modulus		Radius of Gyration		
			t	r_1	r_2	A	x	y	I_x	I_y	I_z	S_x	S_y	r_x	r_y	r_z
	kg/m		mm	mm	mm	cm^2	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm	cm
150×100	27.7	0.431	15	12	8.5	35.25	5.00	2.53	782	276	161	78.2	37.0	4.71	2.80	2.14
	22.4	0.435	12	12	8.5	28.56	4.88	2.41	642	228	132	63.4	30.1	4.74	2.83	2.15
	17.1	0.439	9	12	6	21.84	4.76	2.30	502	181	104	49.1	23.5	4.79	2.88	2.18
125×75	14.9	0.357	10	10	7	19.00	4.22	1.75	299	80.8	49.0	36.1	14.1	3.96	2.06	1.61
100×75	9.32	0.548	7	10	5	11.87	3.06	1.83	118	56.9	30.8	17.0	10.0	3.15	2.19	1.61
90×75	11.0	0.676	9	8.5	6	14.04	2.75	2.00	109	68.1	34.1	17.4	12.4	2.78	2.20	1.56

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรางน้ำชนิดรีดร้อน

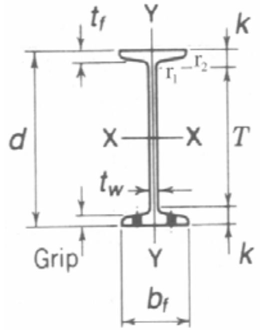


ชื่อขนาด	น้ำหนัก	ความหนา		รัศมี ส่วนโค้ง		พื้นที่หน้าตัด	ระยะห่างจากศูนย์ถ่วง		Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
		t_w	t_f	r_1	r_2	A	x	y	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
380×100	67.3	13	20	24	12	85.71	2.54	0	17,600	655	926	87.8	14.3	2.76
	62.0	13	16.5	18	9	78.96	2.33	0	15,600	565	823	73.6	14.1	2.67
	54.5	10.5	16	18	9	69.39	2.41	0	14,500	535	763	70.5	14.5	2.78
300×90	48.6	12	16	19	9.5	61.9	2.28	0	7,870	379	525	56.4	11.3	2.48
	43.8	10	15.5	19	9.5	55.74	2.34	0	7,410	360	494	54.1	11.5	2.54
	38.1	9	13	14	7	48.57	2.22	0	6,440	309	429	45.7	11.5	2.52
250×90	40.2	11	14.5	17	8.5	51.17	2.40	0	4,680	329	374	49.9	9.56	2.54
	34.6	9	13	14	7	44.07	2.40	0	4,180	294	334	44.5	9.74	2.58
200×90	30.3	8	13.5	14	7	38.65	2.74	0	2,490	277	249	44.2	8.02	2.68
200×80	24.6	7.5	11	12	6	31.33	2.21	0	1,950	168	195	29.1	7.88	2.32
180×75	21.4	7	10.5	11	5.5	27.20	2.13	0	1,380	131	153	24.3	7.12	2.19

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรางน้ำชนิดรีดร้อน (ต่อ)

ชื่อขนาด	น้ำหนัก	ความหนา		รัศมี ส่วนโค้ง		พื้นที่หน้าตัด	ระยะห่างจากศูนย์ถ่วง		Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
		t_w	t_f	r_1	r_2	A	x	y	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm	cm	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
150×75	24.0	9	12.5	15	7.5	30.59	2.31	0	1,050	147	140	28.3	5.86	2.19
	18.6	6.5	10	10	5	23.71	2.28	0	861	117	115	22.4	6.03	2.22
125×65	13.4	6	8	8	4	17.11	1.90	0	424	61.8	67.8	13.4	4.98	1.90
100×50	9.36	5	7.5	8	4	11.92	1.54	0	188	26.0	37.6	7.52	3.97	1.48
75×40	6.92	5	7	8	4	8.818	1.28	0	75.3	12.2	20.1	4.47	2.92	1.17

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปตัว I ชนิดรีดร้อน

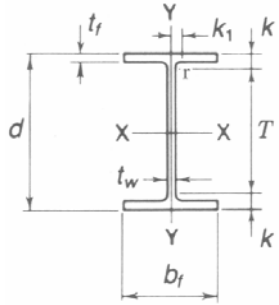


ชื่อขนาด $d \times b_f$	น้ำหนัก	ความหนา		รัศมีส่วนโค้ง		พื้นที่หน้าตัด	Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
		t_w	t_f	r_1	r_2	A	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
600×190	176	16	35	38	19	224.5	130,000	3,540	4,330	373	24.1	3.97
	133	13	25	25	12.5	169.4	98,400	2,460	3,280	259	24.1	3.81
450×175	115	13	26	27	13.5	146.1	48,800	2,020	2,170	231	18.3	3.72
	91.7	11	20	19	9.5	116.8	39,200	1,510	1,740	173	18.3	3.60
400×150	95.8	12.5	25	27	13.5	122.1	31,700	1,240	1,580	165	16.1	3.18
	72.0	10	18	17	8.5	91.73	24,100	864	1,200	115	16.2	3.07
350×150	87.2	12	24	25	12.5	111.1	22,400	1,180	1,280	158	14.2	3.26
	58.5	9	15	13	6.5	74.58	15,200	702	870	93.5	14.3	3.07
	97.88	11.5	22	23	11.5	14,700	14,700	1,080	978	143	12.2	3.09
300×150	83.47	10	18.5	19	9.5	12,700	12,700	886	849	118	12.3	3.26
	61.58	8	13	12	6	9,480	9,480	588	632	78.4	12.4	3.32

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปตัว I ชนิดรีดร้อน (ต่อ)

ชื่อขนาด	น้ำหนัก	ความหนา		รัศมี ส่วนโค้ง		พื้นที่หน้าตัด	Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
		t_w	t_f	r_1	r_2	A	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
250×125	55.5	10	19	21	10.5	70.73	7,310	538	858	86.0	10.2	2.76
	38.3	7.5	12.5	12	6	48.79	5,180	337	414	53.9	10.3	2.63
200×150	50.4	9	16	15	7.5	64.16	4,460	753	446	100	8.34	3.43
200×100	26.0	7	10	10	5	33.06	2,170	138	217	27.7	8.11	2.05

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปตัว W ชนิดรีดร้อน



ชื่อขนาด	น้ำหนัก	d	b_f	ความหนา		รัศมีส่วนโค้ง	พื้นที่หน้าตัด	Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
				t_w	t_f	r	A	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
900×300	286	912	302	18	34	28	364.0	498,000	15,700	10,900	1,040	37.0	6.56
	243	900	300	16	28	28	309.8	411,000	12,600	9,140	843	36.4	6.39
	213	890	299	15	23	28	270.9	345,000	10,300	7,760	688	35.7	6.16
800×300	241	808	302	16	30	28	307.6	339,000	13,800	8,400	915	33.2	6.70
	210	800	300	14	26	28	267.4	292,000	11,700	7,290	782	33.0	6.62
	191	792	300	14	22	28	243.4	254,000	9,930	6,410	662	32.3	6.39
700×300	215	708	302	15	28	28	273.6	237,000	12,900	6,700	853	29.4	6.86
	185	700	300	13	24	28	235.5	201,000	10,800	5,760	722	29.3	6.78
	166	692	300	13	20	28	211.5	172,000	9,020	4,980	602	28.6	6.53
600×300	175	594	302	14	23	28	222.4	137,000	10,600	4,620	701	24.9	6.90
	151	588	300	12	20	28	192.5	118,000	9,020	4,020	601	24.8	6.85
	137	582	300	12	17	28	174.5	103,000	7,670	3,530	511	24.3	6.63

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปตัว W ชนิดรีดร้อน (ต่อ)

ชื่อขนาด	น้ำหนัก	d	b_f	ความหนา		รัศมีส่วนโค้ง	พื้นที่หน้าตัด	Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
				t_w	t_f	r	A	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
600×200	134	612	202	13	23	22	107.7	103,000	3,180	3,380	314	24.6	4.31
	120	606	201	12	20	22	152.5	90,400	2,720	2,980	271	24.3	4.22
	106	600	200	11	17	22	134.4	77,600	2,280	2,590	228	24.0	4.12
	94.6	596	199	10	15	22	120.5	68,700	1,980	2,310	199	23.9	4.05
500×300	128	488	300	11	18	26	163.5	71,000	8,110	2,910	7.04	2,910	541
	114	482	300	11	15	26	145.5	60,400	6,760	2,500	6.82	2,500	451
500×200	103	506	201	11	19	20	131.3	56,500	2,580	2,230	237	20.7	4.43
	89.6	500	200	10	16	20	114.2	47,800	2,140	1,910	214	20.5	4.33
	79.5	496	199	9	14	20	101.3	41,900	1,840	1,690	185	20.3	4.27
450×300	124	440	300	11	18	24	157.4	56,100	8,110	2,550	541	18.9	7.18
	106	434	299	10	15	24	135.0	46,800	6,690	2,160	448	18.6	7.04
450×200	76.0	450	200	9	14	18	96.76	33,500	1,870	1,490	187	18.6	4.40
	66.2	446	199	8	12	18	84.30	28,700	1,580	1,290	159	18.5	4.33
400×400	605	498	432	45	70	22	770.1	298,000	94,400	12,000	4,370	19.7	11.1
	415	458	417	30	50	22	528.6	187,000	60,500	8,170	2,900	18.8	10.7
	283	428	407	20	35	22	360.7	119,000	39,400	5,570	1,930	18.2	10.4
	232	414	405	18	28	22	295.4	92,800	31,000	4,480	1,530	17.7	10.2

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปตัว W ชนิดรีดร้อน (ต่อ)

ชื่อขนาด	น้ำหนัก	d	b_f	ความหนา		รัศมีส่วนโค้ง	พื้นที่หน้าตัด	Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
				t_w	t_f	r	A	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
400×400	200	406	403	16	24	22	254.9	78,000	26,200	3,840	1,300	17.5	10.1
	197	400	408	21	21	22	250.7	70,900	23,800	3,540	1,170	16.8	9.75
	172	400	400	13	21	22	218.7	66,600	22,400	3,330	1,120	17.5	10.1
	168	394	405	18	18	22	214.4	59,700	20,000	3,030	985	16.7	9.65
	147	394	398	11	18	22	186.8	56,100	18,900	2,850	951	17.3	10.1
	140	388	402	15	15	22	178.5	49,000	16,300	2,520	809	16.6	9.54
400×300	107	390	300	10	16	22	136.0	38,700	7,210	1,980	481	16.9	7.28
	94.3	386	299	9	14	22	120.1	33,700	6,240	1,740	418	16.7	7.21
400×200	66.0	400	200	8	13	16	84.12	23,700	1,740	1,190	174	16.8	4.54
	56.6	396	199	7	11	16	72.16	20,000	1,450	1,010	145	16.7	4.48
350×350	159	356	352	14	22	20	202.0	47,600	16,000	2,670	909	15.3	8.90
	156	350	357	19	19	20	198.4	42,800	14,400	2,450	809	14.7	8.53
	137	350	350	12	19	20	173.9	40,300	13,600	2,300	776	15.2	8.84
	131	344	354	16	16	20	166.6	35,300	11,800	2,050	669	14.6	8.43
	115	344	348	10	16	20	146.0	33,300	11,200	1,940	646	15.1	8.78
	106	338	351	13	13	20	135.3	28,200	9,380	1,670	534	14.4	8.33

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปตัว W ชนิดรีดร้อน (ต่อ)

ชื่อขนาด	น้ำหนัก	d	b_f	ความหนา		รัศมีส่วนโค้ง	พื้นที่หน้าตัด	Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
				t_w	t_f	r	A	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
350×250	79.7	340	250	9	14	20	101.5	21,700	3,650	1,280	292	14.6	6.00
	69.2	336	249	8	12	20	88.15	18,500	3,090	1,100	248	14.5	5.92
350×175	49.6	350	175	7	11	14	63.14	13,600	984	775	112	14.7	3.95
	41.4	346	174	6	9	14	52.68	11,100	792	641	91.0	14.5	3.86
300×300	106.0	304	301	11	17	18	134.8	23,400	7,730	1,540	514	13.2	7.57
	106.0	300	305	15	15	18	134.8	21,500	7,100	1,440	466	12.6	7.26
	94.0	300	300	10	15	18	119.8	20,400	6,750	1,360	450	13.1	7.51
	87.0	298	299	9	14	18	110.8	18,800	6,240	1,270	417	13.0	7.51
	84.5	294	302	12	12	18	107.7	16,900	5,520	1,150	365	12.5	7.16
300×200	65.4	298	201	9	14	18	83.4	13,300	1,900	893	189	12.6	4.77
	56.8	294	200	8	12	18	72.4	11,300	1,600	771	160	12.5	4.71
300×150	36.7	300	150	6.5	9	13	46.8	7,210	508	481	67.7	12.4	3.29
	30.2	298	149	5.5	8	13	40.8	6,320	442	424	59.3	12.4	3.29
250×250	82.2	250	255	14	14	16	104.7	11,500	3,880	919	304	10.5	6.09
	72.4	250	250	9	14	16	92.18	10,800	3,650	867	292	10.8	6.29
	66.5	248	249	8	13	16	84.70	9,930	3,350	801	269	10.8	6.29
	64.4	244	252	11	11	16	82.06	8,790	2,940	720	233	10.3	5.98

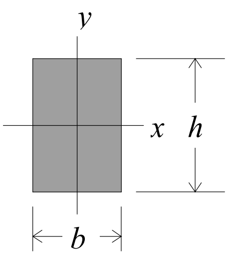
คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปตัว W ชนิดรีดร้อน (ต่อ)

ชื่อขนาด	น้ำหนัก	d	b_f	ความหนา		รัศมีส่วนโค้ง	พื้นที่หน้าตัด	Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
				t_w	t_f	r	A	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
250×175	44.1	244	175	7	11	16	56.24	6,120	984	502	113	10.4	4.18
250×125	29.6	250	125	6	9	12	37.66	4,050	294	324	47.0	10.4	2.79
	25.7	248	124	5	8	12	32.68	3,540	255	285	41.1	10.4	2.79
	65.7	208	202	10	16	13	83.69	6,530	2,200	628	218	8.83	5.13
200×200	56.2	200	204	12	12	13	71.53	4,980	1,700	498	167	8.35	4.88
	49.9	200	200	8	12	13	63.53	4,720	1,600	472	160	8.62	5.02
200×150	30.6	194	150	6	9	13	39.01	2,690	507	277	67.6	8.30	3.61
200×100	21.3	200	100	5.5	8	11	27.16	1,840	134	184	26.8	8.24	2.22
	18.2	198	99	4.5	7	11	23.18	1,580	114	160	23.0	8.26	2.21
175×175	40.2	175	175	7.5	11	12	51.21	2880	984	7.50	4.38	330	112
175×125	23.3	169	125	5.5	8	12	29.65	1530	261	7.18	2.97	181	41.8
175×90	18.1	175	90	5	8	9	23.04	1210	97.5	7.26	2.06	139	21.7
150×150	31.5	150	150	7	10	11	40.14	1640	563	6.39	3.75	219	75.1
150×100	21.1	148	100	6	9	11	26.84	1020	151	6.71	2.37	138	30.1
150×75	14.0	150	75	5	7	8	17.85	666	49.5	6.11	1.66	88.8	13.2
125×125	23.8	125	125	6.5	9	10	30.31	847	293	5.29	3.11	136	47.0
125×60	13.2	125	60	6	8	9	16.84	413	29.2	4.95	1.32	66.1	9.73

คุณสมบัติของหน้าตัดเหล็กรูปตัว W ชนิดรีดร้อน (ต่อ)

ชื่อขนาด	น้ำหนัก	d	b_f	ความหนา		รัศมีส่วนโค้ง	พื้นที่หน้าตัด	Moment of Inertia		Section Modulus		Radius of Gyration	
				t_w	t_f	r	A	I_x	I_y	S_x	S_y	r_x	r_y
	kg/m	mm	mm	mm	mm	mm	cm^2	cm^4	cm^4	cm^3	cm^3	cm	cm
100×100	17.2	100	100	6	8	10	21.90	383	134	4.18	2.47	76.5	26.7
100×50	9.3	100	50	5	7	8	11.85	187	14.8	3.98	1.12	37.5	5.91

ภาคผนวกที่ 4
คุณสมบัติหน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงสร้างไม้



			Axis x		Axis y	
Nominal dimensions $b \times h$	Net dimensions $b \times h$	Area $A = bh$	Moment of inertia $I_x = \frac{bh^3}{12}$	Section modulus $S_x = \frac{bh^2}{6}$	Moment of inertia $I_y = \frac{hb^3}{12}$	Section modulus $S_y = \frac{hb^2}{6}$
in.	in.	$in.^2$	$in.^4$	$in.^3$	$in.^4$	$in.^3$
2 x 4	1.5 x 3.5	5.25	5.36	3.06	0.98	1.31
2 x 6	1.5 x 5.5	8.25	20.80	7.56	1.55	2.06
2 x 8	1.5 x 7.25	10.88	47.63	13.14	2.04	2.72
2 x 10	1.5 x 9.25	13.88	98.93	21.39	2.60	3.47
2 x 12	1.5 x 11.25	16.88	177.98	31.64	3.16	4.22
3 x 4	2.5 x 3.5	8.75	8.93	5.10	4.56	3.65
3 x 6	2.5 x 5.5	13.75	34.66	12.60	7.16	5.73
3 x 8	2.5 x 7.25	18.13	79.39	21.90	9.44	7.55
3 x 10	2.5 x 9.25	23.13	164.89	36.65	12.04	9.64
3 x 12	2.5 x 11.25	28.13	296.63	52.73	14.65	11.72
4 x 4	3.5 x 3.5	12.25	12.51	7.15	12.51	7.15
4 x 6	3.5 x 5.5	19.25	48.53	17.65	19.65	11.23
4 x 8	3.5 x 7.25	25.38	111.15	30.66	25.90	14.80
4 x 10	3.5 x 9.25	32.38	230.84	49.91	33.05	18.89
4 x 12	3.5 x 11.25	39.38	415.28	73.83	40.20	22.97
6 x 6	5.5 x 5.5	30.25	76.3	27.7	76.3	27.7
6 x 8	5.5 x 7.5	41.25	193.4	51.6	104.0	37.8
6 x 10	5.5 x 9.5	52.25	393.0	82.7	131.7	47.9
6 x 12	5.5 x 11.5	63.25	697.1	121.2	159.4	58.0
8 x 8	7.5 x 7.5	56.25	263.7	70.3	263.7	70.3
8 x 10	7.5 x 9.5	71.25	535.9	112.8	334.0	89.1
8 x 12	7.5 x 11.5	86.25	950.5	165.3	404.3	107.8