

# การวิเคราะห์โครงสร้าง Structural Analysis

# เรียบเรียงโดย

ผศ.ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์ สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี Rev. 3

# คำนำ

เอกสารคำสอนวิชาวิเคราะห์โครงสร้าง (Structural Analysis) เล่มนี้ ได้ถูกเรียบเรียงขึ้นมาโดยมีจุดประสงค์เพื่อ ใช้เป็นเอกสารคำสอนหลักในการศึกษาวิชา 410332 วิเคราะห์โครงสร้าง ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี โดยใช้อ่านควบคู่ไปกับการอ่าน textbook ต่างๆ ที่เป็นหนังสืออ้างอิง ซึ่งผู้เรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารคำสอนนี้จะช่วยให้นักศึกษาส่วนหนึ่งที่มีพื้นความรู้ภาษา อังกฤษที่ไม่ดีพอและนักศึกษาอีกส่วนหนึ่งที่ไม่สามารถจดคำบรรยายได้ทัน เนื่องจากการบรรยายเนื้อหาวิชาที่เร็วเกินไป หรือจำนวนนักศึกษาในชั้นเรียนมีมาก ได้มีเอกสารที่จะใช้ทบทวนก่อนและหลังจากการบรรยาย และเข้าใจในเนื้อหาของ วิชาได้ดีขึ้น สุดท้าย หากนักศึกษาหรือผู้สนใจพบว่าควรมีเปลี่ยนแปลงแก้ไขข้อผิดพลาดและปรับปรุงในส่วนใด ช่วยกรุณา แจ้งให้ทราบด้วยจักขอบคุณยิ่ง

> ผศ.ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์ สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี พฤศจิกายน 2544 Revision 3

# สารบัญ

บทที่ 1 บทนำ	
1.1 บทน้ำ	1-1
1.2 โครงสร้าง Statically Determinate และโครงสร้าง Statically Indeterminate	1-1
1.3 วิธีการวิเคราะห์โครงสร้าง Statically Indeterminate	1-5
บทที่ 2 การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี Slope-Deflection	
2.1 บทน้ำ	2-1
2.2 สมการ Slope-Deflection	2-2
2.3 การวิเคราะห์คานโดยวิธี Slope-Deflection	2-10
2.4 การวิเคราะห์ Frames ที่ไม่มีการเซ (No Sidesway) โดยวิธี Slope-Deflection	2-22
2.5 การวิเคราะห์ Frames ที่มีการเซ (Sidesway) โดยวิธี Slope-Deflection	2-27
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	2-47
บทที่ 3 การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี Moment Distribution	
3.1 หลักการและนิยาม	3-1
3.2 การวิเคราะห์คานโดยวิธี Moment Distribution	3-5
3.3 Stiffness Factor Modifications	3-7
3.4 การวิเคราะห์ Frames ที่ไม่มีการเซ (No Sidesway) โดยวิธี Moment Distribution	3-24
3.5 การวิเคราะห์ Frames ที่มีการเซ (Sidesway) โดยวิธี Moment Distribution	3-29
3.6 การวิเคราะห์ Multistory Frames โดยวิธี Moment Distribution	3-40
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	3-48
บทที่ 4 Influence Lines ของคาน Statically Indeterminate	
4.1 บทน้ำ	4-1
4.2 กฎผกผันของ Maxwell	4-2
4.3 อินฟลูเอ็นไลน์ของคานแบบ Statically Indeterminate	4-4
4.4 การใช้ อินฟลูเอ็นไลน์เพื่อหาการจัดวางน้ำหนักบรรทุกจรบนคาน Statically Indeterminate	4-22
4.5 การว่างอินฟลูเอ็นไลน์ของ Statically Indeterminate Frames	4-22
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	4-24
บทที่ 5 Approximate Analysis ของโครงสร้าง Statically Indeterminate	
5.1 บทน้ำ	5-1
5.2 Approximate Analysis ของโครงอาคารที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำในแนวดิ่ง	5-1
5.3 Approximate Analysis ของ Portal Frames และ Portal Trusses	5-3
5.4 Approximate Analysis ของโครงอาคารที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำทางด้านข้าง: Portal Method	5-6
5.5 Approximate Analysis ของโครงอาคารที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำทางด้านข้าง: Cantilever Methoo	1 5 <b>-</b> 12
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5	5-17

# บทที่ 6 การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยใช้ Matrix Displacement Method

6.1 พื้นฐานของ Matrix Displacement Method	6-1
6.2 Truss-Member Stiffness Matrix	6-3
6.3 Displacement และ Force Transformation Matrices	6-4
6.4 Member Global Stiffness Matrix	6-8
6.5 Structural Stiffness Matrix	6-9
6.6 การใช้ Matrix Displacement Method ในการวิเคราะห์โครงข้อหมุน	6-9
6.7 การวิเคราะห์โครงข้อหมุนที่มีจุดรองรับเป็น Roller เอียง	6-21
6.8 การวิเคราะห์โครงข้อหมุนที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและการก่อสร้างผิดพลาด	6-26
6.9 การวิเคราะห์ Space	6-31
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6	6-37

# บทที่ 7 การวิเคราะห์คานและ Plane Frame โดยใช้ Matrix Displacement Method

7.1 บทน้ำ	7-1
7.2 Frame-Member Stiffness Matrix	7-4
7.3 Displacement และ Force Transformation Matrices	7-7
7.4 Frame-Member Global Stiffness Matrix	7-10
7.5 Beam-Member Global Stiffness Matrix	7-11
7.6 การใช้ Matrix Displacement Method ในการวิเคราะห์คานและ Plane Frames	7-12
7.7 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มีการทรุดตัวของจุดรองรับ	7-13
7.8 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มี Internal Hinges	7-13
7.9 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มีหน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลี่ยนแปลงอย่างทันที	7-14
7.10 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ	7-14
7.11 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มีจุดรองรับเป็น Roller เอียง	7-14
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7	7-64

หนังสืออ้างอิง

# **บทที่** 1 บทนำ

#### 1.1 บทนำ

โครงสร้าง (structure) ในทางวิศวกรรมโยธาคือ สิ่งก่อสร้างใดๆ ที่ได้จากการก่อสร้างหรือการนำองค์อาคารหรือ ชิ้นส่วนโครงสร้าง (structural member) มาเชื่อมต่อกัน เพื่อรองรับแรงกระทำและน้ำหนักบรรทุกต่างๆ (load) ตามวัตถุ ประสงค์ของโครงสร้างนั้นอย่างมีประสิทธิภาพ ประหยัด และปลอดภัย ตัวอย่างของโครงสร้างที่พบเห็นโดยทั่วไปได้แก่ อาคารเรียน อาคารที่พักอาศัย อาคารพาณิชย์ สะพานลอย และเชื่อน เป็นต้น

วิศวกรรมโครงสร้าง (structural engineering) เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับการใช้กฎและหลักการต่างๆ เพื่อ วิเคราะห์ ออกแบบ และก่อสร้างโครงสร้าง โดยทั่วไปแล้ว ขั้นตอนการออกแบบโครงสร้างจะถูกแบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอนหลัก คือ การวางแผนงาน (planning) การวิเคราะห์โครงสร้าง (structural analysis) การออกแบบโครงสร้าง (structural design) และการก่อสร้าง (construction) โดยการวิเคราะห์โครงสร้างเป็นขั้นตอนที่สำคัญมากเพราะผลการวิเคราะห์ที่ไม่ ถูกต้องจะนำไปสู่การออกแบบที่ผิดพลาดและจะเป็นอันตรายต่อชีวิตและทรัพย์สินของประชาชน

วิชาวิเคราะห์โครงสร้าง (structural analysis) เป็นวิชาที่ต่อเนื่องมาจากวิชาทฤษฎีโครงสร้าง (theory of structures) ซึ่งเน้นหนักในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ statically determinate โดยในวิชานี้ เราจะศึกษาการวิเคราะห์โครง สร้างซึ่งเน้นหนักในการวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate ซึ่งประกอบด้วยคาน (beams) โครงข้อหมุน (truss) และโครงข้อแข็ง (frame) โดยวิธีมุมลาด-ความแอ่น (slope-deflection method) วิธีกระจายแรงดัด (moment distribution method) วิธีการวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate แบบคร่าวๆ (approximate analysis of statically indeterminate structures) และวิธีเมตริกซ์ดิสเพลซเมนต์ (matrix displacement method) รวมถึงการเขียนแผนภาพอินฟ ลูเอ็นไลน์ (influence lines diagram) ของโครงสร้าง statically indeterminate ดังนั้น นักศึกษาที่จะเรียนวิชานี้ได้อย่างเข้า ใจและนำไปใช้งานได้จริงนั้น ควรจะต้องมีความรู้ความเข้าใจและได้ทบทวนวิชาพื้นฐานทางวิศวกรรมโครงสร้าง เช่น ทฤษฎีโครงสร้าง และกลศาสตร์วัสดุ (mechanics of materials) เป็นต้น มาก่อนแล้วเป็นอย่างดี

วิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดในการเรียนรู้วิชานี้คือ การฝึกฝนแก้ปัญหาโจทย์ ซึ่งในการที่จะการแก้ปัญหาโจทย์ให้ ประสบผลสำเร็จด้วยดีนั้น เราจะต้องทำอย่างมีหลักการและเป็นลำดับขั้นตอน ดังต่อไปนี้

- 1. อ่านโจทย์อย่างระมัดระวัง และพยายามที่จะหาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ให้มากับทฤษฎี
- เขียนแผนภาพ (diagrams) หรือรูปภาพต่างๆ เช่น แผนภาพ free body diagram เป็นต้น เพื่อแสดงความ สัมพันธ์ต่างๆ ให้ชัดเจน
- 3. ใช้ทฤษฎีและหลักการที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา
- แก้สมการและตรวจสอบความสอดคล้องของหน่วย และตอบคำตอบโดยมีจำนวนนัยสำคัญ (significant figures) ที่เหมาะสม
- 5. ศึกษาคำตอบว่ามีความเป็นไปได้หรือไม่ โดยใช้ engineering judgment และ common sense

# 1.2 โครงสร้าง Statically Determinate และโครงสร้าง Statically Indeterminate

# โครงสร้าง Statically Determinate

โครงสร้างใดๆ จะเป็นโครงสร้าง statically determinate ก็ต่อเมื่อโครงสร้างนั้นมีเสถียรภาพ (stability) และมีผล รวมของจำนวนของแรงปฏิกริยา (reactions) และจำนวนของแรงและ moment ภายใน (internal loads) ที่ไม่ทราบค่า**เท่า** กับจำนวนของสมการความสมดุลของโครงสร้างนั้น ดังนั้น เราจะสามารถทำการวิเคราะห์โครงสร้างชนิดนี้เพื่อเขียนแผน ภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram และหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งบน elastic curve ของโครงสร้างได้ โดยใช้สมการสมดุล (equilibrium equation) รูปที่ 1-1 แสดงตัวอย่างของคาน statically determinate ที่มีจุดรองรับอย่าง ง่าย (simple support) ที่มักพบเห็นในโครงอาคารเหล็กโดยทั่วไป





# โครงสร้าง Statically Indeterminate

โครงสร้างใดๆ จะเป็นโครงสร้าง statically indeterminate ก็ต่อเมื่อโครงสร้างนั้นมีเสถียรภาพ (stability) และมี จำนวนของผลรวมของแรงปฏิกริยา (reactions) และจำนวนของแรงและ moment ภายใน (internal loads) ที่ไม่ทราบค่า มากกว่าจำนวนของสมการความสมดุลของโครงสร้างนั้น

โครงสร้างโดยทั่วไปจะเป็นโครงสร้าง statically indeterminate ซึ่งมักจะเกิดจากการเพิ่มองค์อาคารหรือเพิ่มจุด รองรับในโครงสร้าง เพื่อจุดประสงค์ต่างๆ ทั้งทางด้านวิศวกรรมและทางด้านสถาปัตยกรรม หรือเกิดจากรูปแบบการก่อ สร้างโครงสร้างนั้น เช่น โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก (reinforced concrete structures) ซึ่งมักจะมีการก่อสร้างโครงสร้าง อย่างต่อเนื่อง เป็นต้น รูปที่ 1-2 แสดงตัวอย่างของโครงข้อแข็งซึ่งเป็นโครงสร้าง statically indeterminate ที่มีองค์อาคารถูก ยึดรั้งและเชื่อมต่อกันอย่างต่อเนื่อง



#### Structural Analysis

# ข้อดีและข้อเสียเมื่อเปรียบเทียบโครงสร้าง statically indeterminate กับโครงสร้าง statically determinate ข้อดี

 ภายใต้แรงขนาดเท่ากันและกระทำที่ตำแหน่งเดียวกัน โครงสร้าง statically indeterminate จะมีหน่วยแรงและ การโก่งตัว (deflection) เกิดขึ้น**น้อยกว่า**โครงสร้าง statically determinate ซึ่งจะทำให้โครงสร้าง statically indeterminate มีขนาดที่เล็กกว่าและมีราคาถูกกว่าโครงสร้าง statically determinate

จากตารางที่ 1-1 เราจะเห็นได้ว่า moment สูงสุดที่เกิดขึ้นในคานแบบ simply-supported beam มีค่ามากกว่า moment สูงสุดที่เกิดขึ้นในคานแบบ fixed-supported beam สองเท่า และค่า deflection สูงสุดที่เกิดขึ้นในคานแบบ fixed-supported beam มีค่าน้อยกว่าค่า deflection สูงสุดที่เกิดขึ้นในคานแบบ simply-supported beam ถึงสี่เท่า เป็นต้น

 ในกรณีที่การก่อสร้างโครงสร้าง statically indeterminate มีความผิดพลาดเกิดขึ้นหรือในกรณีที่ loads ที่ กระทำกับโครงสร้าง statically indeterminate มีค่ามากกว่าที่ได้ออกแบบไว้มาก เช่น เมื่อโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงแผ่น ดินไหว (earthquake loads) เป็นต้น โครงสร้าง statically indeterminate จะมีการกระจายแรงและ moment ภายใน (internal loads) กลับไปที่จุดรองรับของโครงสร้าง ซึ่งจะเป็นผลให้โครงสร้างชนิดนี้มีเสถียรภาพและไม่เกิดการวิบัติอย่าง ฉับพลัน

กำหนดให้คานดังที่แสดงในตารางที่ 1-1 ทำด้วยเหล็ก เมื่อแรง *P* ที่กระทำต่อคานแบบ fixed-supported beam มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนถึงค่าๆ หนึ่งแล้ว เหล็กที่ใช้ทำคานที่จุดที่รับ moment สูงสุด  $M_{\rm max} = PL/8$  (ที่ผนังทั้งสองด้าน และที่กึ่งกลางคาน) จะเกิดการคลาก (yielding) ขึ้น และจุดทั้งสามนี้จะประพฤติตัวเป็น hinge หรือที่เรียกว่า plastic hinge ซึ่งทำให้คานดังกล่าวมีพฤติกรรมแบบคานที่ถูกรองรับโดยหมุด และเมื่อการแอ่นตัวมีค่ามากขึ้นแล้ว ผนังที่รองรับ คานจะเกิดแรงและ moment ปฏิกริยาที่จะป้องกันการวิบัติของคานอย่างฉับพลัน แต่ในกรณีของคานแบบ simplysupported beam เมื่อแรง *P* มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนถึงจุดๆ หนึ่งแล้ว plastic hinge จะเกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางของคาน และ เมื่อการแอ่นตัวมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ จนถึงค่าหนึ่งแล้ว คานจะเกิดการวิบัติอย่างฉับพลัน เนื่องจากจุดรองรับคานไม่สามารถที่ จะก่อให้เกิดแรงและ moment ปฏิกริยาดังที่เกิดในคานแบบ fixed-supported beam ได้





3. ทำให้เกิดรูปแบบการก่อสร้างแบบ cantilever method ซึ่งเป็นรูปแบบการก่อสร้างที่ก่อสร้างให้ชิ้นส่วนของ โครงสร้างยื่นออกไปบรรจบกับชิ้นส่วนอื่นๆ ของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 1-3 ซึ่งแสดงการก่อสร้างโครงข้อหมุนที่รองรับ พื้นสะพานจากตอม่อด้านหนึ่งมายังตอม่ออีกด้านหนึ่ง การก่อสร้างแบบ cantilever method นี้จะทำให้การก่อสร้างโดย เฉพาะการก่อสร้างสะพานที่ใต้สะพานมีระดับน้ำที่ลึกมากหรือเมื่อพื้นที่ใต้สะพานยังคงมีการใช้งานอยู่ในขณะที่ทำการก่อ สร้างมีความง่ายขึ้นมาก





### ข้อเสีย

1. การวิเคราะห์และการออกแบบโครงสร้าง statically indeterminate จะมีความยุ่งยากมากกว่าการวิเคราะห์ และการออกแบบโครงสร้าง statically determinate

ในการวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate นั้น ถ้าเราไม่ทราบขนาดหน้าตัดขององค์อาคารของโครง สร้างแล้ว เราจะไม่สามารถทำการวิเคราะห์หาแรงและ moment ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างได้ และในทางกลับกัน ถ้าเราไม่ ทราบค่าแรงและ moment ดังกล่าวแล้ว เราก็จะไม่สามารถทำการออกแบบหาขนาดหน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้าง ได้ อย่างไรก็ตาม ปัญหานี้จะถูกแก้ไขได้แต่ใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น โดยเริ่มต้นทำการประมาณหาขนาดหน้าตัดของ โครงสร้างคร่าวๆ จากประสบการณ์ จากนั้น ทำการวิเคราะห์โครงสร้าง แล้วใช้ค่าแรงและ moment ต่างๆ ที่ได้ออกแบบหา ขนาดหน้าตัดของโครงสร้าง จากนั้น ทำการวิเคราะห์โครงสร้างโดยใช้ขนาดหน้าตัดของโครงสร้างที่หาได้ แล้วทำการออก แบบหาขนาดหน้าตัดของโครงสร้างอีกครั้ง ขั้นตอนการวิเคราะห์และออกแบบจะถูกกระทำซ้ำๆ ซึ่งจะหยุดเมื่อหน้าตัดของ องค์อาคารของโครงสร้างที่ได้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงจากการออกแบบในครั้งก่อนหน้านี้มากนัก

2. ถึงแม้นว่าโครงสร้าง statically indeterminate จะมีขนาดหน้าตัดที่เล็กกว่าโครงสร้าง statically determinate ก็ตาม แต่บ่อยครั้งที่ค่าก่อสร้างโครงสร้าง statically indeterminate มีราคาที่แพงกว่าโครงสร้าง statically determinate เนื่องจากโครงสร้าง statically indeterminate ต้องการจุดรองรับ (supports) และการเชื่อมต่อ (connections) ขององค์ อาคารในโครงสร้างที่มีความแกร่งสูง ซึ่งทำให้ค่าการก่อสร้างฐานราก จุดรองรับ และจุดเชื่อมต่อมีราคาที่สูงเกิดกว่าค่าการ ก่อสร้างองค์อาคารของโครงสร้างที่เล็กลง

3. การทรุดตัวที่ไม่เท่ากันของฐานรากหรือจุดรองรับ การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในองค์อาคารของโครงสร้าง และความผิดพลาดในการก่อสร้างจะทำให้เกิดหน่วยแรง (stress) เพิ่มขึ้นในโครงสร้าง statically indeterminate เพราะจุด รองรับและจุดเชื่อมต่อของโครงสร้างแบบนี้จะไม่ยอมให้มีการยืด หรือหดตัวต่างๆ เกิดขึ้นดังที่สามารถเกิดขึ้นได้ในโครง สร้าง statically determinate

4. การเปลี่ยนแปลงรูปแบบของน้ำหนักบรรทุก (loads) ที่กระทำต่อโครงสร้าง statically indeterminate จะทำให้ เกิดหน่วยแรงกลับด้าน (stress reversal) ขึ้นบนโครงสร้างดังกล่าวได้ง่ายกว่าในโครงสร้าง statically determinate

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-4 เมื่อรูปแบบของน้ำหนักบรรทุกมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 1-4a แล้ว จุด A ของคานจะถูกกระทำโดย moment บวก แต่เมื่อน้ำหนักบรรทุกเลื่อนไปมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 1-4b แล้ว จุด A ของ คานจะถูกกระทำโดย moment ลบ ซึ่งในบางกรณี เราจำเป็นที่จะต้องเสริมหน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้าง statically indeterminate เพื่อรองรับ stress reversal ดังกล่าว เช่น ในโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก เราอาจจะต้องทำการเสริมเหล็ก บนและเหล็กล่างให้มีปริมาณที่เท่ากัน เป็นต้น



### 1.3 วิธีการวิเคราะห์โครงสร้าง Statically Indeterminate

เนื่องจากเราไม่สามารถทำการวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate ได้โดยการใช้สมการความสมดุล (equilibrium equation) ของโครงสร้างโดยตรง เนื่องจากโครงสร้างแบบนี้มีจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่ามากกว่าจำนวน ของสมการความสมดุล ดังนั้น ในการวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate เราจะต้องพิจารณาสมการและความ สัมพันธ์อื่นๆ ของโครงสร้างประกอบด้วยเพื่อทำให้จำนวนของสมการทั้งหมดมีค่าเท่ากับจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่า ซึ่งสม การและความสัมพันธ์ที่เราจะต้องพิจารณาคือ

 สมการความสอดคล้อง (compatibility equations) ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ที่กำหนดให้โครงสร้างหรือองค์ อาคารของโครงสร้างไม่มีการแตกแยกออกจากกันหรือทับซ้อนกันภายใต้การกระทำของแรงหรือน้ำหนัก บรรทุก เช่น ค่าความลาด (slope) และค่าการโก่งตัว (deflection) ที่จุด B ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-5 ซึ่งหามาได้โดยใช้พิกัด x<sub>1</sub> จะต้องมีค่าเท่ากับค่า slope และค่าการโก่งตัวที่จุด B ของคานที่หามาได้โดย ใช้พิกัด x<sub>2</sub> หรือ θ<sub>1</sub>(a) = θ<sub>2</sub>(a) และ v<sub>1</sub>(a) = v<sub>2</sub>(a) เป็นต้น



 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเปลี่ยนตำแหน่ง (force-displacement relationships) ของโครงสร้าง ซึ่งขึ้นอยู่กับพฤติกรรมของวัสดุในการตอบสนองต่อแรงกระทำ ในการศึกษาวิชานี้ เราสมมุติให้การตอบ สนองของโครงสร้างต่อแรงกระทำเป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้นตรง (linear elastic)

โดยทั่วไปแล้ว การวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate จะถูกแบ่งออกได้เป็น 2 วิธีหลักคือ force method และ displacement method

#### Force Method

การวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate โดย force method เป็นการวิเคราะห์โครงสร้างที่ใช้แรงเป็นตัว แปรไม่ทราบค่า

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-6a ซึ่งเป็นคานที่มี degree of indeterminacy เท่ากับ 1 เราจะเขียนขั้นตอน การวิเคราะห์คานดังกล่าวโดย force method ได้ดังต่อไปนี้

- แปลงคานดังกล่าวให้เป็นคาน statically determinate โดยให้แรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ B หรือ B<sub>y</sub> เป็นแรง เกินจำเป็น (redundant forces)
- จาก principle of superposition คาน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-6a จะถูกแบ่งออกได้เป็นคานดังที่แสดงในรูปที่
   1-6b บวกกับคานดังที่แสดงในรูปที่ 1-6c
- 3. หาค่าการโก่งตัว (deflection)  $\Delta_B$  ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ B ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 1-6b เนื่องจากแรง กระทำภายนอก P (หาความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเปลี่ยนตำแหน่ง)
- หาค่าการโก่งตัว Δ'<sub>BB</sub> ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ B ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 1-6c เนื่องจากแรงปฏิกริยา B<sub>y</sub> (หาความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเปลี่ยนตำแหน่ง)
- จากเงื่อนไขความสอดคล้อง (compatibility condition) ของคานที่จุดรองรับ B เราจะได้ว่า เนื่องจากค่า การโก่งตัวที่จุดรองรับ B ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 1-6a มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น ผลรวมของค่าการโก่งตัวที่ จุดรองรับ B ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 1-6b และค่าการโก่งตัวที่จุดรองรับ B ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 1-6c จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งเราจะเขียนเงื่อนไขดังกล่าวได้ในรูป 0 = Δ<sub>B</sub> + Δ'<sub>BB</sub>
- 6. แก้สมการหาค่าแรงเกินจำเป็น  $B_{_{V}}$
- 7. หาค่าแรงปฏิกริยาที่เหลือโดยใช้สมการความสมดุล และเขียนแผนภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram ของคาน
- 8. หาค่าการโก่งตัวโดยใช้วิธีวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวตามที่ได้ศึกษามาแล้ว ในวิชา theory of structures

เนื่องจากเราใช้ compatibility equations ของโครงสร้างเป็นพื้นฐานในการวิเคราะห์ ดังนั้น วิธีการนี้ยังถูกเรียก ในอีกชื่อหนึ่งว่าวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง (method of consistent deformation)





#### **Displacement Method**

การวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate โดย displacement method เป็นการวิเคราะห์โครงสร้างที่ใช้ การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (displacement) ของโครงสร้างเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-7a ซึ่งเป็นโครงสร้างที่มี degree of indeterminacy เท่ากับ 2 และเป็นโครง สร้างที่มีการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่าหรือ degree of freedom เท่ากับ 2 โดยทั่วไปแล้ว การวิเคราะห์คานดังกล่าวโดย displacement method มีขั้นตอนการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

- 1. กำหนดให้ slope ที่จุดรองรับ B ( $heta_B$ ) และที่จุดรองรับ C ( $heta_C$ ) เป็นการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่า
- 2. เขียนสมการความสัมพันธ์ของโมเมนต์ภายในดังที่แสดงในรูปที่ 1-7b และการเปลี่ยนตำแหน่ง
- 3. เขียนสมการความสมดุลของโมเมนต์ที่จุดรองรับ B และ C โดยใช้แผนภาพ free body diagram ของจุด รองรับ ดังที่แสดงในรูปที่ 1-7c

- แทนสมการความสัมพันธ์ของโมเมนต์และการเปลี่ยนตำแหน่งที่ได้ในข้อ 2 ลงในสมการความสมดุลที่ได้ใน
   ข้อ 3 จากนั้น แก้สมการเพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง θ<sub>B</sub> และ θ<sub>C</sub>
- แทนค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่หามาได้ในข้อที่ 4 กลับลงในสมการแสดงความสัมพันธ์ของโมเมนต์และการ เปลี่ยนตำแหน่งของคานในข้อที่ 2 เพื่อหาค่าแรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นในโครงสร้าง
- 6. เขียนแผนภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram ของคาน
- 7. หาค่าการโก่งตัวที่เกิดขึ้นที่จุดต่างๆ บนคาน



(c) Free-body diagram of joints รูปที่ 1-7

โดยสรุปแล้ว เราสามารถเปรียบเทียบวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ force method และ displacement method ได้ ดังที่แสดงในตารางที่ 1-2 ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า force method ใช้แรงเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าและใช้สมการ ความสอดคล้องและความสัมพันธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งช่วยในการหาค่าของตัวแปรไม่ทราบค่า แต่ displacement method ใช้การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงสร้างเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าและใช้สมการความสมดุลและ ความสัมพันธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งช่วยในการหาค่าของตัวแปรไม่ทราบค่า

ตารางที่ 1-2					
วิธีการ	ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า	สมการที่ใช้ในการหาคำตอบ			
Force method	forces	compatibility equations ແລະ force-displacement			
		relationships			
Displacement method	displacements	equilibrium equations ແລະ force-displacement			
		relationships			

อย่างไรก็ตาม วิธีการวิเคราะห์โครงสร้างทั้งสองนี้มีข้อดีและข้อเสียในการใช้งานที่แตกต่างกัน ซึ่งขึ้นอยู่กับ ลักษณะรูปร่างและการยึดรั้งโครงสร้าง ยกตัวอย่างเช่น คาน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-8a ซึ่งเป็นโครงสร้างที่มี degree of indeterminacy เท่ากับ 3 และเป็นโครงสร้างที่มีการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่าหรือ degree of freedom เท่ากับ 1 ดังนั้น ถ้าเราใช้ force method วิเคราะห์คานนี้ เราจะต้องแก้สมการหาค่าแรงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 3 ตัว แต่ถ้าเราใช้ displacement method วิเคราะห์คานนี้ เราจะแก้สมการหาค่า degree of freedom เพียง 1 ตัวเท่านั้น อย่างไรก็ตาม ถ้า จุดรองรับ *A* เปลี่ยนเป็นปลายอิสระดังที่แสดงในรูปที่ 1-8b แล้ว คานดังกล่าวจะเป็นโครงสร้างที่มี degree of indeterminacy เท่ากับ 1 และมี degree of freedom เท่ากับ 3 ซึ่งจะทำให้การวิเคราะห์คานโดย force method ได้เปรียบ displacement method เป็นต้น



# บทที่ 2 การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี Slope-Deflection

### 2.1 บทนำ

วิธีมุมลาด-ความแอ่นหรือ slope-deflection method เป็นวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างวิธีหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์ คานและโครงข้อแข็งที่เป็นโครงสร้าง statically indeterminate ได้เป็นอย่างดี วิธีการนี้เป็นการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี displacement method ซึ่งได้ถูกพัฒนาขึ้นมาโดย Heinrich Manderla และ Otto Mohr เพื่อที่จะใช้ในการศึกษา secondary stresses ที่เกิดขึ้นในโครงข้อหมุน และต่อมาในปี ค.ศ. 1915 วิธีการนี้ได้ถูกพัฒนาขึ้นใหม่เพื่อที่จะใช้ในการ วิเคราะห์คานและโครงข้อแข็งโดย G.A. Maney

#### Degrees of Freedom

เมื่อโครงสร้างถูกกระทำโดยแรงกระทำภายนอกแล้ว โครงสร้างจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปจากเดิม ในที่นี้ จุดบนโครงสร้างที่เราสนใจหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งจะถูกเรียกว่า nodes และการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่าที่เกิดขึ้นที nodes จะถูกเรียกว่า degree of freedom ของโครงสร้าง โดยที่แต่ละเทอมของ degree of freedom ของโครงสร้างจะต้อง เป็นอิสระต่อกัน

ในการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี displacement method เริ่มต้น เราจะหาว่าโครงสร้างมีการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ ทราบค่า (degree of freedom) ที่ node ใดบ้าง จากนั้น เราจึงจะทำการหาค่าของ degree of freedom เหล่านั้น

ในการหา degree of freedom ของโครงสร้าง เราจะจินตนาการให้โครงสร้างประกอบไปด้วยขึ้นส่วนต่างๆ ที่ถูก เชื่อมต่อกันที่ nodes ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว nodes จะอยู่ที่จุดเชื่อมต่อของชิ้นส่วนของโครงสร้าง (joint) จุดรองรับ (support) และจุดที่หน้าตัดของโครงสร้างหรือชิ้นส่วนของโครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงแบบฉับพลัน

ในโครงสร้าง เช่น คานหรือโครงข้อแข็ง เป็นต้น ที่อยู่ใน 3 มิติ แต่ละ node ของโครงสร้างจะมีจำนวน degree of freedoms ได้มากที่สุด 6 ค่าคือ

- การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นตรง (linear displacements) 3 ค่า
- การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุน (rotational displacements) 3 ค่า

ถ้าโครงสร้างเป็นโครงสร้างใน 2 มิติแล้ว แต่ละ node ของโครงสร้างจะมีจำนวนของ degree of freedoms ได้ มากที่สุด 3 ค่าคือ

- การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นตรง 2 ค่า
- การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงหมุน 1 ค่า

โดยทั่วไปแล้ว จำนวน degree of freedoms ที่ node ใด node หนึ่งของโครงสร้างจะขึ้นอยู่กับชนิดของจุดรองรับ และสมมุติฐานที่เกี่ยวกับพฤติกรรมของโครงสร้าง ยกตัวอย่างเช่น

- ในกรณีของโครงข้อหมุน แต่ละ node (ซึ่งคือ joint ของโครงข้อหมุน) จะมีจำนวน degree of freedoms ได้ สองค่าเท่านั้นคือ การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวนอนและการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง เนื่องจากชิ้นส่วนของ โครงข้อหมุนจะมีเฉพาะการยืดและหดตัวเท่านั้น โดยไม่มีการดัดเกิดขึ้นภายใต้แรงกระทำ
- ในกรณีของคาน แต่ละ node ที่เป็นจุดรองรับของคานจะถูกพิจารณาให้มีจำนวน degree of freedoms เพียงหนึ่งค่าเท่านั้นคือ ความลาดเอียง (slope) เนื่องจากในการวิเคราะห์คาน เราจะสมมุติให้คานถูกทำให้ เปลี่ยนแปลงรูปร่างโดยโมเมนต์ดัด (bending moment) เท่านั้น และการเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจากแรงใน แนวแกนและแรงเฉือนมีค่าเป็นศูนย์ แต่ถ้า node เป็นปลายอิสระของคานแล้ว node ดังกล่าวจะมีจำนวน degree of freedoms เท่ากับสองค่าคือ การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่งและความลาดเอียง

 ในกรณีของโครงข้อแข็ง แต่ละ node จะมีจำนวน degree of freedoms ได้จากหนึ่งถึงสามค่า เพื่อให้เกิดความเข้าใจใน concept ของ degree of freedoms ดีขึ้น ให้เราศึกษาตัวอย่าง 4 ตัวอย่างต่อไปนี้



ฐปที่ 2-1

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-1a ซึ่งมี node อยู่ที่จุดรองรับ A และจุดรองรับ B จากรูป เนื่องจากจุดรอง รับที่ A เป็น roller และถ้าเราไม่พิจารณาการยืดตัวหรือหดตัวในแนวแกนของคานแล้ว node A ของคานจะเกิดการหมุน ได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น และเนื่องจากจุดรองรับที่ B เป็นจุดรองรับแบบยึดแน่น (fixed support) ดังนั้น node B จะไม่ มีการเปลี่ยนตำแหน่งเกิดขึ้นได้เลย ดังนั้น คานนี้จึงมีจำนวน degree of freedom 1 ค่าคือ  $\theta_A$ 

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-1b ซึ่งมี node อยู่ที่จุดรองรับแบบหมุด (pin ) ที่ A จุดรองรับแบบ roller ที่ B และปลายอิสระ (free end) ที่ C ดังนั้น คานนี้จะมีจำนวน degree of freedom 4 ค่าคือ การหมุน  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ , และ  $\theta_C$  และค่าการโก่งตัว  $\Delta_C$ 

พิจารณาโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-1c ถ้าเราไม่พิจารณาการยึดตัวหรือหดตัวในแนวแกนของซิ้นส่วนของ โครงข้อแข็งแล้ว แรงกระทำ P จะทำให้ node ที่จุดเชื่อมต่อ B และจุดเชื่อมต่อ C เกิดการหมุน และจะทำให้จุดทั้งสอง นี้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวนอนที่มีค่าเท่ากัน นอกจากนั้นแล้ว เนื่องจากจุดรองรับที่ A และที่ D เป็นจุดรองรับแบบ ยึดแน่น (fixed support) ซึ่งไม่มีการเปลี่ยนตำแหน่งเกิดขึ้นได้เลย ดังนั้น โครงข้อแข็งนี้จะมีจำนวน degree of freedoms 3 ค่าคือ การหมุน θ<sub>B</sub>, θ<sub>C</sub>, และการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวนอน Δ<sub>B</sub>

พิจารณาโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-1d ซึ่งมี node อยู่ที่จุดเชื่อมต่อ (joints) ของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อ หมุน ซึ่ง node เหล่านี้สามารถที่จะเปลี่ยนตำแหน่งได้ทั้งในแนวนอนและแนวดิ่ง ยกเว้นที่จุดรองรับ A ซึ่งเป็นหมุด (pin) (ซึ่งไม่สามารถที่จะเปลี่ยนตำแหน่งได้ในแนวนอนและแนวดิ่ง) และที่จุดรองรับ D ซึ่งเป็น roller (เปลี่ยนตำแหน่งได้เฉพาะ ในแนวนอน) ดังนั้น โครงข้อหมุนนี้จึงมีจำนวน degree of freedom ทั้งหมด 9 ค่า (2x6-2-1=9)

### 2.2 สมการ Slope-Deflection

วิธี consistent deformation และ theorem of least work ที่เราได้ศึกษาไปแล้วนั้นมีข้อเสียเปรียบต่อวิธี slopedeflection ในกรณีที่โครงสร้างมีจำนวนของ degree of indeterminacy สูงๆ แต่มีจำนวน degree of freedom น้อย ยกตัว อย่างเช่น โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-2 ซึ่งมี degree of indeterminacy เท่ากับ 6 แต่มีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 1 เป็นต้น ในการวิเคราะห์โครงข้อแข็งนี้โดยวิธี consistent deformation และ theorem of least work เราจะต้องแก้ สมการหาค่าแรงที่ไม่ทราบค่าของคานทั้งสิ้น 6 ค่า ซึ่งจะต้องใช้เวลาในการคำนวณด้วยมือที่นานมาก แต่ถ้าเราใช้วิธี slope-deflection วิเคราะห์โครงข้อแข็งดังกล่าวแล้ว เราจะทำการแก้สมการหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่าเพียง 1 ค่าเท่านั้น



ในวิธี slope-deflection โครงข้อแข็งดังกล่าว เริ่มต้น เราจะทำการระบุ node และกำหนดการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ ทราบค่า (degree of freedom) ของโครงข้อแข็ง แล้วเขียนสมการความสัมพันธ์ของแรงภายในและการเปลี่ยนตำแหน่งของ ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็ง จากนั้น แทนสมการความสัมพันธ์ดังกล่าวลงไปในสมการความสมดุลที่ nodes ของโครงข้อ แข็ง แล้วทำการแก้สมการเพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่า จากนั้น เราจะหาแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งได้โดยการแทนค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่คำนวณได้กลับลงในสมการความสัมพันธ์ของแรงภายในและการ เปลี่ยนตำแหน่ง สุดท้าย ทำการเขียนแผนภาพ shear diagram แผนภาพ moment diagram และคำนวณหาค่าการเปลี่ยน ตำแหน่งที่จุดต่างๆ บน elastic curve ของโครงข้อแข็งที่เราต้องการ

### การหาสมการ slope-deflection

พิจารณาชิ้นส่วน *AB* ของคานต่อเนื่อง (continuous beam) ดังที่แสดงอยู่ในรูปที่ 2-3 ซึ่งถูกกระทำโดยแรง กระทำแบบกระจาย *w* และโดยแรงกระทำแบบเป็นจุด *P* กำหนดให้ชิ้นส่วนดังกล่าวมีค่าความแกร่งต่อการดัด (flexural stiffness) *EI* คงที่ตลอดความยาว



EI is constant positive sign convention



ในการพิจารณาต่อไปนี้ เราต้องการที่จะหาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ (moment) ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของ ชิ้นส่วน *AB* (*M<sub>AB</sub>* และ *M<sub>BA</sub>*) กับแรงกระทำภายนอกและการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node *A* และ node *B* ซึ่ง ประกอบไปด้วย

- การหมุน  $heta_{\scriptscriptstyle A}$
- การหมุน  $heta_{\scriptscriptstyle B}$
- การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นตรง A (ซึ่งอาจจะเกิดจากการทรุดตัวของฐานราก)

้ในการหาความสัมพันธ์ดังกล่าว เราจะใช้สมมุติฐานดังต่อไปนี้

- 1. การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนของโครงสร้าง เนื่องจากแรงในแนวแกนและแรงเฉือนมีค่าน้อยมาก เมื่อ เปรียบเทียบกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากโมเมนต์ดัด (bending moment)
- จุดเชื่อมต่อของโครงสร้างเป็นจุดเชื่อมต่อที่มีความแกร่ง (rigid joint) ซึ่งมุมระหว่างชิ้นส่วนของโครงสร้างที่จุด เชื่อมต่อจะมีค่าคงเดิมก่อนหรือหลังจากที่โครงสร้างถูกกระทำโดยแรง

และเราจะใช้ sign convention ดังต่อไปนี้

- moment ( M<sub>AB</sub> และ M<sub>BA</sub>) ที่กระทำอยู่ที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงสร้าง (ไม่ใช่ที่ joint) หรือ end moment จะมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางหมูนตามเข็มนาฬิกา
- การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงมุม (
   *θ*<sub>A</sub> และ *θ*<sub>B</sub>) ที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงสร้างจะมีค่าเป็นบวก เมื่อเส้นสัมผัส
   (tangent) ที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงสร้างที่เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมีทิศทางหมุนตามเข็มนาฬิกาจาก
   แนวแกนเดิมของโครงสร้าง
- การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นตรง Δ จะมีค่าเป็นบวก เมื่อการเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าวมีทิศทางที่ทำให้ชิ้นส่วน
   ของโครงสร้างเกิดการหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาไปจากแนวแกนเดิมของโครงสร้าง (มุม ψ)

โดยใช้หลักการ principle of superposition และรูปที่ 2-3 เราจะหา moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของ คาน *AB* ได้จากผลรวมของ moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคาน *AB* ในแต่ละกรณี ดังต่อไปนี้

- AD and AD with induced the second secon
  - 1. moment เนื่องจากการหมุนที่ปลาย A ( $heta_{\scriptscriptstyle A}$ ) เมื่อปลาย B ถูกยึดแน่น
  - 2. moment เนื่องจากการหมุนที่ปลาย B ( $heta_{\scriptscriptstyle B}$ ) เมื่อปลาย A ถูกยึดแน่น
  - moment เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นตรงสัมพัทธ์ที่ปลาย B เทียบกับที่ปลาย A (Δ) โดยที่ปลาย ทั้งสองไม่มีการหมุนเกิดขึ้น
  - 4. moment เนื่องจากการกระทำของแรงภายนอกโดยที่ปลายทั้งสองถูกยึดแน่น

ขอให้สังเกตด้วยว่า เมื่อทำการรวมการหมุนที่ปลาย A จากทั้งสี่กรณี เราจะได้ผลลัพธ์เป็นการหมุน  $\theta_A$  ดังที่ เกิดขึ้นที่ปลาย A ของชิ้นส่วนของคานในรูปที่ 2-3 และเมื่อทำการรวมการหมุนและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย B จาก ทั้งสี่กรณี เราจะได้ผลลัพธ์เป็นการหมุน  $\theta_B$  และการเปลี่ยนตำแหน่ง  $\Delta$  ดังที่เกิดขึ้นที่ปลาย B ของชิ้นส่วนของคานใน รูปที่ 2-3

# กรณีที่ 1 moment เนื่องจากการหมุนที่ปลาย A ( $heta_{_A}$ ) เมื่อปลาย B ถูกยึดแน่น

กำหนดให้ node A ของชิ้นส่วนของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-4a มีการหมุนเกิดขึ้นเท่ากับ  $+ heta_A$  ในทิศตามเข็ม นาฬิกา ขณะที่ node B ถูกยึดติดแน่น ( $heta_B = 0$ ) การเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าวจะทำให้เกิดแรงเฉือนและ moment ขึ้นที่ node A และ node B ของคาน ดังที่แสดงในรูป และเราจะหาค่าของ moment  $M_{AB}$  และ  $M_{BA}$  ได้โดยใช้วิธี conjugate-beam ดังนี้

จากรูปที่ 2-4b ซึ่งแสดง conjugate beam ของคานในรูปที่ 2-4a เราจะได้ว่า end shear ที่เกิดขึ้นที่ปลาย A'ของ conjugate beam จะมีทิศทางพุ่งลงข้างล่าง เนื่องจากมุม  $heta_A$  มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา และเนื่องจากค่าการโก่งตัว ของคานที่จุดรองรับ A และ B มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น ผลรวมของ moment ที่เกิดขึ้นที่ปลาย A' และ B' ของ conjugate beam จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\begin{split} \mathbf{L} + \sum M_{A'} &= 0; \\ \mathbf{L} + \sum M_{B'} &= 0; \\ \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M_{BA} \\ EI \end{pmatrix} L \end{bmatrix} \frac{L}{3} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M_{AB} \\ EI \end{pmatrix} L \end{bmatrix} \frac{2L}{3} + \theta_A L = 0 \end{split}$$

หลังจากที่เราแก้สมการทั้งสอง เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L} \theta_{A}$$
(2-1)  
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} \theta_{A}$$
(2-2)



กรณีที่ 2 moment เนื่องจากการหมุนที่ปลาย B ( $heta_{\scriptscriptstyle B}$ ) เมื่อปลาย A ถูกยึดแน่น

ในลักษณะที่คล้ายกับในกรณีที่ 1 กำหนดให้ node B ของชิ้นส่วนของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-5 มีการหมุนเกิด ขึ้นเท่ากับ  $+ \theta_B$  ในทิศตามเข็มนาฬิกา และ node A ซึ่งอยู่ที่ปลายอีกด้านหนึ่งถูกยึดติดแน่น ( $\theta_A = 0$ ) โดยวิธี conjugate-beam เราจะหา moment  $M_{AB}$  และ  $M_{BA}$  ได้เท่ากับ

$$M_{BA} = \frac{4EI}{L} \theta_B \tag{2-3}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\theta_B \tag{2-4}$$



**กรณีที่ 3** moment เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นตรงสัมพัทธ์ที่ปลาย B เทียบกับที่ปลาย A ( $\Delta$ ) โดยที่ปลาย ทั้งสองไม่มีการหมุนเกิดขึ้น

กำหนดให้ node *B* ของขึ้นส่วนของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-6a มีการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ ∆ ในทิศดิ่งลง เทียบกับ node *A* โดยที่ทำให้ cord ของขึ้นส่วนของคานมีการหมุนในทิศตามเข็มนาฬิกาเทียบกับแนวคานเริ่มต้น และ กำหนดให้ปลายทั้งสองของขึ้นส่วนของคานไม่มีการหมุนเกิดขึ้น (ถูกยึดแน่น) การเปลี่ยนตำแหน่งดังกล่าวจะทำให้เกิดแรง เฉือนและ moment ขึ้นที่ node *A* และ node *B* ของคาน ดังที่แสดงในรูป โดยที่ moment ที่ปลายทั้งสองมีค่าเท่ากันคือ *M* และเราจะหาค่าของ moment *M* ได้โดยใช้วิธี conjugate-beam ดังที่แสดงอยู่ในรูปที่ 2-6b

จากรูปที่ 2-6b เราจะเห็นว่า ปลายของ conjugate beam จะเป็นอิสระทั้งสองข้างเนื่องจาก node A และ node B ของขึ้นส่วนของคานจริงถูกยึดแน่น นอกจากนั้นแล้ว เนื่องจากมีการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์  $\Delta$  เกิดขึ้นที่ node B ดัง นั้น conjugate beam จะต้องถูกกระทำโดย moment ขนาด  $\Delta$  ที่ปลาย B' ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

โดยการรวม moment รอบปลาย  $B^\prime$  ของ conjugate beam เราจะได้ว่า

$$4 + \sum M_{B'} = 0;$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI}\right)L\right]\frac{2L}{3} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI}\right)L\right]\frac{L}{3} + \Delta = 0$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$M = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$$

moment M มีเครื่องหมายเป็นลบ แสดงว่า M มีทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้น

ทยเป็นลบ แสดงว่า 
$$M$$
 มิทิศทวนเข้มนาฬิกา ดังนั้น  

$$M_{AB} = M_{BA} = -\frac{6EI}{L^2} \Delta$$
real beam
(a)
(a)
(b)
21/17/2-6

**กรณีที่** 4 moment เนื่องจากการกระทำของแรงภายนอกโดยที่ปลายทั้งสองถูกยึดแน่น

ในกรณีนี้ เราจะหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอกที่กระทำอยู่บนชิ้นส่วนของโครงสร้างกับ moment ปฏิกริยา ที่เกิดขึ้นที่ node A และ node B ( M \_ B และ M \_ A ) โดยที่ปลายทั้งสองของชิ้นส่วนของโครงสร้างถูกยึดแน่น

(2-5)

เพื่อเป็นตัวอย่างในการหา moment ดังกล่าว พิจารณาชิ้นส่วนของคานที่ถูกรองรับแบบยึดแน่นที่ nodes ทั้งสอง ของคานและถูกกระทำโดยแรงกระทำเป็นจุด P ที่จุดกึ่งกลางของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-7a เนื่องจากความสมมาตร ของคาน แรงกระทำดังกล่าวจะทำให้เกิดแรงเฉือนปฏิกริยา และ moment ปฏิกิริยาขึ้นที่ node A และ node B ของคาน เท่ากับ  $V_A = V_B = V$  และ  $M_A = M_B = M$  ตามลำดับ และมีทิศทางดังที่แสดงในรูปที่ 2-7a

เราจะหา moment ปฏิกิริยา *M* ได้โดยใช้วิธี conjugate-beam โดย conjugate beam ของคานดังกล่าวจะมี ลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 2-7b ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจาก slope และค่าการโก่งตัวที่จุดรองรับทั้งสองของคานมีค่าเท่า กับศูนย์ ดังนั้น แรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายทั้งสองของ conjugate-beam จึงมีค่าเป็นศูนย์ และจากสมการความ สมดุลของแรง เราจะได้ว่า

$$+\uparrow \sum F_{y} = 0; \qquad \qquad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)L\right] - 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{M}{EI}\right)L\right] = 0$$
$$M = \frac{PL}{8}$$

สมการของ moment ที่ได้นี้มักถูกเรียกว่า fixed-end moment (*FEM*) เราควรสังเกตด้วยว่า จาก sign convention ที่เราใช้ *FEM* ที่ node *A* จะมีค่าเป็นฉบ (ทวนเข็มนาฬิกา) และ *FEM* ที่ node *B* จะมีค่าเป็นบวก (ตามเข็มนาฬิกา)



ตารางที่ 2-1 แสดงสมการของ fixed-end moment (*FEM*) ของคานที่ถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกในกรณี ต่างๆ จาก sign convention ที่เราใช้ fixed-end moment ที่ node *A* ซึ่งมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจะมีค่าเป็นลบและ fixed-end moment ที่ node *B* ซึ่งมีทิศทางตามเข็มนาฬิกาจะมีค่าเป็นบวก

เราควรทราบด้วยว่า fixed-end moment ของคานใน column ทางด้านซ้ายมือของตารางที่ 2-1 นั้นเป็น fixedend moment ของคานในกรณีที่ปลายด้านหนึ่งของคานถูกรองรับโดยหมุดหรือ roller ซึ่งทำให้คานดังกล่าวมี fixed-end moment ที่ node *A* เท่านั้น





#### สมการ Slope-Deflection

ถ้าเรานำสมการของ moment ต่างๆ ที่เกิดขึ้นที่ node A และ node B ของคาน เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่ง (สมการที่ 2-1 ถึง 2-5) และแรงกระทำภายนอก (ในรูปของ fixed end moment) มารวมกันแล้ว เราจะเขียนผลรวมดังกล่าว ได้อยู่ในรูป

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_{A} + \theta_{B} - 3\frac{\Delta}{L}\right] + (FEM)_{AB}$$
$$M_{BA} = 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_{B} + \theta_{A} - 3\frac{\Delta}{L}\right] + (FEM)_{BA}$$
(2-7)

้ โดยสรุปแล้ว เนื่องจากสมการทั้งสองนี้มีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน เมื่อเรากำหนดให้ปลายด้านหนึ่งของชิ้นส่วนของ โครงสร้างเป็นปลายด้านใกล้ (near end หรือ N) และปลายอีกด้านหนึ่งเป็นปลายด้านไกล (far end หรือ F) และ กำหนดให้ความแกร่งของขึ้นส่วนของโครงสร้าง (member stiffness)  $k=I \ / \ L$  และการหมุนของ cord ของขึ้นส่วนของ โครงสร้าง  $\psi=\Delta/L$  แล้ว เราจะเขียนสมการที่ 2-7 ใหม่ได้เป็น

$$M_N = 2Ek(2\theta_N + \theta_F - 3\psi) + (FEM)_N \tag{2-8}$$

เมื่อ

 $M_{\scriptscriptstyle N}=\,$ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านใกล้ ซึ่งมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางหมุนตามเข็มนาฬิกา  $E = ext{modulus of elasticity ของวัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนของโครงสร้าง}$ 

 $heta_{\scriptscriptstyle N}, heta_{\scriptscriptstyle F} =$ ค่าการหมุนที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านใกล้และปลายด้านไกลของชิ้นส่วนของโครงสร้าง ตามลำดับ ซึ่งมี หน่วยเป็น radian และมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางหมุนตามเข็มนาฬิกา

 $\psi$  = การหมุนของ cord ของชิ้นส่วนของโครงสร้างเนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นตรง  $\Delta$  ซึ่งมีหน่วยเป็น radian และมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางหมุนตามเข็มนาฬิกา

(FEM)<sub>N</sub> = fixed-end moment ที่ปลายด้านใกล้ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง ซึ่งมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทาง หมุนตามเข็มนาฬิกา

### ปลายด้านอกถูกรองรับโดยหมุดหรือ roller



เมื่อปลายของคานหรือโครงข้อแข็งถูกรองรับโดยหมุดหรือ roller ดังที่แสดงในรูปที่ 2-8 แล้ว ค่า moment ที่ปลาย ดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น จากสมการที่ 2-7 เราจะได้ว่า โมเมนต์ที่ node A จะอยู่ในรูป

$$M_{AB} = 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\Delta}{L}\right] + (FEM)_{AB}$$
(2-9a)

และโมเมนต์ที่ node B จะอยู่ในรูป

$$0 = 2E\left(\frac{I}{L}\right)\left[2\theta_B + \theta_A - 3\frac{\Delta}{L}\right]$$
(2-9b)

ทำการจัดรูปสมการที่ 2-9b ใหม่ เราจะได้ว่า

$$\theta_{\scriptscriptstyle B} = -\frac{\theta_{\scriptscriptstyle A}}{2} + \frac{3}{2}\frac{\Delta}{L}$$

จากนั้น แทนสมการของ  $heta_{\scriptscriptstyle B}$  ลงในสมการที่ 2-9a เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = 3E\left(\frac{I}{L}\right)\left[\theta_{A} - \frac{\Delta}{L}\right] + (FEM)_{AB}$$

หรือ

$$M_N = 3Ek(\theta_N - \psi) + (FEM)_N \tag{2-10}$$

จากสมการที่ 2-10 เมื่อเราใช้ค่า (FEM)<sub>N</sub> = (FEM)<sub>AB</sub> ของกรณีที่ปลายของคานหรือโครงข้อแข็งถูกรองรับ โดยหมุดหรือ roller ดังที่แสดงในรูปที่ 2-9 แล้ว เราจะเห็นว่า ในช่วงของคาน AB เราจะมีสมการ slope-deflection เพียง แค่สมการเดียวเท่านั้น ซึ่งจะลดจำนวนของสมการ slope-deflection จากกรณีปกติลงได้หนึ่งสมการและจะลดจำนวน degree of freedom ของโครงสร้างลงหนึ่งค่าด้วย ดังนั้น เมื่อเราใช้สมการดังกล่าวแล้ว เราไม่จำเป็นที่จะต้องพิจารณา ความสมดุลของ moment ที่ปลายดังกล่าวของโครงสร้าง



ฐปที่ 2-9

# 2.3 การวิเคราะห์คานโดยวิธี Slope-Deflection ขั้นตอนในการวิเคราะห์

- จากตารางที่ 2-1 หาค่า fixed-end moment ของโครงสร้างแต่ละช่วง ถ้าปลายด้านนอกของชิ้นส่วนของโครง สร้างถูกรองรับโดยหมุดหรือ roller ให้ใช้ตารางทางด้านขวามือ และในกรณีอื่นๆ ให้ใช้ตารางทางด้านซ้ายมือ
- 2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection ของโครงสร้างแต่ละช่วง
- เขียนสมการความสมดุลที่ joint หรือ support ต่างๆ ของโครงสร้าง โดยใช้เงื่อนไขที่ว่า ผลบวกทางพีชคณิต ของ moment ที่ joint หรือ support ใดๆ จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วแทนสมการ slope-deflection ที่ได้จาก ข้อที่ 2 ลงในสมการความสมดุลดังกล่าว จากนั้น ทำการแก้สมการหลายชั้น (simultaneous equation) หาค่า slope และการโก่งตัวที่เกิดขึ้นที่ joint หรือ support ต่างๆ ของโครงสร้าง
- 4. แทนค่า slope และการโก่งตัวที่หาได้ในข้อที่ 3 กลับลงในสมการ slope-deflection ในข้อที่ 2 เพื่อหาค่า moment ที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงสร้าง (end-moment)
- 5. ใช้สมการความสมดุลหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงสร้างและเขียนแผนภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram
- 6. ทำการร่าง elastic curve ของโครงสร้างและหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่างๆ ของโครงสร้าง

### ตัวอย่างที่ 2-1

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน statically indeterminate ดังที่แสดงในรูปที่ 2-1a โดยวิธี slope-deflection กำหนดให้คานมีค่า moment of inertia  $I_{AB} = 0.006 \text{ m}^4$ ,  $I_{BC} = 0.008 \text{ m}^4$ , และ modulus of elasticity E = 200 GPa จากนั้น จงร่าง elastic curve ของคาน



ในที่นี้ เราจะต้องแบ่งคานออกเป็น 2 ช่วงคือ AB และ BC และคานตามรูปมีจำนวน degree of freedom เท่า กับ 3 คือ การหมุน  $\theta_A$  ที่จุดรองรับ A, การหมุน  $\theta_B$  ที่จุดรองรับ B, และ การหมุน  $\theta_C$  ที่จุดรองรับ C แต่เนื่องจากจุด รองรับ A และ C ของคานเป็น pin และ roller ตามลำดับ ดังนั้น ถ้าเราใช้สมการ slope-deflection สำหรับกรณีดัง กล่าวแล้ว จำนวน degree of freedom ของคานจะลดลงเหลือเท่ากับ 1 เท่านั้นคือ  $\theta_B$ 

1. หาค่า fixed-end moment

เนื่องจากจุดรองรับ A และ C ของคานเป็น roller และ hinge ตามลำดับ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$(FEM)_{BA} = +\frac{wL^2}{8} = \frac{8(5)^2}{8} = 25 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{12(6)^2}{8} = -54 \text{ kN} - \text{m}$ 

2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection

เนื่องจากจุดรองรับ A และ C ของคานเป็น pin และ roller ตามลำดับ ดังนั้น สมการ slope-deflection จะอยู่ ในรูป

$$M_{N} = 3Ek(\theta_{N} - \psi) + (FEM)_{N}$$
$$M_{BA} = 3E\frac{I_{AB}}{L_{AB}}(\theta_{B} - 0) + 25 = \frac{3}{5}EI_{AB}(\theta_{B}) + 25$$
$$M_{BC} = \frac{1}{2}EI_{BC}(\theta_{B}) - 54$$

3. สมการความสมดุล



พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของจุดรองรับ *B* ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-1b จากสมการความสมดุล ของโมเมนต์ เราจะได้ว่า

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$
  
$$\frac{3}{5}E(0.006)\theta_{B} + 25 + \frac{1}{2}E(0.008)\theta_{B} - 54 = 0$$
  
$$\theta_{B} = \frac{3815.79}{E} = 1.9079(10^{-5}) \text{ radian}$$

4. แทนค่ากลับ

แทนค่า  $heta_{\scriptscriptstyle B}$  กลับลงในสมการ slope-deflection เพื่อหาค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนทั้งสองของคาน

$$M_{BA} = 38.74 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $M_{BC} = -38.74 \text{ kN} - \text{m}$ 

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน

ให้ end moment ที่หาได้กระทำต่อช่วงทั้งสองของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-1c จากนั้น เราจะใช้สมการความ สมดุลของส่วนของคาน *AB* และ *BC* หาค่าของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายต่างๆ ของส่วนของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-1c



จากนั้น ทำการเขียน shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-1d



5. ร่าง elastic curve ของคาน

โดยใช้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่หาได้ในขั้นตอนที่ 3 แผนภาพ moment diagram และการพิจารณาการยึดรั้งคาน ของจุดรองรับ เราจะเขียน elastic curve ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-1e สุดท้าย เราจะหาค่า slope และ deflection ที่จุดต่างๆ ของคานได้ โดยใช้วิธีการต่างๆ ที่ได้ศึกษาไปแล้ว เช่น conjugate beam เป็นต้น

Ans.



## ตัวอย่างที่ 2-2

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน statically indeterminate ซึ่งมีค่า  $EI_{AB} = 100 \,\mathrm{kN} - \mathrm{m}^2$  และ  $EI_{BC} = 200 \,\mathrm{kN} - \mathrm{m}^2$  ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-2a โดยวิธี slope-deflection กำหนดให้ คานมีการทรุดตัวในแนวดิ่งที่จุดรองรับ *B* เท่ากับ 10 mm จากนั้น จงหาค่าการโก่งตัวของคานที่จุด *D* และร่าง elastic curve ของคาน



เนื่องจากคานตามรูปมีจุดรองรับ A และ C เป็นแบบยึดแน่น ดังนั้น คานจึงมีจำนวน degree of freedom เท่า กับ 1 คือ การหมุน  $heta_B$  ที่จุดรองรับ B

1. หาค่า fixed-end moment

$$(FEM)_{AB} = -\frac{Pab^{2}}{L^{2}} = -\frac{10(1)2^{2}}{3^{2}} = -4.444 \text{ kN} - \text{m}$$

$$(FEM)_{AB} = +\frac{Pba^{2}}{L^{2}} = -\frac{10(2)1^{2}}{3^{2}} = +2.222 \text{ kN} - \text{m}$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^{2}}{12} = -\frac{2(5)^{2}}{12} = -4.167 \text{ kN} - \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = +4.167 \text{ kN} - \text{m}$$

2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection

กำหนดให้  $EI_{AB} = EI$  ดังนั้น  $EI_{BC} = 2EI$ 

$$M_{AB} = 2E \frac{I_{AB}}{L_{AB}} (2\theta_A + \theta_B - 3\psi_{AB}) + (FEM)_{AB}$$
$$M_{AB} = \frac{2EI}{3} \left[ \theta_B - 3\left(\frac{0.010}{3}\right) \right] - 4.444 = EI \left[\frac{2\theta_B}{3} - \frac{0.020}{3}\right] - 4.444$$
$$M_{BA} = EI \left[\frac{4\theta_B}{3} - \frac{0.020}{3}\right] + 2.222$$
$$M_{BC} = \frac{2(2EI)}{5} \left[ 2\theta_B - 3\left(-\frac{0.010}{5}\right) \right] - 4.167 = EI \left[\frac{8\theta_B}{5} + \frac{0.120}{25}\right] - 4.167$$

$$M_{CB} = EI\left[\frac{4\theta_B}{5} + \frac{0.120}{25}\right] + 4.167$$

3. สมการความสมดุล



พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของจุดรองรับ *B* ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-2c จากสมการความสมดุล ของโมเมนต์ เราจะได้ว่า

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$
  
 $EI[2.933\theta_B - 0.001867] = 1.945$   
 $\theta_B = 7.27(10^{-3})$  radian

เครื่องหมายบวก แสดงว่า  $heta_{\scriptscriptstyle B}$  มีทิศการหมุนตามเข็มนาฬิกา

4. แทนค่ากลับ

แทนค่ามุม  $heta_{\scriptscriptstyle B}$  กลับลงในสมการ slope-deflection เพื่อหาค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนทั้งสองของ คาน เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = -4.626 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $M_{BA} = +2.525 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{BC} = -2.525 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{CB} = +5.229 \text{ kN} - \text{m}$ 

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน

ให้ end moment ภายในที่หามาได้กระทำต่อช่วงทั้งสองของคาน แล้วใช้สมการความสมดุลหาค่าของแรงเฉือนที่ เกิดขึ้นที่ปลายต่างๆ ของส่วนของคาน ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพ free-body diagram ของช่วงทั้งสองของคานได้ ดังที่แสดง ในรูปที่ Ex 2-2d



จากนั้น ใช้ free-body diagram ของคานเพื่อทำการเขียน shear diagram และ moment diagram ดังที่แสดงใน รูปที่ Ex 2-2e



6. หาค่าการโก่งตัวของคานที่จุด D

โดยใช้วิธี conjugate beam เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของขึ้นส่วน A'D' ของ conjugate beam ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-2f ขอให้สังเกตด้วยว่าเนื่องจากจุดรองรับ A เป็นจุดรองรับแบบยึดแน่น ซึ่งทำให้ $\theta_A$  และ  $\Delta_A$  มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น เราจะได้ว่า ที่ปลาย A' ของ conjugate beam จะเป็นปลายอิสระที่ไม่ถูกกระทำโดยแรง เฉือนและ moment



$$\begin{split} \sum M_{D'} &= 0; \\ \Delta_D &= M' = \frac{1}{2} \frac{2.741}{EI} (0.372) \frac{0.372}{3} - \frac{1}{2} \frac{4.626}{EI} (0.628) \bigg[ 0.372 + \frac{2}{3} (0.628) \bigg] = -\frac{1.085}{EI} \\ \Delta_D &= 0.011 \,\mathrm{m} \,\, \bar{\mathrm{Mer}}$$
 Ans

7. ร่าง elastic curve ของคาน

จากค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่หาได้ แผนภาพ moment diagram และการพิจารณาการยึดรั้งคานของจุดรองรับ เราจะร่าง elastic curve ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-2g



Ans.

Ans.

### ตัวอย่างที่ 2-3

จงวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-3a โดยวิธี slope-deflection กำหนดให้ *EI* = 10000 kN - m<sup>2</sup> ตลอดช่วงความยาวของคาน จากนั้น ทำการเขียน shear diagram, moment diagram, และ elastic curve ของคาน



ในที่นี้ คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-3a มีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 5 คือ การหมุน  $\theta_A$ ,  $\theta_B$ ,  $\theta_C$ ,  $\theta_D$ , และ  $\theta_E$  แต่เนื่องจากส่วน EF ของคานเป็นปลายยื่น ซึ่งเราจะลดรูปคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-3b และเนื่อง จากจุดรองรับ A เป็นหมุด (pin) ที่อยู่ด้านนอก ดังนั้น ถ้าเราใช้สมการ slope-deflection สำหรับกรณีดังกล่าวแล้ว จำนวน degree of freedom ของคานจะลดลงเหลือเท่ากับ 4 เท่านั้นคือ  $\theta_B$ ,  $\theta_C$ ,  $\theta_D$ , และ  $\theta_E$ 

1. หาค่า fixed-end moment

และ

เนื่องจากจุดรองรับ A เป็นหมุด (pin) ที่อยู่ด้านนอกของคาน ดังนั้น

$$(FEM)_{BA} = +\frac{wL^2}{8} = \frac{3(3)^2}{8} = 3.375 \text{ kN} - \text{m}$$
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{3(3)^2}{12} = -2.25 \text{ kN} - \text{m}$$
$$(FEM)_{CB} = 2.25 \text{ kN} - \text{m}$$
$$(FEM)_{CD} = -\frac{PL}{8} = -\frac{8(3)}{8} = -3.0 \text{ kN} - \text{m}$$
$$(FEM)_{DC} = 3.0 \text{ kN} - \text{m}$$
$$(FEM)_{DE} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{3(3)^2}{12} = -2.25 \text{ kN} - \text{m}$$
$$(FEM)_{ED} = 2.25 \text{ kN} - \text{m}$$

2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection

เนื่องจากจุดรองรับ A เป็นหมุด (pin) ที่อยู่ด้านนอกของคาน ดังนั้น

$$M_{BA} = 3E \frac{I_{AB}}{L_{AB}} (\theta_B - 0) + 3.375 = EI\theta_B + 3.375$$

$$M_{BC} = 2E \frac{I_{BC}}{L_{BC}} (2\theta_B + \theta_C - 0) - 2.25 = \frac{4}{3} EI\theta_B + \frac{2}{3} EI\theta_C - 2.25$$
$$M_{CB} = \frac{2}{3} EI\theta_B + \frac{4}{3} EI\theta_C + 2.25$$
$$M_{CD} = \frac{4}{3} EI\theta_C + \frac{2}{3} EI\theta_D - 3$$
$$M_{DC} = \frac{2}{3} EI\theta_C + \frac{4}{3} EI\theta_D + 3$$
$$M_{DE} = \frac{4}{3} EI\theta_D + \frac{2}{3} EI\theta_E - 2.25$$
$$M_{ED} = \frac{2}{3} EI\theta_D + \frac{4}{3} EI\theta_E + 2.25$$

3. สมการความสมดุล

จากสมการความสมดุลของโมเมนต์ที่จุดรองรับ B เราจะได้ว่า

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$\frac{7}{3}EI\theta_B + \frac{2}{3}EI\theta_C = -1.125$$

จากสมการความสมดุลของโมเมนต์ที่จุดรองรับ C เราจะได้ว่า

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$\frac{2}{3}EI\theta_{B} + \frac{8}{3}EI\theta_{C} + \frac{2}{3}EI\theta_{D} = 0.75$$

จากสมการความสมดุลของโมเมนต์ที่จุดรองรับ D เราจะได้ว่า

$$M_{DC} + M_{DE} = 0$$

$$\frac{2}{3}EI\theta_C + \frac{8}{3}EI\theta_D + \frac{2}{3}EI\theta_E = -0.75$$

จากสมการความสมดุลของโมเมนต์ที่จุดรองรับ E เราจะได้ว่า

$$M_{ED} - 7.5 = 0$$
$$\frac{2}{3}EI\theta_D + \frac{4}{3}EI\theta_E = 5.25$$

เมื่อทำการแก้สมการเชิงซ้อน (simultaneous equation) แล้ว เราจะได้

$$\theta_{B} = -\frac{0.7366}{EI} = -7.366(10^{-5}) \text{ radian}$$
$$\theta_{C} = \frac{0.8906}{EI} = 8.906(10^{-5}) \text{ radian}$$
$$\theta_{D} = -\frac{1.7009}{EI} = -17.009(10^{-5}) \text{ radian}$$
$$\theta_{E} = \frac{4.7879}{EI} = 47.879(10^{-5}) \text{ radian}$$

4. แทนค่ากลับ

แทนค่า  $heta_B \ heta_C \ heta_D$  และ  $heta_E$  กลับลงในสมการ slope-deflection เพื่อหาค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้น ส่วนทั้งสองของคาน  $M_{BA} = 2.638 \text{ kN} - \text{m}$  $M_{BC} = -2.638 \text{ kN} - \text{m}$  $M_{CB} = 2.946 \text{ kN} - \text{m}$  $M_{CD} = -2.946 \text{ kN} - \text{m}$  $M_{DC} = 1.326 \text{ kN} - \text{m}$  $M_{DE} = -1.326 \text{ kN} - \text{m}$  $M_{ED} = 7.50 \text{ kN} - \text{m}$ 

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน

ให้ end moments ที่หามาได้กระทำต่อช่วงต่างๆ ของคาน จากนั้น ใช้ free-body diagram ของช่วงต่างๆ ของ คานและสมการความสมดุลหาค่าแรงเฉือนและแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่ปลายต่างๆ ของช่วงของคาน สุดท้าย ใช้ free-body diagram ที่ได้ทำการเขียน shear diagram และ bending moment diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-3c

6. เขียนแผนภาพ elastic curve ของคาน

จากค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่หามาได้ในข้อที่ 3 แผนภาพ moment diagram ของคาน และการพิจารณาการยึดรั้ง คานของจุดรองรับ เราจะเขียน elastic curve ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-3d



### ตัวอย่างที่ 2-4

จงหาค่าแรงกดอัดที่เกิดขึ้นในสปริง (spring) ซึ่งรองรับคานยื่น (cantilever beam) ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-4a โดยวิธี slope-deflection กำหนดให้ คาน *EI* ที่คงที่ และสปริงมีค่า spring stiffness ในแนวแกนเท่ากับ *k* 



จากรูปที่ Ex 2-4 คานจะมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 2 คือ การหมุน  $heta_B$  และการโก่งตัว  $\Delta$  ที่เกิดขึ้นที่ จุดรองรับ B

1. หาค่า fixed-end moment

$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL^2}{12} = -(FEM)_{BA}$$

2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection

ภายใต้การกระทำของแรง w สมมุติให้ปลาย B ของคานเกิดการโก่งตัว  $\Delta$  ดังนั้น

$$M_{AB} = 2E \frac{I}{L} (\theta_B - 3\frac{\Delta}{L}) - \frac{wL^2}{12}$$
$$M_{BA} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_B - 3\frac{\Delta}{L}) + \frac{wL^2}{12}$$

3. สมการความสมดุล

เนื่องจากสปริงไม่มีความแกร่งในการต้านทานต่อโมเมนต์ดัด ดังนั้น สมการความสมดุลของโมเมนต์ที่จุดรองรับ *B* คือ

$$M_{BA} = 0$$
  
$$2E \frac{I}{L} (2\theta_B - 3\frac{\Delta}{L}) + \frac{wL^2}{12} = 0$$
  
$$\theta_B = \frac{3\Delta}{2L} - \frac{wL^3}{48EI}$$

4. แทนค่ากลับ

แทนค่ามุม  $heta_{\scriptscriptstyle B}$  กลับลงในสมการ slope-deflection เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = -\frac{3EI\Delta}{L^2} - \frac{wL^2}{8}$$

5. หาแรงกดอัดที่เกิดขึ้นในสปริง $F_{\scriptscriptstyle S}$ 

เนื่องจาก  $F_{\scriptscriptstyle S} = k\Delta$  ดังนั้น  $\Delta = F_{\scriptscriptstyle S} \,/\, k$  และเราจะได้ว่า

Structural Analysis

$$M_{AB} = -\frac{3EIF_S}{kL^2} - \frac{wL^2}{8}$$

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของคานดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-4b เราจากสมการสมดุลของโมเมนต์ รอบจุด A เราจะได้ว่า



แทนค่า  $M_{_{AB}}$  ลงในสมการของ  $F_{_S}$  เราจะได้สมการของแรงกดอัดที่เกิดขึ้นในสปริงอยู่ในรูป

$$F_{S} = \frac{3}{8} wL \left( \frac{1}{1 + \frac{3EI}{kL^{3}}} \right)$$
 Ans.

จากสมการของ  $F_s$  เราจะเห็นได้ว่า เมื่อ k = 0 แล้ว  $F_s$  จะมีค่าเท่ากับ 0 ซึ่งคานจะมีลักษณะเป็นคานยื่น ดัง ที่แสดงในรูปที่ Ex 2-4c เมื่อ  $k = \alpha$  แล้ว แล้ว  $F_s$  จะมีค่าเท่ากับ 3wL/8 ซึ่งคานมีมีลักษณะเป็นคานยื่นที่มี roller รองรับที่จุด *B* ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-4d และเมื่อสปริงถูกแทนที่โดย elastic link ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด *A* ความยาว  $L_1$ และมี modulus of elasticity *E* แล้ว  $k = AE/L_1$  ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-4e



## 2.4 การวิเคราะห์ Frames ที่ไม่มีการเซ (No Sidesway) โดยวิธี Slope-Deflection

วิธี slope-deflection เป็นวิธีการที่เหมาะสมที่จะใช้ในการวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ทั้งในกรณีที่โครงข้อแข็งไม่มีการ เซ (no sidesway) และในกรณีที่โครงข้อแข็งมีการเซ (sidesway)

โครงข้อแข็งจะไม่มีการเซ (sidesway) ภายใต้การกระทำของแรง เมื่อโครงข้อแข็งถูกยึดรั้งหรือรองรับอย่างเหมาะ สม ดังที่แสดงในรูปที่ 2-10 และ/หรือ เมื่อโครงข้อแข็งมีรูปร่างและถูกกระทำโดยแรงที่มีความสมมาตรรอบแกนใดแกนหนึ่ง ในแนวดิ่ง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-11





ในกรณีนี้ ถ้าเราไม่พิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างในแนวแกนของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งแล้ว เทอม ψ ในสม การ slope-deflection จะมีค่าเท่ากับศูนย์ในทุกช่วงของโครงข้อแข็งเนื่องจาก  $\Delta = 0$  ดังนั้น ตัวแปรที่เราต้องการหาจะมี เฉพาะค่าของการหมุนที่เกิดขึ้นที่ joint หรือ support ต่างๆ ของโครงข้อแข็งเท่านั้น

นอกจากนั้นแล้ว ในกรณีที่โครงข้อแข็งมีชิ้นส่วนมากกว่าสองชิ้นส่วนมาเชื่อมต่อกันที่ joint แล้ว สมการความสม ดุลของ moment ที่ joint ดังกล่าวจะประกอบด้วยสมการของ moment ที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ มากกว่าสองค่า ยกตัว อย่างเช่น ที่ joint *B* ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-11 จะมีแผนภาพ free-body diagram ของ joint ดังกล่าว ดังที่ แสดงในรูปที่ 2-12 ซึ่งเราจะเขียนสมการความสมดูลของ moment ที่ joint *B* ได้ในรูป

# $M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} = 0$

ขั้นตอนอื่นๆ ที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างนี้จะมีลักษณะเช่นเดียวกับในกรณีของคาน


Joint-moment condition in slope-deflection method.

รูปที่ 2-12

### ตัวอย่างที่ 2-5

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-5a โดยวิธี slope-deflection กำหนดให้ โครงข้อแข็งมีการทรุดตัวในแนวดิ่งลงที่จุดรองรับ D เท่ากับ  $10\,\mathrm{mm}$  และ moment of inertia  $I_{_{AB}}=0.0008\,\mathrm{m}^4$  และ  $I_{_{BC}}=I_{_{BD}}=0.0006\,\mathrm{m}^4$  จากนั้น จงร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



เมื่อพิจารณาโครงข้อแข็ง เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อแข็งจะไม่มีการเซทางด้านข้างเกิดขึ้นเนื่องจากโครงข้อแข็งถูก ยึดรั้งโดยจุดรองรับ A และจุดรองรับ C และเนื่องจากจุดรองรับ A และ D เป็นแบบยึดแน่น (fixed support) และจุด รองรับ C เป็นแบบหมุด (pin) ดังนั้น ถ้าเราใช้สมการ slope-deflection สำหรับขึ้นส่วนที่มีจุดรองรับเป็นหมุดในขึ้นส่วน BC ของโครงข้อแข็งแล้ว โครงข้อแข็งนี้จะมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 1 เท่านั้นคือ การหมุน  $\theta_B$  ที่ joint B

1. หาค่า fixed-end moment

โดยใช้หลักการ superposition เราจะได้ว่า

$$(FEM)_{AB} = -\frac{wL^2}{12} - \frac{PL}{8} = -\frac{15(4)^2}{12} - \frac{15(4)}{8} = -27.5 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(FEM)_{BA} = +27.5 \text{ kN} - \text{m}$ 

2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection



จากรูปที่ Ex 2-5b ขอให้สังเกตด้วยว่าการทรุดตัวในแนวดิ่งที่จุด D ทำให้ชิ้นส่วน AB เกิดการหมุนไปเป็นมุม

Structural Analysis

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = +\frac{\Delta}{4}$$
 radian

เครื่องหมายบวก เนื่องจากมีทิศทางตามเข็มนาฬิกา และชิ้นส่วน  $\stackrel{}{BC}$  เกิดการหมุนไปเป็นมุม

$$\psi_{BC} = \psi_{CB} = -\frac{\Delta}{3}$$
 radian

เครื่องหมายลบ เนื่องจากมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา นอกจากนั้นแล้ว จุดรองรับ C เป็น pin ดังนั้น

$$M_{AB} = 2E \frac{0.0008}{4} \left[ 0 + \theta_B - 3 \left( \frac{0.010}{4} \right) \right] - 27.5$$
  

$$M_{AB} = 0.0004E [\theta_B - 0.0075] - 27.5$$
  

$$M_{BA} = 0.0004E [2\theta_B - 0.0075] + 27.5$$
  

$$M_{BC} = 3E \frac{I_{BC}}{L_{BC}} (\theta_B - \psi_{BC}) + (FEM)_{BC}$$
  

$$M_{BC} = 3E \frac{0.0006}{3} (\theta_B + \frac{0.010}{3}) + 0$$
  

$$M_{BC} = 0.0006E (\theta_B + 0.003333)$$
  

$$M_{BD} = 2E \frac{0.0006}{3} [2\theta_B + 0 - 0] - 0$$
  

$$M_{BD} = 0.0008E\theta_B$$
  

$$M_{DB} = 0.0004E\theta_B$$

3. สมการความสมดุล

$$M_{BA}\left(\begin{array}{c}B\\\\\hline\\M_{BD}\\\\(c)\end{array}\right)M_{BC}$$

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของจุดต่อ *B* ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-5c จากสมการความสมดุลของ โมเมนต์ เราจะได้ว่า

$$M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} = 0$$
  
$$\theta_{B} = \frac{172.5}{440(10^{3})} = 0.39205(10^{-3}) \text{ radian}$$

เครื่องหมายบวก แสดงว่า  $heta_{\scriptscriptstyle B}$  มีทิศการหมุนตามเข็มนาฬิกา

4. แทนค่ากลับ

แทนค่ามุม  $heta_B$  กลับลงในสมการ slope-deflection เพื่อหาค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนทั้งสองของ คาน เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = -596.136 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $M_{BA} = -509.772 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{BC} = 447.046 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{BD} = 62.726 \text{ kN} - \text{m}$ 

$$M_{DB} = 31.363 \,\mathrm{kN}$$
 - m

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

ให้ end moments ที่หามาได้กระทำต่อช่วงต่างๆ ของโครงข้อแข็ง แล้วใช้สมการความสมดุลหาค่าของแรงเฉือน และแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่ปลายต่างๆ ของส่วนของโครงข้อแข็ง

จากนั้น ใช้ free-body diagram ของโครงข้อแข็งเพื่อทำการเขียน shear diagram และ moment diagram ดังที่ แสดงในรูปที่ Ex 2-5d

6. ร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง

จากค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่หามาได้ในขั้นตอนที่ 3 แผนภาพ moment diagram และการพิจารณาการยึดรั้งโครงข้อแข็ง ของจุดรองรับ เราจะร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-5b



Ans.

### 2.5 การวิเคราะห์ Frames ที่มีการเซ (Sidesway) โดยวิธี Slope-Deflection

้โครงข้อแข็ง (rigid frame) จะเกิดการเซ (sidesway) หรือมีการเคลื่อนที่ทางด้านข้างเมื่อ

- 1. โครงข้อแข็งไม่มีการยึดรั้งที่ป้องกันการเซทางด้านข้างอย่างเพียงพอ
- 2. โครงข้อแข็งที่มีรูปร่างสมมาตรถูกกระทำโดยแรงที่ไม่มีความสมมาตร ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2-13a
- โครงข้อแข็งที่มีรูปร่างไม่สมมาตรถูกกระทำโดยแรงที่มีลักษณะใดๆ ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2-13b ซึ่งเป็น โครงข้อแข็งที่มีรูปร่างไม่สมมาตรถูกกระทำโดยแรงที่มีความสมมาตร





พิจารณาโครงข้อแข็งซึ่งมีรูปร่างที่สมมาตรและถูกกระทำโดยแรง P ที่ไม่มีความสมมาตร ดังที่แสดงในรูปที่ 2-13a กำหนดให้แรง P ทำให้เกิดโมเมนต์ (moment) ที่ joint B และ joint C มีค่าเท่ากับ  $M_B$  และ  $M_C$  ตามลำดับ โดยที่ในกรณีนี้ แรง P กระทำอยู่ใกล้ joint B มากกว่า joint C ดังนั้น  $M_B > M_C$  และจากทิศทางของโมเมนต์ เรา จะเห็นได้ว่า โมเมนต์  $M_B$  จะพยายามทำให้ joint B เคลื่อนที่ไปทางขวามือและโมเมนต์  $M_C$  จะพยายามทำให้ joint C เคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ โดยที่การเคลื่อนที่ไปทางขวามือจะมีค่ามากกว่าการเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ เนื่องจาก  $M_B > M_C$  และถ้าเรากำหนดให้การยึดหรือหดตัวของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งในแนวแกนและการหมุนของ cord BCมีค่าน้อยมากแล้ว joint B และ joint C ของโครงข้อแข็งจะเกิดการเซ  $\Delta$  ที่เท่ากัน ไปทางขวามือ ดังที่แสดงในรูป ดังนั้น เมื่อเราใช้วิธี slope-deflection ในการวิเคราะห์โครงข้อแข็งนี้ สมการ slope-deflection ของเสา AB และ CD จะต้องมี เทอม  $\psi$  ปรากฏอยู่ด้วย ซึ่งทำให้ในกรณีนี้ นอกจากเราจะต้องพิจารณาสมการความสมดุลของโมเมนต์ที่ joint เนื่องจาก การหมุน  $\theta$  แล้ว เราจะต้องพิจารณาสมการความสมดุลของแรงเฉือนเนื่องจากการเซ  $\Delta$  ด้วย

พิจารณาโครงข้อแข็งซึ่งมีรูปร่างที่ไม่สมมาตรและถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ w ที่มี ความสมมาตร ดังที่แสดงในรูปที่ 2-13b เนื่องจากเสา AB มีความแกร่งมากกว่าเสา CD ดังนั้น ภายใต้แรงกระทำ โมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ joint B หรือ  $M_B$  จะมีค่ามากกว่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ joint C หรือ  $M_C$  และโครงข้อแข็งจะเกิดการ เซ  $\Delta$  ไปทางขวามือ ดังที่แสดงในรูป

ในการวิเคราะห์โครงข้อแข็งที่มีการเซโดยวิธี slope-deflection นั้น เราจะต้องมีความเข้าใจในพฤติกรรมการเซ ของโครงข้อแข็งและทราบถึงสมมุติฐานที่ว่าการยืดหรือหดตัวของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งในแนวแกนและการหมุนของ cord ของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งมีค่าน้อยมาก เพื่อเป็นตัวอย่าง ขอให้เราพิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-14 ถึง 2-16

พิจารณาโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-14a ถ้าเราทราบค่าการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่ joint *a* ว่ามีค่าเท่ากับ Δ แล้ว จากสมมุติฐานข้างต้น เราจะทราบค่าการเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่ joint *b* joint *c* joint *d* และ joint *e* ว่ามีค่าเท่ากับ Δ ด้วย ดังนั้น โครงข้อแข็งดังกล่าวจึงมีจำนวน degree of freedom ของการเซทางด้านข้างเท่ากับ**หนึ่ง** 



ฐปที่ 2-14

พิจารณาโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-14b ซึ่งเป็นโครงข้อแข็งที่มีเสา bB ทำมุม  $\theta$  กับพื้นและถูกกระทำ โดยแรงทางด้านข้างที่ joint a จากสมมุติฐานที่ได้กล่าวไปแล้ว เมื่อ joint a เกิดการเคลื่อนที่ในแนวนอน (ตั้งฉากกับแนว ชิ้นส่วน aA) ไปทางขวามือเป็นระยะเท่ากับ  $\Delta_1$  (aa') แล้ว joint b ก็จะเกิดการเคลื่อนที่ไปในแนวนอนทางขวามือเป็น ระยะ  $\Delta_1$  (bb') ด้วย แต่เนื่องจากความแกร่งของขึ้นส่วน bB ซึ่งทำมุม  $\theta$  กับพื้น ดังนั้น joint b จะมีการเคลื่อนที่ใน แนว bb'' ซึ่งตั้งฉากกับแนวขึ้นส่วน bB เป็นระยะเท่ากับ  $\Delta_3$  และเราจะเขียนแผนภาพขยายของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ เกิดขึ้นที่ joint b ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-14b' จาก sine law เราจะได้ความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง  $\Delta_1$   $\Delta_2$  และ  $\Delta_3$  อยู่ในรูป

$$\frac{\Delta_1}{\sin\theta} = \frac{\Delta_2}{\sin(90^\circ - \theta)} = \frac{\Delta_3}{\sin 90^\circ}$$

จากสมการข้างต้น ถ้าเราทราบค่าการเปลี่ยนตำแหน่งค่าหนึ่งจากจำนวนทั้งสิ้นสามค่าแล้ว เราจะสามารถหาค่า การเปลี่ยนตำแหน่งที่เหลืออีกสองค่าได้ ดังนั้น โครงข้อแข็งนี้จะมีจำนวน degree of freedom ของการเซทางด้านข้าง เท่ากับ**หนึ่ง** 

ในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-15c จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังที่แสดงโดย เส้นประ ภายใต้แรงกระทำด้านข้าง เนื่องจากความแกร่งของชิ้นส่วน aA joint a จะมีการเคลื่อนที่ในแนว aa' ตั้งฉาก กับแนวชิ้นส่วน aA เป็นระยะเท่ากับ  $\Delta_1$  และเนื่องจากความแกร่งของชิ้นส่วน bB joint b จะมีการเคลื่อนที่ในแนว bb'' ตั้งฉากกับแนวชิ้นส่วน bB เป็นระยะเท่ากับ  $\Delta_3$  และจากรูปขยายของการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ joint b ดังที่ แสดงในรูปที่ 2-15c' เราจะได้ความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง  $\Delta_1$   $\Delta_2$  และ  $\Delta_3$  อยู่ในรูป Structural Analysis

$$\frac{\Delta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\Delta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\Delta_3}{\sin\theta_1}$$

และโครงข้อแข็งนี้จะมีจำนวน degree of freedom ของการเซทางด้านข้างเท่ากับ**หนึ่ง** 

พิจารณาโครงข้อแข็งรูปจั่ว (gable frame) ดังที่แสดงในรูปที่ 2-15 จากรูป เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อแข็งดังกล่าวมี จำนวน degree of freedom ของการเซทางด้านข้างเท่ากับ**สอง** 





รูปที่ 2-15a แสดง gable frame ที่ไม่มีความสมมาตรและถูกกระทำโดยแรงกระทำในแนวดิ่งลงที่ joint c ซึ่งจะ ทำให้ joint b และ joint d เกิดการเคลื่อนที่ในแนวนอน  $\Delta_1$  ไปยังจุด b' และ  $\Delta_2$  ไปยังจุด d' ตามลำดับ ในลักษณะ เช่นนี้ ถ้าเราจินตนาการให้ขึ้นส่วนของโครงข้อแข็งที่เชื่อมต่อกันที่จุด c ถูกแยกออกจากกันแล้ว joint c ของขึ้นส่วน bc ก็ จะเคลื่อนที่ไปที่จุด c' ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าการเคลื่อนที่ที่ joint b โดยที่  $cc' = bb' = \Delta_1$  และ joint c ของขึ้นส่วน cd ก็ จะเคลื่อนที่ไปที่จุด c'' โดยที่  $cc'' = dd' = \Delta_2$  ดังนั้น เราจะสามารถหาตำแหน่งของจุด c''' ได้จากการลากเส้นตรง ซึ่งตั้งฉากกับชิ้นส่วน bc โดยมีจุดเริ่มต้นที่ c'' (กำหนดให้มีความยาวเท่ากับ  $\Delta_3$ ) ให้มาตัดกับเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งซึ่งตั้ง ฉากกับชิ้นส่วน cd โดยมีจุดเริ่มต้นที่ c''' (กำหนดให้มีความยาวเท่ากับ  $\Delta_4$ ) และเราจะสามารถเขียนแผนภาพขยาย ของการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ joint c ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-15a จาก sine law เราจะเขียนความสัมพันธ์ของการ เปลี่ยนตำแหน่ง  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ , และ  $\Delta_4$  ได้ในรูป

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\sin(\phi_1 + \phi_2)} = \frac{\Delta_3}{\sin(90^\circ - \phi_2)} = \frac{\Delta_4}{\sin(90^\circ - \phi_1)}$$

หรือ

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\sin(\phi_1 + \phi_2)} = \frac{\Delta_3}{\cos\phi_2} = \frac{\Delta_4}{\cos\phi_1}$$

จากสมการข้างต้น ถ้าเราทราบค่าการเปลี่ยนตำแหน่งสองค่าจากจำนวนทั้งสิ้นสี่ค่าแล้ว เราจะสามารถหาค่าการ เปลี่ยนตำแหน่งอีกสองค่าที่เหลือได้ ดังนั้น โครงข้อแข็งนี้จึงมีจำนวน degree of freedom ของการเซทางด้านข้างเท่ากับ **สอง** 

2-29

ในลักษณะที่คล้ายๆ กัน เราจะเขียนแผนภาพการโก่งตัว (elastic curve) ของ gable frame ดังที่แสดงในรูปที่ 2-15b ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกระทำทางด้านข้างที่ joint b ได้ดังที่แสดงโดยเส้นประ และเราจะเขียนแผนภาพขยายของการ เปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ joint c ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-15b' และจาก sine law เราจะเขียนความสัมพันธ์ของการ เปลี่ยนตำแหน่ง  $\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 \$ และ  $\Delta_4 \$ ได้ในรูป

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\sin(\phi_1 + \phi_2)} = \frac{\Delta_3}{\sin(90^\circ - \phi_2)} = \frac{\Delta_4}{\sin(90^\circ - \phi_1)}$$

หรือ

$$\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\sin(\phi_1 + \phi_2)} = \frac{\Delta_3}{\cos\phi_2} = \frac{\Delta_4}{\cos\phi_1}$$

รูปที่ 2-16a ถึง 2-16c แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงข้อแข็งสองชั้น ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกระทำทาง ด้านข้าง เนื่องจากการจัดเรียงตัวของโครงข้อแข็ง เราจะเห็นได้ว่า การเซที่เกิดขึ้นที่พื้นชั้นที่หนึ่งจะมีค่าเป็น Δ<sub>1</sub> และการเซ ที่เกิดขึ้นที่พื้นชั้นที่สองจะมีค่าเป็น Δ<sub>2</sub> โดยค่าการเซสัมพัทธ์ระหว่างชั้นที่หนึ่งและชั้นที่สองจะมีค่าเท่ากับ Δ<sub>2</sub> – Δ<sub>1</sub> ซึ่ง ค่าดังกล่าวจะถูกใช้ในสมการ slope-deflection ของเสาที่รองรับชั้นที่สอง



### ตัวอย่างที่ 2-6

จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-6a โดยวิธี slopedeflection กำหนดให้ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมีค่า flexural stiffness *EI* จากนั้น จงทำการร่าง elastic curve ของ โครงข้อแข็ง



สมมุติให้โครงข้อแข็งมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังที่แสดงโดยเส้นประในรูปที่ Ex 2-6a เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อแข็ง มีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 3 คือ การหมุน  $heta_C$  ที่จุดเชื่อมต่อ C, การหมุน  $heta_D$  ที่จุดเชื่อมต่อ D, และการเซ ทางด้านข้าง Δ

1. หาค่า fixed-end moment

เนื่องจากโครงข้อแข็งถูกกระทำโดยแรงบนชิ้นส่วน *CD* เท่านั้น ดังนั้น ค่า fixed-end moment บนชิ้นส่วน *AC* และ *BD* จะมีค่าเท่ากับศูนย์ และ

$$(FEM)_{CD} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{40(3)4^2}{7^2} = -39.184 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(FEM)_{DC} = +\frac{Pba^2}{L^2} = -\frac{40(4)3^2}{7^2} = +29.388 \text{ kN} - \text{m}$ 

2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection

สมมุติให้โครงข้อแข็งเกิดการเซ (sidesway) ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-6a ซึ่งจะทำให้ชิ้นส่วน AC และ BD เกิด การหมุนไปเป็นมุม

$$\psi_{AC} = \psi_{CA} = \psi_{BD} = \psi_{DB} = -\frac{\Delta}{5}$$
 radian

เครื่องหมายลบ เนื่องจากมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เนื่องจากสมมุติฐานที่ว่า การยืดหรือหดตัวของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ในแนวแกนและการหมุนของ cord ของคานมีค่าน้อยมาก ดังนั้น  $\psi_{\scriptscriptstyle CD}=\psi_{\scriptscriptstyle DC}=0$ 

$$M_{AC} = \frac{2EI}{5} \left[ 0 + \theta_C - 3\left(-\frac{\Delta}{5}\right) \right] = EI \left[ \frac{2}{5} \theta_C + \frac{6}{25} \Delta \right]$$
$$M_{CA} = \frac{2EI}{5} \left[ 2\theta_C + 0 - 3\left(-\frac{\Delta}{5}\right) \right] = EI \left[ \frac{4}{5} \theta_C + \frac{6}{25} \Delta \right]$$

$$M_{BD} = \frac{2EI}{5} \left[ 0 + \theta_D - 3\left(-\frac{\Delta}{5}\right) \right] = EI \left[ \frac{2}{5} \theta_D + \frac{6}{25} \Delta \right]$$
$$M_{DB} = \frac{2EI}{5} \left[ 2\theta_D + 0 - 3\left(-\frac{\Delta}{5}\right) \right] = EI \left[ \frac{4}{5} \theta_D + \frac{6}{25} \Delta \right]$$
$$M_{CD} = \frac{2EI}{7} \left[ 2\theta_C + \theta_D \right] - 39.184 = EI \left[ \frac{4}{7} \theta_C + \frac{2}{7} \theta_D \right] - 39.184$$
$$M_{DC} = \frac{2EI}{7} \left[ 2\theta_D + \theta_C \right] + 29.388 = EI \left[ \frac{2}{7} \theta_C + \frac{4}{7} \theta_D \right] + 29.388$$

3. สมการความสมดุล

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของ joint B และ C ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-6b จากสมการความ สมดุลของโมเมนต์ เราจะได้ว่า

$$M_{CA} + M_{CD} = 0$$

$$EI\left[\frac{48}{35}\theta_C + \frac{2}{7}\theta_D + \frac{6}{25}\Delta\right] = 39.184$$

$$M_{DB} + M_{DC} = 0$$
(1)

$$EI\left[\frac{2}{7}\theta_{C} + \frac{48}{35}\theta_{D} + \frac{6}{25}\Delta\right] = -29.388$$
(2)



พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-6c จากสมการความสมดุลของ แรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

$$V_A + V_B = 0 \tag{3}$$

จากแผนภาพ free-body diagram ของขึ้นส่วน AC และ BD ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-6e จากสมการความ สมดุลของโมเมนต์รอบจุด C เราจะได้ว่า

$$V_A = -\frac{M_{AC} + M_{CA}}{5}$$

และจากสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด D เราจะได้ว่า

$$V_B = -\frac{M_{BD} + M_{DB}}{5}$$

แทนค่า  $V_{\scriptscriptstyle A}$  และ  $V_{\scriptscriptstyle B}$  ลงในสมการที่ 3 เราจะได้ว่า

 $M_{AC} + M_{CA} + M_{BD} + M_{DB} = 0$  $EI\left[\frac{6}{5}\theta_C + \frac{6}{5}\theta_D + \frac{24}{25}\Delta\right] = 0$ (4)

จากนั้น แก้สมการเชิงซ้อน 3 ชั้น (สมการที่ 1 ที่ 2 และที่ 4) เราจะได้ว่า

$$EI\theta_{C} = 36.212$$
$$EI\theta_{D} = -26.946$$
$$EI\Delta = -11.583$$

เนื่องจากค่า *EI*∆ ที่ได้มีค่าเป็นลบแสดงว่า ทิศทางการเซของโครงข้อแข็งที่เกิดขึ้นจริงตรงกันข้ามกับได้ที่สมมุติ ไว้ นอกจากนั้น เนื่องจาก *EI*θ<sub>C</sub> มีค่าเป็นบวกแสดงว่า joint *C* จะเกิดการหมุนตามเข็มนาฬิกา และเนื่องจาก *EI*θ<sub>D</sub> มี ค่าเป็นลบแสดงว่า joint *D* จะเกิดการหมุนทวนเข็มนาฬิกา

4. แทนค่ากลับ

แทนค่า  $EI heta_C$  ,  $EI heta_D$  , และ  $EI\Delta$  กลับลงในสมการ slope-deflection เราจะหาค่า end moment ที่เกิดขึ้นที่ ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งดังนี้

$$M_{AC} = 11.705 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $M_{CA} = 26.190 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{BD} = -13.558 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{DB} = -24.337 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{CD} = -26.190 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{DC} = 24.337 \text{ kN} - \text{m}$ 

นอกจากนั้นแล้ว เราจะหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A และ B ได้โดยการแทนค่า  $EI heta_C~EI heta_D$  และ  $EI\Delta$  ลงในสมการของ  $V_A$  และ  $V_B$  โดยที่

$$V_{A} = -\frac{11.705 + 26.190}{5} = -7.579 \text{ kN}$$
$$V_{B} = -\frac{-13.558 - 24.337}{5} = 7.579 \text{ kN}$$

ซึ่งแสดงว่า แรงเฉือน  $V_{\scriptscriptstyle A}$  มีทิศทางตรงกันข้ามกับที่สมมุติไว้ในรูปที่ Ex 2-6c และ  $V_{\scriptscriptstyle B}$  มีทิศทางดังที่แสดงในรูป

5.เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

จากค่า end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งที่หาได้ เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-6e และเราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-6f

6. ร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็ง

จากแผนภาพ moment diagram ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง *EIθ<sub>C</sub> EIθ<sub>D</sub>* และ *EI*Δ ที่หาได้ และการพิจารณา การยึดรั้งโครงข้อแข็งของจุดรองรับ เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูป Ex 2-6g





## ตัวอย่างที่ 2-7

จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-7a โดยวิธี slopedeflection กำหนดให้ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมี modulus of elasticity ที่เท่ากันและมี moment of inertia ดังที่แสดง จากนั้น จงทำการร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



สมมุติให้โครงข้อแข็งเกิดการการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังที่แสดงโดยเส้นประในรูปที่ Ex 2-7b ดังนั้น โครงข้อแข็งนี้ จะมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 4 คือ การหมุน  $\theta_B$  ที่จุดเชื่อมต่อ B, การหมุน  $(\theta_C)_{CB}$  ที่จุดเชื่อมต่อ C ของ ชิ้นส่วน CB, การหมุน  $(\theta_C)_{CD}$  ที่จุดเชื่อมต่อ C ของชิ้นส่วน CD และการเซทางด้านข้าง  $\Delta$  อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก joint C เป็น internal hinge ดังนั้น ถ้าเราใช้สมการ slope deflection สำหรับชิ้นส่วนของโครงสร้างที่มีปลายด้านหนึ่งเป็น pin แล้ว จำนวน degree of freedom ของโครงข้อแข็งนี้จะลดลงเหลือ 2 ค่า คือ  $\theta_B$  และ  $\Delta$ 



1. หาค่า fixed-end moment

เนื่องจากโครงข้อแข็งถูกกระทำโดยแรง 6 kN ที่ internal hinge *C* เท่านั้น ดังนั้น ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อ แข็งจะไม่ถูกกระทำโดย fixed-end moment

2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection

จากรูปที่ Ex 2-7b ขอให้ลังเกตด้วยว่า การเซ (sidesway) ทำให้ชิ้นส่วน  $\,AB\,$  เกิดการหมุนไปเป็นมุม

Structural Analysis

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = +\frac{\Delta}{4}$$
 radian

เครื่องหมายบวก เนื่องจากมีทิศทางตามเข็มนาฬิกา และชิ้นส่วน CD เกิดการหมุนไปเป็นมุม

$$\psi_{CD} = \psi_{DC} = +\frac{\Delta}{2}$$
 radian

ดังนั้น เราจะเขียนสมการ slope-deflection ของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งได้ในรูป

$$M_{AB} = 2E \frac{2I}{4} \left[ 0 + \theta_B - 3\left(\frac{\Delta}{4}\right) \right] = EI[\theta_B - 0.75\Delta]$$
$$M_{BA} = EI[2\theta_B - 0.75\Delta]$$
$$M_{BC} = 3E \frac{2I}{3}(\theta_B - 0) = 2EI\theta_B$$
$$M_{DC} = 3E \frac{I}{2} \left[ 0 - \frac{\Delta}{2} \right] = -0.75EI\Delta$$

3. สมการความสมดุล

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของจุดเชื่อมต่อ *B* ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-7c จากสมการความสมดุล ของโมเมนต์ เราจะได้ว่า





พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-16d จากสมการความสมดุลของ แรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

$$V_A + V_D = 6 \tag{2}$$

จากแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน *AB* และ *CD* ดังที่แสดงในรูปที่ 2-16e จากสมการความ สมดุลของโมเมนต์รอบจุด *B* เราจะได้ว่า

$$V_{A} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} = -\frac{EI}{4}(3\theta_{B} - 1.5\Delta)$$

และจากสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด C เราจะได้ว่า

2-36

$$V_D = -\frac{M_{DC}}{2} = \frac{3}{8}EI\Delta$$

แทนค่า  $V_{\scriptscriptstyle A}$  และ  $V_{\scriptscriptstyle D}$  ลงในสมการที่ 2 เราจะได้ว่า

$$-\frac{EI}{4}(3\theta_B - 1.5\Delta) + \frac{3}{8}EI\Delta = 6$$
(3)

จากนั้น แทนสมการที่ (1) ลงในสมการที่ (3) เราจะได้ว่า

$$EI\Delta = \frac{128}{13}$$
$$EI\Theta_B = \frac{3}{16} \frac{128}{13} = \frac{24}{13}$$

เนื่องจากค่า *EI*∆ ที่ได้มีค่าเป็นบวกแสดงว่าทิศทางการเซของโครงข้อแข็งที่สมมุติไว้ในตอนต้นสอดคล้องกับ ความเป็นจริง นอกจากนั้น เนื่องจาก *EI*θ<sub>B</sub> มีค่าเป็นบวกแสดงว่า joint *B* จะเกิดการหมุนตามเข็มนาฬิกา ภายใต้การ กระทำของแรง

4. แทนค่ากลับ

แทนค่า  $EI\Delta$  และ  $EI heta_{\scriptscriptstyle B}$  กลับลงในสมการ slope-deflection เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = -5.54 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $M_{BA} = -3.69 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{BC} = 3.69 \text{ kN} - \text{m}$   
 $M_{DC} = -7.39 \text{ kN} - \text{m}$ 

แทนค่า  $EI\Delta$  และ  $EI heta_{B}$  ลงในสมการของ  $V_{A}$  และ  $V_{D}$  เราจะได้ว่า

$$V_A = 2.31 \text{ kN}$$
$$V_D = 3.69 \text{ kN}$$

โดยที่ end-moment และ end-shear ต่างๆ ที่หามาได้มีทิศทางดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-7f



5.เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram รูปที่ Ex 2-7g แสดงแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง

6. ร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็ง



### ตัวอย่างที่ 2-8

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง 2 ชั้น ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-8a โดย วิธี slope-deflection กำหนดให้ ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมี modulus of elasticity ที่เท่ากันและมีค่า moment of inertia ดังที่แสดง จากนั้น จงทำการร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



สมมุติให้โครงข้อแข็งมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างภายใต้การกระทำของแรงทางด้านข้าง ดังที่แสดงโดยเส้นประในรูป ที่ Ex 2-8a เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อแข็งมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 6 คือ การหมุน  $heta_B$  การหมุน  $heta_C$  การหมุน  $heta_D$  การหมุน  $heta_E$  การเซ  $\Delta_1$  และการเซ  $\Delta_2$ 

### 1. หาค่า fixed-end moment

เนื่องจากโครงข้อแข็งถูกกระทำโดยแรงที่ joint *B* และ *C* เท่านั้น ดังนั้น ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งจะไม่ถูก กระทำโดย fixed-end moment

2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection

้จากรูปที่ Ex 2-8a การเซ (sidesway) ทำให้ชิ้นส่วน AB เกิดการหมุนไปเป็นมุม

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = + \frac{\Delta_2}{6.4}$$
 radian

ชิ้นส่วน EF เกิดการหมุนไปเป็นมุม

$$\psi_{EF} = \psi_{EF} = +\frac{\Delta_2}{3.2}$$
 radian

ชิ้นส่วน BC และ ED เกิดการหมุนไปเป็นมุม

$$\psi_{BC} = \psi_{CB} = \psi_{ED} = \psi_{DE} = + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{6.4}$$
 radian

้เครื่องหมายบวก เนื่องจากมุม 🌾 มีทิศทางการหมุนตามเข็มนาฬิกา และเราจะเขียนสมการ slope-deflection ได้ดังนี้

$$M_{AB} = \frac{2(4EI)}{6.4} \left[ 2\theta_A + \theta_B - 3\left(\frac{\Delta_2}{6.4}\right) \right] = EI[1.25\theta_B - 0.58594\Delta_2]$$

$$M_{\scriptscriptstyle BA} = EI[2.50\theta_{\scriptscriptstyle B} - 0.58594\Delta_2]$$

$$M_{BC} = \frac{2(2EI)}{6.4} \left[ 2\theta_B + \theta_C - 3\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{6.4}\right) \right]$$
  
=  $EI[1.25\theta_B + 0.625\theta_C - 0.29297\Delta_1 + 0.29297\Delta_2]$   
 $M_{CB} = EI[0.625\theta_B + 1.25\theta_C - 0.29297\Delta_1 + 0.29297\Delta_2]$ 

$$M_{FE} = \frac{2(2EI)}{3.2} \left[ 2\theta_F + \theta_E - 3\left(\frac{\Delta_2}{3.2}\right) \right] = EI[1.25\theta_E - 1.17188\Delta_2]$$
$$M_{EF} = EI[2.50\theta_E - 1.17188\Delta_2]$$

$$M_{ED} = \frac{2(2EI)}{6.4} \left[ 2\theta_E + \theta_D - 3\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{6.4}\right) \right]$$
  
=  $EI[1.25\theta_E + 0.625\theta_D - 0.29297\Delta_1 + 0.29297\Delta_2]$   
 $M_{DE} = EI[0.625\theta_E + 1.25\theta_D - 0.29297\Delta_1 + 0.29297\Delta_2]$ 

$$M_{BE} = \frac{2(3EI)}{4.8} [2\theta_B + \theta_E] = EI[2.50\theta_B + 1.25\theta_E]$$
$$M_{EB} = \frac{2(3EI)}{4.8} [2\theta_E + \theta_B] = EI[1.25\theta_B + 2.50\theta_E]$$

$$M_{CD} = \frac{2(3EI)}{4.8} [2\theta_C + \theta_D] = EI[2.50\theta_C + 1.25\theta_D]$$
$$M_{DC} = \frac{2(3EI)}{4.8} [2\theta_D + \theta_C] = EI[1.25\theta_C + 2.50\theta_D]$$

3. สมการความสมดุล

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของจุดต่อ *B* , *C* , *D* , และ *E* ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-8b จากสมการความสมดุลของโมเมนต์ เราจะได้ว่า

$$\begin{split} M_{BA} + M_{BC} + M_{BE} &= 0 \\ EI[6.25\theta_{B} + 0.625\theta_{C} + 1.25\theta_{E} - 0.29297\Delta_{1} - 0.29297\Delta_{2}] &= 0 \quad (1) \\ M_{CB} + M_{CD} &= 0 \\ EI[0.625\theta_{B} + 3.750\theta_{C} + 1.250\theta_{D} - 0.29297\Delta_{1} + 0.29297\Delta_{2}] &= 0 \quad (2) \\ M_{DC} + M_{DE} &= 0 \\ EI[1.250\theta_{C} + 3.750\theta_{D} + 0.625\theta_{E} - 0.29297\Delta_{1} + 0.29297\Delta_{2}] &= 0 \quad (3) \\ M_{EB} + M_{ED} + M_{EF} &= 0 \\ EI[1.250\theta_{B} + 0.625\theta_{D} + 6.25\theta_{E} - 0.29297\Delta_{1} - 0.87891\Delta_{2}] &= 0 \quad (4) \end{split}$$

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน *BC* ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-8c จาก สมการความสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

$$V_{BC} + V_{ED} = 12$$

้จากแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน BC และจากสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด C

$$V_{BC} = -\frac{M_{BC} + M_{CB}}{6.4}$$

้จากแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน DE และจากสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด D

$$V_{ED} = -\frac{M_{DE} + M_{ED}}{6.4}$$

ดังนั้น จากสมการความสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

 $EI[-0.29297\theta_{\scriptscriptstyle B} - 0.29297\theta_{\scriptscriptstyle C} - 0.29297\theta_{\scriptscriptstyle D} - 0.29297\theta_{\scriptscriptstyle E} + 0.183106\Delta_1 - 0.183106\Delta_2] = 12~(5)$ 



ในทำนองเดียวกัน พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-8d จาก สมการความสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

$$V_{AB} + V_{FE} - V_{BC} - V_{ED} = 24$$

้จากแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน AB และจากสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด B

$$V_{AB} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{64}$$

้จากแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน EF และจากสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด E

$$V_{EF} = -\frac{M_{EF} + M_{FE}}{3.2}$$

ดังนั้น จากสมการความสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้ว่า

 $EI[-0.29297\theta_B + 0.29297\theta_C + 0.29297\theta_D - 0.87891\theta_E - 0.183106\Delta_1 + 1.098638\Delta_2] = 24$  (6) ทำการแก้สมการ simultaneous สมการที่ (1) ถึงสมการที่ (6) เราจะได้ว่า

$$EI\theta_{B} = 7.9352 \text{ kN} - \text{m}^{2}$$
$$EI\theta_{C} = 6.6130 \text{ kN} - \text{m}^{2}$$
$$EI\theta_{D} = 4.6608 \text{ kN} - \text{m}^{2}$$
$$EI\theta_{E} = 15.7440 \text{ kN} - \text{m}^{2}$$
$$EI\Delta_{1} = 186.0128 \text{ kN} - \text{m}^{3}$$
$$EI\Delta_{2} = 64.5522 \text{ kN} - \text{m}^{3}$$

เนื่องจากค่า degree of freedom ที่ได้มีค่าเป็นบวกแสดงว่า ทิศทางการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงข้อแข็งที่สมมุติ ไว้ในตอนต้นสอดคล้องกับความเป็นจริง 4. แทนค่ากลับ

แทนค่า degree of freedom ที่ได้กลับลงในสมการ slope-deflection เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = -27.90 \text{ kN} - \text{m} \qquad M_{BA} = -17.99 \text{ kN} - \text{m} M_{BC} = -21.53 \text{ kN} - \text{m} \qquad M_{CB} = -22.36 \text{ kN} - \text{m} M_{FE} = -55.96 \text{ kN} - \text{m} \qquad M_{EF} = -36.28 \text{ kN} - \text{m} M_{ED} = 49.28 \text{ kN} - \text{m} \qquad M_{DE} = 19.92 \text{ kN} - \text{m} M_{BE} = 39.52 \text{ kN} - \text{m} \qquad M_{EB} = 49.28 \text{ kN} - \text{m} M_{CD} = 22.36 \text{ kN} - \text{m} \qquad M_{DC} = 19.92 \text{ kN} - \text{m}$$

5.เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

รูปที่ Ex 2-8e แสดงแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง



6. ร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็ง

จากแผนภาพ moment diagram ค่า degree of freedom ที่ได้ และการพิจารณาการยึดรั้งโครงข้อแข็งของจุด รองรับ เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูป Ex 2-8f



Ans.

Ans.

### ตัวอย่างที่ 2-9

จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-9a โดยวิธี slopedeflection กำหนดให้  $I = 600 \text{ in}^4$  และ  $E = 29(10^3) \text{ ksi}$  จากนั้น จงทำการร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงข้อแข็งภายใต้การกระทำของแรง ดังที่แสดงโดยเส้นประในรูปที่ Ex 2-9b และ 2-9c เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อแข็งมีจำนวน degree of freedom 3 ค่าคือ การหมุน θ<sub>B</sub> และการหมุน θ<sub>C</sub> และ การเปลี่ยนตำแหน่ง Δ

1. หาค่า fixed-end moment

แรง  $6\,\mathrm{k}$  ที่กระทำที่ joint B ไม่ก่อให้เกิด fixed-end moment ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{4(20)^2(12 \text{ in/ft})}{12} = -1600 \text{ k} - \text{in.}$$
  
 $(FEM)_{CB} = +1600 \text{ k} - \text{in.}$ 

2. แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ slope-deflection



จากรูปที่ Ex 2-9c ขอให้สังเกตด้วยว่า การเซ (sidesway) ทำให้ชิ้นส่วน AB และ CD เกิดการหมุนไปเป็นมุม

$$\psi_{AB} = \psi_{BA} = \psi_{CD} = \psi_{DC} = \psi = +\frac{\Delta}{25} = 0.04\Delta$$
 radian

เครื่องหมายบวก เนื่องจากมีทิศทางตามเข็มนาฬิกา และชิ้นส่วน *BC* เกิดการหมุนไปเป็นมุม

$$\psi_{BC} = \psi_{CB} = \psi' = -\frac{1.2\Delta}{20} = -0.06\Delta$$
 radian

#### Structural Analysis

เครื่องหมายลบ เนื่องจากมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา นอกจากนั้นแล้ว เราจะเห็นว่า

$$\psi_{BC} = -0.06 \frac{\psi_{AB}}{0.04} = -1.5 \psi_{AB}$$
 หรือ  $\psi' = -1.5 \psi$ 

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = 2E \frac{600}{25(12)} [0 + \theta_B - 3\psi] = 116000\theta_B - 348000\psi]$$
$$M_{BA} = 232000\theta_B - 348000\psi$$
$$M_{BC} = 2E \frac{600}{20(12)} [2\theta_B + \theta_C - 3(-1.5\psi)] - 1600$$
$$= 290000\theta_B + 145000\theta_C + 652500\psi - 1600$$
$$M_{CB} = 145000\theta_B + 290000\theta_C + 652500\psi + 1600$$
$$M_{CD} = 2E \frac{600}{25(12)} [2\theta_C + 0 - 3\psi] = 232000\theta_C - 348000\psi$$
$$M_{DC} = 116000\theta_C - 348000\psi$$

3. สมการความสมดุล

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของจุดต่อ B และจุดต่อ C จากสมการความสมดุลของโมเมนต์รอบ จุดต่อดังกล่าว เราจะได้ว่า

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$
  
522000 $\theta_{B} + 145000\theta_{C} + 304500\psi = 1600$  (1)  
$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$145000\theta_{R} + 522000\theta_{C} + 304500\psi = -1600$$
 (2)



พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน AB และ CD ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-9c จากสมการ ความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด B และรอบจุด C เราจะได้ว่า

$$V_{A} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{25(12)} \tag{3}$$

$$V_D = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{25(12)}$$
(4)

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-9d จากสมการความสมดุลของ โมเมนต์รอบจุด *O* เราจะได้ว่า

$$M_{AB} + M_{DC} - V_A[41.667(12)] - V_D[41.667(12)] - 6(13.333)12 = 0$$

จากสมการ slope-deflection และสมการที่ (3) และ (4) เราจะได้ว่า

$$464116\theta_B + 464116\theta_C - 1624.464\psi = -959.976$$

แก้สมการที่ (1) (2) และ (5) เราจะได้

$$\theta_B = 4.030(10^{-3})$$
 radian  
 $\theta_C = -4.456(10^{-3})$  radian  
 $\psi = 4.687(10^{-3})$  radian  
 $\Lambda = 0.117$  in



4. แทนค่ากลับ

แทนค่า  $heta_B$   $heta_C$  และ  $\psi$  กลับลงในสมการ slope-deflection และทำการแปลงหน่วยของ end-moment ให้ เป็น k - ft เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = 25.364 \text{ k} - \text{ft}$$
$$M_{BA} = 64.321 \text{ k} - \text{ft}$$
$$M_{BC} = -64.321 \text{ k} - \text{ft}$$
$$M_{CB} = 99.780 \text{ k} - \text{ft}$$
$$M_{CD} = -99.780 \text{ k} - \text{ft}$$
$$M_{DC} = -56.686 \text{ k} - \text{ft}$$

5.เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

รูปที่ Ex 2-9e แสดงแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง

6. ร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็ง

จากแผนภาพ moment diagram ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่หามาได้ในขั้นตอนที่ 3 และการพิจารณาการยึดรั้ง โครงข้อแข็งของจุดรองรับ เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูป Ex 2-9f นอกจากนั้นแล้ว เราจะสามารถหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่างๆ บนโครงข้อแข็งได้โดยใช้วิธีการหาค่าการโก่งตัวที่ได้ศึกษาผ่าน ไปแล้ว เช่น วิธี unit-load เป็นต้น

(5)



### แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

2-1 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-1 ซึ่งมีค่า moment of inertia  $I = 50(10^{-6}) \,\mathrm{m}^4$  และ modulus of elasticity  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  จากนั้น จงร่าง elastic curve ของคาน และหา ค่าการโก่งตัวที่จุด D



2-2 กำหนดให้คานดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-2 มีค่า moment of inertia  $I_{AB} = 60(10^{-6}) \text{ m}^4$   $I_{BC} = I_{CD} = 80(10^{-6}) \text{ m}^4$  และ modulus of elasticity E = 200 GPa จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram และจงร่าง elastic curve ของคาน



2-3 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ซึ่งมีค่า  $EI_{AB} = EI_{BC} = 10000 \text{ kN} - \text{m}^2$ และ  $EI_{CD} = 5000 \text{ kN} - \text{m}^2$  ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-3 กำหนดให้คานมีการทรุดตัวในแนวดิ่งที่จุดรองรับ *B* เท่ากับ 10 mm



2-4 จงทำการวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ รูปที่ Prob. 2-4 จากนั้น จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน สุดท้าย จงทำการร่าง elastic curve ของคาน กำหนดให้ *EI* มีค่าคงที่ตลอดความยาวคาน



## รูปที่ Prob. 2-4

2-5 กำหนดให้คานมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-5 มี  $EI = 5000 \text{ kN} - \text{m}^2$  ตลอดช่วงความยาวของคานและมี การทรุดตัวในแนวดิ่งที่จุดรองรับ *B* เท่ากับ 10 mm จงเขียน shear diagram, moment diagram และร่าง elastic curve ของคาน



2-6 กำหนดให้โครงข้อแข็งมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-6 มีค่า *EI* คงที่ จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็งและจงทำการร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



รูปที่ Prob. 2-6

2-7 จงวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ซึ่งมีทำด้วยเหล็กและมีหน้าตัดแบบ wide-flange ขนาด W200x22 ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-7 กำหนดให้  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$   $I = 20(10^6) \mathrm{mm}^4$  และ  $A = 2860 \,\mathrm{mm}^2$  และจุดรองรับ A เกิดการทรุด ตัวในแนวดิ่ง 20 mm และเกิดการหมุน 0.006 radian ในทิศตามเข็มนาฬิกา



รูปที่ Prob. 2-7

2-8 จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-8 เพื่อเขียน shear diagram และ moment diagram และ ร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็ง



รูปที่ Prob. 2-8

2-9 กำหนดให้โครงข้อแข็งมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-9 ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมี modulus of elasticity ที่ เท่ากันและมี moment of inertia ดังที่แสดงในรูป จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็งและ ร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



2-10 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 2-10 กำหนดให้ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมี *EI* = 4000 kN - m<sup>2</sup> คงที่ จากนั้น จงทำการร่าง elastic curve ของโครงข้อ แข็ง



# บทที่ 3 การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี Moment Distribution

### 3.1 หลักการและนิยาม

วิธี moment distribution เป็นวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างอีกวิธีหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์คานและโครงข้อแข็งที่เป็น โครงสร้าง statically determinate ได้เป็นอย่างดี วิธีการนี้เป็นการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี displacement method เช่นเดียวกันกับวิธี slope-deflection ซึ่งได้ถูกพัฒนาขึ้นมาโดย Professor Hardy Cross ในปี 1932 วิธีการนี้มีลักษณะเป็น การแก้สมการหลายชั้น (simultaneous equation) ที่ได้จากการแทนสมการของ end moments ลงในสมการความสมดุล ในวิธี slope-deflection แบบประมาณอย่างต่อเนื่อง (successive approximation) ซึ่งความถูกต้องแม่นยำของผลการ วิเคราะห์ที่ได้จะขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งที่ใช้ในการวิเคราะห์

้โดยทั่วไปแล้ว ขั้นตอนในการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี moment distribution มีลำดับดังต่อไปนี้

- สมมุติให้ joint ต่างๆ ของโครงสร้างถูกยึดแน่น (fixed) โดยที่ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้างจะอยู่ในลักษณะของ คานที่ถูกยึดแน่นที่ปลายทั้งสองด้าน (fixed-end beam)
- ทำการปลดปล่อย joint อันหนึ่งให้เป็นอิสระ ซึ่งจะทำให้เกิด moment ต้านทานขึ้นที่ปลายของทุกชิ้นส่วนของ โครงสร้างที่เชื่อมต่อกับ joint ดังกล่าว (ซึ่งขนาดของ moment ที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับความแกร่งต่อการดัด (flexural stiffness) ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้าง) จากนั้น moment ต้านทานที่เกิดขึ้นจะถูกถ่ายทอด ต่อไปที่ปลายด้านไกลของชิ้นส่วนของโครงสร้าง (ซึ่งขนาดของ moment ที่ถูกถ่ายทอดจะขึ้นอยู่กับ carryover factor ของแต่ละซิ้นส่วนของโครงสร้าง)
- 3. ทำการยึด joint ในข้อที่ 2 แล้วทำการปลดปล่อย joint ถัดไปอีก joint หนึ่ง ซึ่งจะทำให้เกิด moment ต้านทาน ทานขึ้นที่ปลายของทุกขึ้นส่วนของโครงสร้างที่เชื่อมต่อกับ joint ดังกล่าว จากนั้น moment ต้านทานดังกล่าว จะถูกถ่ายทอดไปยังปลายด้านไกลของชิ้นส่วนของโครงสร้าง เหมือนกับที่ได้กล่าวไปแล้วในข้อที่ 2
- 4. เมื่อเราทำการปลดปล่อยและยึด joint ทีละ joint อย่างต่อเนื่องแล้ว moments ด้านทานเหล่านั้นก็จะถูก กระจาย (distributed) กลับไปกลับมา จนกระทั่งอยู่ในสมดุลและ joint ต่างๆ ของโครงสร้างก็จะเกิดการหมุน ไปยังตำแหน่งสุดท้ายที่เราต้องการหา

จากขั้นตอนการวิเคราะห์ที่ได้กล่าวไปแล้ว เราจะเห็นว่า วิธี moment distribution นี้เป็นวิธีการวิเคราะห์ โครงสร้างที่ค่อนข้างง่ายและเป็นการทำการวิเคราะห์โครงสร้างแบบซ้ำไปซ้ำมา

### Sign Convention



Sign convention ที่เราจะใช้วิธี moment distribution จะเหมือนกับ sign convention ที่เราใช้ในวิธี slopedeflection กล่าวคือ moment ที่กระทำที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงสร้าง (end moments) ที่มีทิศทางหมุนตามเข็มนาฬิกา ดังที่แสดงในรูปที่ 3-1 จะมีค่าเป็นบวก ในทางตรงกันข้าม moment ดังกล่าวจะมีค่าเป็นลบ เมื่อมีทิศทางหมุนทวนเข็ม นาฬิกา

Fixed-End Moments (FEM)

ในวิธี moment distribution เราจะต้องหาค่า moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของคานซึ่งถูกยึดแน่นทั้งสองข้างหรือ fixed-end moment ซึ่ง moment นี้เปรียบเสมือนตัวแทนของแรงและน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อชิ้นส่วนของโครงสร้าง

ตารางที่ 2-1 แสดงสมการของ fixed-end moment เนื่องจากแรงกระทำแบบต่างๆ รูปที่ 3-2 แสดงตัวอย่างของ การหา fixed-end moment ที่เกิดจากแรงกระทำเป็นจุด (concentrated load) 800 N จาก sign convention ที่ได้กล่าว ไปแล้วและจากตารางที่ 2-1 เราจะได้ว่า

$$(FEM)_{AB} = M_{AB} = -800(10)/8 = -1000 \text{ N} - \text{m}$$
  
 $(FEM)_{BA} = M_{BA} = +1000 \text{ N} - \text{m}$ 



### Member Stiffness Factor และ Carry-Over Factor

Member stiffness factor เป็นค่า moment ที่ทำให้ปลายด้านหนึ่งที่เป็นหมุด (pin) ของชิ้นส่วนของโครงสร้างเกิด การหมุนเท่ากับหนึ่งหน่วย เมื่อปลายอีกด้านหนึ่งของชิ้นส่วนของโครงสร้างถูกยึดแน่น

Carry-over factor เป็นอัตราส่วนของ moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านหนึ่งของชิ้นส่วนของโครงสร้างที่ถูกยึดแน่น ต่อ moment ที่กระทำอยู่ที่ปลายอีกด้านหนึ่งที่เป็นหมุด (pin)



พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 3-3 ซึ่งมีจุดรองรับเป็นหมุดที่จุด *A* และเป็นแบบยึดแน่นที่จุด *B* กำหนดให้ คานมีค่า flexural stiffness *EI* คงที่ตลอดความยาวของคาน และให้ *M<sub>AB</sub>* เป็น moment ที่มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาที่ กระทำที่จุดรองรับ *A* ซึ่งจะทำให้เกิดการหมุนที่จุด *A* เป็นมุม *θ<sub>A</sub>* และทำให้เกิด moment *M<sub>BA</sub>* ที่ปลายด้านยึดแน่น ดังนั้น

- 1. จากนิยามของ member stiffness factor เราจะได้ว่า member stiffness factor ของคาน AB มีค่าเท่ากับ ค่าของ moment  $M_{_{AB}}$  ที่ทำให้เกิดการหมุน  $\theta_{_A} = 1$
- 2. จากนิยามของ carry-over factor เราจะได้ว่า carry-over factor ของคาน AB มีค่าเท่ากับอัตราส่วนของ moment  $M_{_{BA}}$  ต่อ moment  $M_{_{AB}}$

จากสมการ slope-deflection เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_A + \theta_B) = \frac{4EI}{L} \theta_A$$
$$M_{BA} = 2E \frac{I}{L} (\theta_A + 2\theta_B) = \frac{2EI}{L} \theta_A$$

เมื่อเรากำหนดให้  $heta_A = 1$ หน่วยแล้ว จากสมการของ  $M_{_{AB}}$  เราจะได้ว่า member stiffness factor ของคาน AB มีค่าเท่ากับ

$$K = \frac{4EI}{L} \tag{3-1}$$

และ carry-over factor ของคาน AB มีค่าเท่ากับ +0.5

ในอีกลักษณะหนึ่ง ถ้าเรากำหนดให้จุดรองรับของคานเป็นแบบยึดแน่นที่จุด A และเป็นหมุดที่จุด B แล้ว เรา จะหา carry-over factor ของคานในกรณีนี้ได้เท่ากับ +0.5 เช่นเดียวกัน

### Joint Stiffness Factor

ในกรณีที่จุดเชื่อมต่อ (joint) ของโครงสร้างมีชิ้นส่วนของโครงสร้างหลายชิ้นส่วนมาเชื่อมต่อกัน โดยที่ปลายด้าน ใกลของชิ้นส่วนเหล่านั้นถูกยึดแน่นแล้ว จาก principle of superposition เราจะได้ว่า stiffness factor ทั้งหมดที่ joint ดังกล่าวมีค่าเท่ากับผลรวมของ stiffness factor ของชิ้นส่วนของโครงสร้างที่ joint ดังกล่าวหรือ

$$K_T = \sum K$$

ซึ่ง  $K_{\tau}$  จะเป็นค่า moment ที่จะทำให้ joint เกิดการหมุนเท่ากับ 1 radian

พิจารณาโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 3-4a เราจะเห็นว่า stiffness factor ทั้งหมดที่ joint A จะมีค่าเท่ากับ

$$K_T = K_{AD} + K_{AB} + K_{AC}$$
  
= 1000 + 4000 + 5000

$$= 10000 \text{ kN} - \text{m}$$

ซึ่งแสดงว่า เราต้องการ moment ขนาด  $10000~{
m kN}$  -  ${
m m}$  ในการหมุน joint A ของโครงข้อแข็งเป็นมุม 1 m radian



### Distribution Factor ( $m{DF}$ )

ถ้าเรากำหนดให้ moment *M* ซึ่งมีทิศทางหมุนตามเข็มนาฬิกากระทำที่ joint *A* ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงใน รูปที่ 3-4b แล้ว ชิ้นส่วน *AD*, *AB*, และ *AC* ของโครงข้อแข็งจะร่วมกันต้าน moment *M* ดังกล่าว ดังนั้น จากเงื่อนไข ความสมดุลของ moment ที่ joint *A* เราจะได้ว่า

$$M = M_{AD} + M_{AB} + M_{AC}$$

โดยที่โมเมนต์  $M_{_{AD}}$ ,  $M_{_{AB}}$ , และ  $M_{_{AC}}$  เป็นโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลาย A ของชิ้นส่วน AD, AB, และ AC ของ โครงข้อแข็ง และเนื่องจาก joint A เป็นจุดเชื่อมต่อแบบแกร่ง (rigid joint) ดังนั้น ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งที่ joint Aจะเกิดการหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม  $\theta$  เท่ากัน

จากสมการ slope-deflection (สมการที่ 2-8) เราจะได้ว่า

Structural Analysis

$$M_{AD} = K_{AD}\theta$$
$$M_{AB} = K_{AB}\theta$$
$$M_{AC} = K_{AC}\theta$$

เมื่อเราแทนสมการของ moment ดังกล่าว ลงในสมการความสมดุลของ moment ที่ joint A แล้ว เราจะหา สมการของมุม θ ได้ในรูป

$$M = (K_{AD} + K_{AB} + K_{AC})\theta$$
$$\theta = \frac{M}{(K_{AD} + K_{AB} + K_{AC})} = \frac{M}{\sum K}$$

เมื่อเราแทนสมการของ heta ลงในสมการของโมเมนต์  $M_{_{AD}}$  ,  $M_{_{AB}}$  , และ  $M_{_{AC}}$  แล้ว เราจะได้ว่า

$$M_{AD} = \frac{K_{AD}}{\sum K} M = DF_{AD}M$$
$$M_{AB} = \frac{K_{AB}}{\sum K} M = DF_{AB}M$$
$$M_{AC} = \frac{K_{AC}}{\sum K} M = DF_{AC}M$$

โดยที่เทอม  $DF_{AD}$ ,  $DF_{AB}$ , และ  $DF_{AC}$  นี้จะถูกเรียกว่า distribution factor ของชิ้นส่วน AD, AB, และ AC ที่ เชื่อมต่อกันที่ joint A ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า อัตราส่วนที่ชิ้นส่วน AD, AB, และ AC ของโครงข้อแข็งร่วมกันต้าน moment M จะขึ้นอยู่กับค่า distribution factor ที่ joint A ของชิ้นส่วนนั้นๆ โดยทั่วไปแล้ว เราจะเขียน distribution factor ได้ในรูป

$$DF = \frac{K}{\sum K}$$
(3-2)

จากรูปที่ 3-4b เมื่อเราแทนค่า stiffness factor ของชิ้นส่วน *AD*, *AB*, และ *AC* ของโครงข้อแข็งลงใน สมการที่ 3-2 แล้ว เราจะได้ค่า distribution factor ที่ joint *A* ของชิ้นส่วน *AD*, *AB*, และ *AC* ของโครงข้อแข็งมีค่า เท่ากับ

$$DF_{AD} = 1000/10000 = 0.1$$
$$DF_{AB} = 4000/10000 = 0.4$$
$$DF_{AC} = 5000/10000 = 0.5$$

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า ผลรวมของ  $DF\,$  ที่ joint  $A\,$ นี้มีค่าเท่ากับ 1

ถ้าเรากำหนดให้ moment  $M = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}$  แล้ว เราจะหาค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วน AD, AB, และ AC ที่อยู่ติดกับ joint A ได้เท่ากับ

$$M_{AD} = 0.1(2000) = 200 \text{ N} - \text{m}$$
  
 $M_{AB} = 0.4(2000) = 800 \text{ N} - \text{m}$   
 $M_{AC} = 0.5(2000) = 1000 \text{ N} - \text{m}$ 

Member Relative Stiffness Factor

โดยทั่วไปแล้ว ชิ้นส่วนของคานและโครงข้อแข็งจะทำด้วยวัสดุชนิดเดียวกันตลอดความยาวของคานและโครงข้อ แข็ง ดังนั้น ค่า modulus of elasticity *E* ของชิ้นส่วนเหล่านั้นจะมีค่าเท่ากัน ซึ่งจะทำให้เทอม 4*E* ในสมการที่ 3-1 มีค่า เท่ากันและจะตัดกันในสมการที่ 3-2 ดังนั้น ในกรณีเช่นนี้ เราจะคำนวณหาค่า distribution factor *DF* ได้ง่ายขึ้น ถ้าเรา ใช้ค่า relative-stiffness factor *K<sub>R</sub>* แทนค่า stiffness factor *K* โดยที่

$$K_R = \frac{I}{L} \tag{3-3}$$

### 3.2 การวิเคราะห์คานโดยวิธี Moment Distribution

หลักสำคัญของการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี moment distribution ขึ้นอยู่กับการยึดและปลดปล่อย joint ต่างๆ ของโครงสร้างอย่างเป็นลำดับต่อเนื่องกันไปและ principle of superposition เพื่อที่จะให้ moment ที่เกิดขึ้นที่ joint เหล่านั้นได้ถูกกระจายออกไปที่ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง จนกระทั่งอยู่ในความสมดุล

พิจารณาคานแบบ statically indeterminate ซึ่งมี degree of indeterminacy เท่ากับ 4 และมี degree of freedom เท่ากับ 1 ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5a กำหนดให้คานดังกล่าวทำด้วยวัสดุชนิดเดียวกันและมีค่า flexural stiffness *EI* คงที่ตลอดคาน จากรูป เราจะเขียนขั้นตอนวิเคราะห์คานดังกล่าวโดยวิธี moment distribution ได้ดังนี้



 หาค่า relative-stiffness factor K<sub>R</sub> (สมการที่ 3-3) ของคานแต่ละช่วง เนื่องจากคานดังกล่าวทำด้วยวัสดุชนิดเดียวกันตลอดความยาวคาน ดังนั้น

$$(K_R)_{AB} = \frac{30(10^{-6})}{3} = 10(10^{-6}) \text{ m}^4/\text{m}$$
  
 $(K_R)_{BC} = \frac{60(10^{-6})}{4} = 15(10^{-6}) \text{ m}^4/\text{m}$ 

เนื่องจากจุด A และ C เป็น fixed support ซึ่งมีความแกร่งเป็นอนันต์ ดังนั้น ค่า  $(K_R)_{BA}$  และ  $(K_R)_{CB}$  จะมีค่าเป็นอนันต์

2. หาค่า distribution factor DF (สมการที่ 3-2) ที่ joint ต่างๆ ของคาน

joint B  

$$DF_{BA} = \frac{10}{10+15} \frac{10^{-6}}{10^{-6}} = 0.4$$

$$DF_{BC} = \frac{15}{10+15} \frac{10^{-6}}{10^{-6}} = 0.6$$
joint A  

$$DF_{AB} = \frac{10(10^{-6})}{\alpha+10(10^{-6})} = 0$$

$$DF_{CB} = \frac{15(10^{-6})}{\alpha+15(10^{-6})} = 0$$

 หาค่า fixed-end moment FEM ที่ปลายทั้งสองของแต่ละช่วงของคาน จากรูปที่ 3-5a เราจะเห็นว่า ช่วงคาน AB ไม่มีแรงกระทำ ดังนั้น

 $(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = 0$ 

และเนื่องจากช่วงคาน BC ถูกกระทำโดยแรงกระจายอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้น

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{3(4)^2}{12} = -4 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{3(4)^2}{12} = 4 \text{ kN} - \text{m}$ 

- 4. หาการกระจายของ moment
  - a. สมมุติให้ joint B ถูกยึดแน่นภายใต้การกระทำของแรง ดังนั้น ช่วง AB และช่วง BC ของคานจะอยู่ ในสภาวะของคานที่ถูกยึดแน่นที่ปลายของคานทั้งสองด้าน ซึ่งจะทำให้เกิด fixed-end moment ขึ้นที่ ปลายของคานทั้งสองด้านของช่วง BC ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5b โดยที่สภาวะเช่นนี้จะไม่แสดงถึงสภาวะ สมดุลที่แท้จริงที่จะเกิดขึ้นที่ joint B ดังนั้น เพื่อให้เกิดความสมดุลของ moment ที่ joint B เราจะให้ moment ที่มีขนาดเท่ากับ fixed-end moment ที่ joint B แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกระทำต่อ joint B จากนั้นทำการปลดปล่อย joint B ให้เกิดการหมุนอย่างอิสระ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5c
  - b. หาค่าของ moment ที่จะกระจายไปยังช่วง BA และ BC ของคาน เนื่องจาก moment  $+ 4 \,\mathrm{kN}$  m ในทิศทางตามเข็มนาฬิกากระทำต่อ joint B ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5c ซึ่งเราจะได้ว่า moment ที่ joint B ในช่วงคาน  $BC = 0.6(+4) = +2.4 \,\mathrm{kN}$  - m moment ที่ joint B ในช่วงคาน  $BA = 0.4(+4) = +1.6 \,\mathrm{kN}$  - m
  - C. เนื่องจากเราปลดปล่อยให้ joint *B* เป็นอิสระและมี moment เกิดขึ้นที่ปลาย *B* ของช่วง *BA* และ *BC* ดังที่หาได้ในข้อ b. ดังนั้น moment ดังกล่าวจะต้องถูกถ่ายเท (carry-over) ไปที่ปลายด้านไกลของ ช่วงคานนั้นๆ ด้วย โดยที่ carry-over factor ในกรณีนี้มีค่าเท่ากับ +0.5 ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5d ดังนั้น moment ที่ joint *B* ในช่วงคาน *BC* = 0.5(+2.4) = +1.6 kN - m

moment ที่ joint A ในช่วงคาน  $BA = 0.5(+1.6) = +0.8 \,\mathrm{kN}$  - m

**d.** เนื่องจากผนังที่ *A* และ *C* เป็น fixed support ดังนั้น ผนังดังกล่าวจะรองรับ moment ที่ถ่ายเทมาจาก joint *B* ทั้งหมด โดยไม่การกระจายโมเมนต์กลับ ซึ่งจะทำให้เราสามารถหยุดการคำนวณ moment distribution ได้

 ทำการรวมค่า moment ที่เกิดขึ้นในแต่ละ joint และผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นค่า moment ที่เกิดขึ้นจริงที่ปลาย ของช่วงคานเหล่านั้น

โดยทั่วไปแล้ว เราจะทำการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี moment distribution ในรูปของตาราง ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5e จากตาราง

- บรรทัดที่ 1 แสดง joint ต่างๆ ที่เรากำลังพิจารณา
- บรรทัดที่ 2 แสดงชิ้นส่วนของคานที่เชื่อมต่อกันที่ joint ต่างๆ ในบรรทัดที่ 1
- บรรทัดที่ 3 แสดงค่า distribution factor (ในขั้นตอนที่ 2)
- บรรทัดที่ 4 แสดงค่า fixed-end moment เนื่องจากแรงกระทำที่เกิดขึ้นจากการยึด joint B (ขั้นตอนที่ 3)
- บรรทัดที่ 5 *DM* และ *CO* แสดงค่า distributed moment (ในขั้นตอนที่ 4b) และ carry-over moment (ในขั้นตอนที่ 4c) ที่เกิดขึ้น ตามลำดับ
- บรรทัดที่ 6 แสดงผลรวมของค่า moment ที่เกิดจากการกระจายและการถ่ายเท (ใน ขั้นตอนที่ 4e)
- 5. หลังจากที่เราได้ค่า moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วน *AB*, *BA*, *BC*, และ *CB* แล้ว เราจะใช้ สมการความสมดุลหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของคานเหล่านั้นโดยใช้แผนภาพ freebody diagram ดังที่แสดงในรูป 3-5f
- 6. ทำการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของชิ้นส่วนเหล่านั้นและหาแรงปฏิกิริยาที่ เกิดขึ้นที่จุดรองรับ

### 3.3 Stiffness-Factor Modifications

เมื่อชิ้นส่วนของคานหรือโครงข้อแข็งและแรงกระทำมีลักษณะที่แตกต่างไปจากที่เราใช้ในการหาสมการ stiffness factor (สมการที่ 3-1) แล้ว เราจะสามารถหาสมการ stiffness factor ของกรณีต่างๆ เหล่านั้นได้โดยใช้สมการ slopedeflection ซึ่ง stiffness factor ที่ได้มักจะถูกเรียกว่า modified-stiffness factor

modified-stiffness factor จะช่วยทำให้เราทำการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี moment distribution ได้สะดวกขึ้น เพราะเมื่อเราใช้ค่า modified-stiffness factor ของชิ้นส่วนของโครงสร้างใดแล้ว เราไม่ต้องทำการยึดและปลดปล่อย joint ของชิ้นส่วนของโครงสร้างนั้นอีกต่อไป

โดยทั่วไปแล้ว modified-stiffness factor จะถูกนิยามว่าเป็น moment ที่จะทำให้ปลายด้านใกล้ที่เรากำลัง พิจารณาอยู่ (รองรับโดยหมุด) เกิดการหมุนเท่ากับ 1 หน่วย ขณะที่ปลายด้านไกลจะมีลักษณะการรองรับแบบที่เป็นอยู่จริง ในที่นี้ เราจะพิจารณาโครงสร้างและแรงกระทำที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

- 1.) ปลายด้านไกลของชิ้นส่วนโครงสร้างถูกรองรับโดยหมุด (pin) หรือ roller
- 2.) โครงสร้างและแรงกระทำมีความสมมาตร
- 3.) โครงสร้างมีความสมมาตรแต่ถูกกระทำโดยแรงแบบ antisymmetric

### 1.) ปลายด้านไกลของชิ้นส่วนโครงสร้างถูกรองรับโดย pin หรือ roller (Member Pin-Supported at Far End)

ในหลายกรณี เราจะพบว่าโครงสร้าง statically indeterminate จะมีปลายด้านนอกรองรับโดย pin และ/หรือ roller รูปที่ 3-6a แสดงตัวอย่างของคานต่อเนื่องที่ปลายด้านนอกของคานถูกรองรับโดย pin และ roller ตามลำดับ



พิจารณาชิ้นส่วน AB ของโครงสร้างใดๆ ที่มีค่า flexural stiffness EI คงที่ตลอดความยาว ดังที่แสดงในรูปที่ 3-6b กำหนดให้ moment  $M_{_{AB}}$  ที่กระทำที่จุด A มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาและทำให้ชิ้นส่วนของโครงสร้างเกิดการ เปลี่ยนแปลงรูปร่างดังที่แสดงโดยเส้นประและปลาย A และปลาย B เกิดการหมุนเป็นมุม  $\theta_A$  และ  $\theta_B$  ตามลำดับ ดังนั้น จากสมการ slope-deflection เราจะได้ว่า

$$M_{AB} = 2E \frac{I}{L} (2\theta_A + \theta_B)$$
$$M_{BA} = 2E \frac{I}{L} (\theta_A + 2\theta_B) = 0$$

จากสมการ moment  $M_{\scriptscriptstyle B\!A}$  เราจะได้ว่า

$$\theta_B = -\frac{\theta_A}{2}$$

แทนสมการ  $heta_{\scriptscriptstyle B}$  ลงในสมการ  $M_{\scriptscriptstyle AB}$  เราจะได้

$$M_{AB} = \frac{3EI}{L}\theta_A$$

ดังนั้น stiffness factor ของขึ้นส่วนของโครงสร้าง AB ในกรณีนี้จะอยู่ในรูป

$$K = \frac{3EI}{L} \tag{3-4}$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบค่า stiffness factor ที่ได้กับค่า stiffness factor ในสมการที่ (3-1) แล้ว เราจะเห็นได้ว่า ค่า stiffness factor ในกรณีนี้จะเป็น 3/4 เท่าของค่า stiffness factor ดังกล่าว

2.) โครงสร้างและแรงกระทำมีความสมมาตร (Symmetric Structure and Loading)



รูปที่ 3-7

ในกรณีที่โครงสร้างและแรงกระทำมีความสมมาตรรอบแกนใดแกนหนึ่ง เช่น คานต่อเนื่องดังที่แสดงในรูปที่ 3-7 เป็นต้น แผนภาพ moment diagram ของคานจะมีความสมมาตรรอบแกนดังกล่าวด้วยและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่จุด
B และ C จะมีค่าเท่ากันแต่ทิศทางตรงกันข้าม ( $-M_{\scriptscriptstyle BC}=M_{\scriptscriptstyle CB}$ ) ซึ่งจะทำให้เกิดการหมุนที่จุด B และ C เป็นมุม  $-\theta_{\scriptscriptstyle B}=\theta_{\scriptscriptstyle C}$ 

จากสมการ slope-deflection เราจะได้ว่า

$$M_{BC} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_{B} + \theta_{C}) = 2E\frac{I}{L}(-2\theta + \theta) = -\frac{2EI}{L}\theta = -M$$
$$M_{CB} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_{C} + \theta_{B}) = 2E\frac{I}{L}(2\theta - \theta) = \frac{2EI}{L}\theta = M$$

จากสมการทั้งสอง เราจะเห็นได้ว่า

$$M = \frac{2EI}{L}\theta$$

ดังนั้น stiffness factor ของ span กลางของคานในกรณีนี้จะอยู่ในรูป

$$K = \frac{2EI}{L} \tag{3-5}$$

โดยการเปรียบเทียบ เราจะเห็นได้ว่า ค่า stiffness factor ในกรณีนี้มีค่าเป็น 1/2 เท่าของค่า stiffness factor ใน สมการที่ (3-1)

3.) โครงสร้างสมมาตรถูกกระทำโดยแรงแบบ antisymmetric (Symmetric Structure with Antisymmetric Loading)



ในกรณีที่โครงสร้างมีความสมมาตรแต่ถูกกระทำโดยแรงแบบ antisymmetric เช่น คานต่อเนื่อง ดังที่แสดงในรูปที่ 3-8 เป็นต้น แผนภาพ moment diagram ของคานจะมีลักษณะ antisymmetric และ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่จุด Bและ C จะมีค่าเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน ( $M_{BC} = M_{CB} = M$ ) ซึ่งจะทำให้เกิดการหมุนที่จุด B และ C เป็นมุม  $\theta_B = \theta_C = \theta$ 

จากสมการ slope-deflection เราจะได้ว่า

$$M_{BC} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_{B} + \theta_{C}) = 2E\frac{I}{L}(2\theta + \theta) = \frac{6EI}{L}\theta = M$$
$$M_{CB} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_{C} + \theta_{B}) = 2E\frac{I}{L}(2\theta + \theta) = \frac{6EI}{L}\theta = M$$

 $M = \frac{6EI}{I}\theta$ 

จากสมการทั้งสอง เราจะได้ว่า

$$K = \frac{6EI}{L} \tag{3-6}$$

โดยการเปรียบเทียบ เราจะเห็นได้ว่า ค่า stiffness factor ในกรณีนี้มีค่าเป็น 3/2 เท่าของค่า stiffness factor ใน สมการที่ (3-1)

ตารางที่ 3-1 แสดงการเปรียบเทียบค่า stiffness factor ในกรณีต่างๆ กับกรณีปกติในสมการที่ (3-1)

Structural Analysis

	ตารางที่ 3-1		
กรณีที่พิจารณา	รูปชิ้นส่วนของโครงสร้าง	$M_{AB}$	Modified
		$ heta_{_A}$	K
ปกติ	M <sub>AB</sub> A A A A A A B A B A B A B A B A B A	$\frac{4EI_{AB}}{L}$	$K_{AB}$
รองรับอย่างง่าย		$3EI_{AB}$	$\frac{3}{K}$
(Simple		L	4 <sup><i>AB</i></sup>
support)			
Symmetric	$M_{AB}$	$\frac{2EI_{AB}}{L}$	$\frac{1}{2}K_{AB}$
Antisymmetric	$M_{AB} \left( \begin{array}{c} A \\ B \\ \theta \end{array} \right)_{M_{BA}} M_{BA}$	$\frac{6EI_{AB}}{L}$	$\frac{3}{2}K_{AB}$

จงทำการวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-1a เมื่อ  $(EI)_{AB} = EI$  และ  $(EI)_{BC} = 2EI$  โดยวิธี moment distribution จากนั้น จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ร่าง elastic curve ของคาน และ หาค่า rotation ที่จุดรองรับ *B* 



1. คำนวณหา stiffness factors

$$K_{AB} = \frac{4(EI)_{AB}}{L_{AB}} = \frac{4EI}{3}$$
$$K_{BC} = \frac{4(EI)_{BC}}{L_{BC}} = \frac{8EI}{5}$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด A และจุด C เป็น fixed end ดังนั้น

$$(DF)_{AB} = \frac{4EI/3}{\alpha + 4EI/3} = 0$$
$$(DF)_{CB} = \frac{8EI/5}{\alpha + 8EI/5} = 0$$
$$(DF)_{BA} = \frac{4EI/3}{4EI/3 + 8EI/5} = 0.4545$$
$$(DF)_{BC} = 1 - 0.4545 = 0.5455$$

3. คำนวณหา fixed-end moment

$$(FEM)_{AB} = -\frac{Pab^{2}}{L^{2}} = -\frac{10(1)2^{2}}{3^{2}} = -4.4444 \text{ kN} - \text{m}$$
$$(FEM)_{BA} = +\frac{Pa^{2}b}{L^{2}} = +\frac{10(1^{2})2}{3^{2}} = +2.2222 \text{ kN} - \text{m}$$
$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^{2}}{12} = \frac{2(5^{2})}{12} = -4.1667 \text{ kN} - \text{m}$$
$$(FEM)_{CB} = +4.1667 \text{ kN} - \text{m}$$

4. moment distribution

Joint	A	В		С
Member	AB	BA	BC	СВ
DF	0	0.4545	0.5455	0
FEM	-4.4444	+2.2222	-4.1667	+4.1667
DM	,	+0.8838	+1.0607	
СОМ	+0.4419			+0.5304
$\sum M$	-4.003	+3.106	-3.106	+4.697

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

เมื่อน้ำค่า end moment ที่หาได้มาเขียน free-body diagram ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน เราจะได้แผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ EX 3-1b



จากนั้น ใช้สมการความสมดุลหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของคานแล้ว เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-1c



6. ร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน

จากแผนภาพ moment diagram และการรองรับของคาน เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของคานได้ ดังที่ แสดงในรูปที่ Ex 3-1d



10. หาค่า rotation ที่จุดรองรับ B

ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่างๆ บนคานจะหาได้โดยใช้วิธีการหาค่าการโก่งตัวที่ได้ศึกษาผ่านไปแล้ว เช่น วิธี slope-deflection วิธี conjugate beam และวิธี unit-load เป็นต้น โดยวิธี conjugate beam หรือวิธี unit-load จะ เหมาะสมในการหาค่าการโก่งตัวของคาน และวิธี slope-deflection จะเหมาะสมในการหาค่า rotation ที่จุดรองรับของ คาน

จากสมการ slope-deflection ค่า rotation ที่จุดรองรับ B จะมีค่าเท่ากับ

$$M_{BA} = 2\frac{EI_{AB}}{L_{AB}}(2\theta_B + \theta_A - 3\psi_{AB}) + (FEM)_{BA}$$
$$3.106 = \frac{2}{3}EI(2\theta_B) + 2.2222$$
$$\theta_B = \frac{0.663}{EI}$$

ซึ่งมีทิศหมุนตามเข็มนาฬิกา

Ans.

จงทำการวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-2a โดยวิธี moment distribution จากนั้น ให้เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram และร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน กำหนดให้  $EI_{BC} = 1.2EI$  และ  $EI_{CD} = EI$ 



เนื่องจากคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-2a มีชิ้นส่วน *AB* เป็นปลายยื่น ซึ่งชิ้นส่วน *AB* นี้จะไม่รองรับ moment ที่ถ่ายมาจากชิ้นส่วน *BC* และ *CD* (distribution factor ของชิ้นส่วน *AB* มีค่าเท่ากับศูนย์) ดังนั้น เพื่อความสะดวกใน การทำการกระจาย moment บนคาน เราจะทำการแยกชิ้นส่วน *AB* ออกจากคานแล้ว ทำการเขียนแผนภาพ free body diagram ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-2b จากนั้น ให้แรงเฉือนและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่จุดตัดกระทำต่อคานที่จุด ดังที่แสดงในรูปและเราจะทำการวิเคราะห์คานได้ดังต่อไปนี้

1. คำนวณหา stiffness factors

$$K_{BC} = \frac{4EI_{BC}}{L_{BC}} = \frac{4(1.2EI)}{5} = 0.96EI$$
$$K_{CD} = \frac{4EI_{CD}}{L_{CD}} = \frac{4EI}{4} = EI$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากชิ้นส่วน AB เป็นปลายยื่น ดังนั้น

$$(DF)_{BA} = 0$$
  
 $(DF)_{BC} = 1 - (DF)_{BA} = 1$ 

เนื่องจากปลายของคานที่จุด D เป็น fixed end ดังนั้น

$$(DF)_{DC} = \frac{EI}{\alpha + EI} = 0$$
$$(DF)_{CB} = \frac{0.96EI}{0.96EI + EI} = 0.4898$$
$$(DF)_{CD} = 1 - (DF)_{CB} = 0.5102$$

3. คำนวณหา fixed-end moment

เนื่องจากชิ้นส่วน AB เป็นปลายยื่น ดังนั้น

$$(FEM)_{BA} = 20(2) = +40 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{40(5)^2}{12} = -83.333 \text{ kN} - \text{m}$   
 $(FEM)_{CB} = +\frac{wL^2}{12} = +83.333 \text{ kN} - \text{m}$ 

4. moment distribution

เนื่องจากคานถูกกระทำโดยโมเมนต์ภายนอกขนาด 10 kN - m ที่จุดต่อ *C* และมีทิศทางตามเข็มนาฬิกา โมเมนต์ภายนอกนี้จะต้องถูกพิจารณาให้เป็น fixed-end moment ที่กระทำต่อ**ชิ้นส่วนสมมุติ**ชิ้นหนึ่ง ซึ่งจะมีทิศทางทวน เข็มนาฬิกา ดังนั้น fixed-end moment ดังกล่าวจะมีค่าเป็นลบ ดังที่แสดงในตารางการคำนวณ

Joint	В		С			D
Member	BA	BC	СВ	CD		DC
DF	0	1	0.4898	0.5102		0
FEM	+40	-83.333	+83.333		-10	
DM		+43.333	-35.919	-37.414		
СОМ		-17.960	+21.667			-18.707
DM		+17.960	-10.612	-11.055		
СОМ		-5.306	+8.980			-5.528
DM		+5.306	-4.308	-4.672		
СОМ		<b>-</b> 2.154	+2.653			-2.336
DM		+2.154	-1.299	-1.354		
СОМ		-0.650	+1.077			-0.667
DM		+0.650	-0.528	-0.549		
СОМ		-0.264	+0.325			-0.275
DM		+0.264	-0.159	-0.166		
СОМ		-0.080	+0.132			-0.083
DM		+0.080	-0.065	-0.067		
СОМ		-0.033	+0.040			-0.033
DM		+0.033	-0.020	-0.020		
$\sum M$	40	-40	+65.297	-55.297	-10	-27.639

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

เมื่อนำค่า end moment ที่หาได้มาเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแต่ละซิ้นส่วนของคาน จากนั้น ใช้ สมการความสมดุลหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของคานแล้ว เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-2c 6. ร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน

จากแผนภาพ moment diagram และลักษณะการยึดรั้งคาน เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของคานได้ ดังที่ แสดงในรูปที่ Ex 3-2d นอกจากนั้นแล้ว ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่างๆ บนคาน เช่น ค่าการโก่งตัวที่ปลาย A ของคาน เป็นต้น จะหาได้โดยใช้วิธีการหาค่าการโก่งตัวที่ได้ศึกษาผ่านไปแล้ว เช่น วิธี conjugate beam และวิธี unit-load เป็นต้น



ขอให้สังเกตด้วยว่า เมื่อเราทำการตัดขึ้นส่วน AB ออกจากการทำ moment distribution แล้ว เราจะเห็นได้ว่า จุดรองรับ B จะเป็นจุดรองรับแบบ roller ที่อยู่ด้านนอก ดังนั้น เราสามารถใช้สมการ modified stiffness factors ในการ หาค่า stiffness factors  $K_{_{BC}}$  ได้ และ เราจะทำการวิเคราะห์คานนี้ได้ง่ายขึ้นดังต่อไปนี้

1. คำนวณหา stiffness factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด B เป็น roller ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-2b ดังนั้น

$$K_{BC} = \frac{3EI_{BC}}{L_{BC}} = \frac{3(1.2EI)}{5} = 0.72EI$$
$$K_{CD} = \frac{4EI_{CD}}{L_{CD}} = \frac{4EI}{4} = EI$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด B เป็น roller ดังนั้น

$$(DF)_{BC} = \frac{0.72EI}{0 + 0.72EI} = 1$$

เนื่องจากปลายของคานที่จุด D เป็น fixed end ดังนั้น

$$(DF)_{DC} = \frac{EI}{\alpha + EI} = 0$$
$$(DF)_{CB} = \frac{0.72EI}{0.72EI + EI} = 0.4186$$
$$(DF)_{CD} = \frac{EI}{0.72EI + EI} = 0.5814$$

3. คำนวณหา fixed-end moment

เนื่องจากปลายของคานที่จุด B เป็น roller และเราใช้สมการ modified stiffness factors ดังนั้น

$$(FEM)_{CB} = +\frac{wL^2}{8} = \frac{40(5)^2}{8} = 125 \text{ kN} - \text{m}$$

4. moment distribution

เนื่องจากจุด *B* ของคานถูกกระทำโดยโมเมนต์ขนาด 40 kN - m ซึ่งมีทิศทาง**ทวนเข็ม**นาฬิกา ดังนั้น โมเมนต์ ดังกล่าวจะถูกพิจารณาเป็นโมเมนต์ที่**มีค่าเป็นลบ**ตาม sign convention ที่เราใช้ และจะถูกถ่ายเทไปเป็น fixed-end moment ที่ปลาย *C* ของชิ้นส่วน *BC* โดยจะมีค่าเท่ากับ 0.5(-40) = -20 kN - m ดังที่แสดงในตารางการคำนวณ (ดูรูปที่ 3-6b ประกอบจะช่วยให้เข้าใจ concept ได้ง่ายขึ้น)

Joint	В		С		
Member		СВ	CD		DC
DF	1	0.4186	0.5814		0
โมเมนต์ที่เกิดจาก					
โมเมนต์ภายนอก	-40				
		-20			
FEM		+125		-10	
DM		-39.767	-55.233		
СОМ					-27.616
$\sum M$	-40	+65.233	-55.233	-10	-27.616

จงทำการวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-3 โดยวิธี moment distribution จากนั้น จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานดังกล่าว กำหนดให้  $EI = 10000 \text{ kN} - \text{m}^2$  และจุดรองรับ *B* เกิดการทรุด ตัวในแนวดิ่ง 5 mm



1. คำนวณหา stiffness factors

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L_{AB}} = \frac{4EI}{4} = EI$$

เนื่องจากปลายของคานที่จุด C เป็น roller ดังนั้น

$$K_{BC} = \frac{3EI}{L_{BC}} = \frac{3EI}{6} = 0.5EI$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด A เป็น fixed end ดังนั้น

 $(DF)_{\scriptscriptstyle AB}=0$ เนื่องจากปลายของคานที่จุด  $\,C\,$ เป็น roller ดังนั้น

$$(DF)_{CB} = 1$$
  
 $(DF)_{BA} = \frac{EI}{EI + 0.5EI} = 0.6667$   
 $(DF)_{BC} = 1 - 0.6667 = 0.3333$ 

3. คำนวณหา fixed-end moment

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = -\frac{6EI\Delta}{L^2}$$
  
=  $-\frac{6(10000)(0.005)}{4^2} = -18.75 \text{ kN} - \text{m}$ 

เนื่องจากปลายของคานที่จุด C เป็น roller ดังนั้น การทรุดตัวของจุดรองรับ B จะทำให้เกิด fixed-end moment ที่มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาที่ปลาย B ของส่วน BC ของคาน

$$(FEM)_{BC} = +\frac{3EI\Delta}{L^2} = \frac{3(10000)(0.005)}{6^2} = 4.1667 \text{ kN} - \text{m}$$

4. moment distribution

Joint	A	В		С
Member	AB	BA	BC	СВ
DF	1	0.6667	0.3333	1
FEM	-18.75	-18.75	+4.1667	0
DM	,	+9.7227	+4.8606	
СОМ	+4.8614			
$\sum M$	-13.889	-9.027	+9.027	0

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

เมื่อนำค่า end moment ที่หาได้มาเขียน free-body diagram ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน จากนั้น ใช้สมการความ สมดุลหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของคานแล้ว เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-3b



Ans.

จงทำการวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-4a โดยวิธี moment distribution จากนั้น จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน สุดท้าย จงทำการร่าง elastic curve ของคาน กำหนดให้ *EI* มีค่าคงที่



เมื่อพิจารณาการแอ่นตัวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-4b เราจะเห็นได้ว่า คานมีการแอ่นตัวที่สมมาตรรอบจุด กึ่งกลาง span ของช่วง *BC* ของคาน

1. คำนวณหา stiffness factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด A เป็น roller ดังนั้น

$$K_{AB} = \frac{3EI}{L_{AB}} = \frac{3EI}{2} = 1.5EI$$

เนื่องจากความสมมาตรของคาน

$$K_{BC} = \frac{2EI}{L_{BC}} = \frac{2EI}{3} = \frac{2EI}{3}$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด A เป็น roller ดังนั้น  $\left(DF\right)_{\scriptscriptstyle AB}=1$ 

$$(DF)_{BA} = \frac{1.5EI}{1.5EI + 2EI/3} = 0.6923$$
$$(DF)_{BC} = 1 - 0.6923 = 0.3077$$

3. คำนวณหา fixed-end moment

$$(FEM)_{BA} = +\frac{3PL}{16} = +\frac{3(10)2}{16} = 3.75 \text{ kN} - \text{m}$$

4. moment distribution

Joint	A	В	
Member	AB	BA	BC
DF	1	0.6923	0.3077
FEM	0	3.75	
DM		-2.596	-1.154
$\sum M$	0	-1.154	-1.154

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

เมื่อนำค่า end moment ที่หาได้มาเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน จากนั้น ใช้ สมการความสมดุลหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของคานแล้ว เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-4c



6. ร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน

จากแผนภาพ moment diagram และลักษณะการยึดรั้งของจุดรองรับของคาน เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-4d



Ans.

จงทำการวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-5a โดยวิธี moment distribution จากนั้น จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน สุดท้าย จงทำการร่าง elastic curve ของคาน กำหนดให้ *EI* มีค่าคงที่



เมื่อพิจารณาการแอ่นตัวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-5b เราจะเห็นได้ว่า คานมีการแอ่นตัวแบบ antisymmetric รอบจุดกึ่งกลาง span ของช่วง *BC* ของคาน

1. คำนวณหา stiffness factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด A เป็น roller ดังนั้น

$$K_{AB} = \frac{3EI}{L_{AB}} = \frac{3EI}{2} = 1.5EI$$

เนื่องจากความสมมาตรของคาน

$$K_{BC} = \frac{6EI}{L_{BC}} = \frac{6EI}{3} = 2EI$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด A เป็น roller ดังนั้น  $\left(DF\right)_{AB}=1$ 

$$(DF)_{BA} = \frac{1.5EI}{1.5EI + 2EI} = 0.4286$$
  
 $(DF)_{BC} = 1 - 0.4286 = 0.5714$ 

3. คำนวณหา fixed-end moment

$$(FEM)_{BA} = +\frac{wL^2}{8} = +\frac{5(2)^2}{8} = 2.5 \text{ kN} - \text{m}$$

4. moment distribution

Joint	A	В	
Member	AB	BA	BC
DF	1	0.4286	0.5714
FEM	0	2.5	
DM		-1.072	-1.425
$\sum M$	0	-1.425	-1.425

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

เมื่อนำค่า end moment ที่หาได้มาเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน จากนั้น ใช้ สมการความสมดุลหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของคานแล้ว เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-5c



6. ร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน

จากแผนภาพ moment diagram และลักษณะการยึดรั้งของจุดรองรับของคาน เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-5d



Ans.

Ans.

## 3.4 การวิเคราะห์ Frames ที่ไม่มีการเซ (No Sidesway) โดยวิธี Moment Distribution

ขั้นตอนในการวิเคราะห์ frames ที่ไม่มีการเซ (no sideway) มีลักษณะเช่นเดียวกับขั้นตอนในการวิเคราะห์คานที่ ได้กล่าวถึงใน section ที่ 3-2

# ตัวอย่างที่ 3-6

จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-6 โดยวิธี moment distribution พร้อมทั้งเขียนแผนภาพ moment diagram และร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็ง



เนื่องจากโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-6a มีชิ้นส่วน *AB* เป็นปลายยื่น ซึ่งจะไม่มีการถ่าย moment จาก ชิ้นส่วน *BC* และ *BD* มายังชิ้นส่วนนี้ของโครงข้อแข็ง (distribution factor ของชิ้นส่วน *AB* มีค่าเท่ากับศูนย์) ดังนั้น เพื่อความสะดวกในการทำการกระจาย moment เราจะทำการแยกชิ้นส่วน *AB* ออกจากโครงข้อแข็ง จากนั้น ให้แรงเฉือน และ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่จุดตัดกระทำต่อจุดเชื่อมต่อ *B* และเราจะทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็งได้ดังต่อไปนี้

1. คำนวณหา stiffness factors

$$K_{BC} = \frac{4(EI)_{BC}}{L_{BC}} = \frac{8EI}{5}$$
$$K_{BD} = \frac{4(EI)_{BD}}{L_{BD}} = \frac{4EI}{5}$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากชิ้นส่วน AB เป็นปลายยื่น ดังนั้น

$$(DF)_{BA} = 0$$

เนื่องจากปลายของคานที่จุด C และจุด D เป็น fixed end ดังนั้น

$$(DF)_{CB} = \frac{8EI/5}{\alpha + 8EI/5} = 0$$
$$(DF)_{DB} = \frac{4EI/5}{\alpha + 4EI/5} = 0$$
$$(DF)_{BC} = \frac{8EI/5}{4EI/5 + 8EI/5} = \frac{8}{12} = 0.6667$$

$$(DF)_{BD} = 1 - 0.6667 = 0.3333$$

3. คำนวณหา fixed-end moment

เนื่องจากชิ้นส่วน AB เป็นปลายยื่น ดังนั้น

$$(FEM)_{BA} = +36(1.5) = +54 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{64.8(5^2)}{12} = -135 \text{ kN} - \text{m}$   
 $(FEM)_{CB} = +135 \text{ kN} - \text{m}$ 

4. moment distribution

Joint	В			С	D
Member	BA	BC	BD	СВ	DB
DF	0	0.6667	0.3333	0	0
FEM	+54	-135	0	+135	0
DM		+54	+27		
СОМ				+27	+13.5
$\sum M$	+54	-81	+27	+162	+13.5

5. เขียนแผนภาพ moment diagram

เมื่อน้ำค่า end moment ที่หาได้มาเขียนแผนภาพ free-body diagram และใช้สมการความสมดุลหาค่าแรงต่างๆ เราจะได้แผนภาพ free-body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-6b จากนั้น เราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-6c





Ans.



จากแผนภาพ moment diagram และลักษณะการยึดรั้งโครงข้อแข็ง เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-6d



Ans.

จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-7a โดยวิธี moment distribution จากนั้น จงเขียน แผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง สุดท้าย จงทำการร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง กำหนดให้ *EI* มีค่าคงที่



เมื่อพิจารณารูปร่างการโก่งตัวของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-7b เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อแข็งมีลักษณะ ที่สมมาตร ดังนั้น เราจะพิจารณาโครงข้อแข็งเพียงแค่ครึ่งเดียว

1. คำนวณหา stiffness factors

$$K_{AB} = \frac{4EI}{L_{AB}} = \frac{4EI}{4} = EI$$

เนื่องจากความสมมาตรของโครงข้อแข็ง

$$K_{BC} = \frac{2EI}{L_{BC}} = \frac{2EI}{4} = 0.5EI$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด A เป็น fixed end ดังนั้น  $\left(DF
ight)_{\scriptscriptstyle AB}=0$ 

$$(DF)_{BA} = \frac{EI}{EI + 0.5EI} = 0.6667$$
  
 $(DF)_{BC} = 1 - 0.6667 = 0.3333$ 

3. คำนวณหา fixed-end moment

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{2(4)^2}{12} = -2.667 \text{ kN} - \text{m}$$

4. moment distribution

Joint	A	В	
Member	AB	BA	BC
DF	1	0.6667	0.3333
FEM			-2.667
DM		1.778	0.889
$\sum M$	0	1.778	-1.778

5. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

เมื่อนำค่า end moment ที่หาได้มาเขียนแผนภาพ free-body diagram ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน จากนั้น ใช้ สมการความสมดุลหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของคานแล้ว เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-7c



6. ร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน

จากแผนภาพ moment diagram และลักษณะการยึดรั้งโครงข้อแข็ง เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-7d



C

## 3.5 การวิเคราะห์ Frames ที่มีการเซ (Sidesway) โดยวิธี Moment Distribution

เมื่อโครงสร้างมีรูปร่างที่ไม่สมมาตร และ/หรือ ถูกกระทำโดยแรงภายนอกที่ไม่สมมาตรแล้ว โครงสร้างจะเกิดการ เซ (sidesway) ขึ้น ดังเช่นโครงข้อแข็งที่แสดงในรูปที่ 3-9a จากรูปเราจะเห็นได้ว่า ภายใต้แรง *P* moment ที่เกิดขึ้นที่ joint *B* และ *C* จะมีค่าไม่เท่ากัน โดยที่  $M_B > M_C$  ซึ่งผลต่างของ moment ทั้งสองจะทำให้โครงข้อแข็งนั้นเกิดการเซไป ทางขวามือ ในการที่จะหา moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ joint ต่างๆ (สมมุติให้เป็น *M*) และระยะการเซโดยวิธี moment distribution นั้น เราจะต้องใช้ principle of superposition เข้ามาช่วย ซึ่งในกรณีนี้ โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 3-9a จะ ถูกแยกออกเป็นโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 3-9b **บวกกับ** โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 3-9c และเราจะร่างขั้นตอน การวิเคราะห์อย่างคร่าวๆ ได้ดังนี้



- ภายใต้การกระทำของแรง P เราจะป้องกันไม่ให้โครงข้อแข็งเกิดการเซโดยการใส่ที่รองรับแบบหมุดที่ joint C ดังที่แสดงในรูปที่ 3-9b จากนั้น ใช้วิธี moment distribution หา moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ joint ต่างๆ (สมมุติให้เป็น M<sup>o</sup>) และใช้สมการความสมดุลหาค่าแรงปฏิกิริยา R ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint
- ให้แรงที่มีขนาดเท่ากับแรงปฏิกิริยา R แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกระทำที่ joint C ดังที่แสดงในรูปที่ 3-9c
   จากนั้น ทำการหา moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ joint ต่างๆ อย่างไรก็ตาม เนื่องจากโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงใน รูปที่ 3-9c
   รูปที่ 3-9c จะเกิดการเซขึ้นภายใต้การกระทำของแรง R ซึ่งทำให้เราไม่สามารถวิเคราะห์โครงข้อแข็งดังกล่าว
   ได้โดยตรง ดังนั้น เราจะต้องทำการวิเคราะห์หา moment ภายในโดยทางอ้อม ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

$$\theta_A = \theta_B = \theta_C = \theta_D = 0$$

2.2 หาค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็ง

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = 2E \frac{I}{L_{AB}} \left( -\frac{3\Delta'}{L_{AB}} \right) = -\frac{6EI\Delta'}{L_{AB}^2}$$
$$(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 0$$
$$(FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = 2E \frac{I}{L_{CD}} \left( -\frac{3\Delta'}{L_{CD}} \right) = -\frac{6EI\Delta'}{L_{CD}^2}$$

จากนั้น ใช้วิธี moment distribution หาค่าของ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ joint ต่างๆ เนื่องจากการเซ ของโครงข้อแข็งในข้อที่ 2.1 สมมุติให้มีค่าเป็น *M*'

- 2.3 หลังจากที่เราได้ค่า moment M' แล้ว เราจะใช้สมการความสมดุลหาค่าของแรงที่ไม่ทราบค่า R' ที่ เกิดขึ้นที่ joint C
- 2.4 เนื่องจากค่าแรง R' ได้มาจากการสมมุติค่าการเซ  $\Delta'$  และเนื่องจากโครงสร้างมีพฤติกรรมแบบ linear elastic จาก principle of superposition และรูปที่ 3-9b และ 3-9d เราจะได้ว่า แรง R' ที่หามาได้จะ เป็นสัดส่วนกับแรงปฏิกิริยา R โดยที่

$$R - C'R' = 0$$
$$C' = \frac{R}{R'}$$

2.5 ทำการหาค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็ง  $\,M\,$  จากสมการ

$$M = M^{\circ} + C'M'$$

จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-8a โดยวิธี moment distribution เพื่อหาค่า end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็ง พร้อมทั้งเขียน shear diagram และ moment diagram และร่าง แผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็ง



เนื่องจากโครงข้อแข็งมีการเซเกิดขึ้น จาก principle of superposition เราจะแยกโครงข้อแข็งดังกล่าวออกเป็น โครงข้อแข็ง 2 โครง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-8b และ Ex 3-8c

1. คำนวณหา stiffness factors

$$K_{AB} = \frac{4(EI)_{AB}}{L_{AB}} = \frac{4EI}{4} = EI$$

เนื่องจากจุดรองรับที่ C เป็น roller ดังนั้น

$$K_{BC} = \frac{3(EI)_{BC}}{L_{BC}} = \frac{3(2EI)}{3} = 2EI$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด A เป็น fixed end ดังนั้น

$$(DF)_{AB} = 0$$

เนื่องจากปลายของคานที่จุด  $\, C \,$ เป็น roller ดังนั้น

$$(DF)_{CB} = 1$$
  
 $(DF)_{BA} = \frac{EI}{EI + 2EI} = 0.333$   
 $(DF)_{BC} = 1 - 0.333 = 0.667$ 

Case 1. หาค่าแรงปฏิกิริยา **R** ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint **B** (รูปที่ Ex 3-8b)

3. คำนวณหา fixed-end moment

$$(FEM)_{BC} = -\frac{P}{L^2} \left[ b^2 a + \frac{a^2 b}{2} \right] = -\frac{10}{3^2} \left[ 1^2 (2) + \frac{2^2 (1)}{2} \right] = -4.44 \text{ kN} - \text{m}$$

นอกจากนั้นแล้ว เราจะพิจารณาโมเมนต์ภายนอกขนาด 10 kN - m ที่มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาและกระทำที่ จุดต่อ *B* ให้อยู่ในรูปของ fixed-end moment ที่กระทำที่ชิ้นส่วนสมมุติ ซึ่งอยู่ในรูปของ overhang ได้ โดยที่จะมีค่าเท่ากับ –10 kN - m เนื่องจากมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

Joint	A	В			С
Member	AB	BA	BC		СВ
DF	0	0.333	0.667		1
FEM			-4.44	-10	
DM		+4.81	+9.63		
СОМ	+2.41				
$M^{o} = \sum M$	+2.41	+4.81	+5.19		0

4. moment distribution

5. หาค่าแรงปฏิกิริยา R ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint B



พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของส่วน AB ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-8d เราจะได้ว่า

$$\int \sum M_B = 0;$$
  $V_A = \frac{2.41 + 4.81}{4} = 1.805 \,\mathrm{kN}$ 

ดังนั้น จากแผนภาพ free-body diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-8e และสมการความสมดุลของแรงใน แนวนอน เราจะได้ว่า

$$\overleftarrow{} \sum F_x = 0; \qquad \qquad R = 1.805 \text{ kN}$$

# Case 2. หาค่าแรงปฏิกิริยา **R' ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint B** (รูปที่ Ex 3-8c)

6. สมมุติให้โครงข้อแข็งเกิดการเซเป็นระยะ Δ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-8c และทำให้เกิด fixed-end moment บน ส่วน AB ของโครงข้อแข็งเท่ากับ

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = -100 \text{ kN} - \text{m}$$

7. moment distribution

Joint	A	E	С	
Member	AB	BA	BC	СВ
DF	0	0.333	0.667	1
FEM	-100	-100		
DM		+33.3	+66.7	
СОМ	+16.65			
$M' = \sum M$	-83.35	-66.7	+66.7	0

8. หาค่าแรงปฏิกิริยา R' ที่กระทำที่ joint B และทำให้โครงข้อแข็งเกิดการเซเป็นระยะ  $\Delta$ 



พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของส่วน AB ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-8f เราจะได้ว่า

$$V = \frac{66.7 + 83.35}{4} = 37.51 \,\mathrm{kN}$$

้ดังนั้น จากแผนภาพ free-body diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-8g เราจะได้ว่า

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \qquad \qquad R' = 37.51 \,\mathrm{kN}$$

และมีทิศทางดังที่แสดงในรูป

# 9. หาค่าสัมประสิทธิ์ $C^\prime$

จาก principle of superposition และรูปที่ Ex 3-8b และ Ex 3-8c เราจะได้ว่า แรง R' ที่หามาได้จะเป็นสัดส่วน กับแรงปฏิกิริยา R โดยที่ R-C'R'=0 ดังนั้น

$$C' = \frac{R}{R'} = \frac{1.805}{37.51} = 0.0481$$

10. หาค่า moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็ง M จากสมการ  $M=M^o+C'M'$ 

Joint	A	В		С
Member	AB	BA	BC	СВ
$M^{o}$	+2.41	+4.81	+5.19	0
Μ'	-83.35	-66.7	+66.7	0
С'М'	-4.01	-3.21	+3.21	0
$M = M^{o} + C'M'$	-1.60	+1.60	+8.40	0

11. เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

เมื่อนำค่า end moment ที่หาได้มาเขียน free-body diagram ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง จากนั้น ใช้ สมการความสมดุลหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งแล้ว เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-8h

12. ร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็ง

จากแผนภาพ moment diagram และลักษณะการยึดรั้งของจุดรองรับของโครงข้อแข็ง เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-8i และค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่างๆ บนโครงข้อแข็ง จะหาได้โดยใช้วิธีการหาค่าการโก่งตัวที่ได้ศึกษาผ่านไปแล้ว เช่น วิธี unit-load เป็นต้น



จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-9a โดยวิธี moment distribution พร้อมทั้งเขียนแผนภาพ moment diagram และร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน



เนื่องจากโครงข้อแข็งมีการเซเกิดขึ้น จาก principle of superposition เราจะแยกพิจารณาโครงข้อแข็งดังกล่าว ออกเป็น 2 กรณี ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-9b และ Ex 3-9c



1. คำนวณหา stiffness factors

$$K_{AB} = \frac{4(EI)_{AB}}{L_{AB}} = \frac{4EI}{5} = 0.8EI$$

เนื่องจากจุดรองรับที่ C เป็น roller ดังนั้น

$$K_{BC} = \frac{3(EI)_{BC}}{L_{BC}} = \frac{6EI}{5} = 1.2EI$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากปลายของคานที่จุด A เป็น fixed end ดังนั้น  $(DF)_{AB} = 0$ เนื่องจากปลายของคานที่จุด C เป็น roller ดังนั้น  $(DF)_{CB} = 1$ 

$$(DF)_{BA} = \frac{0.8EI}{0.8EI + 1.2EI} = 0.4$$
  
 $(DF)_{BC} = 1 - 0.4 = 0.6$ 

<u>Case 1.</u> หาค่าแรงปฏิกิริยา **R** ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint **B** (รูปที่ Ex 3-9b)

3. คำนวณหา fixed-end moment

Structural Analysis

$$(FEM)_{BC} = -\frac{P}{L^2} \left[ b^2 a + \frac{a^2 b}{2} \right] = -\frac{10}{5^2} \left[ 3^2 (2) + \frac{2^2 (3)}{2} \right] = -9.6 \text{ kN} - \text{m}$$

4. moment distribution

Joint	A	В		С
Member	AB	BA	BC	СВ
DF	0	0.4	0.6	1
FEM			-9.6	
DM		+3.84	+5.76	
СОМ	+1.92			
$M^{o} = \sum M$	+1.92	+3.84	-3.84	0

5. หาค่าแรงปฏิกิริยา R ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint B



พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของส่วน BC ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-9e เราจะได้ว่า

$$V_{BR} = \frac{10(3) + 3.84}{5} = 6.768 \text{ kN}$$

จากแผนภาพ free-body diagram ของจุดต่อ *B* ของโครงข้อแข็งและสมการความสมดุลของแรงในแนวดิ่ง เรา จะได้ว่า แรงเฉือน V<sub>BR</sub> ดังกล่าวจะกระทำที่ปลายด้าน *B* ของส่วน *AB* ของโครงข้อแข็งด้วย

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของส่วน AB ของโครงข้อแข็ง เราจะได้ว่า

$$\bigvee \sum M_A = 0;$$
  $V_{BL} = \frac{1.92 + 3.84 + 6.768(3)}{4} = 6.516 \text{ kN}$ 

สุดท้าย จากแผนภาพ free-body diagram ของจุดต่อ  $\,B\,$  ของโครงข้อแข็ง เราจะได้ว่า

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \qquad \qquad R = 6.516 \text{ kN}$$

# <u>Case 2.</u> หาค่าแรงปฏิกิริยา R' ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint **B** (รูปที่ Ex 3-9c)

6. สมมุติให้โครงข้อแข็งเกิดการเซเป็นระยะ  $\Delta$  ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-9c และทำให้เกิด fixed-end moment บน ส่วน AB ของโครงข้อแข็งเท่ากับ 100 kN - m ดังนั้น

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = -\frac{6(EI)_{AB}\Delta}{L^2_{AB}} = -0.24EI\Delta = -100 \text{ kN} - \text{m}$$

และ fixed-end moment บนส่วน BC ของโครงข้อแข็ง ซึ่งมีปลายด้านหนึ่งเป็น roller และมีค่าการโก่งตัว  $3\Delta/5$  ดังที่ แสดงในรูปที่ Ex 3-9e จะมีค่าเท่ากับ

$$(FEM)_{BC} = \frac{3(EI)_{BC}\Delta}{L_{BC}^2} = \frac{3(2EI)(3\Delta/5)}{5^2} = 0.144EI\Delta$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$(FEM)_{BC} = \frac{0.144(100)}{0.24} = 60 \text{ kN} - \text{m}$$

Joint	A	В		С
Member	AB	BA	BC	СВ
DF	0	0.4	0.6	1
FEM	-100	-100	+60	
DM		+16	+24	
СОМ	+8			
$M' = \sum M$	-92	-84	+84	0

7. moment distribution

8. หาค่าของแรงปฏิกิริยา R' ที่กระทำที่ joint B และทำให้โครงข้อแข็งเกิดการเซเป็นระยะ  $\Delta$ 



พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของส่วน *BC* ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-9f จากสมการ ความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด *C* เราจะได้ว่า

$$4\sum M_C = 0;$$
  $V_{BR} = \frac{84}{5} = 16.8 \text{ kN}$ 

จากแผนภาพ free-body diagram ของจุดต่อ B ของโครงข้อแข็งและสมการความสมดุลของแรงในแนวดิ่ง เรา จะได้ว่า แรงเฉือน  $V_{\scriptscriptstyle BR}$  ดังกล่าวจะกระทำที่ปลายด้าน B ของส่วน AB ของโครงข้อแข็งด้วย

พิจารณาแผนภาพ free-body diagram ของส่วน AB ของโครงข้อแข็ง เราจะได้ว่า

$$\int \sum M_A = 0;$$
  $V_{BL} = \frac{92 + 84 + 16.8(3)}{4} = 56.6 \text{ kN}$ 

สุดท้าย จากแผนภาพ free-body diagram ของจุดต่อ  $\,B\,$  ของโครงข้อแข็ง เราจะได้ว่า

$$\leftarrow \sum F_x = 0; \qquad \qquad R' = 56.6 \text{ kN}$$

9. หาค่าสัมประสิทธิ์  $C^\prime$ 

จาก principle of superposition และรูปที่ Ex 3-9b และ Ex 3-9c เราจะได้ว่า แรง R' ที่หามาได้จะเป็นสัดส่วน กับแรงปฏิกิริยา R โดยที่ R - C'R' = 0 ดังนั้น

$$C' = \frac{R}{R'} = \frac{6.516}{56.6} = 0.115$$

10. หาค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็ง M จาก  $M=M^o+C'M'$ 

Joint	A	В		С
Member	AB	BA	BC	СВ
$M^{o}$	+1.92	+3.84	-3.84	0
Μ'	-92	-84	+84	0
C'M'	-10.58	-9.66	+9.66	0
$M = M^{o} + C'M'$	-8.66	-5.82	+5.82	0

11. เขียนแผนภาพ moment diagram

เมื่อน้ำค่า end moment ที่หาได้มาเขียนแผนภาพ free-body diagram และใช้สมการความสมดุลหาค่าแรงต่างๆ เราจะได้แผนภาพ moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-9g



Ans.

12. ร่างแผนภาพ elastic curve ของคาน

จากแผนภาพ moment diagram และลักษณะการยึดรั้งของจุดรองรับของโครงข้อแข็ง เราจะร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-9h

 $_{\star}$ I.P. <del>,,,,,,,</del>, Elastic curve (h)

Ans.

## 3.6 การวิเคราะห์ Multistory Frames โดยวิธี Moment Distribution

โดยทั่วไปแล้ว โครงสร้างมักจะมีจำนวนชั้นมากกว่าหนึ่งชั้น ซึ่งทำให้การเซ (sidesway) ของโครงสร้างมีจำนวน มากกว่าหนึ่งค่า อย่างไรก็ตาม โดยหลักการแล้ว การวิเคราะห์โครงสร้างในกรณีนี้ก็ไม่ได้แตกต่างจากที่เราได้ศึกษาไปแล้ว ใน section ที่ 3.5



รูปที่ 3-10

พิจารณาโครงข้อแข็งสองชั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 3-10a ซึ่งถูกกระทำโดยแรงต่างๆ และมีการเปลี่ยนรูปร่างดังที่ แสดงโดยเส้นประ ในกรณีนี้ ระยะการเซ Δ<sub>1</sub> ที่เกิดขึ้นที่พื้นชั้นที่หนึ่งจะเป็นอิสระกับระยะการเซ Δ<sub>2</sub> ที่เกิดขึ้นที่พื้นชั้นที่ สอง โดยใช้ principle of superposition เราจะทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็งสองชั้นนี้โดยใช้วิธี moment distribution โดย การแยกพิจารณาโครงข้อแข็งออกเป็นสามกรณี ดังที่แสดงในรูปที่ 3-10b ถึง 3-10d และเราจะร่างขั้นตอนการวิเคราะห์ อย่างคร่าวๆ ได้ว่า

- ทำการยึดโครงข้อแข็งไม่ให้เกิดการเซ โดยใส่หมุดไว้ในตำแหน่งดังที่แสดงในรูปที่ 3-10b จากนั้น ทำการหาค่า ของ moment ที่ปลายของขึ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง ( M<sup>o</sup>) และค่าของแรงปฏิกิริยา R<sub>1</sub> และ R<sub>2</sub> ที่ เกิดขึ้นที่หมุดทั้งสอง โดยใช้วิธี moment distribution และสมการความสมดุล ตามลำดับ
- เอาหมุดที่พื้นชั้นแรกออกและทำการยึด joint ต่างๆ ของโครงข้อแข็งทั้งหมดไม่ให้มีการหมุนเกิดขึ้น จากนั้น ให้พื้นชั้นแรกเกิดการเซเป็นระยะ Δ' ซึ่งเราจะสมมุติค่าขึ้นมาค่าหนึ่ง เนื่องจากแรง R' ซึ่งเราไม่ทราบ ค่า ดังที่แสดงในรูปที่ 3-10c การเซที่สมมุติขึ้นมานี้จะทำให้เกิด fixed-end moment ขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วน

ต่างๆ ของโครงสร้าง จากนั้น ใช้วิธี moment distribution และสมการความสมดุลหาค่าของ moment ที่ปลาย ของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง M' และแรงปฏิกิริยา  $R_1'$  และ  $R_2'$  ตามลำดับ

- ในลักษณะเดียวกันกับข้อที่ 2 เอาหมุดที่พื้นชั้นที่สองออกและยึด joint ต่างๆ บนโครงสร้างทั้งหมดไม่ให้มีการ หมุนเกิดขึ้น จากนั้น ให้พื้นชั้นที่สองเกิดการเซเป็นระยะ ∆" ซึ่งเราจะสมมุติค่าขึ้นมาค่าหนึ่ง เนื่องจาก แรง R<sub>2</sub>" ซึ่งเราไม่ทราบค่า ดังที่แสดงในรูปที่ 3-10d การเซที่สมมุติขึ้นนี้จะทำให้เกิด fixed-end moment ที่ ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง จากนั้น ใช้วิธี moment distribution และสมการความสมดุลหาค่าของ moment ที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง M" และแรงปฏิกิริยา R<sub>1</sub>" และ R<sub>2</sub>" ได้ ตามลำดับ
- เนื่องจากแรงปฏิกิริยา R<sub>1</sub>' และ R<sub>2</sub>' จากข้อที่ 2 และแรงปฏิกิริยา R<sub>1</sub>'' และ R<sub>2</sub>'' จากข้อที่ 3 ได้มาจากการ สมมุติค่าการเซของโครงสร้าง ดังนั้น เราจะต้องหาค่า factor C' และ C'' ที่จะต้องใช้ในการปรับค่าของ moment ที่หามาได้ในข้อที่ 2 และ 3 ให้สอดคล้องกับที่เกิดจริง และเนื่องจากโครงสร้างมีพฤติกรรมแบบ linear elastic เราจะได้ว่า

$$-R_2 - C'R_2' + C''R_2'' = 0$$
  
-R\_1 + C'R\_1' - C''R\_1'' = 0

จากนั้น ทำการแก้สมการสองชั้นหาค่าของ C' และ C''

5. ทำการหาค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็ง  $\,M\,$  จากสมการ

$$M = M^o + C'M' + C''M'$$

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง 2 ชั้น ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-10a โดยวิธี moment-distribution กำหนดให้ ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมี modulus of elasticity ที่เท่ากันและมีค่า moment of inertia ดังที่แสดง จากนั้น จงทำการร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



เนื่องจากโครงข้อแข็งมีการเซเกิดขึ้น จาก principle of superposition เราจะแยกพิจารณาโครงข้อแข็งดังกล่าว ออกเป็น 3 กรณี ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-10b ถึง Ex 3-10d

1. หาค่า stiffness factor

$$K_{AB} = K_{CD} = \frac{4(3EI)}{4.8} = 2.5EI$$
$$K_{AC} = K_{BD} = \frac{4(2EI)}{6.4} = 1.25EI$$
$$K_{CE} = \frac{4(4EI)}{6.4} = 2.5EI$$
$$K_{DF} = \frac{4(2EI)}{3.2} = 2.5EI$$

2. คำนวณหา distribution factors

เนื่องจากจุดรองรับที่ E และ F เป็น fixed end ดังนั้น  $(DF)_{\scriptscriptstyle EC}=(DF)_{\scriptscriptstyle FD}=0$ 

$$(DF)_{AB} = \frac{2.5EI}{2.5EI + 1.5EI} = 0.6667$$
$$(DF)_{CA} = \frac{1.5EI}{2.5EI + 1.5EI} = 0.3333$$
$$(DF)_{BA} = 0.6667$$
$$(DF)_{BD} = 1 - 0.6667 = 0.3333$$
$$(DF)_{CA} = \frac{1.25EI}{1.25EI + 2.5EI + 2.5EI} = 0.2000$$
$$(DF)_{CD} = \frac{2.5EI}{1.25EI + 2.5EI + 2.5EI} = 0.4000$$
$$(DF)_{CE} = 1 - 0.2000 - 0.4000 = 0.4000$$
$$(DF)_{DB} = 0.2000$$
$$(DF)_{DC} = 0.4000$$
$$(DF)_{DF} = 0.4000$$

<u>Case 1.</u> หาค่าของแรงปฏิกิริยา  $R_1$  และ  $R_2$  ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint **B** และ **D** (รูปที่ Ex 3-10b)

เนื่องจากโครงสร้างถูกรองรับโดยหมุดที่ joint B และที่ joint D ดังนั้น แรงในแนวนอน 12 kN และ
 24 kN ที่กระทำที่จุด A และ C จะถูกต้านโดยตรงจากจุดรองรับดังกล่าว ตามลำดับ และแรงภายในที่เกิดขึ้นใน
 ชิ้นส่วนของโครงสร้างจึงมีเฉพาะแรงกดอัดในแนวแกนของชิ้นส่วน AB และ CD เท่านั้น ซึ่งจะทำให้แรงปฏิกิริยา R<sub>1</sub>
 และ R<sub>2</sub> ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint B และที่ joint D มีค่าเท่ากับ 12 kN และ 24 kN ตามลำดับ

# <u>Case 2.</u> หาค่าของแรงปฏิกิริยา $R'_1$ และ $R'_2$ ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint **B** และ **D** (รูปที่ Ex 3-10c)

4. เอาจุดรองรับที่จุด E ออก แต่ยังคงจุดรองรับไว้ที่จุด D ไว้และสมมุติให้โครงข้อแข็งเกิดการเซเป็นระยะ  $\Delta'$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-10c และ  $EI\Delta' = 100 \,\mathrm{kN}$  - m ซึ่งจะทำให้เกิด fixed-end moment บนซิ้นส่วนส่วนของโครงข้อ แข็งเท่ากับ

$$(FEM)_{AC} = (FEM)_{CA} = (FEM)_{BD} = (FEM)_{DB} = -\frac{6E(2I)\Delta'}{6.4^2}$$
  
= -0.2930EI\Delta' = -29.30 kN - m

5. moment distribution

ทำการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี moment-distribution ดังที่แสดงในตารางที่ Ex 3-10a

6. หาค่าของแรงปฏิกิริยา  $R_1'$  และ  $R_2'$  ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint B และที่ joint D

น้ำค่า end moment ที่หาได้ในตารางที่ Ex 3-10a มาเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนต่างๆ ของ โครงสร้าง จากนั้น เราจะทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน *AB* และ *CD* ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-10e สุดท้าย ใช้สมการความสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้

$$R'_1 = 92.437 \text{ kN}$$
  
 $R'_2 = 19.170 \text{ kN}$ 



<u>Case 3.</u> หาค่าของแรงปฏิกิริยา  $R_1''$  และ  $R_2''$  ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint **B** และ **D** (<sub>มิ</sub>ปที่ Ex 3-10d)

7. เอาจุดรองรับที่จุด *D* ออก แต่ยังคงจุดรองรับไว้ที่จุด *E* ไว้และสมมุติให้โครงข้อแข็งเกิดการเซเป็นระยะ  $\Delta''$ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-10d และ  $EI\Delta'' = 100 \text{ kN} - \text{m}$  ซึ่งจะทำให้เกิด fixed-end moment บนชิ้นส่วนส่วนของโครงข้อ แข็งเท่ากับ

$$(FEM)_{AC} = (FEM)_{CA} = (FEM)_{BD} = (FEM)_{DB} = \frac{6E(2I)\Delta''}{6.4^2}$$
  
= 0.2930EI\Delta'' = 29.30 kN - m  
$$(FEM)_{CE} = (FEM)_{EC} = -\frac{6E(4I)\Delta''}{6.4^2} = -0.5860EI\Delta'' = -58.60 \text{ kN - m}$$
  
$$(FEM)_{DF} = (FEM)_{FD} = -\frac{6E(2I)\Delta''}{3.2^2} = -1.1720EI\Delta'' = -117.20 \text{ kN - m}$$

8. moment distribution

ทำการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี moment-distribution ดังที่แสดงในตารางที่ Ex 3-10b

9. หาค่าของแรงปฏิกิริยา  $R_1''$  และ  $R_2''$  ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับแบบหมุดที่ joint B และที่ joint D

น้ำค่า end moment ที่หาได้ในตารางที่ Ex 3-10b มาเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนต่างๆ ของ โครงสร้าง จากนั้น เราจะทำการเขียนแผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วน *AB* และ *CD* ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 3-10f สุดท้าย ใช้สมการความสมดุลของแรงในแนวนอน เราจะได้

> $R_1'' = 19.195 \text{ kN}$  $R_2'' = 13.116 \text{ kN}$


ตารางที่ Ex 3-10a

Joint		A	1	3	C		D			Е	F	
Member	AB	AC	BA	BD	CA	CD	CE	DB	DC	DF	EC	FD
DF	0.6667	0.3333	0.6667	0.3333	0.2000	0.4000	0.4000	0.2000	0.4000	0.4000	0	0
FEM	0.00	-29.30	0.00	-29.30	-29.30	0.00	0.00	-29.30	0.00	0.00	0.00	0.00
DM	+19.53	+9.77	+19.53	+9.77	+5.86	+11.72	+11.72	+5.86	+11.72	+11.72	0.00	0.00
СОМ	+9.76	+2.93	+9.76	+2.93	+4.88	+5.86	0.00	+4.88	+5.86	0.00	+5.86	+5.86
DM	-8.46	-4.23	-8.46	-4.23	-2.15	-4.30	-4.29	-2.15	-4.30	-4.29	0.00	0.00
СОМ	-4.23	-1.08	-4.23	-1.08	-2.12	-2.15	0.00	-2.12	-2.15	0.00	-2.14	-2.14
DM	+3.54	+1.77	+3.54	+1.77	+0.85	+1.71	+1.71	+0.85	+1.71	+1.71	0.00	0.00
СОМ	+1.77	+0.42	+1.77	+0.42	+0.88	+0.86	0.00	+0.88	+0.86	0.00	+0.86	+0.86
DM	-1.46	-0.73	-1.46	-0.73	-0.35	-0.69	-0.70	-0.35	-0.69	-0.70	0.00	0.00
СОМ	-0.73	-0.18	-0.73	-0.18	-0.36	-0.34	0.00	-0.36	-0.34	0.00	-0.35	-0.35
DM	+0.61	+0.30	+0.61	+0.30	+0.14	+0.28	+0.28	+0.14	+0.28	+0.28	0.00	0.00
СОМ	+0.30	+0.07	+0.30	+0.07	+0.15	+0.14	0.00	+0.15	+0.14	0.00	+0.14	+0.14
DM	-0.25	-0.12	-0.25	-0.12	-0.06	-0.12	-0.11	-0.06	-0.12	-0.11	0.00	0.00
СОМ	-0.12	-0.03	-0.12	-0.03	-0.06	-0.06	0.00	-0.06	-0.06	0.00	-0.06	-0.06
DM	+0.10	+0.05	+0.10	+0.05	+0.02	+0.05	+0.05	+0.02	+0.05	+0.05	0.00	0.00
СОМ	+0.05	+0.01	+0.05	+0.01	+0.02	+0.02	0.00	+0.02	+0.02	0.00	+0.02	+0.02
DM	-0.04	-0.02	-0.04	-0.02	0.00	-0.02	-0.02	0.00	-0.02	-0.02	0.00	0.00
СОМ	-0.02	0.00	-0.02	0.00	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	-0.01
DM	+0.01	+0.01	+0.01	+0.01	0.00	+0.01	+0.01	0.00	+0.01	+0.01	0.00	0.00
<i>M</i> ′	+20.36	-20.36	+20.36	-20.36	-21.61	+12.96	+8.65	-21.61	+12.96	+8.65	+4.32	+4.32

ตารางที่ Ex 3-10b

Joint		A		8	C		D			Ε	F	
Member	AB	AC	BA	BD	CA	CD	CE	DB	DC	DF	EC	FD
DF	0.6667	0.3333	0.6667	0.3333	0.2000	0.4000	0.4000	0.2000	0.4000	0.4000	0	0
FEM	0.00	+29.30	0.00	+29.30	+29.30	0.00	-58.60	+29.30	0.00	-117.20	-58.60	-117.20
DM	-19.53	-9.77	-19.53	-9.77	+5.86	+11.72	+11.72	+17.58	+35.16	+35.16	0.00	0.00
СОМ	-9.76	+2.93	-9.76	+8.79	+4.88	+17.58	0.00	-4.88	+5.86	0.00	+5.86	+17.58
DM	+4.55	+2.28	+0.65	+0.32	-2.54	-5.08	-5.08	-0.20	-0.39	-0.39	0.00	0.00
СОМ	+0.32	-1.27	+2.28	-0.10	+1.14	-0.20	0.00	+0.16	-2.54	0.00	-2.54	-0.20
DM	+0.63	+0.32	-1.45	-0.73	-0.19	-0.38	-0.37	+0.48	+0.95	+0.95	0.00	0.00
СОМ	-0.72	-0.10	+0.32	+0.24	+0.16	+0.48	0.00	-0.35	-0.19	0.00	-0.18	+0.48
DM	+0.55	+0.27	-0.37	-0.19	-0.13	-0.25	-0.26	+0.11	+0.22	+0.22	0.00	0.00
СОМ	-0.18	-0.06	+0.28	+0.06	+0.14	+0.11	0.00	-0.10	-0.12	0.00	-0.13	+0.11
DM	+0.18	+0.06	-0.23	-0.11	-0.05	-0.10	-0.10	+0.04	+0.09	+0.09	0.00	0.00
СОМ	-0.12	-0.02	+0.09	+0.02	+0.03	+0.04	0.00	-0.06	-0.05	0.00	-0.05	+0.04
DM	+0.09	+0.05	-0.07	-0.04	-0.01	-0.03	-0.03	+0.02	+0.05	+0.04	0.00	0.00
СОМ	-0.04	0.00	+0.04	+0.01	+0.02	+0.02	0.00	-0.02	-0.02	0.00	-0.02	+0.02
DM	+0.03	+0.01	-0.03	-0.02	-0.01	-0.02	-0.01	+0.01	+0.01	+0.02	0.00	0.00
СОМ	-0.02	0.00	+0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00	0.00	+0.01
DM	+0.01	+0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	+0.01	+0.01	0.00	0.00
<i>M</i> ″	-24.01	+24.01	-27.77	+27.77	+28.84	+23.89	-52.73	+42.07	+39.03	-81.10	-55.66	-99.16

9. หาค่าสัมประสิทธิ์ C' และ C''

จาก principle of superposition และรูปที่ Ex 3-10b ถึง Ex 3-10d เมื่อกำหนดให้แรงปฏิกริยาที่มีทิศพุ่งไปทาง ขวามือเป็นบวก เราจะได้ว่า

$$-12 - 19.170C' + 13.116C'' = 0$$
$$-24 + 92.437C' - 19.195C'' = 0$$

เมื่อทำการแก้สมการสองชั้นเราจะได้

$$C' = 0.6455$$

C" = 1.8584 ซึ่งจะทำให้เราได้ค่าการเซของโครงสร้างที่เกิดขึ้นจริงบนชิ้นส่วน *CD* และชิ้นส่วน *AB* อยู่ในรูป

$$\Delta_1 = C'\Delta' = \frac{64.55}{EI}$$
$$\Delta_2 = C''\Delta'' = \frac{185.84}{EI}$$

10. หาค่าของ moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งหาได้จากสมการ

$$M = M^{\circ} + C'M' + C''M''$$

ซึ่งเราจะได้

$M_{AB} = +22.34 \text{ kN} - \text{m}$	$M_{AC} = -22.34 \text{ kN} - \text{m}$
$M_{BA} = +19.92 \text{ kN} - \text{m}$	$M_{BD} = -19.92 \text{ kN} - \text{m}$
$M_{CA} = -21.54 \text{ kN} - \text{m}$	$M_{CD} = +39.50 \text{ kN} - \text{m}$
$M_{CE} = -17.96 \mathrm{kN}$ - m	$M_{DB} = -13.00 \text{ kN} - \text{m}$
$M_{DC} = +49.27$ kN - m	$M_{DF} = -36.27 \text{ kN} - \text{m}$
$M_{EC} = -27.90 \mathrm{kN}$ - m	$M_{FD} = -55.98 \mathrm{kN}$ - m

11.เขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram และร่างแผนภาพ elastic curve ของโครงข้อแข็ง แผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง และแผนภาพ elastic curve จะมีลักษณะ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 2-8e และ Ex 2-8f ตามลำดับ Ans.

## แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

3-1 จงวิเคราะห์และเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-1 โดยใช้ วิธี moment distribution กำหนดให้คานมีค่า moment of inertia  $I = 50(10^{-6}) \,\mathrm{m}^4$  และ modulus of elasticity  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  จากนั้น จงร่าง elastic curve ของคาน



3.2 กำหนดให้คานดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-2 มีค่า moment of inertia  $I_{AB} = 60(10^{-6}) \,\mathrm{m}^4 \,I_{BC} = I_{CD} = 80(10^{-6}) \,\mathrm{m}^4$  และ modulus of elasticity  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  จงวิเคราะห์คานโดยใช้วิธี moment distribution เพื่อเขียน แผนภาพ shear diagram และ moment diagram จากนั้น จงร่าง elastic curve ของคานและหาค่าการโก่งตัวที่จุด กึ่งกลาง span *BC* 



3-3 จงวิเคราะห์คานโดยใช้วิธี moment distribution เพื่อเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-3 กำหนดให้  $EI_{AB} = EI_{BC} = 10000 \,\mathrm{kN} - \mathrm{m}^2$  และ  $EI_{CD} = 5000 \,\mathrm{kN} - \mathrm{m}^2$  ดังที่ แสดงในรูปที่ Prob. 3-3 กำหนดให้คานมีการทรุดตัวในแนวดิ่งที่จุดรองรับ *B* เท่ากับ 10 mm



3-4 กำหนดให้คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-4 มีค่า *EI* คงที่ตลอดความยาวคาน จงวิเคราะห์คานโดยใช้วิธี moment distribution จากนั้น จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram และร่าง elastic curve



3-5 กำหนดให้คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-5 มีค่า  $EI = 5000 \,\mathrm{kN} - \mathrm{m}^2$  ตลอดช่วงความยาวของคาน จงวิเคราะห์ คานโดยใช้วิธี moment distribution จากนั้น จงเขียน shear diagram, moment diagram และร่าง elastic curve ของ คาน พร้อมทั้งหาค่าการโก่งตัวที่จุดกึ่งกลาง span AB



3-6 จงวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-6 ซึ่งชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมีค่า *EI* = 2000 kN - m<sup>2</sup> โดยใช้วิธี moment distribution จากนั้น จงทำการเขียน shear diagram, moment diagram, และร่าง elastic curve



3-7 จงวิเคราะห์โครงข้อแข็งโดยใช้วิธี moment distribution เพื่อเขียนแผนภาพ shear diagram และ bending moment diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-7 กำหนดให้  $E = 20 \, {
m GPa}$  และชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งมี  $I = 350(10^6)\,{
m mm}^4$ 



3-8 จงวิเคราะห์โครงข้อแข็งโดยใช้วิธี moment distribution เพื่อเขียน shear diagram และ moment diagram ของโครง ข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-8 กำหนดให้ชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งมีค่า flexural stiffness ดังที่แสดง จากนั้น จงทำการ ร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



3-9 จงวิเคราะห์โครงข้อแข็งโดยใช้วิธี moment distribution เพื่อเขียน shear diagram และ moment diagram ของโครง ข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-9 กำหนดให้ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมี modulus of elasticity ที่เท่ากัน  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  และมี moment of inertia  $I_{AB} = I_{CD} = 20(10^6)\,\mathrm{mm}^4$  และ  $I_{BC} = 40(10^6)\,\mathrm{mm}^4$  จากนั้น จง ทำการร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



3-10 จงวิเคราะห์โครงข้อแข็งโดยใช้วิธี moment distribution เพื่อเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 3-10 กำหนดให้ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมี *EI* คงที่ จากนั้น จงทำการร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง



3-50

# บทที่ 4 Influence lines ของโครงสร้าง Statically Indeterminate

#### 4.1 บทนำ

จากวิชาทฤษฎีโครงสร้าง (Theory of structures) เราทราบมาแล้วว่า แผนภาพอินฟลูเอ็นซ์ไลน์ (influence line diagram) เป็นแผนภาพที่แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าของฟังก์ชัน (function) ใดฟังก์ชันหนึ่ง เช่น ฟังก์ชันของแรงปฏิกิริยา (reaction) ฟังก์ชันของแรงเฉือน (shear force) และฟังก์ชันของโมเมนต์ดัด (bending moment) เป็นต้น ที่จุดใดจุดหนึ่ง บนโครงสร้าง เมื่อแรงกระทำขนาด 1 หน่วยเคลื่อนที่ไปตามความยาวของโครงสร้าง

แผนภาพ Influence line มีประโยชน์ในการหาตำแหน่งและรูปแบบของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจร (live loads) ที่จะ ทำให้เกิดแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และ bending moment **ที่มีค่าสูงสุด ที่จุดที่เรากำลังพิจารณาอยู่** 

พิจารณารูปที่ 4-1 ซึ่งแสดงตัวอย่างการหาตำแหน่งและรูปแบบของน้ำหนักบรรทุกที่ควรจะวางอยู่บนคาน เพื่อที่จะทำให้เกิดค่า moment สูงสุดที่จุด *C* ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1a เนื่องจากน้ำหนักของคาน 1000 N/m น้ำหนักบรรทุกจรแบบกระจายสม่ำเสมอ (uniform moving load) ขนาด 3000 N/m และน้ำหนักบรรทุกจรแบบเป็นจุด (concentrated moving load) ขนาด 8000 N



โดยใช้หลักการของ Müller - Breslau เราจะเขียนแผนภาพ influence line ของ moment ที่จุด C ของคาน ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1b จากรูป เราจะเห็นได้ว่า

- เนื่องจากน้ำหนักของคานขนาด 1000 N/m เป็นน้ำหนักบรรทุกคงที่ (dead load) ซึ่งมีการกระจายอย่าง สม่ำเสมอตลอดความยาวของคาน ดังนั้น เราจะต้องวางน้ำหนักของคานตลอดความยาวของคาน ดังที่แสดง ในรูปที่ 4-1c
- เนื่องจากพื้นที่ใต้แผนภาพ influence line ที่มีค่าเป็นบวก (จากจุด A ถึงจุด B) มีค่ามากกว่าพื้นที่ใต้ แผนภาพ influence line ที่มีค่าเป็นลบ (จากจุด B ถึงปลายอิสระ) ดังนั้น เราจะต้องวางน้ำหนักบรรทุกจร แบบกระจายสม่ำเสมอขนาด 3000 N/m ที่ระยะจากจุด A ถึงจุด B) ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1c

3. เนื่องจากค่าพิกัดของ influence line ของ moment มีค่าสูงสุดที่จุด C ดังนั้น เราจะต้องวางน้ำหนักบรรทุก จรแบบเป็นจุดขนาด 8000  $\,{
m N}\,$  ที่จุด  $\,C\,$  ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1c

้จากรูปแบบของน้ำหนักบรรทุกดังที่แสดงในรูปที่ 4-1c ค่า moment สูงสุดที่จุด C จะหาได้จากผลคูณของพื้นที่ ใต้แผนภาพ influence line ที่ระยะจากจุด A ถึงจุด B กับค่าน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอขนาด 4000  $\,{
m N/m}$ บวกกับผลคูณของค่าพิกัดของ influence line ที่จุด Cกับค่าน้ำหนักบรรทุกแบบเป็นจุด และลบด้วยผลคูณของพื้นที่ใต้ แผนภาพ influence line ที่ระยะจากจุด B ถึงปลายอิสระกับค่าน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอขนาด 1000 m N/mหรือ

$$(M_C)_{\text{max}} = \frac{1}{2}(8)2(4000) + 2(8000) - \frac{1}{2}(4)2(1000) = 44000 \text{ N} - \text{m}$$

ซึ่งเราสามารถตรวจสอบความถูกต้องของค่าของ moment สูงสุดที่เกิดขึ้นจุดดังกล่าวเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกได้โดยใช้วิธี สถิตยศาสตร์ (statics)

4.2 กฎผกผันของ Maxwell (Maxwell's Theorem of Reciprocal Displacements)

กฦผกผันของ Maxwell แสดงความสัมพันธ์ที่น่าสนใจมากของการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นบนจุดสองจุดบน โครงสร้าง โดยที่กฎผกผันของ Maxwell กล่าวว่า

้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ที่เกิดขึ้นที่จุด B บนโครงสร้าง เนื่องจากแรงขนาด 1 หน่วย (unit load)กระทำที่จุด A ( $f_{\scriptscriptstyle BA}$ ) จะมีค่าเท่ากับค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่จุด A เนื่องจากแรงขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด B ( $f_{AB}$ ) หรือ  $f_{BA}$  =  $f_{AB}$  ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2



ีเราสามารถพิฐจน์กฦผกผันของ Maxwell ได้โดยใช้วิธี virtual work หรือวิธี unit load พิจารณาคาน ดังที่แสดงใน รูปที่ 4-2 ระยะโก่งตัวที่จุด B เนื่องจากแรงขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด A  $(f_{\scriptscriptstyle BA})$  จะหาได้โดย

- 1. หาค่าโมเมนต์ภายในคานเนื่องจากแรง 1 หน่วย ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2a โดยใช้สมการความสมดุล สมมุติว่า มีค่าเป็น *m* ₄
- 2. เอาแรง 1 หน่วยออก แล้วให้ virtual force ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2b จากนั้น หาค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นภายในคานโดยใช้สมการความสมดุล สมมุติว่ามีค่าเป็น m<sub>B</sub>
- 3. หาระยะโก่งตัวที่จุด B  $(f_{BA})$  เนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่จุด A จากสมการ  $\Delta = \int \frac{mM}{FI} dx$  เมื่อ  $M=m_{_A}$  และ  $m=m_{_B}$  ดังนั้น

$$f_{BA} = \int \frac{m_B m_A}{EI} dx$$

ในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน โดยวิธี virtual work ระยะโก่งตัวที่จุด *A* เนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่จุด *B* (*f*<sub>4B</sub>) ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2b จะหามาได้จากสมการ

$$f_{AB} = \int \frac{m_A m_B}{EI} dx$$

เมื่อ  $M=m_B$  ซึ่งเป็นโมเมนต์ภายในเนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่จุด B และ  $m=m_A$  ซึ่งเป็นโมเมนต์ภายใน เนื่องจาก virtual force ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2a

เราจะเห็นได้ว่า จากสมการการโก่งตัวทั้งสองข้างต้นว่า  $f_{\scriptscriptstyle BA}=f_{\scriptscriptstyle AB}$ 

ในกรณีของแรงคู่ควบ (couple) กฎผกผันของ Maxwell กล่าวว่า

ค่ามุมลาดเอียงที่เกิดขึ้นที่จุด *B* บนโครงสร้าง เนื่องจากโมเมนต์ขนาด 1 หน่วย (unit moment) กระทำ ที่จุด *A* ( $\theta_{BA}$ ) จะมีค่าเท่ากับค่ามุมลาดเอียงที่เกิดขึ้นที่จุด *A* เนื่องจากโมเมนต์ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด *B* ( $\theta_{AB}$ ) หรือ  $\theta_{BA} = \theta_{AB}$  ดังที่แสดงในรูปที่ 4-3



ในกรณีของการโก่งตัวและมุมลาดเอียง กฎผกผันของ Maxwell กล่าวว่า

ค่ามุมลาดเอียงที่มีหน่วยเป็นเรเดียน (radian) ที่เกิดขึ้นที่จุด *B* บนโครงสร้าง เนื่องจากแรงขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด *A* จะมีค่าเท่ากับระยะโก่งตัวที่เกิดขึ้นที่จุด *A* เนื่องจากโมเมนต์ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด *B* หรือ  $\theta_{BA} = f_{AB}$  ดังที่แสดงในรูปที่ 4-4



กฎผกผันของ Maxwell นี้ใช้ได้เมื่อวัสดุของโครงสร้างยังคงมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) และเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke's law) ภายใต้การกระทำของน้ำหนักบรรทุก

กฎผกผันของ Maxwell จะช่วยลดการคำนวณหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งบนโครงสร้าง โดยเฉพาะในการเขียน สมการความสอดคล้อง (compatibility equations) ในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มี degree of indeterminacy สูงๆ โดยวิธี เปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง (consistent deformation) ซึ่งจะทำให้วิธีการวิเคราะห์โครงสร้างดังกล่าวมีความยุ่งยากน้อยลง เมื่อกฎผกผันของ Maxwell ถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปแล้ว กฎนี้จะถูกเรียกว่า Betti's Law ซึ่งจะกล่าวอย่าง สั้นๆ ได้ว่า virtual work  $U_{AB}$  ที่เกิดจากแรงซุด  $\sum P_B$  เมื่อโครงสร้างมีการเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจากแรงซุด  $\sum P_A$  จะมีค่าเท่ากับ virtual work  $U_{BA}$  ที่เกิดจากแรงซุด  $\sum P_A$  เมื่อโครงสร้างมีการเปลี่ยนตำแหน่ง เนื่องจากแรงซุด  $\sum P_B$  หรือ  $U_{AB} = U_{BA}$ 

## 4.3 อินฟลูเอ็นไลน์ของคาน Statically Indeterminate

ในวิชาทฤษฎีโครงสร้าง เราได้ใช้หลักการ Müller - Breslau ในการเขียนแผนภาพ influence line ของแรง ปฏิกิริยา แรงเฉือน และ bending moment ที่จุดๆ หนึ่งของคาน statically determinate ไปแล้ว ใน section นี้ เราจะได้ ศึกษาถึงการใช้หลักการดังกล่าวในการเขียนแผนภาพ influence line บนคาน statically indeterminate

## Müller - Breslau principle

หลักการ Müller - Breslau ช่วยทำให้เราร่างแผนภาพ influence line ได้เร็วขึ้น โดยหลักการนี้กล่าวว่า

"รูปร่างของแผนภาพ influence line ของฟังก์ชันใดๆ (แรงปฏิกิริยา หรือแรงเฉือน หรือ bending moment) ที่จุด ใดจุดหนึ่งในโครงสร้างจะมีรูปร่างเหมือนกับรูปการโก่งตัว (elastic curve) ของโครงสร้างนั้น เมื่อโครงสร้างนั้นถูกกระทำ โดยฟังก์ชันที่จุดดังกล่าว และหน้าตัดที่จุดดังกล่าวไม่มีความต้านทานต่อฟังก์ชันที่กระทำ"

พิจารณารูปที่ 4-5 จากหลักการของ Müller - Breslau เราจะได้ว่า



(a) Influence line ของแรงปฏิกิริยาที่จุด A







c) Influence line ของ moment ที่จุด  $\,C\,$ 

รูปที่ 4-5

- 1. เมื่อเราต้องการร่างแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยาในแนวดิ่งที่จุด A  $(A_{,,})$  ของคาน ดังที่แสดง ในรูปที่ 4-5a เราจะเอาความต้านทานต่อแรงปฏิกิริยา  $A_{_V}$  ออก (ซึ่งจะทำให้จุดรองรับแบบหมุด (pin) เปลี่ยนเป็น roller guide) จากนั้น ให้แรงปฏิกิริยา  $A_{v}$  กระทำต่อคาน ซึ่งจะทำให้คานเกิดการเปลี่ยนแปลง รูปร่างดังที่แสดงโดยเส้นประ รูปร่างดังกล่าวจะเป็นภาพร่างของแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $A_{\nu}$
- 2. เมื่อเราต้องการร่างแผนภาพ influence line ของแรงเฉือนที่จุด C ( $V_C$ ) ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-5b เราจะเอาความต้านทานต่อแรงเฉือน  $V_{C}$ ออก (ซึ่งจะทำให้จุด C เปลี่ยนเป็น roller guide) จากนั้น ให้แรง เฉือน  $V_C$  ซึ่งมีค่าเป็น<u>บวก</u>กระทำต่อคาน ซึ่งจะทำให้คานเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังที่แสดงโดยเส้นประ ฐปร่างดังกล่าวจะเป็นภาพร่างของแผนภาพ influence line ของแรงเฉือนที่จุด  $\, C \,$
- 3. เมื่อเราต้องการร่างแผนภาพ influence line ของ moment ที่จุด C ( $M_{c}$ ) ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-5c เราจะเอาความต้านทานต่อ moment  ${M}_{C}$  ออก (ซึ่งจะทำให้จุด C เปลี่ยนเป็น internal hinge) ้จากนั้น ให้ moment  $M_{_C}$  ซึ่งมีค่าเป็น<u>บวก</u>กระทำต่อคาน ซึ่งจะทำให้คานเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างดังที่ แสดงโดยเส้นประ รูปร่างดังกล่าวจะเป็นภาพร่างของแผนภาพ influence line ของ moment ที่จุด  $\,C$

การพิสูจน์ว่าหลักการ Müller - Breslau สามารถใช้ในการร่างแผนภาพ influence line ของคาน statically indeterminate ทำได้ดังนี้

อินฟลูเอ็นไลน์ของแรงปฏิกิริยาที่จุด A หรือ  $A_{
m v}$ 





ฐปที่ 4-6

ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของแรงปฏิกิริยาที่จุด  $A(A_{,v})$  ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6a ซึ่งเป็นคาน ที่มี degree of indeterminacy เท่ากับ 1 นั้น เราจะให้แรงขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุดต่างๆ บนคาน แล้วคำนวณหาค่าของ แรงปฏิกิริยา  $A_{,v}$  เนื่องจากแรง 1 หน่วยที่ตำแหน่งเหล่านั้น จากนั้น เมื่อเรานำค่าแรงปฏิกิริยา  $A_{,v}$  ที่ได้มา plot เทียบกับ ตำแหน่งของแรง 1 หน่วย เราก็จะได้แผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของแรงปฏิกิริยา  $A_{,v}$  นอกจากนั้นแล้ว เราจะสามารถหา สมการของพิกัดของแรงปฏิกิริยา  $A_{,v}$  ได้โดยการพิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6 ดังต่อไปนี้

- 1. กำหนดให้แรง 1 หน่วยกระทำที่จุด D ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6a
- 2. โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง เราจะให้แรงปฏิกิริยา  $A_{_V}$  เป็นแรงเกินจำเป็น (redundant)
- จาก principle of superposition เราจะแยกพิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6a ออกได้เป็น 2 กรณีคือ คานซึ่งถูกกระทำโดยแรง 1 หน่วยและมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6b และคานซึ่งถูก กระทำโดยแรงปฏิกิริยา A, และมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6c
- กำหนดให้แรงปฏิกิริยา A<sub>y</sub>, ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6c มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย เราจะได้การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6d
- 5. จากเงื่อนไขความสอดคล้องของการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดรองรับ *A* และการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังที่แสดง ในรูปที่ 4-6a ถึง 4-6c เราจะเขียนสมการความสอดคล้อง (compatibility equation) ได้ในรูป

$$0 = f_{AD} + A_y f_{AA}$$
$$A_y = \frac{1}{f_{AA}} (-f_{AD})$$

 จากรูปที่ 4-6b และ 4-6d และจากกฎผกผันของ Maxwell เราจะได้ว่า f<sub>AD</sub> = -f<sub>DA</sub> (เครื่องหมาย แตกต่างกันเนื่องจาก f<sub>AD</sub> มีทิศทางพุ่งขึ้น แต่ f<sub>DA</sub> มีทิศทางพุ่งลง) ดังนั้น เราจะเขียนสมการของ A<sub>y</sub> ใหม่ได้ในรูป

$$A_y = \frac{1}{f_{AA}}(f_{DA})$$

จากสมการข้างต้นและจากรูปที่ 4-6d เราจะสรุปได้ว่า แผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของแรงปฏิกิริยา  $A_y$  จะมีรูปร่าง เช่นเดียวกับลักษณะการโก่งตัวของคาน เมื่อเราเอาความต้านทานต่อแรงปฏิกิริยา  $A_y$  ออก จากนั้น ให้แรงปฏิกิริยา  $A_y = 1$  กระทำต่อคาน และพิกัดของแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับค่าการแอ่นตัวของคานที่จุด D ใดๆ เนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่จุด A  $(f_{DA})$  หารด้วยค่าการแอ่นตัวของคานที่จุด A เนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่จุด A  $(f_{AA})$ ซึ่งข้อสรุปนี้สอดคล้องกับหลักการ Müller - Breslau

## อินฟลูเอ็นไลน์ของแรงเฉือนที่จุด $m{E}$

ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของแรงเลือนที่จุด E ( $V_E$ ) ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7a เราจะให้แรง ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุดต่างๆ บนคาน แล้วคำนวณหาค่าของแรงเลือน  $V_E$  เนื่องจากแรง 1 หน่วยที่ตำแหน่งเหล่านั้น จากนั้น เมื่อเรานำค่าแรงเลือน  $V_E$  ที่ได้ มา plot เทียบกับตำแหน่งของแรง 1 หน่วย เราก็จะได้แผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของ แรงเลือน  $V_E$  นอกจากนั้นแล้ว เราจะสามารถหาสมการของพิกัดของแรงเลือน  $V_E$  ได้โดยการพิจารณาคาน ดังที่แสดงใน รูปที่ 4-7 ดังต่อไปนี้

- 1. กำหนดให้แรง 1 หน่วยกระทำที่จุด D ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7a
- 2. โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง เราจะกำหนดให้แรงเลือน  $V_E$  เป็นแรงเกินจำเป็น (redundant)
- จาก principle of superposition เราจะแยกพิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7a ออกได้เป็น 2 กรณีคือ คาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7b และคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7c (ในที่นี้ให้ V<sub>E</sub> มีค่าเท่ากับบวก 1 หน่วย) โดย

ด้งนั้น

ดังนั้น

คานทั้งสองจะถูกตัดที่จุด E ออกเป็น 2 ส่วนคือ AE และ EDC และรอยตัดดังกล่าวจะถูกเชื่อมต่อกัน โดย roller quide ที่ไม่รับแรงเฉือน แต่รับโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกนได้

4. จากรูปร่างการโก่งตัวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7b และ 4-7c และจากเงื่อนไขความสอดคล้องของการ เปลี่ยนตำแหน่งที่จุด E ซึ่งจะต้องมีการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์เท่ากับศูนย์ เราจะเขียนสมการความ สอดคล้อง (compatibility equation) ได้ในรูป

$$0 = f_{ED} + V_E f_{EE}$$
$$V_E = \frac{1}{f_{EE}} (-f_{ED})$$

5. จากรูปที่ 4-7b และ 4-7c และจากกฎผกผันของ Maxwell เราจะได้ว่า  $f_{ED} = -f_{DE}$  (เครื่องหมาย แตกต่างกันเนื่องจาก  $f_{\scriptscriptstyle FD}$  มีการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ที่จุด E ของส่วน AE และส่วน EDC ใน ทิศทางพุ่งขึ้น แต่  $f_{\scriptscriptstyle DE}$  มีทิศทางพุ่งลง) ดังนั้น เราจะเขียนสมการของแรงเฉือนที่จุด E ใหม่ได้ในรูป





้จากสมการข้างต้นและและจากรูปที่ 4-7c เราจะสรุปได้ว่า แผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของแรงเลือนที่จุด E จะมี รูปร่างเช่นเดียวกับลักษณะการโก่งตัวของคาน เมื่อเราเอาความต้านทานต่อแรงเลือนที่จุด  $\,E\,$ ออก จากนั้น ให้แรงเลือนที่ ้มีค่าบวก 1 หน่วยกระทำที่จุด E และพิกัดของแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับค่าการโก่งตัวของคานที่จุด D ใดๆ เนื่องจากแรงเฉือนบวก 1 หน่วยกระทำที่จุด  $E_{-}(f_{\scriptscriptstyle DE})$  หารด้วยค่าการโก่งตัวของคานที่จุด  $E_{-}$ เนื่องจากแรง เฉือนบวก 1 หน่วยกระทำที่จุด  $E_{-}(f_{_{EE}})$  ซึ่งข้อสรุปนี้สอดคล้องกับหลักการ Müller - Breslau

## ้อินฟลูเอ็นไลน์ของโมเมนต์ที่จุด E

ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของโมเมนต์ที่จุด  $E_{-}(M_{_{F}})$  ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8a เราจะให้แรง ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุดต่างๆ บนคาน แล้วคำนวณหาค่าของโมเมนต์  ${\it M}_{\scriptscriptstyle E}$ เนื่องจากแรง 1 หน่วยที่ตำแหน่งเหล่านั้น ้จากนั้น เมื่อเรานำค่าโมเมนต์  $\,M_{_E}\,$  ที่ได้ มา plot เทียบกับตำแหน่งของแรง 1 หน่วย เราก็จะได้แผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ ของโมเมนต์  ${M}_{\scriptscriptstyle E}$  นอกจากนั้นแล้ว เราจะสามารถหาสมการของพิกัดของโมเมนต์  ${M}_{\scriptscriptstyle E}$  ได้โดยการพิจารณาคาน ดังที่ แสดงในรปที่ 4-8 ดังต่อไปนี้

- 1. กำหนดให้แรง 1 หน่วยกระทำที่จุด D ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8a
- 2. โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง เราจะให้โมเมนต์  $M_{\scriptscriptstyle F}$  เป็นแรงเกินจำเป็น (redundant)
- 3. จาก principle of superposition เราจะแยกพิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8a ออกได้เป็น 2 กรณีคือ คาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8b และคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8c (ในที่นี้ให้  $M_{_E}$  มีค่าเท่ากับบวก 1 หน่วย)

โดยคานทั้งสองจะถูกตัดที่จุด E ออกเป็น 2 ส่วนคือ AE และ EDC และรอยตัดดังกล่าวจะถูกเชื่อมต่อ กันโดยหมุดภายใน (internal hinge) ที่ไม่รับโมเมนต์ดัด แต่รับแรงเฉือนและแรงในแนวแกนได้

 จากรูปร่างการโก่งตัวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8b และ 4-8c และจากเงื่อนไขความสอดคล้องของการ เปลี่ยนตำแหน่งที่จุด E ซึ่งจะต้องมีการเปลี่ยนหมุนสัมพัทธ์เท่ากับศูนย์ เราจะเขียนสมการความสอดคล้อง (compatibility equation) ได้ว่า

$$0 = \alpha_{ED} + M_E \alpha_{EE}$$
$$M_E = \frac{1}{\alpha_{EE}} (-\alpha_{ED})$$

ดังนั้น

 จากรูปที่ 4-8b และ 4-8c และจากกฎผกผันของ Maxwell เราจะได้ว่า (α<sub>ED</sub> = -f<sub>DE</sub>) (f<sub>DE</sub> มีค่าเป็น ลบเพราะมีทิศทางพุ่งลง) ดังนั้น เราจะเขียนสมการของ moment ที่จุด E ใหม่ได้เป็น





จากสมการข้างต้นและและจากรูปที่ 4-8c เราจะสรุปได้ว่า แผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของโมเมนต์ที่จุด *E* จะมี รูปร่างเช่นเดียวกับลักษณะการโก่งตัวของคาน เมื่อเราเอาความต้านทานต่อโมเมนต์ที่จุด *E* ออกและให้โมเมนต์ที่มีค่า บวก 1 หน่วยกระทำต่อคานที่จุดดังกล่าว โดยที่ค่าพิกัดของแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับระยะโก่งตัวของ คานที่จุด *D* ใดๆ เนื่องจากโมเมนต์ที่มีค่าบวก 1 หน่วยกระทำที่จุด *E* (*f*<sub>DE</sub>) หารด้วยค่ามุมลาดเอียงของคานที่จุด *E* เนื่องจากโมเมนต์ที่มีค่าบวก 1 หน่วยกระทำที่จุด *E* (*a*<sub>EE</sub>) ซึ่งข้อสรุปนี้สอดคล้องกับหลักการ Müller - Breslau

#### ตัวอย่างที่ 4-1

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. กำหนดให้คาน statically indeterminate มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-1 จงร่างแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด (bending moments) ต่อไปนี้  $R_A$ ,  $R_E$ ,  $M_C$ ,  $V_{CL}$ ,  $V_{CR}$ ,  $M_H$ , และ  $V_H$  พร้อมทั้งเขียนสมการที่จะใช้ในการหาพิกัดของ influence line ดังกล่าว

จากหลักการของ Müller - Breslau เราจะร่างแผนภาพ influence line ของ  $R_A$ ,  $R_E$ ,  $M_C$ ,  $V_{CL}$ ,  $V_{CR}$ ,  $M_H$ , และ  $V_H$  ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-1 โดยที่เราจะเขียนสมการที่ใช้หาพิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดได้ในรูป  $R_A = \frac{f_{xA}}{f_{AA}}$ ,  $R_E = \frac{f_{xE}}{f_{EE}}$ ,  $M_C = \frac{f_{xC}}{\alpha_{CC}}$ ,  $V_{CL} = \frac{f_{xCL}}{f_{CCL}}$ ,  $V_{CR} = \frac{f_{xCR}}{f_{CCR}}$ ,  $M_H = \frac{f_{xCR}}{f_{CCR}}$ ,  $M_{CR} = \frac{f_{xCR}}{f_{CCR}}$ 

$$rac{f_{xH}}{lpha_{_{HH}}}$$
, และ  $V_{_{H}}=rac{f_{xH}}{f_{_{HH}}}$  ตามลำดับ



2. จงทำการวางน้ำหนักบรรทุกจรที่มีการกระจายคงที่ (uniformly distributed live load) ที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดของ แรงปฏิกิริยา  $R_{_E}$  และโมเมนต์ดัด  $M_{_C}$ , และ  $M_{_H}$ 

จากการสังเกตลักษณะของแผนภาพ influence line ของ  $R_E$  และ  $M_C$ , และ  $M_H$  เราจะทำการวางน้ำหนัก บรรทุกจรบนส่วนของคานที่ทำให้เกิดค่าสูงสุด  $R_E$  และ  $M_C$ , และ  $M_H$  ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-1

#### ตัวอย่างที่ 4-2

จงตอบคำถามต่อไปนี้

- a.) จงหาสมการของพิกัดและเขียนแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา R<sub>B</sub> ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่
   Ex 4-2a เมื่อคานมีค่า EI ที่คงที่
- b.) กำหนดให้แรง  $P = 10 \, \mathrm{kN}$  กระทำที่จุด D ของคาน จงเขียนแผนภาพ moment diagram ของคาน โดย ใช้พิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_B$  ที่หาได้ในข้อ a.)
- c.) จากสมการของพิกัดของแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{\scriptscriptstyle B}$  จงหาสมการของพิกัดและเขียน แผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{\scriptscriptstyle A}$
- d.) จากสมการของพิกัดของแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา R<sub>A</sub> ที่หาได้ในข้อ c.) จงหาแรงปฏิกิริยา
   ที่จุดรองรับ A เมื่อคานถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบมีการกระจายสม่ำเสมอ (uniformly distributed
   load) ขนาด 2 kN/m จากจุด A ถึงจุด B และจงเขียนแผนภาพ moment diagram ของคาน
- e.) จากสมการของพิกัดของแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{_A}$  และ  $R_{_B}$  จงหาสมการของพิกัด และเขียนแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{_C}$
- f.) จากสมการของพิกัดของแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา จงหาสมการของพิกัดและเขียนแผนภาพ influence line ของแรงเฉือนที่จุดทางด้านซ้ายมือจากจุด B ไปเล็กน้อย (V<sub>BL</sub>)
- g.) จากสมการของพิกัดของแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา จงหาสมการของพิกัดและเขียนแผนภาพ influence line ของ moment ที่จุด B ( $M_{_B}$ )
- a.) หาสมการของพิกัด และเขียนแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{\scriptscriptstyle B}$



รูปที่ Ex 4-2

จากหลักการของ Müller - Breslau เราจะเอาจุดรองรับ *B* ออกจากคาน จากนั้น ให้แรง 1 หน่วยกระทำที่จุด ดังกล่าว ซึ่งรูปร่างการโก่งตัวของคานที่ได้จะเป็นภาพร่างของแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา *R*<sub>B</sub> ดังที่แสดงใน รูปที่ Ex 4-2b และเราจะหาสมการของพิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา *R*<sub>B</sub> ที่จุด *x* ของคานได้จาก

$$I.L. R_B = \frac{f_{xB}}{f_{BB}}$$

เมื่อ  $f_{xB}$  และ  $f_{BB}$  เป็นสมการการโก่งตัวของคานที่จุด x และจุด B เมื่อแรง 1 หน่วยกระทำที่จุด B ตามลำดับ

แผนภาพ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2b จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2c โดยใช้ วิธี conjugate beam เราจะเขียน conjugate beam ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2d และจาก free-body diagram ของส่วนของ conjugate beam ที่ระยะ x จากจุดรองรับ A เราจะหาสมการของโมเมนต์ดัดหรือสมการของการโก่งตัว ของคาน ที่ระยะ x เมื่อ แรง 1 หน่วยกระทำที่จุด B หรือ  $f_{xB}$  ได้จากสมการความสมดุลของโมเมนต์โดยที่

$$f_{xB} = M_x = \frac{L^2}{4EI} x - \frac{x}{2EI} \left(\frac{x}{2}\right) \frac{x}{3} = \frac{3L^2 x - x^3}{12EI}$$

และเราจะหาสมการการโก่งตัวของคาน  $f_{\scriptscriptstyle BB}$  ได้จากการแทน x=L ลงในสมการ  $f_{\scriptscriptstyle xB}$  ซึ่งเราจะได้ว่า

$$f_{BB} = \frac{1}{6} \frac{L^3}{EI}$$

ดังนั้น สมการของพิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{\scriptscriptstyle B}$  ที่จุด x ของคานจะอยู่ในรูป

$$I.L. R_B = \frac{3L^2 x - x^3}{2L^3}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด A จนถึงจุด B หรือ  $0 \leq x \leq L$ 

เนื่องจากคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2a มีความสมมาตรรอบจุด *B* ดังนั้น ถ้าเรากำหนดให้พิกัด x<sub>1</sub> มี จุดเริ่มต้นที่จุดรองรับ *C* และพุ่งไปทางจุด *B* แล้ว เราจะได้ว่า สมการของพิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา *R<sub>B</sub>* ที่จุด x<sub>1</sub> ของคานอยู่ในรูป

$$I.L. R_B = \frac{3L^2 x_1 - x_1^3}{2L^3}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด C จนถึงจุด B หรือ  $0 \leq x_1 \leq L$ 

b.) เขียนแผนภาพ moment diagram ของคาน โดยใช้พิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{\scriptscriptstyle B}$ 

พิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_B$  ที่จุด D ของคานจะหาได้โดยการแทน x=L/2 ลงในสมการ ของพิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_B$  ซึ่งเราจะได้ว่า

$$I.L.R_B = \frac{11}{16}$$

แรงปฏิกิริยา  $R_B$  เนื่องจากแรง  $P = 10 \, \mathrm{kN}$  กระทำที่จุด D จะมีค่าเท่ากับค่าของแรงกระทำคูณกับค่าพิกัด ของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_B$  ดังกล่าว ซึ่งเราจะได้ว่า

$$R_B = 10 \text{ kN}\left(\frac{11}{16}\right) = \frac{110}{16} \text{ kN}$$

จากนั้น เราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2f

Ans.

Ans.

c.) หาสมการของพิกัดและเขียนแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{\scriptscriptstyle A}$ 

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2g เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ในช่วงจากจุด A ถึงจุด B โดยมีพิกัดเป็น x เราจะได้ว่า Structural Analysis

 $\sum M_{C} = 0;$ 

$$R_{A}(2L) + R_{B}(L) = 1(2L - x)$$
$$R_{A} = \frac{4L^{3} - 5L^{2}x + x^{3}}{4L^{3}}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด A จนถึงจุด B หรือ  $0 \leq x \leq L$ 



พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2h เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ในช่วงจากจุด A ถึงจุด B โดยมีพิกัดเป็น  $x_1$  เราจะได้ว่า  $\sum M_C = 0;$ 

$$R_{A}(2L) + R_{B}(L) = 1(x_{1})$$
$$R_{A} = \frac{-L^{2}x_{1} + x_{1}^{3}}{4L^{3}}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด C จนถึงจุด B หรือ  $0 \le x_1 \le L$  และจากสมการของพิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_A$  เราจะเขียนแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_A$  ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2i Ans.

d.) หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2j ซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบมีการกระจายสม่ำเสมอ (uniformly distributed load) ขนาด 2 kN/m จากจุด A ถึงจุด B ในกรณีที่เราต้องการหาค่าแรงปฏิกิริยา R<sub>A</sub> เนื่องจากแรง กระทำดังกล่าวจากแผนภาพ influence line ของ R<sub>A</sub> เราจะทำได้โดยการหาพื้นที่ใต้ influence line ในช่วงที่น้ำหนัก บรรทุกกระทำ จากนั้น คูณพื้นที่ดังกล่าวด้วยค่าของน้ำหนักบรรทุก

พื้นที่ใต้ influence line แรงปฏิกิริยา  $R_{\scriptscriptstyle A}$  ในช่วงจากจุด A ถึงจุด B มีค่าเท่ากับ

$$\int_{0}^{L} \frac{4L^{3} - 5L^{2}x + x^{3}}{4L^{3}} dx = \frac{7}{16}L$$

Structural Analysis

ดังนั้น 
$$R_A = \frac{7}{16}L(2 \text{ kN/m}) = \frac{7}{8}L \text{ kN/m}$$

ถ้ากำหนดให้ L = 10 m เราจะได้ว่า  $R_A = 8.75 \text{ kN}$  จากนั้น ถ้าเราใช้แผนภาพ free body diagram ของ คานและสมการความสมดุล เราจะได้ว่า  $R_B = 12.5 \text{ kN}$  และ  $R_C = -1.25 \text{ kN}$  สุดท้าย เราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2k Ans.



e.) หาสมการของพิกัดและเขียนแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{\scriptscriptstyle C}$ 

ในลักษณะเช่นเดียวกับการหาสมการของพิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_A$  เราจะหาสมการของ พิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_C$  ได้จากการพิจารณาแผนภาพ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงใน รูปที่ Ex 4-2g และ Ex 4-2h

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2g และ  $\sum M_{_A}=0;$ 

$$R_{C}(2L) + R_{B}(L) = 1(x)$$
$$R_{C} = \frac{-L^{2}x + x^{3}}{4L^{3}}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด A จนถึงจุด B หรือ  $0 \leq x \leq L$ 

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2h และ  $\sum M_{_A}=0;$ 

$$R_{C}(2L) + R_{B}(L) = 1(2L - x_{1})$$
$$R_{C} = \frac{4L^{3} - 5L^{2}x_{1} + x_{1}^{3}}{4L^{3}}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด C จนถึงจุด B หรือ  $0 \le x_1 \le L$  และจากสมการของพิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_C$  เราจะเขียนแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_C$  ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-21 Ans.



ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากความสมมาตรของคานแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{_C}$  ในกรณีนี้มี ลักษณะกลับด้านกับแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{_A}$ 

f.) หาสมการของพิกัดและเขียนแผนภาพ influence line ของแรงเฉือน  $V_{\scriptscriptstyle BL}$ 

สมการของพิกัดของ influence line ของแรงเฉือนที่จุดทางด้านซ้ายมือจากจุด *B* ไปเล็กน้อย (V<sub>BL</sub>) จะหาได้ จากการใช้แผนภาพ free body diagram ของส่วน *AB* ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2m และ Ex 4-2n โดยที่รูปที่ Ex 4-2m เป็นแผนภาพ free body diagram เมื่อแรงขนาด 1 หน่วยกระทำอยู่ในช่วง *AB* และรูปที่ Ex 4-2n เป็นแผนภาพ free body diagram เมื่อแรงขนาด 1 หน่วยกระทำอยู่ในช่วง *CB* 



พิจารณาแผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2m และ  $\sum F_y = 0$ 

$$V_{BL} = R_A - 1$$
$$V_{BL} = \frac{-5L^2 x + x^3}{4L^3}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด A จนถึงจุด B หรือ  $0 \leq x \leq L$ 

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2n และ  $\sum F_{_V}=0$ 

$$V_{BL} = R_A$$
$$V_{BL} = \frac{-L^2 x_1 + x_1^3}{4L^3}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด C จนถึงจุด B หรือ  $0 \le x_1 \le L$  และจากสมการของพิกัดของ influence line ของแรงเฉือน  $V_{BL}$  เรา จะเขียนแผนภาพ influence line ของแรงเฉือน  $V_{BL}$  ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-20 Ans.

g.) หาสมการของพิกัดและเขียนแผนภาพ influence line ของ moment ที่จุด  $\,B\,$  (  $M_{_B}$  )

จากสมการของพิกัดของแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา เราจะหาสมการของพิกัดและเขียนแผนภาพ influence line ของ moment ที่จุด B (M<sub>B</sub>) ได้ดังนี้

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2m และ  $\sum M_{\scriptscriptstyle BL}=0$ 

$$M_{B} = R_{A}(L) - 1(L - x)$$
$$M_{B} = \frac{x^{3} - xL^{2}}{4L^{2}}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด A จนถึงจุด B หรือ  $0 \leq x \leq L$ 

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2n และ  $\sum M_{\scriptscriptstyle BL}=0$ 

$$M_{B} = R_{A}(L)$$
$$M_{B} = \frac{-L^{2}x_{1} + x_{1}^{3}}{4L^{2}}$$

ซึ่งใช้ได้จากจุด C จนถึงจุด B หรือ  $0 \le x_1 \le L$  และจากสมการของพิกัดของ influence line ของ moment  $M_B$  เรา จะเขียนแผนภาพ influence line ของ moment  $M_B$  ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-2p Ans.

$$V_{BL} = \frac{-5L^{2}x + x^{3}}{4L^{3}} \quad (o)$$

$$M_{B} = \frac{x^{3} - xL^{2}}{4L^{2}} \quad (p)$$

$$M_{B} = \frac{-L^{2}x_{1} + x_{1}^{3}}{4L^{2}} \quad M_{B} = \frac{-L^{2}x_{1} + x_{1}^{3}}{4L^{2}}$$

#### ตัวอย่างที่ 4-3

จงหาพิกัดของแผนภาพ influence line ของแรงเฉือนที่จุด D ของคานดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3a ทุกๆ ระยะ 3 m เมื่อคานมีค่า EI ที่คงที่



ฐปที่ Ex 4-3

จากหลักการของ Müller - Breslau เราจะเอาความต้านทานต่อแรงเฉือนที่จุด *D* ออกโดยยังคงให้จุด ดังกล่าวมีความต้านทานต่อโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกนอยู่ ซึ่งจะทำได้โดยการใส่ roller ที่จุดดังกล่าว ดังที่แสดงในรูป ที่ Ex 4-3b จากนั้น ให้แรงเฉือนที่มีทิศทางบวกขนาด 1 kN กระทำที่ roller ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3c ซึ่งการ เปลี่ยนแปลงรูปร่างของคานที่เกิดขึ้นจะเป็นรูปร่างของ influence line ของแรงเฉือนที่จุด *D* และเราจะหาพิกัดของ influence line ของแรงเฉือนดังกล่าวได้โดยใช้สมการ

$$I.L.V_D = \frac{f_{xD}}{f_{DD}}$$

เมื่อ  $f_{xD}$  และ  $f_{DD}$  เป็นค่าการโก่งตัวของคานที่จุด x ใดๆ ที่ระยะทุกๆ 3 m และค่าการโก่งตัวของคานที่จุด D เมื่อ แรงเฉือน 1 kN กระทำที่จุด D ตามลำดับ

ทำการหาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับต่างๆ ของคาน จากนั้น เขียน moment diagram ของคานและทำ การหาค่าการโก่งตัวของคานที่จุด x ใดๆ ที่ระยะทุกๆ 3 m และที่จุด D โดยใช้วิธี conjugate beam

รูปที่ Ex 4-3d แสดง conjugate beam ที่สอดคล้องกับคานจริงดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3b จากรูป จุด  $D^\prime$ จะต้องถูกกระทำโดย moment  $M_{\scriptscriptstyle D^\prime}$  เพื่อให้สอดคล้องกับการโก่งตัวที่เกิดขึ้นที่จุด D บนคานจริง

ทำการหาค่าแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ A', B', C' และ moment  $M_{D'}$  ที่เกิดขึ้นบน conjugate beam ดังที่ แสดงในรูปที่ Ex 4-3e โดยใช้ free-body diagram ของส่วน B'C' และ A'D'B' ตามลำดับ ซึ่งเราจะได้ moment  $M_{D'}$  อยู่ในรูป

$$f_{DD} = M_{D'} = \frac{144}{EI}$$



เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของโมเมนต์ที่จุด D' เราจะต้องหาค่าโมเมนต์ที่จุดที่อยู่ทางซ้ายมือและทางขวามือ ของจุด D' โดยใช้ free-body diagram ของส่วนของ conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3f และ Ex 4-3g ตามลำดับ ซึ่งเราจะได้

 $\sum M_{D'_L} = 0;$ 

$$f_{D_L D} = M_{D'_L} = \frac{4.5}{EI}(1) - \frac{30}{EI}(3) = -\frac{85.5}{EI}$$

 $\sum M_{D'_R} = 0;$ 

$$f_{D_R D} = M_{D'_R} = \frac{4.5}{EI}(1) - \frac{30}{EI}(3) + \frac{144}{EI} = \frac{58.5}{EI}$$

จาก free-body diagram ของ conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3e เราจะได้ว่า

$$f_{AD} = M_{A'} = 0$$
  
 $f_{BD} = M_{B'} = 0$   
 $f_{CD} = M_{C'} = 0$ 

ค่าการโก่งตัวที่จุด E จะหาได้จาก free-body diagram ของ conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3h  $\sum M_{E'}=0;$ 

$$f_{ED} = M_{E'} = \frac{4.5}{EI}(1) - \frac{6}{EI}(3) = -\frac{13.5}{EI}$$

ค่าพิกัดของ influence line ของแรงเฉือนที่จุด D ของคานจะหาได้โดยการหารค่าการโก่งตัวที่จุดต่างๆ ด้วยค่า การโก่งตัวที่จุด D และมีค่าดังที่แสดง

x	พิกัดของ influence line $\ V_D$
A	0/144 = 0
$D_L$	-85.5/144 = -0.594
$D_{R}$	58.5/144 = 0.406
В	0/144 = 0
E	-13.5/144 = -0.0938
С	0/144 = 0

สุดท้าย เมื่อนำค่าพิกัดของ influence line ของแรงเฉือนที่จุด *D* มา plot เราจะได้แผนภาพ influence line ดังที่ แสดงในรูปที่ Ex 4-3I



### ตัวอย่างที่ 4-4

จงหาพิกัดของแผนภาพ influence line ของ bending moment ที่จุด D ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-4a ทุกๆ ระยะ 3  ${f m}$  เมื่อคานมีค่า EI ที่คงที่



จากหลักการของ Müller - Breslau เราจะเอาความต้านทานต่อ bending moment ที่จุด *D* ออกโดยยังคง ให้จุดดังกล่าวมีความต้านทานต่อแรงเฉือนและแรงในแนวแกนอยู่ ซึ่งจะทำได้โดยการใส่ hinge ที่จุดดังกล่าว ดังที่แสดงใน รูปที่ Ex 4-4b จากนั้น ให้ moment ที่มีทิศทางบวกขนาด 1 kN - m กระทำที่ hinge ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-4c ซึ่งการ เปลี่ยนแปลงรูปร่างของคานที่เกิดขึ้นจะเป็นรูปร่างของ influence line ของ bending moment ที่จุด *D* และเราจะหา พิกัดของ influence line ของ bending moment ดังกล่าวได้โดยใช้สมการ

$$I.L.M_D = \frac{f_{xD}}{\alpha_{DD}}$$

เมื่อ  $f_{xD}$  และ  $\alpha_{DD}$  เป็นค่าการโก่งตัวของคานที่จุด x ใดๆ ที่ระยะทุกๆ 3 m และค่า rotation ของคานที่จุด D เมื่อ bending moment 1 kN - m กระทำที่จุด D ตามลำดับ

ทำการหาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับต่างๆ ของคาน จากนั้น เขียน moment diagram ของคานและทำ การหาค่าการโก่งตัวของคานที่จุด x ใดๆ ที่ระยะทุกๆ 3 m และค่า rotation ที่จุด D โดยใช้วิธี conjugate beam

รูปที่ Ex 4-4d แสดง conjugate beam ที่สอดคล้องกับคานจริง จากนั้น ทำการหาค่าแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับ A', C', และ D' ที่เกิดขึ้นบน conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3d โดยใช้ free-body diagram ของส่วน B'C' และ A'D'B' ตามลำดับ ซึ่งเราจะได้ หาค่าแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับดังกล่าว ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3d และเรา จะได้ moment M<sub>D</sub>, อยู่ในรูป

$$\alpha_{DD} = R_{D'} = \frac{16}{EI}$$

โดยใช้ free-body diagram ของส่วนของ conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-3e และ Ex 4-3f ตามลำดับ เราหาค่าการโก่งตัวที่จุด D และจุด E ได้ดังนี้

$$\sum M_{D'} = 0;$$

$$f_{DD} = M_{D'} = \frac{1.5}{EI}(1) + \frac{6}{EI}(3) = \frac{19.5}{EI}$$

$$\sum M_{E'} = 0;$$

$$f_{ED} = M_{E'} = \frac{1.5}{EI}(1) - \frac{2}{EI}(3) = -\frac{4.5}{EI}$$

$$\frac{1.5}{EI} = \frac{1}{EI} + \frac{1}{$$

จาก free-body diagram ของ conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-4d เราจะได้ว่า

$$f_{AD} = M_{A'} = 0$$
$$f_{BD} = M_{B'} = 0$$
$$f_{CD} = M_{C'} = 0$$

ค่าพิกัดของ influence line ของ bending moment ที่จุด D ของคานจะหาได้โดยการหารค่าการโก่งตัวที่จุด ต่างๆ ด้วยค่า rotation ที่จุด D และมีค่าดังที่แสดง

x	พิกัดของ influence line $V_{_D}$
A	0/16 = 0
D	19.5/16 = 1.219
В	0/16 = 0
E	-4.5/16 = -0.281
С	0/16 = 0

สุดท้าย เมื่อน้ำค่าพิกัดของ influence line ของ bending moment ที่จุด D มา plot เราจะได้แผนภาพ influence line ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 4-4g Ans.



## 4.4 การใช้อินฟลูเอ็นไลน์เพื่อหาการจัดวางน้ำหนักบรรทุกจรบนคาน Statically Indeterminate

ตามที่ได้กล่าวไปแล้วในตอนต้น หลักการของ Müller - Breslau จะช่วยให้เราร่างแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของ คานได้อย่างรวดเร็ว หลักจากที่เราได้แผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์แล้ว เราจะสามารถหาตำแหน่งและรูปแบบของน้ำหนัก บรรทุกจรที่จะทำให้เกิดค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ที่จุดที่เราสนใจบนคานได้ ซึ่งค่าสูงสุดต่างๆ ดังกล่าวจะถูกใช้ในการออกแบบหาขนาดหน้าตัดและปริมาณเหล็กเสริมในคานคอนกรีตเสริมเหล็กหรือออกแบบหาขนาด หน้าตัดของคานเหล็กต่อไป

ถ้าเราต้องการหาค่าโมเมนต์บวกสูงสุดที่จุด *B* บนคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-9a แล้ว จากแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ ของโมเมนต์บวกของคานที่จุด *B* เราจะต้องวางน้ำหนักบรรทุกแผ่กระจาย ดังที่แสดงในรูปที่ 4-9b เพื่อทำให้เกิดค่า โมเมนต์บวกสูงสุด ซึ่งการวางน้ำหนักบรรทุกในลักษณะนี้มักถูกเรียกว่า การวางน้ำหนักแบบ span เว้น span หรือ alternate span loading

ในลักษณะเดียวกัน ถ้าเราต้องการหาค่าโมเมนต์ลบสูงสุดที่จุด *C* แล้ว จากแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของโมเมนต์ ลบที่จุด *C* ดังที่แสดงในรูปที่ 4-9c เราจะวางน้ำหนักบรรทุกที่จะทำให้เกิดค่าโมเมนต์ลบสูงสุด ดังที่แสดงในรูปที่ 4-9d ซึ่ง จะถูกเรียกว่า การวางน้ำหนักแบบ span ติดกัน หรือ adjacent span loading



รูปที่ 4-9

รูปที่ 4-10a แสดงแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของแรงเฉือนของคานที่จุด *A* การวางน้ำหนักบรรทุกที่จะทำให้เกิด ค่าแรงเฉือนบวกสูงสุดที่จุด *A* จะมีรูปแบบดังที่แสดงในรูปที่ 4-10b และรูปที่ 4-10c แสดงแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของ แรงเฉือนของคานที่จุด *C* และการวางน้ำหนักบรรทุกที่จะทำให้เกิดค่าแรงเฉือนบวกสูงสุดจะมีรูปแบบดังที่แสดงในรูปที่ 4-10d

## 4.5 การร่างอินฟลูเอ็นไลน์ของ Statically Indeterminate Frames

## (Qualitative Influence lines for Statically Indeterminate Frames)

เช่นเดียวกับกรณีของคาน หลักการของ Müller - Breslau จะช่วยให้เราร่างแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของโครง ข้อแข็งได้อย่างรวดเร็ว หลังจากที่เราได้แผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์แล้ว เราจะสามารถหาตำแหน่งและรูปแบบของน้ำหนัก บรรทุกจรที่จะทำให้เกิดค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ที่จุดที่เราสนใจบนโครงสร้างได้ ยกตัวอย่าง เช่น ถ้าเราต้องการหาค่าโมเมนต์บวกสูงสุดที่จุด I บนคาน FG ของโครงอาคารดังที่แสดงในรูปที่ 4-11 แล้ว เราจะใช้ หลักการของ Müller - Breslau เขียนแผนภาพอินฟลูเอ็นไลน์ของโมเมนต์บวกที่จุดดังกล่าวได้ดังที่แสดงโดยเส้นประใน รูปที่ 4-11a ในกรณีนี้ ค่าสูงสุดของโมเมนต์บวกที่จุด *I* บนคาน *FG* จะเกิดขึ้นเมื่อเราจะวางน้ำหนักบรรทุกจรแผ่ กระจายบน girder *AB CD* และ *FG* ดังที่แสดงในรูปที่ 4-11b





## แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

4-1 กำหนดให้คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-1 มีค่า *EI* คงที่ จงตอบคำถามต่อไปนี้

- h.) จงหาเขียนแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_{\scriptscriptstyle B}$  ของคานโดยหาพิกัดทุกๆ ช่วง 1 เมตร
- i.) จงเขียนแผนภาพ moment diagram ของคาน เมื่อคานถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุก ดังที่แสดงในรูปที่
   Prob. 4-1 โดยใช้พิกัดของ influence line ของแรงปฏิกิริยา R<sub>B</sub> ที่หาได้ในข้อ a.)
- j.) จากแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_B$  จงเขียนแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_A$ โดยหาพิกัดทุกๆ ช่วง 1 เมตร
- k.) จากแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา R<sub>A</sub> ที่หาได้ในข้อ c.) จงหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A เมื่อ คานถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุก ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-1 และจงเขียนแผนภาพ moment diagram ของคาน
- I.) จากแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา  $R_A$  และ  $R_B$  จงหาเขียนแผนภาพ influence line ของแรง ปฏิกิริยา  $R_C$  โดยหาพิกัดทุกๆ ช่วง 1 เมตร
- m.) จากแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา จงเขียนแผนภาพ influence line ของแรงเฉือนที่จุดทางด้าน ซ้ายมือจากจุด *B* ไปเล็กน้อย (V<sub>BL</sub>)
- n.) จากแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา จงหาเขียนแผนภาพ influence line ของ moment ที่จุด B  $(M_{\scriptscriptstyle B})$



4-2 กำหนดให้คานมีค่า *EI* ที่คงที่และมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-2 จงเขียนแผนภาพ influence line ของแรง ปฏิกิริยาที่จุดรองรับ *A* แรงเฉือนที่จุด *B* และmoment ที่จุด *B* โดยหาพิกัดทุกๆ ช่วง 1 เมตร



4-3 กำหนดให้คานมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-3 จงเขียนแผนภาพ influence line ของแรงเฉือนที่จุดทางด้าน ช้ายมือจากจุด B ไปเล็กน้อย (V<sub>BL</sub>) และแผนภาพ influence line ของ moment ที่จุด B (M<sub>B</sub>) โดยหาพิกัดทุกๆ ช่วง
1 เมตร เมื่อคานมีค่า EI ที่คงที่

#### Structural Analysis



4-4 กำหนดให้คานมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-4 จงตอบคำถามต่อไปนี้

a.) จงร่างแผนภาพ influence line ของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดต่อไปนี้  $R_{\scriptscriptstyle A}$  ,  $M_{\scriptscriptstyle C}$  ,  $M_{\scriptscriptstyle E}$  ,  $V_{\scriptscriptstyle CL}$  , และ  $V_{\scriptscriptstyle CR}$ 

b.) จงทำการวางน้ำหนักบรรทุกจรที่มีการกระจายคงที่  $5\,{
m kN/m}$  ที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา  $R_{_A}$  แรง เฉือน  $V_{_{CL}}$  และโมเมนต์ดัด  $M_{_C}$ 

c.) จงเขียน shear diagram, moment diagram ของคานซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกจรที่ทำให้โมเมนต์ดัด M <sub>c</sub> สูงสุดโดยวิธี slope-deflection หรือ moment distribution



4-5 กำหนดให้โครงข้อแข็งมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 4-5 จงร่างแผนภาพ influence line ของแรงเฉือนและโมเมนต์ ดัดต่อไปนี้ V<sub>AL</sub>, V<sub>AR</sub>, M<sub>A</sub>, M<sub>B</sub>, และ M<sub>C</sub> และจงทำการวางน้ำหนักบรรทุกจรที่มีการกระจายคงที่ที่ทำให้เกิด ค่าสูงสุดของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดดังกล่าว



# บทที่ 5 Approximate Analysis ของโครงสร้าง Statically Indeterminate

#### 5.1 บทนำ

จากบทต่างๆ ที่ผ่านมา เราจะเห็นได้ว่า ในการวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate นั้น เราจะต้องทราบ ขนาดขององค์อาคารของโครงสร้างก่อน ดังนั้น ในวิเคราะห์โครงสร้างดังกล่าว เราจะต้องทำการสมมุติขนาดขององค์ อาคารขึ้นมาเพื่อหาแรงภายในที่เกิดขึ้น จากนั้น นำค่าแรงภายในที่ได้ไปทำการออกแบบเพื่อหาขนาดขององค์อาคารที่ใกล้ เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น จากนั้น ทำการวิเคราะห์และออกแบบซ้ำอีก จนกระทั่ง แรงภายในมีค่าเปลี่ยนไปน้อยมาก จากครั้งก่อนหน้านั้น เราจึงจะได้ขนาดขององค์อาคารที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า ถ้าเราสมมุติขนาดขององค์อาคาร ในโครงสร้างอย่างไม่มีหลักเกณฑ์แล้ว เราอาจจะต้องทำการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างหลายครั้งมากจึงจะได้ขนาด ขององค์อาคารที่เหมาะสม ดังนั้น วิศวกรโครงสร้างจึงได้คิดค้นวิธีการสมมุติขนาดของโครงสร้างที่มีหลักเกณฑ์และเหตุผล ขึ้นมา ซึ่งเราจะทำการศึกษาในบทนี้

เราควรที่จะทราบไว้ด้วยว่า วิธีการวิเคราะห์โครงสร้างต่างๆ ที่เราได้ศึกษาผ่านไปแล้วนั้นเป็นการวิเคราะห์โครง สร้างที่มีความไม่แน่นอนอยู่ระดับหนึ่ง เนื่องจากสมมุติฐานต่างๆ ที่เราใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง เช่น พฤติกรรมของวัสดุ ที่ใช้ทำโครงสร้างภายใต้แรงกระทำ อาจจะไม่เป็นแบบยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic) และความต้านทานที่เกิดขึ้นจริงที่จุด เชื่อมต่อและ supports อาจจะไม่เป็นแบบหมุด (pin) หรือแบบยึดแน่น (fixed) เป็นต้น นอกจากนั้นแล้ว เรายังไม่ทราบ ขนาดและตำแหน่งที่แท้จริงของแรงที่กระทำกับโครงสร้าง เนื่องจากแรงกระทำมักมีขนาดและตำแหน่งที่เปลี่ยนแปลงไปมา ตลอดอายุของโครงสร้าง อย่างไรก็ตาม เราจะเรียกวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างดังกล่าวว่า การวิเคราะห์แบบละเอียด "exact analysis" และวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างที่จะกล่าวถึงในบทนี้ว่า การวิเคราะห์แบบประมาณ "approximate analysis" เนื่องจากวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ใช้ข้อสมมุติฐานในการวิเคราะห์ที่มากกว่าวิธีการวิเคราะห์โครง สร้างแบบ exact analysis

การวิเคราะห์โครงสร้างแบบ approximate analysis นั้น นอกจากจะช่วยทำให้การออกแบบโครงสร้างมีความ ง่ายขึ้นแล้ว การวิเคราะห์โครงสร้างแบบดังกล่าวยังก่อให้เกิดความเข้าใจในพฤติกรรมของโครงสร้าง statically indeterminate มากขึ้นด้วย

## 5.2 Approximate Analysis ของโครงอาคารที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำในแนวดิ่ง

เรามักจะออกแบบโครงอาคาร (building frames) เช่น โครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก เป็นต้น ให้มีจุดเชื่อมต่อของ คานและเสาแบบแกร่ง (rigid) เพื่อทำให้โครงสร้างมีความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุกในแนวดิ่ง (vertical loads) และ รับแรงกระทำด้านข้าง (lateral forces) เนื่องจากแรงลมได้ดีขึ้น โครงสร้างที่มีลักษณะดังกล่าวมักจะถูกเรียกว่า building bent ดังที่แสดงในรูปที่ 5-1 และมักจะเป็นโครงสร้างที่มีจำนวน degree of indeterminacy สูงมาก



รูปที่ 5-1

การวิเคราะห์ building bent แบบ approximation analysis นั้น มีแนวคิดมาจากการพิจารณาการเปลี่ยนแปลง รูปร่าง (deformation) ของโครงสร้างภายใต้แรงกระทำ เพื่อลดจำนวน degree of indeterminacy ของโครงสร้างดังกล่าว ลงให้เป็นโครงสร้างแบบ statically determinate ซึ่งจะทำให้เราสามารถวิเคราะห์โครงสร้างดังกล่าวได้โดยการใช้สมการ ความสมดุลเพียงลำพัง



สมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ Approximate Analysis



พิจารณาคานของโครงสร้าง ซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอ (uniformly distributed load) ดังที่แสดงในรูปที่ 5-2a ถ้าจุดเชื่อมต่อที่จุด A และ B เป็นแบบยึดแน่นแล้ว แรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดเชื่อมต่อจะมี ้จำนวนทั้งหมด 6 ค่า ดังนั้น คานดังกล่าวจะเป็นองค์อาคารแบบ statically indeterminate ที่มีจำนวน degree of indeterminacy เท่ากับ 3 และในการที่จะทำให้คานนี้เป็นองค์อาคารแบบ statically determinate นั้น เราจะต้องสร้าง สมมุติฐานที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของคานภายใต้การกระทำของแรงดังกล่าวขึ้นมา 3 สมมุติฐาน ซึ่งมีหลัก การพิจารณาดังต่อไปนี้

ถ้าเสามีความแกร่งมากจนไม่มี rotation เกิดขึ้นที่จดเชื่อมต่อ A และ B แล้ว คานจะมีลักษณะการโก่งตัว ดังที่ แสดงในรูปที่ 5-2b โดยการวิเคราะห์คานแบบ exact analysis เราจะได้ว่า จุดดัดกลับ (inflection point) ของคานจะเกิด ขึ้นที่ระยะ 0.21 L จากจุดรองรับทั้งสองด้าน

ในทางกลับกัน ถ้าเสาไม่มีความแกร่งเลย คานดังกล่าวจะมีลักษณะเป็นแบบคานรองรับอย่างง่าย (simply supported beam) ซึ่งจะมีจุดที่มี moment เท่ากับศูนย์หรือจุดดัดกลับอยู่ที่จุดรองรับ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-2c

แต่ในความเป็นจริงแล้ว เสาจะมีความแกร่งอยู่บ้างขึ้นอยู่กับรูปร่างและขนาดของเสาเทียบกับคาน (ถ้าเสาและ คานทำจากวัสดุชนิดเดียวกัน) ดังนั้น เราจะสมมุติให้จุดที่มี moment เท่ากับศูนย์เกิดที่ระยะ (0.21 *L* + 0)/2 ≈ 0.1 *L* จากจุดรองรับทั้งสองของคาน ดังที่แสดงรูปที่ 5-2d นอกจากนั้นแล้ว จากการวิเคราะห์แบบ exact analysis เราจะพบว่า แรงที่เกิดขึ้นในแนวแกนของคานมักจะมีค่าน้อยมาก ซึ่งเราจะสมมุติให้แรงนี้มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น จากการพิจารณาดังกล่าว เราจะสามารถวิเคราะห์หาค่าแรงในองค์อาคารของโครงสร้าง ซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอได้ โดยการ model ให้คาน ซึ่งมีความยาว *L* ดังที่แสดงรูปที่ 5-2a ให้เป็นคานแบบ simply supported beam ที่มีความยาว 0.8 *L* และวางอยู่บนคานยื่น cantilevered beams ที่มีความยาว 0.1 *L* ดังที่แสดงในรูปที่ 5-2e

# 5.3 Approximate Analysis ของ Portal Frames และ Portal Trusses

#### Portal frames

Portal frames มักจะถูกใช้เป็นองค์อาคารหลักของโครงสร้างเพื่อถ่ายแรงกระทำทางด้านข้างของโครงสร้าง (ซึ่ง เกิดจากลมหรือแผ่นดินไหว) ลงมาสู่ฐานรากของโครงสร้าง Portal frames มักจะถูกยึดติดกับฐานราก 3 แบบคือ แบบหมุด (pined support) แบบยึดแน่น (fixed support) และแบบกึ่งหมุดกึ่งยึดแน่น



รูปที่ 5-3a แสดง portal frame ที่ถูกยึดติดกับฐานรากโดยหมุด (pin-supported portal frame) ที่มีเสาที่มีขนาด และความยาวเท่ากัน 2 ต้นและเชื่อมต่อกันด้วยคานที่ด้านบนของเสาอย่างแกร่ง (rigid) ดังนั้น โครงข้อแข็งนี้จะมีแรงปฏิ กริยาที่ไม่ทราบค่า 4 แรง แต่เนื่องจากเรามีสมการความสมดุลของโครงสร้างเพียงแค่ 3 สมการ ดังนั้น portal frame นี้จึง เป็นโครงสร้าง statically indeterminate ที่มี degree of indeterminacy เท่ากับ 1 และในการวิเคราะห์โครงข้อแข็งนี้แบบ approximate analysis เราจะต้องตั้งข้อสมมุติฐานขึ้นมา 1 ข้อ เพื่อทำให้โครงข้อแข็งนี้เป็นโครงสร้างแบบ statically determinate

จากการพิจารณารูปร่างการโก่งตัว (elastic curve) ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 5-3b เราจะเห็นได้ว่า ภาย ใต้แรงกระทำ P โครงข้อแข็งมีจุดดัดกลับ (inflection point) เกิดขึ้นที่บริเวณจุดกึ่งกลางของคาน และเนื่องจาก moment ที่จุดดัดกลับมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น เราจะสมมุติให้จุดนี้เป็นจุดหมุน (hinge)

จากข้อสมมุติฐานดังกล่าว เราจะหาแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับของโครงข้อแข็ง และที่ hinge ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-3c จากรูป เราจะสังเกตเห็นได้ว่า แรงปฏิกริยาที่จุดรองรับในแนวนอนมีค่าเท่ากันและกระทำอยู่ในทิศทางเดียวกัน และ สุดท้าย เราจะเขียน moment diagram ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 5-3d

Portal Frames ที่ถูกรองรับแบบยึดแน่น



รูปที่ 5-4a แสดง portal frame ที่ถูกยึดติดกับฐานรากแบบยึดแน่น (fixed-supported portal frame) ซึ่งเป็นโครง สร้าง statically indeterminate ที่มี degree of indeterminacy เท่ากับ 3 ดังนั้น ในการวิเคราะห์โครงข้อแข็งนี้แบบ approximate analysis เราจะต้องตั้งข้อสมมุติฐานขึ้นมา 3 ข้อ เพื่อทำให้โครงข้อแข็งดังกล่าวเป็นโครงสร้างแบบ statically determinate
ถ้าเสาทั้งสองต้นในโครงข้อแข็งนี้มีขนาดและความยาวเท่ากันแล้ว ภายใต้การกระทำของแรง *P* โครงข้อแข็งนี้ จะเกิดการโก่งตัว ดังที่แสดงในรูปที่ 5-4b และมีจุดดัดกลับเกิดขึ้นที่บริเวณจุดกึ่งกลางของคานและเสา ดังนั้น เราจะสมมุติ ให้จุดเหล่านี้เป็นจุดหมุน (hinge) และเราจะหาค่าแรงปฏิกริยาที่จุดรองรับและที่ hinges ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-4c จากรูป เราจะสังเกตเห็นได้ว่า แรงปฏิกริยาที่จุดรองรับในแนวนอนมีค่าเท่ากันและกระทำอยู่ในทิศทางเดียวกัน สุดท้าย เราจะเขียน moment diagram ของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-4d

# Portal Frames ที่ถูกรองรับระหว่างแบบหมุดและแบบยึดแน่น

โดยทั่วไปแล้ว จุดรองรับของ portal frame จะไม่เป็นจุดรองรับแบบยึดแน่นหรือเป็นจุดรองรับแบบหมุดดังที่เราได้ พิจารณาไปแล้ว ในความเป็นจริง portal frame มักจะมีจุดรองรับแบบระหว่างแบบหมุดและแบบยึดแน่น ดังที่แสดงในรูปที่ 5-5a ซึ่งจุดรองรับแบบนี้จะมีการหมุนเกิดขึ้นได้เล็กน้อย ดังนั้น จุดดัดกลับที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรง *P* จะอยู่ระหว่างจุดดัด กลับที่เกิดใน portal frame ดังที่แสดงในรูปที่ 5-4 (ที่ระยะ *h* / 2 จากจุดรองรับ) และที่เกิดใน portal frame ดังที่แสดงใน รูปที่ 5-3 (ที่ระยะ *h* = 0 จากจุดรองรับ) โดยทั่วไปแล้ว เราจะสมมุติให้จุดดัดกลับที่เกิดขึ้นในเสาอยู่ที่ระยะ *h* / 3 จากจุด รองรับ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-5b และจุดดัดกลับที่เกิดในคานอยู่ที่จุดกึ่งกลางของคาน





#### Portal Trusses

เมื่อ span ของ portal frame มีความยาวมากๆ แล้ว คานของ portal frame มักจะถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของโครง ข้อหมุน (truss) ซึ่งจะทำให้โครงสร้างดังกล่าวมีราคาต่ำลง และจะถูกเรียกว่า portal truss ดังที่แสดงในรูปที่ 5-6a

ในการวิเคราะห์ portal truss นี้ เราจะสมมุติให้โครงข้อหมุนเชื่อมติดกับเสาโดยใช้หมุด (pin connections) และ ส่วนของเสาที่เชื่อมติดกับโครงข้อหมุนจะยังคงเป็นเส้นตรงหลังจากที่ portal truss ถูกกระทำโดยแรง *P* ดังนั้น เราจะทำ การวิเคราะห์ portal truss ได้โดยใช้ข้อสมมุติฐานเดียวกับที่ใช้ในการวิเคราะห์ portal frame ดังนี้

- a. ในกรณีของ portal trusses ที่ถูกยึดรั้งโดยหมุด (pin-supported portal trusses) เราจะสมมุติให้แรงปฏิ กริยาที่ในแนวนอนที่จุดรองรับมีค่าเท่ากัน ดังที่แสดงตามรูปที่ 5-3c
- b. ในกรณีของ portal trusses ที่ถูกยึดรั้งแบบยึดแน่น (fixed-supported portal trusses) เราจะสมมุติให้แรงป ฏิกริยาที่ในแนวนอนที่จุดรองรับมีค่าเท่ากัน ดังที่แสดงตามรูปที่ 5-4c และให้จุดดัดกลับเกิดขึ้นที่ระยะ
   h / 2 จากจุดรองรับ ดังที่แสดงตามรูปที่ 5-6b



### 5.4 Approximate Analysis ของโครงอาคารที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำทางด้านข้าง: Portal Method

การวิเคราะห์โครงสร้างของอาคาร (building frame) ที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำทางด้านข้าง (lateral loads) แบบ approximate โดยวิธี portal นี้จะมีพื้นฐานมาจากการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ approximate ของ portal frame portal frame ที่ถูกยึดติดกับฐานรากแบบยึดแน่น (fixed-supported portal frame) ที่ได้กล่าวถึงไปแล้ว

พิจารณาโครงสร้างของอาคาร ซึ่งมีระยะระหว่างเสาที่เท่ากันและถูกกระทำโดย lateral force *P* ภายใต้แรง *P* โครงสร้างของอาคารจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7a ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ เกิดใน portal frame ที่ถูกยึดติดกับฐานรากแบบยึดแน่น ดังนั้น

- 1. เราจะสมมุติให้จุดดัดกลับ (inflection point) เกิดขึ้นที่กึ่งกลางของคานและเสา ดังที่แสดงในรูป
- ถ้าเราให้แต่ละช่วงระหว่างเสา (bay) ของโครงสร้างประกอบไปด้วย portal frame ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7b แล้ว เราจะตั้งข้อสมมุติฐานขึ้นมาอีกข้อหนึ่งได้คือ เสาที่อยู่ด้านในของอาคาร (ซึ่งจะถูกแทนด้วยเสาสองต้น ของ portal bents ที่อยู่ติดกัน) จะรับแรงเฉือน V ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับเป็นสองเท่าของเสาที่อยู่รอบนอกและ เสาที่อยู่ภายในอาคารจะไม่มีแรงในแนวแกนเกิดขึ้น

ข้อสมมุติฐานทั้งสองข้อดังกล่าวจะทำให้โครงสร้างของอาคาร ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7a เปลี่ยนเป็นโครงสร้างแบบ statically determinate



ฐปที่ 5-7

ในกรณีที่โครงสร้างของอาคารมีระยะระหว่างเสาที่ไม่เท่ากันแล้ว เราจะไม่สามารถใช้สมมุติฐานที่เกี่ยวกับแรง เฉือน V ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับของโครงสร้างได้ ในกรณีเช่นนี้ เราจะใช้สมมุติฐานที่ว่า เสาที่อยู่ภายในอาคารจะไม่มีแรงใน แนวแกนเกิดขึ้น หรืออีกนัยหนึ่ง แรงกระทำทางด้านข้างดังกล่าวจะถูกต้านทานโดยแรงดึงในแนวแกนของเสาต้นนอกของ อาคารในด้านที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำทางด้านข้างและโดยแรงกดอัดในแนวแกนของเสาต้นนอกของอาคารในด้านตรง กันข้าม โดยให้แรงทั้งสองมีค่าเท่ากัน ซึ่งจะทำให้แรงเฉือนที่เกิดขึ้นในคานที่อยู่ในขั้นเดียวกันของโครงสร้างมีค่าเท่ากัน ดัง ที่แสดงในตัวอย่างที่ 5-1

เมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี portal กับผลที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ exact analysis แล้ว เราจะพบว่า การวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี portal มีความเหมาะสมที่จะใช้กับอาคารที่มีความสูง น้อยๆ (low-rise buildings) และมีระยะระหว่างเสาของโครงสร้างที่ค่อนข้างสม่ำเสมอเท่านั้น เพราะว่าโครงสร้างของ อาคารที่มีความสูงมากๆ จะต้านทานต่อแรงกระทำทางด้านข้างในลักษณะของคานยื่น (cantilevered beam) และจาก วิชากลศาสตร์วัสดุ (mechanics of materials) เราได้ทราบมาแล้วว่า แรงเฉือนจะมีความสำคัญในการออกแบบคานยื่นที่ สั้นเท่านั้น เมื่อคานยื่นมีขนาดยาวมากขึ้นแล้ว โมเมนต์ดัดจะมีความสำคัญในการออกแบบคานมากกว่าแรงเฉือน

### ตัวอย่างที่ 5-1

จงใช้วิธี portal method วิเคราะห์หาแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้างของ อาคาร ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-1a



1. หาแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในเสาที่อยู่ด้านนอกของอาคาร



จากแผนภาพ free body diagram ที่ตัดผ่านจุดกึ่งกลางความสูงของเสาชั้นที่ 2 ของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-1b แรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในเสาที่อยู่ในแนว D จะหาได้จาก

 $\sum M_{A} = 0;$ 

$$R_{D2}(4.8 + 7.2 + 6.0) = 16(1.8)$$
  
 $R_{D2} = \frac{28.8}{18} = 1.6 \text{ kN}$ 

และแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในเสาที่อยู่ในแนว A จะหาได้จาก

 $\sum F_{y} = 0;$ 

$$R_{A2} = R_{D2} = 1.6 \,\mathrm{kN}$$



จากแผนภาพ free body diagram ที่ตัดผ่านจุดกึ่งกลางความสูงของเสาของชั้นที่ 1 ของโครงสร้าง ดังที่แสดงใน รูปที่ Ex 5-1c แรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในเสาที่อยู่ในแนว D จะหาได้จาก  $\sum M_A = 0;$ 

$$R_{D1}(18) = 16(3.6 + 2.7) + 40(2.7)$$
  
 $R_{D1} = \frac{208.8}{18} = 11.60 \text{ kN}$ 

และแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในเสาที่อยู่ในแนว A จะหาได้จาก

 $\sum F_y = 0;$ 

$$R_{A1} = R_{D1} = 11.60 \text{ kN}$$

2. หาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ในคาน

จากแผนภาพ free body diagram ของส่วนของเสาในแนว A ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-1b ค่าแรงเฉือนตลอด แนวคานหมายเลข 2 จะหาได้จาก

 $\sum F_y = 0;$ 

$$V_{A2} + R_{A2} = 0$$
  
 $V_{A2} = -1.6 \text{ kN}$ 

จากแผนภาพ free body diagram ของส่วนของเสา *AB* ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-1c ค่าแรงเฉือนตลอดแนวคาน หมายเลข 1 จะหาได้จาก

 $\sum F_{y}=0;$ 

$$V_{A1} + R_{A1} - R_{A2} = 0$$
$$V_{A1} = 1.6 - 11.6 = -10.0 \text{ kN}$$

รูปที่ Ex 5-1d แสดงแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานในแนวหมายเลข 1 และ 2 จาก วิชา Theory of structures เราทราบมาแล้วว่า ความสัมพันธ์ของแรงเฉือนและโมเมนต์จะอยู่ในรูป dM / dx = V ซึ่งเมื่อ เราทำการอินทิเกรทสมการดังกล่าวจากจุด A ถึงจุด B เราจะได้ว่า

$$M_B - M_A = \int_A^B V dx$$

หรือการเปลี่ยนแปลงค่าของโมเมนต์จากจุด A ถึงจุด B มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้แผนภาพ shear diagram ระหว่างจุดดัง กล่าว

ถ้ากำหนดให้ จุด A เป็นปลายของคานทางด้านซ้ายมือและจุด B เป็นจุดกึ่งกลางคานและเนื่องจากค่าโมเมนต์ ที่จุดกึ่งกลางคานมีค่าเท่ากับศูนย์แล้ว เราจะได้ว่า โมเมนต์ที่ปลายของคานทางด้านซ้ายมือจะหาได้จากสมการ

$$M_A = -\int_A^B V dx$$

ซึ่งเป็นผลคูณของค่าแรงเฉือน (ค่าลบ) กับระยะกึ่งกลางช่วง span ของคาน และจะมีค่าเป็นบวก ในทำนองเดียวกัน เราจะ ได้ว่า โมเมนต์ทางด้านขวามือของคานเท่ากับผลคูณของค่าแรงเฉือน (ค่าลบ) กับระยะกึ่งกลางช่วง span ของคานแต่จะมี ค่าเป็นลบ ดังนั้น ค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นในช่วงของคาน *AB*, *BC*, และ *CD* ในแนวคานหมายเลข 2 จะมีค่าเท่ากับ

$$1.60\left(\frac{L_1}{2}\right) = 1.60\left(\frac{4.8}{2}\right) = 3.84 \text{ kN} - \text{m}$$
$$1.60\left(\frac{L_2}{2}\right) = 1.60\left(\frac{7.2}{2}\right) = 5.76 \text{ kN} - \text{m}$$

$$1.60\left(\frac{L_3}{2}\right) = 1.60\left(\frac{6.0}{2}\right) = 4.80 \text{ kN} - \text{m}$$

และค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นในช่วงของคาน AB , BC , และ CD ในแนวคานหมายเลข 1 จะมีค่าเท่ากับ

$$10.0 \left(\frac{L_1}{2}\right) = 10.0 \left(\frac{4.8}{2}\right) = 24 \text{ kN} - \text{m}$$
$$10.0 \left(\frac{L_2}{2}\right) = 10.0 \left(\frac{7.2}{2}\right) = 36 \text{ kN} - \text{m}$$
$$10.0 \left(\frac{L_3}{2}\right) = 10.0 \left(\frac{6.0}{2}\right) = 30 \text{ kN} - \text{m}$$

และเราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ของคานในแนวหมายเลข 1 และ 2 ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-1d



3. หาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของเสา

รูปที่ Ex 5-1e แสดงค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของคานและเสา



ค่าของโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของเสาของโครงสร้างจะหาได้โดยใช้แผนภาพ free body diagram และเงื่อนไข ของความสมดุลของโมเมนต์ที่จุดต่อของเสาและคาน ยกตัวอย่างเช่น จากแผนภาพ free body diagram ของจุดต่อ B-2 ดังที่แสดงในรูป และจากสมการสมดุลของโมเมนต์ +ไ $\sum M_{B2} = 0;$ 



ดังนั้น จากกฏข้อที่ 3 ของนิวตัน เราจะได้ ค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของเสา *B* – 2 มีค่าเท่ากับ 9.60 kN - m และมี ทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังที่แสดงใน<u>ร</u>ูปที่ Ex 5-1e

จากแผนภาพ free body diagram ของจุดต่อ B-1ดังที่แสดงในรูป และจากสมการสมดุลของโมเมนต์ ค่า โมเมนต์ที่ทำให้จุดต่อ B-1 อยู่ในสมดุลมีค่าเท่ากับ

$$+l^{\prime} \sum M_{B1} = 0;$$

$$M_{B1} + 9.60 - 24 - 36 = 0$$
  
 $M_{B1} = 50.40 \text{ kN} - \text{m}$ 



ดังนั้น จากกฏข้อที่ 3 ของนิวตัน เราจะได้ ค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของเสา *B* – 1 มีค่าเท่ากับ 50.40 kN - m และมี ทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-1e

ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากเสาไม่ได้ถูกกระทำโดยแรงกระทำภายนอก ดังนั้น แรงเฉือนที่เกิดขึ้นในเสาจะมีค่า คงที่ และโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านล่างของเสาจะมีทิศทางและขนาดเท่ากับโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านบนของเสา

ค่าของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของเสาของโครงสร้างจะหาได้โดยใช้ค่าของโมเมนต์ที่ปลายของเสาและสมการ ความสมดุลของโมเมนต์รอบปลายด้านใดด้านหนึ่งของเสาที่เราต้องการหาค่าแรงเฉือน ยกตัวอย่างเช่น ค่าแรงเฉือนที่เกิด ขึ้นที่ปลายด้านล่างของเสาเสาที่เชื่อมจุด *B* – 2 กับ *B* – 1 จะหาได้จากแผนภาพ free body diagram ของเสาและสม การความสมดุลของโมเมนต์ที่ปลายเสาที่เชื่อมต่อกับจุด *B* – 1

$$+5 \sum M_{B1} = 0;$$
  
 $9.60 + 9.60 - V_{B1}(3.6) = 0$   
 $V_{B1} = 5.333 \,\text{kN}$  Ans.

### 5.5 Approximate Analysis ของโครงอาคารที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำทางด้านข้าง: Cantilever Method

การวิเคราะห์โครงสร้างของอาคาร (building frame) ที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำทางด้านข้าง (lateral loads) แบบ approximate โดยวิธี cantilever นี้มีพื้นฐานมาจาก

- สมมุติให้จุดดัดกลับ (inflection point) ของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงสร้างเกิดขึ้นที่กึ่งกลางของคาน และเสา เช่นเดียวกับในวิธี portal
- สมมุติฐานให้โครงสร้างมีพฤติกรรมที่คล้ายกับคานยื่น จากวิชากลสาสตร์วัสดุ (mechanics of materials) เราทราบแล้วว่า การกระจายของหน่วยแรงดัด (bending stress) บนหน้าตัดใดๆ ของคานยื่นจะเป็นแบบ เส้นตรงจากแกนสะเทิน (neutral axis ของคาน) ดังที่แสดงตามรูปที่ 5-8a ดังนั้น ในที่นี้ เราจะสมมุติให้ หน่วยแรงในแนวแกน (axial stress) ของเสาในโครงสร้างแปรผันเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากเสาถึงจุด centroid ของพื้นที่หน้าตัดของเสาทั้งหมด ดังที่แสดงในรูปที่ 5-8b

จากข้อสมมุติฐานทั้งสองข้อดังกล่าว เราจะทำการวิเคราะห์โครงสร้างของอาคารได้โดยใช้สมการความสมดุลเพียงลำพัง เนื่องจากการวิเคราะห์โครงสร้างของอาคารโดยวิธี cantilever มีพื้นฐานมาจากสมมุติฐานที่ให้โครงสร้างของ อาคารดังกล่าวมีพฤติกรรมที่คล้ายกับคานยื่น ดังนั้น วิธีการนี้จึงเหมาะสมที่จะใช้ในโครงอาคารสูง (high-rise building)



รูปที่ 5-8

### ตัวอย่างที่ 5-2

จงใช้วิธี cantilever method วิเคราะห์หาแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของขึ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง ของอาคาร ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-2a กำหนดให้ เสาทุกต้นมีพื้นที่หน้าตัดที่เท่ากันคือ 1.0 ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-2b



1. หาตำแหน่งของจุด centroid ของพื้นที่หน้าตัดของเสาในโครงอาคาร จากรูปที่ Ex 5-2b

$$(4.0)\overline{x} = 1.0(6.0) + 1.0(13.2) + 1.0(18.0)$$
  
 $\overline{x} = \frac{37.2}{4.0} = 9.3 \text{ m}$ 

2. หาค่าแรงในแนวแกนของเสา

แรงในแนวแกนของเสาแปรผันเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะจากเสาถึงจุด centroid ของพื้นที่หน้าตัดของเสา ดังที่ แสดงในรูปที่ Ex 5-2c ถ้ากำหนดให้ค่าความขัน (slope) ของการแปรผันของแรงในแนวแกนของเสาในแนวหมายเลข 2 มี ค่าเป็น k<sub>2</sub> แล้ว เราจะได้ว่า

$$R_{A2} = k_2(18.0 - 9.3) = 8.7k_2$$
$$R_{B2} = k_2(18.0 - 9.3 - 4.8) = 3.9k_2$$
$$R_{C2} = k_2(9.3 - 6.0) = 3.3k_2$$
$$R_{C2} = k_2(9.3) = 9.3k_2$$

และค่า slope  $\,k_2^{}\,$  จะหาได้จากโมเมนต์ของแรงต่างๆ รอบจุด centroid ของพื้นที่หน้าตัดของเสา

Structural Analysis

$$16\left(\frac{3.6}{2}\right) = R_{A2}(8.7) + R_{B2}(3.9) + R_{C2}(3.3) + R_{D2}(9.3)$$
$$28.8 = k_2(8.7^2 + 3.9^2 + 3.3^2 + 9.3^2)$$
$$k_2 = 0.15296$$

ดังนั้น แรงในแนวแกนของเสาในแนวหมายเลข 2 จะมีค่าเท่ากับ

$$R_{A2} = 8.7(0.15296) = 1.331 \text{ kN}$$
  
 $R_{B2} = 3.9(0.15296) = 0.596 \text{ kN}$   
 $R_{C2} = 3.3(0.15296) = 0.505 \text{ kN}$   
 $R_{D2} = 9.3(0.15296) = 1.422 \text{ kN}$ 

ี่ K<sub>D2</sub> = 9.3(0.15∠90) = 1.4∠2 KIN จากรูปที่ Ex 5-2d ค่า slope ของการแปรผันของแรงในแนวแกนของเสาในแนวหมายเลข 1 หรือ k<sub>1</sub> จะหาได้จาก

โมเมนต์ของแรงต่างๆ รอบจุด centroid ของเสา

$$16\left(3.6 + \frac{5.4}{2}\right) + 40\left(\frac{5.4}{2}\right) = R_{A1}(8.7) + R_{B1}(3.9) + R_{C1}(3.3) + R_{D1}(9.3)$$
$$208.8 = k_1(8.7^2 + 3.9^2 + 3.3^2 + 9.3^2)$$
$$k_1 = 1.1090$$

ดังนั้น แรงในแนวแกนของเสาในแนวหมายเลข 1 จะมีค่าเท่ากับ

$$R_{A1} = 8.7(1.1090) = 9.648 \text{ kN}$$
  
 $R_{B1} = 3.9(1.1090) = 4.325 \text{ kN}$   
 $R_{C1} = 3.3(1.1090) = 3.660 \text{ kN}$   
 $R_{D1} = 9.3(1.1090) = 10.314 \text{ kN}$ 



3. หาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ในคาน

รูปที่ Ex 5-2e แสดงแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานในแนวหมายเลข 1 และ 2 ซึ่งจะ หาได้จากค่าแรงในแนวแกน ยกตัวอย่างเช่น จากแผนภาพ free body diagram ของเสา A2 ดังที่แสดง และจากสมการ สมดุลของแรง



จากแผนภาพ free body diagram ของเสา B2 ดังที่แสดง และจากสมการสมดุลของแรง



$$V_{B2} = -1.331 - 0.596 = -1.927$$
 kN

จากแผนภาพ free body diagram ของเสา C2 ดังที่แสดง และจากสมการสมดุลของแรง



$$V_{C2} = -1.927 + 0.505 = -1.442 \,\mathrm{kN}$$

จากหลักการที่ได้กล่าวไปแล้วในตัวอย่างที่ 5-1 และจากแผนภาพ shear diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-2e เรา จะหาค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นในช่วงของคาน AB , BC , และ CD ในแนวคานหมายเลข 2 จะมีค่าเท่ากับ

$$1.331\left(\frac{L_1}{2}\right) = 1.331\left(\frac{4.8}{2}\right) = 3.19 \text{ kN} - \text{m}$$
$$1.927\left(\frac{L_2}{2}\right) = 1.927\left(\frac{7.2}{2}\right) = 6.94 \text{ kN} - \text{m}$$
$$1.422\left(\frac{L_3}{2}\right) = 1.422\left(\frac{6.0}{2}\right) = 4.27 \text{ kN} - \text{m}$$



ในทำนองเดียวกัน โดยการใช้แผนภาพ free body diagram และสมการสมดุลของแรง เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram ของคานในแนวคานหมายเลข 1 ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 5-2e

4. หาแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของเสา

จากแผนภาพ free body diagram ของจุดต่อและจากสมการสมดุลของโมเมนต์ เราจะหาโมเมนต์และแรงเฉือนที่ เกิดขึ้นที่ปลายของเสาได้ ดังที่แสดงใน รูปที่ Ex 5-1f Structural Analysis



5-16

### แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5

5-1 จงใช้วิธี portal method และ cantilever method วิเคราะห์หาแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้างของอาคาร ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-1 เมื่อเสาทุกต้นมีหน้าตัดเท่ากัน จากนั้น ทำการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram เพื่อเปรียบเทียบกับค่าที่ได้กับผลการวิเคราะห์จาก computer program สุดท้าย เขียน บทวิจารณ์ผลการเปรียบเทียบ



5-2 จงใช้วิธี portal method วิเคราะห์หาแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้างของอาคาร ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-2 เมื่อเสาทุกต้นมีหน้าตัดเท่ากัน จากนั้น ทำการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram เพื่อเปรียบเทียบกับค่าที่ได้กับผลการวิเคราะห์จาก computer program สุดท้าย เขียนบทวิจารณ์ผลการเปรียบ เทียบ



5-3 จงใช้วิธี cantilever method วิเคราะห์หาแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้างของ อาคาร ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 5-2 เมื่อเสาในแนว *B* มีพื้นที่หน้าตัดเป็น 1.5 เท่าชองเสาในแนว *A* และ *C* จากนั้น ทำ การเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram เพื่อเปรียบเทียบกับค่าที่ได้กับผลการวิเคราะห์จาก computer program สุดท้าย เขียนบทวิจารณ์ผลการเปรียบเทียบ

# บทที่ 6 การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยใช้ Matrix Displacement Method

#### 6.1 พื้นฐานของ Matrix Displacement Method

วิธีวิเคราะห์โครงสร้างถูกแบ่งออกเป็นกลุ่มใหญ่ๆ ได้ 2 กลุ่มคือ force method และ displacement method โดยที่ force method จะใช้แรงภายในชิ้นส่วน (member force) ของโครงสร้างเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (unknown) ใน ขณะที่ displacement method จะใช้การเปลี่ยนตำแหน่งที่ node (nodal displacement) ของโครงสร้างเป็นตัวแปรที่ไม่ ทราบค่า

การวิเคราะห์โครงสร้างในรูปของ matrix (matrix structural analysis) ถูกแบ่งออกได้เป็น 2 วิธีเช่นกันคือ matrix force method หรือ flexibility method และ matrix displacement method หรือ stiffness method โดยทั่วไปแล้ว matrix displacement method จะเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากกว่า matrix force method เนื่องจาก

- matrix displacement method สามารถใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง statically determinate และแบบ statically indeterminate ได้โดยใช้ขั้นตอนการคำนวณที่เหมือนกัน แต่ matrix force method จะใช้ขั้นตอน การคำนวณโครงสร้างทั้งสองแบบที่แตกต่างกัน
- matrix displacement method จะให้ผลลัพธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งโดยตรง แต่ matrix force method จะทำไม่ได้ ซึ่งทำให้ matrix force method มีขั้นตอนการคำนวณที่ยุ่งยากมากกว่า
- การเขียนโปรแกรม computer สำหรับ matrix displacement method ง่ายกว่าการเขียนโปรแกรม computer สำหรับ matrix force method
- สมการพื้นฐานของ matrix displacement method จะหาได้จาก
- สมการความสมดุล (equilibrium equation)
- สมการของความสอดคล้อง (compatibility equation)
- ความสัมพันธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่ง (force-displacement relationship)

การวิเคราะห์โครงสร้างโดย matrix displacement method มีขั้นตอนพื้นฐานคร่าวๆ ดังต่อไปนี้

- 1. ทำเครื่องหมายแสดงหมายเลขของ node และชิ้นส่วนของโครงสร้าง
- ใช้ความสัมพันธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของ โครงสร้าง q กับค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนของโครงสร้าง d ในระบบแกน local coordinate system หรือ q = k'd เมื่อ k' เป็น member stiffness matrix
- ใช้สมการหรือเงื่อนไขของความสอดคล้องเขียนความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนของโครง สร้าง d ในระบบแกน local coordinate system กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node (nodal displacement) ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง D ในระบบแกน global coordinate system หรือ d = TD เมื่อ T เป็น displacement transformation matrix
- 4. ใช้สมการความสมดุลที่ node (nodal equilibrium equation) หาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำ  ${f Q}$  ใน ระบบแกน global coordinate system กับแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้าง  ${f q}$  ในระบบแกน local coordinate system หรือ  ${f Q}={f T}^T{f q}$  เมื่อ  ${f T}^T$  เป็น force transformation matrix
- แทน matrix d = TD ในข้อที่ 3 ลงใน matrix q = k'd ในข้อที่ 2 จากนั้น เขียนความสัมพันธ์ของแรงภาย ในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้าง q กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง D หรือ q = k'TD

- 6. แทน matrix  $\mathbf{q} = \mathbf{k'TD}$  ในข้อที่ 5 ลงใน matrix  $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}$  ในข้อที่ 4 จากนั้น เขียนความสัมพันธ์ของ แรงกระทำ  $\mathbf{Q}$  กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง  $\mathbf{D}$  หรือ  $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{k'TD} = \mathbf{kD}$ เมื่อ  $\mathbf{k}$  เป็น member global stiffness matrix
- 7. ทำการรวม matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้างเข้าด้วยกัน ซึ่งเราจะได้ matrix  $\mathbf{Q} = \mathbf{K} \mathbf{D}$  เมื่อ **K** เป็น structure stiffness matrix
- 8. จัดรูป matrix ใหม่ในรูป  $\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{Q}$  เพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง
- 9. แทนค่า **D** ลงใน matrix  $\mathbf{q} = \mathbf{k'TD}$  ในข้อที่ 4 เราจะได้ แรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้าง



### Member and Node Identification

ขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์โครงสร้างโดย matrix displacement method คือ การกำหนดหมายเลขให้กับขึ้น ส่วนและ node ต่างๆ ของโครงสร้าง ในที่นี้ เราจะกำหนดให้

- ➤ หมายเลขของชิ้นส่วนของโครงสร้างจะถูกล้อมรอบด้วยกรอบสี่เหลี่ยม ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1a
- ➤ หมายเลขของ node จะถูกล้อมรอบด้วยกรอบวงกลม ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1a

นอกจากนั้นแล้ว ปลายด้านใกล้และปลายด้านไกลของชิ้นส่วนของโครงสร้างจะถูกกำหนดโดยใช้ลูกศรเขียนไป ตามความยาวของชิ้นส่วนของโครงสร้าง โดยหัวของลูกศรแสดงถึงปลายด้านไกลของชิ้นส่วนของโครงสร้าง ดังที่แสดงใน รูปที่ 6-1a

### Global and Member Coordinate

ระบบแกนอ้างอิงที่เราจะใช้ใน matrix displacement method นี้จะถูกแบ่งออกเป็น 2 ระบบคือ

- ระบบแกน global coordinate system (x y) ซึ่งจะใช้ในการบอกทิศทางของแรงภายนอกและการ เปลี่ยนตำแหน่งที่ node ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1a โดยทั่วไปแล้ว เราจะกำหนดให้จุดเริ่มต้นของระบบแกนอ้าง อิงชนิดนี้อยู่ที่ node ใด node หนึ่ง ซึ่งจะทำให้ค่าพิกัดของ node อื่นๆ มีค่าเป็นบวก
- ระบบแกน local coordinate system (x' y') ซึ่งจะใช้ในการบอกทิศทางของแรงภายในและการเปลี่ยน ตำแหน่งที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้าง โดยที่จุดเริ่มต้นของระบบแกนอ้างอิงชนิดนี้จะอยู่ที่ปลายด้านใกล้ และแกน x' จะพุ่งไปที่ปลายด้านไกลของชิ้นส่วนของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1b

#### Degree of Freedom

Degree of freedom เป็นค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างที่ node ที่เราต้องการทราบ ซึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะ และสมมุติฐานของโครงสร้าง โดยที่แต่ละเทอมของ degree of freedom จะต้องเป็นอิสระต่อกัน โดยทั่วไปแล้ว เราจะแบ่ง degree of freedom ออกได้เป็น 2 ประเภทคือ

- unconstrained degree of freedom ซึ่งเป็น degree of freedom ที่ไม่มีการยึดรั้ง โดยจะมีการเปลี่ยน ตำแหน่งเกิดขึ้นภายใต้แรงกระทำ
- constrained degree of freedom ซึ่งเป็น degree of freedom ที่มีการยึดรั้งและการรองรับโครงสร้าง และ มักจะมีค่าการเปลี่ยนตำแหน่งเท่ากับศูนย์

พิจารณาโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-1 ซึ่งมีจำนวน node เท่ากับ 4 และมีจำนวน degree of freedom เท่า กับ 8 โดยเราจะแบ่ง degree of freedom ของโครงข้อหมุนดังกล่าวออกได้เป็น 5 unconstrained degree of freedom คือ degree of freedom หมายเลข 1 ถึงหมายเลข 5 และ 3 constrained degree of freedom (2 สำหรับ pin support บวก กับ 1 สำหรับ roller support) คือ degree of freedom หมายเลข 6 ถึงหมายเลข 8

โดยทั่วไปแล้ว เราจะกำหนดหมายเลขของ node ของโครงสร้างโดยจะทำการเรียงลำดับให้ unconstrained degree of freedom มีลำดับอยู่ก่อน constrained degree of freedom ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ 6-1a การจัดเรียงหมายเลข ของ node ในลักษณะนี้จะทำให้เราทำ partition **K** matrix ได้ง่ายขึ้น ซึ่งจะทำให้หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ได้ ง่ายขึ้นด้วย

#### 6.2 Truss-Member Stiffness Matrix

Truss-member stiffness matrix **k**′ เป็น matrix ที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน ของโครงข้อหมุน **q** กับค่าการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน **d** ในระบบแกน local coordinate system (*x*′ – *y*′)



พิจารณาชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-2 เนื่องจากชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนถูกกระทำโดยแรงใน แนวแกนเท่านั้น ดังนั้น ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนนี้จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้ในแนวแกนเท่านั้น

จากรูปที่ 6-2a ถ้าเรากำหนดให้ปลายด้านใกล้ (node N) ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง ในแนวแกนเท่ากับ + d<sub>N</sub> และปลายด้านไกล (node F) ถูกยึดโดยหมุดแล้ว จากวิชา mechanics of materials เราจะได้ ว่า แรงกระทำที่ปลายด้านใกล้ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะอยู่ในรูป

$$q_N' = \frac{AE}{L}d_N$$

และจากสมการความสมดุลในแนวแกน x' เราจะได้ว่า แรงปฏิกริยา q'<sub>F</sub> ที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านไกลของชิ้นส่วนของโครง ข้อหมุนจะอยู่ในรูป

$$q'_F = -\frac{AE}{L}d_N$$

ในกรณีนี้  $q_F^\prime$  มีค่าเป็นลบเพราะมีทิศไปทาง  $-x^\prime$ 

ในลักษณะที่คล้ายกัน จากรูปที่ 6-2b ถ้ากำหนดให้ปลายด้านใกล้ (node N) ของซิ้นส่วนของโครงข้อหมุนถูก ยึดโดยหมุดและปลายด้านไกล (node F) เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกนเท่ากับ + d<sub>F</sub> แล้ว แรงกระทำที่ปลายด้าน ใกลของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะอยู่ในรูป

$$q_F'' = \frac{AE}{L}d_F$$

และจากสมการความสมดุลในแนวแกน x' เราจะได้ว่า แรงปฏิกริยา q'' ที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านใกล้ของชิ้นส่วนของโครง ข้อหมุนจะอยู่ในรูป

$$q_N'' = -\frac{AE}{L}d_F$$

โดยใช้ principle of superposition เมื่อปลายด้านใกล้ (node N) ของซิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเกิดการเปลี่ยน ตำแหน่งในแนวแกนเท่ากับ + d<sub>N</sub> และปลายด้านไกล (node F) เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกนเท่ากับ + d<sub>F</sub> ดังที่ แสดงในรูปที่ 6-2c แล้ว ค่าแรงที่เกิดขึ้นที่ปลายทั้งสองของขิ้นส่วนของโครงข้อหมุนดังกล่าวจะหาได้โดยการรวมชิ้นส่วน ของโครงข้อหมุนในรูปที่ 6-2a เข้ากับรูปที่ 6-2b ดังนั้น

$$q_N = \frac{AE}{L}d_N - \frac{AE}{L}d_F \tag{6-1}$$

$$q_F = \frac{AE}{L}d_F - \frac{AE}{L}d_N \tag{6-2}$$

ซึ่งเราจะเขียนให้อยู่ในรูปของ matrix ได้เป็น

$$\begin{cases} q_N \\ q_F \end{cases} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{cases}$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{k'd}$$
(6-3)

หรือ

เมื่อ

$$\mathbf{r} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6-4}$$

โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสี่ของ member stiffness matrix  $\mathbf{k}'$  นี้มักจะถูกเรียกว่า member stiffness influence coefficients,  $k'_{ij}$  ซึ่งแสดงถึงค่าของแรงที่เกิดขึ้นที่ node i เมื่อ node j มีการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน 1 หน่วย หรือ เป็นค่าความแกร่งของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ยกตัวอย่างเช่น จากรูปที่ 6-2a ถ้า  $d_N = 1$  และให้การเปลี่ยนตำแหน่ง อื่นๆ มีค่าเท่ากับศูนย์แล้ว ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน  $q_N = k'_{11} = AE/L$  และ  $q_F = k'_{21} = -AE/L$  ดังที่แสดงโดย column แรกของ matrix  $\mathbf{k}'$ 

k

### 6.3 Displacement และ Force Transformation Matrices

ก่อนที่เราจะหา displacement transformation matrix และ force transformation matrix ของขึ้นส่วนของโครง ข้อหมุนได้นั้น เราจะทำการหาค่า direction cosine ของขึ้นส่วนของโครงข้อหมุนก่อน

พิจารณาโครงข้อหมุน ซึ่งอยู่ในระบบแกน global coordinate system x - y ดังที่แสดงในรูปที่ 6-3 โครงข้อ หมุนนี้มีชิ้นส่วนหนึ่งวางอยู่ในระบบแกน local coordinate system x' - y' โดยที่แกน x' และแกน y' ทำมุม  $\theta_x$ และ  $\theta_y$  กับแกน x และแกน y ของระบบแกน global coordinate system ตามลำดับ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-4

ถ้าเรากำหนดให้ปลาย N และปลาย F ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนดังกล่าวมีพิกัดเป็น  $(x_N, y_N)$  และ  $(x_F, y_F)$  ตามลำดับแล้ว direction cosine  $\lambda_x$  และ  $\lambda_y$  ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะอยู่ในรูป

$$\lambda_{x} = \cos\theta_{x} = \frac{x_{F} - x_{N}}{L} = \frac{x_{F} - x_{N}}{\sqrt{(x_{F} - x_{N})^{2} + (y_{F} - y_{N})^{2}}}$$
(6-5)

$$\lambda_{y} = \cos\theta_{y} = \frac{y_{F} - y_{N}}{L} = \frac{y_{F} - y_{N}}{\sqrt{(x_{F} - x_{N})^{2} + (y_{F} - y_{N})^{2}}}$$
(6-6)



#### **Displacement Transformation Matrix**

Displacement transformation matrix ของโครงข้อหมุนเป็น matrix ที่แสดงความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลง ตำแหน่งที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน **d** ในระบบแกน local coordinate system x' - y' กับการเปลี่ยน ตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน **D** ในระบบแกน global coordinate system x - y

เนื่องจากแต่ละ node ของโครงข้อหมุนมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 2 ดังนั้น ขึ้นส่วนของโครงข้อหมุน จะมีจำนวน degree of freedom ทั้งหมดเท่ากับ 4 ซึ่งในที่นี้เราจะกำหนดให้  $D_{Nx}$  และ  $D_{Ny}$  เป็น degree of freedom ที่ node N ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และ  $D_{Fx}$  และ  $D_{Fy}$  เป็น degree of freedom ที่ node F ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

ในกรณีที่โครงสร้างมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างน้อยมากภายใต้แรงกระทำแล้ว ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงข้อ หมุนหรือ degree of freedom  $D_{Nx}$  ,  $D_{Ny}$  ,  $D_{Fx}$  , และ  $D_{Fy}$  จะมีค่าที่น้อยมากด้วย ดังนั้น ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของ โครงข้อหมุนจะขึ้นอยู่กับองค์ประกอบของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกนของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเท่านั้นและจะเป็น อิสระกับองค์ประกอบของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวขวาง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ค่ามุม  $heta_x$  และ  $heta_y$  ที่เปลี่ยนแปลง ไปเนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงข้อหมุนจะมีค่าน้อยมากและจะถูกตัดออกจากการพิจารณาได้

โดยใช้ principle of superposition เราจะพิจารณาผลที่เกิดจากการเปลี่ยนตำแหน่ง  $D_{\scriptscriptstyle Nx}$  ,  $D_{\scriptscriptstyle Ny}$  ,  $D_{\scriptscriptstyle Fx}$  , และ  $D_{\scriptscriptstyle Fy}$  บนชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนได้เป็น 4 กรณี ดังที่แสดงในรูปที่ 6-5a ถึง 6-5d



จากรูปที่ 6-5a เมื่อปลายด้ายไกล (node F) ของขึ้นส่วนของโครงข้อหมุนถูกยึดโดยหมุดและปลายด้านใกล้ (node N) มีการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน x เป็น  $D_{Nx}$  แล้ว การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน x' จะอยู่ในรูป  $D_{Nx}\cos\theta_x$  ในลักษณะที่คล้ายกัน เมื่อปลายด้านใกล้ (node N) มีการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน y เป็น  $D_{Ny}$  ดังที่ แสดงในรูปที่ 6-5b แล้ว ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน x' จะอยู่ในรูป  $D_{Ny}\cos\theta_y$ 

โดยใช้ principle of superposition เราจะได้ว่า ผลรวมของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน x' ที่ปลายด้านใกล้ (node N) จะอยู่ในรูป

$$d_N = D_{Nx} \cos \theta_x + D_{Ny} \cos \theta_y$$

ในลักษณะเดียวกัน จากรูปที่ 6-5c และ 6-5d ผลรวมของการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน x' ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ที่ปลายด้านไกล (node F ) จะอยู่ในรูป

$$d_F = D_{Fx} \cos \theta_x + D_{Fy} \cos \theta_y$$

จากสมการของ direction cosine  $\lambda_x = \cos \theta_x$  และ  $\lambda_y = \cos \theta_y$  ดังนั้น เราจะเขียนสมการทั้งสองให้อยู่ใน รูป matrix ได้เป็น

$$\begin{cases} d_{N} \\ d_{F} \end{cases} = \begin{bmatrix} \lambda_{x} & \lambda_{y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x} & \lambda_{y} \end{bmatrix} \begin{cases} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{cases}$$
(6-7)

( n

หรือ

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}$$
(6-9)

 $\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{D}$ 

โดยที่ matrix **T** จะถูกเรียกว่า displacement transformation matrix ซึ่งจะใช้ในการเปลี่ยนรูป (transform) ค่าการ เปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนในระบบแกน global coordinate system (x - y) ไปเป็นค่าการ เปลี่ยนแปลงตำแหน่งที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนในระบบแกน local coordinate system (x' - y')Force Transformation Matrix

Force transformation matrix ของโครงข้อหมุนจะเป็น matrix ที่แสดงความสัมพันธ์ของแรงกระทำภายนอก  ${f Q}$ ในระบบแกน global coordinate system x-y กับแรงภายในที่เกิดขึ้นในขึ้นส่วนของโครงข้อหมุน  ${f q}$  ในระบบแกน local coordinate system x'-y'



พิจารณาชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-6a เมื่อปลายด้ายไกล (node F) ของชิ้นส่วนของโครงข้อ หมุนถูกยึดโดยหมุดและปลายด้านใกล้ (node N) ถูกกระทำโดยแรงภายในที่เกิดขึ้นในแนวแกนของชิ้นส่วนของโครงข้อ หมุน  $q_N$  แล้ว จากรูป เราจะหาความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของแรงกระทำภายนอกในระบบแกน global coordinate system ( $Q_{Nx}$  และ  $Q_{Ny}$ ) กับแรง  $q_N$  ได้ในรูป

$$Q_{Nx} = q_N \cos\theta_x$$
$$Q_{Ny} = q_N \cos\theta_y$$

ในลักษณะเดียวกัน เมื่อปลายด้ายไกล (node F) ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนถูกกระทำโดยแรงภายในที่เกิด ขึ้นในแนวแกนของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน  $q_F$  และปลายด้านใกล้ (node N) ถูกยึดโดยหมุด ดังที่แสดงในรูปที่ 6-6b แล้ว เราจะหาความสัมพันธ์ขององค์ประกอบของแรงกระทำภายนอกในระบบแกน global coordinate system ( $Q_{Fx}$  และ  $Q_{Fy}$ ) กับแรง  $q_F$  ได้ในรูป

$$Q_{Fx} = q_F \cos\theta_x$$
$$Q_{Fy} = q_F \cos\theta_y$$

(6-8)

จากสมการของ direction cosine  $\lambda_x = \cos heta_x$  และ  $\lambda_y = \cos heta_y$  ดังนั้น เราจะเขียนสมการทั้งสองให้อยู่ใน รูป matrix ได้เป็น

 $\mathbf{O} = \mathbf{T}^T \mathbf{a}$ 

$$\begin{cases} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{cases} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{cases} q_N \\ q_F \end{cases}$$
(6-10)

หรือ

$$= \begin{bmatrix} \lambda_x & 0\\ \lambda_y & 0\\ 0 & \lambda_x\\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix}$$
(6-12)

เมื่อ

โดยที่ matrix  $\mathbf{T}^T$  จะถูกเรียกว่า force transformation matrix ซึ่งจะใช้ในการเปลี่ยนรูป (transform) แรงภายในที่เกิดขึ้น ในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน  $\mathbf{q}$  ในระบบแกน local coordinate system ไปเป็นแรงกระทำภายนอก  $\mathbf{Q}$  ในระบบแกน global coordinate system

 $\mathbf{T}^T$ 

โดยการเปรียบเทียบ เราจะเห็นได้ว่า force transformation matrix เป็น transpose ของ displacement transformation matrix ซึ่งเราจะสามารถพิสูจน์ได้โดยใช้ principle of virtual work (Wang, C.K., "Intermediate Structural Analysis, 1983)

#### 6.4 Member Global Stiffness Matrix

เมื่อเราแทนสมการที่ 6-8 (**d** = **TD**) ลงในสมการที่ 6-3 (**q** = **k'd**) เราจะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ของ แรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้าง **q** กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง **D** ในรูป

$$\mathbf{q} = \mathbf{k'TD} \tag{6-13}$$

จากนั้น แทนค่าสมการที่ 6-13 ลงในสมการที่ 6-11 (**Q** = **T**<sup>T</sup>**q**) เราจะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ของแรงกระทำ **Q** กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง **D** ในรูป

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{k'TD}$$
 $\mathbf{Q} = \mathbf{kD}$ (6-14)เมื่อ $\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k'T}$ (6-15)

โดยที่ matrix **k** นี้จะถูกเรียกว่า member global stiffness matrix และเนื่องจากเราทราบค่าของ matrix  $\mathbf{T}^T$  และ matrix **T** และ member stiffness matrix **k'** ดังนั้น

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \underbrace{AE}_{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}$$

หรือ

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y \\ \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y \\ -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 \end{bmatrix}$$
(6-16)

(6-11)

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า matrix **k** เป็น square matrix ที่สมมาตร และถ้าโครงข้อหมุนเป็นโครงสร้างที่มีเสถียรภาพแล้ว matrix **k** นี้จะเป็น nonsingular matrix ซึ่งเราจะหาค่า inverse ของ matrix นี้ได้ ดังนั้น เราจะเขียนสมการที่ 6-14 ให้เต็มรูปได้ เป็น

$$\begin{cases} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{cases} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y \\ \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y \\ -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$
(6-14a)

จากสมการที่ 6-14a เมื่อเราให้ค่า  $D_{Nx} = 1$  และให้ค่า  $D_{Ny} = D_{Fx} = D_{Fy} = 0$  แล้ว แรงภายนอกที่กระทำ อยู่ที่ node ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะหาได้จาก

$$\begin{cases} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{cases} = \frac{AE}{L} \begin{cases} \lambda_x^2 \\ \lambda_x \lambda_y \\ -\lambda_x^2 \\ -\lambda_x \lambda_y \end{cases}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า เมื่อเราต้องการให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งที่ปลาย N ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนในแนวแกน x มีค่าเท่า กับ 1 หน่วยแล้ว เราจะต้องให้แรงกระทำภายนอกกระทำที่ปลาย N และปลาย F ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนในแนว แกน x และแกน y เท่ากับค่าที่ได้ตามสมการ ดังนั้น เราจะให้ความหมายของเทอม  $\mathbf{k}_{ij}$  ซึ่งจะถูกเรียกว่า stiffness influence coefficient ว่าเป็นค่าขององค์ประกอบของแรงภายนอกในแนวแกน x หรือแกน y ที่กระทำที่ปลาย i ของชิ้น ส่วนของโครงข้อหมุนเพื่อให้เกิดองค์ประกอบของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน x หรือแกน y ที่ปลาย j มีค่าเท่า กับ 1 หน่วย

#### 6.5 Structural Stiffness Matrix

หลังจากที่เราได้ member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนแล้ว เราจะทำการรวม matrix **k** เหล่านั้นเข้าด้วยกัน ผลลัพธ์ที่ได้จะเรียกว่า structural stiffness matrix **K** ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ของแรงกระทำ ภายนอก **Q** กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node **D** และจะอยู่ในรูป

#### Q = KD

ในการรวม matrix **k** ดังกล่าว เริ่มต้น เราจะทำการเขียนตาราง โดยที่แต่ละช่องของตารางดังกล่าวจะแสดงถึง องค์ประกอบของ matrix **K** ของโครงข้อหมุน ซึ่งจะมีจำนวน column และจำนวน row เท่ากับจำนวน degree of freedom ของโครงข้อหมุน จากนั้น ทำการเติมค่า **k**<sub>ij</sub> ของ matrix **k** ของชิ้นส่วนของโครงสร้างลงในตารางดังกล่าว โดย ต้องเติมลงในช่องที่มี global coordinate และ degree of freedom ที่ตรงกัน

### 6.6 การใช้ Matrix Displacement Method ในการวิเคราะห์โครงข้อหมุน

ถ้าเราทำการกำหนดหมายเลขของ node ของโครงข้อหมุนโดยให้ unconstrained degree of freedom มีลำดับ อยู่ก่อน constrained degree of freedom ดังที่ได้กล่าวไปแล้วนั้น เราจะทำการแบ่ง partition ของ structural stiffness matrix **K** ได้ดังที่แสดงในสมการที่ 6-17

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix}$$
(6-17)

เมื่อ **Q**<sub>k</sub> , **D**<sub>k</sub> เป็นแรงกระทำภายนอกและการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดรองรับหรือยึดรั้งที่เรา**ทราบค่า** (known) ตามลำดับ โดยทั่วไปแล้ว ถ้าจุดรองรับไม่มีการทรุดตัวแล้ว **D**<sub>k</sub> = 0

- **Q**<sub>u</sub>, **D**<sub>u</sub> เป็นแรงปฏิกริยาและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ บนโครงข้อหมุนที่เรา**ไม่ทราบค่า** (unknown) ตามลำดับ โดยทั่วไปแล้ว **Q**<sub>u</sub> จะเป็นค่าของแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ
- **K** เป็น structural stiffness matrix ที่ถูก partition ให้สอดคล้องกับ  $\mathbf{Q}_k$ ,  $\mathbf{D}_k$  และ  $\mathbf{Q}_u$ ,  $\mathbf{D}_u$ โดยสรุปแล้ว ขั้นตอนการวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดย matrix displacement method มีดังต่อไปนี้
- กำหนดระบบแกน global coordinate system ให้เหมาะสมกับลักษณะของโครงข้อหมุน จากนั้น กำหนด หมายเลขของ node หมายเลขของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน และหมายเลข degree of freedom
- 2. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ ที่เราทราบค่าและเขียน matrix  $\mathbf{D}_k$  โดยใช้ sign convention ของ ระบบแกน global coordinate system
- 3. หาค่าแรงกระทำภายนอกที่ทราบค่าและเขียน matrix  ${f Q}_k$  โดยใช้ sign convention ของระบบแกน global coordinate system
- 4. หาค่า direction cosine  $\lambda_x = \cos \theta_x$  และ  $\lambda_y = \cos \theta_y$  และหา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน
- 5. ทำการรวม member global stiffness matrix  ${f k}$  ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเข้าด้วยกันเพื่อหา structure stiffness matrix  ${f K}$
- 6. จากสมการที่ 6-17 เราจะหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ  $\mathbf{D}_u$ ได้จากสมการ

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$$

และเราจะหาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ $\mathbf{Q}_u$ ได้จากสมการ

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_u$$

7. หาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจากสมการ  $\mathbf{q} = \mathbf{k} \mathbf{T} \mathbf{D}$ 

หรือ 
$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$
(6-18)

เนื่องจาก  $q_{_N} = -q_{_F}$  ดังนั้น เราจะหาค่าของแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนได้โดยใช้สมการ ใดสมการหนึ่งในสมการที่ 6-8 โดยทั่วไปแล้ว เราจะหาค่า  $q_{_F}$  ซึ่งมีค่าบวกเมื่อเป็นแรงดึง

$$q_{F} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\lambda_{x} & -\lambda_{y} & \lambda_{x} & \lambda_{y} \end{bmatrix} \begin{cases} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{cases}$$
(6-19)

#### ตัวอย่างที่ 6-1

จงวิเคราะห์โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-1 โดย matrix displacement method เพื่อหาการเปลี่ยน ตำแหน่งและค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน กำหนดให้ค่า axial stiffness *AE* ของทุกชิ้นส่วนของ โครงข้อหมุนมีค่าคงที่เท่ากับ 120,000 m<sup>2</sup>.kN/m<sup>2</sup> และ node หมายเลข 2 เกิดการทรุดตัวในแนวดิ่งลง 1 mm



 กำหนดระบบแกน global coordinate ระบบแกน local coordinate หมายเลข node หมายเลขขึ้นส่วนของ โครงข้อหมุน และหมายเลข degree of freedom

- กำหนดระบบแกน global coordinate โดยให้ node หมายเลข 1 เป็นจุดเริ่มต้นของระบบแกน จากนั้น ทำ การกำหนดหมายเลขของ node ที่เหลือ
- กำหนดหมายเลขของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนและปลายด้านใกล้และปลายด้านไกลของชิ้นส่วนต่างๆ ของ
   โครงข้อหมุน
- ทำหนดหมายเลข degree of freedom ดังต่อไปนี้ เนื่องจาก node หมายเลข 1 ไม่มีการยึดรั้ง เราจะให้ degree of freedom ที่ node ดังกล่าวมีหมายเลขเป็นหมายเลข 1 และหมายเลข 2 (unconstrained degree of freedom) และเนื่องจาก node หมายเลข 2 ถึง 4 เป็นหมุด (pin) ดังนั้น เรากำหนดให้ degree of freedom ที่ node ดังกล่าวมีหมายเลขเป็น 3 ถึง 8 (constrained degree of freedom) ดังที่แสดงในรูป

### 2. เขียน matrix $\mathbf{D}_k$

จากรูปที่ Ex 6-2 เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อหมุนถูกรองรับที่ node หมายเลข 2 ถึง 4 ในทิศทางของ degree of freedom หมายเลข 3 ถึง 8 และเนื่องจาก degree of freedom หมายเลข 4 เกิดการทรุดตัวในทิศทางดิ่งลง 1 mm ดังนั้น

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} 0 & 3 \\ -0.001 \\ 0 & 4 \\ 5 & 6 \\ 0 & 6 \\ 7 & 8 \\ \end{cases} \quad \mathbf{m}$$

3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

จากรูปที่ Ex 6-2 เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อหมุนถูกกระทำโดยแรง 20 kN ที่ node หมายเลข 1 ในทิศทางตรงกัน ข้ามกับ degree of freedom หมายเลข 2 ดังนั้น Structural Analysis

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} 0 \\ -20 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \qquad kN$$

4. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

# ชิ้นส่วนที่ 1

ชิ้นส่วนที่ 1 มี node หมายเลข 1 เป็นปลายด้านใกล้และ node หมายเลข 2 เป็นปลายด้านไกล ดังนั้น จากพิกัด ของ node ทั้งสอง เราจะหา direction cosine ของชิ้นส่วนที่ 1 นี้ได้จากสมการที่ 6-5 และ 6-6

$$L = \sqrt{(-1.2 - 0)^2 + (1.2 - 0)^2} = 1.697 \text{ m}$$
$$\lambda_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{-1.2 - 0}{1.697} = -0.707$$
$$\lambda_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{1.2 - 0}{1.697} = 0.707$$

และจากสมการที่ 6-16 เราจะได้

$$\mathbf{k}_{1} = \left(\frac{AE}{L}\right)_{1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (-0.707)^{2} & (-0.707)(0.707) & -(-0.707)^{2} & -(-0.707)(0.707) \\ (-0.707)(0.707) & (0.707)^{2} & -(-0.707)(0.707) & -(-0.707)^{2} \\ -(-0.707)^{2} & -(-0.707)(0.707) & (-0.707)^{2} & (-0.707)(0.707) \\ -(-0.707)(0.707) & (-0.707)^{2} & (-0.707)(0.707) & (0.707)^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{1} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.29464 & -0.29464 & -0.29464 & 0.29464 \\ -0.29464 & 0.29464 & 0.29464 & -0.29464 \\ -0.29464 & 0.29464 & 0.29464 & -0.29464 \\ 0.29464 & -0.29464 & -0.29464 & 0.29464 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## ชิ้นส่วนที่ 2

ชิ้นส่วนที่ 2 นี้มี node หมายเลข 1 เป็นปลายด้านใกล้และ node หมายเลข 3 เป็นปลายด้านไกล ดังนั้น จากพิกัด ของ node ทั้งสอง เราจะหา direction cosine ของชิ้นส่วนที่ 2 นี้ได้จากสมการที่ 6-5 และ 6-6

$$L = \sqrt{(-1.2 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 1.200 \text{ m}$$
$$\lambda_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{-1.2 - 0}{1.2} = -1.0$$
$$\lambda_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{0 - 0}{1.2} = 0$$

และจากสมการที่ 6-16 เราจะได้

$$\mathbf{k}_{2} = \left(\frac{AE}{L}\right)_{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6\\ (-1)^{2} & (-1)(0) & -(-1)^{2} & -(-1)(0)\\ (-1)(0) & 0^{2} & -(-1)(0) & -0^{2}\\ -(-1)^{2} & -(-1)(0) & (-1)^{2} & (-1)(0)\\ -(-1)(0) & -0^{2} & (-1)(0) & (0)^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 5\\ 6\end{bmatrix}$$

6-12

$$\mathbf{k}_{2} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0.83333 & 0 & -0.83333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0.83333 & 0 & 5 \\ 0.83333 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 3

ชิ้นส่วนที่ 3 มี node หมายเลข 1 เป็นปลายด้านใกล้และ node หมายเลข 4 เป็นปลายด้านไกล ดังนั้น จากพิกัด ของ node ทั้งสอง เราจะหา direction cosine ของชิ้นส่วนที่ 3 นี้ได้จากสมการที่ 6-5 และ 6-6

$$L = \sqrt{(-1.2 - 0)^2 + (-0.9 - 0)^2} = 1.500 \text{ m}$$
$$\lambda_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{-1.2 - 0}{1.5} = -0.80$$
$$\lambda_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{-0.9 - 0}{1.5} = -0.60$$

และจากสมการที่ 6-16 เราจะได้

$$\mathbf{k}_{3} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0.42667 & 0.32000 & -0.42667 & -0.32000 \\ 0.24000 & -0.32000 & -0.24000 \\ 0.42667 & 0.32000 \\ 0.24000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

5. หา structure stiffness matrix  $\, K \,$ 

เราจะหา matrix **K** ได้โดยการรวม member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเข้า ด้วยกัน ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากโครงข้อหมุนมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 8 ดังนั้น matrix **K** จะมีขนาดเท่า กับ 8x8 และเป็น matrix ที่มีความสมมาตร ซึ่งถ้าเราได้ matrix **K** ที่ไม่สมมาตรเราจะต้องตรวจสอบการรวม matrix **k** อีกครั้งหนึ่ง

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1.5546 & 0.0254 & -0.2946 & 0.2946 & -0.8333 & 0 & -0.4267 & -0.3200 \\ 0.0254 & 0.5346 & 0.2946 & -0.2946 & 0 & 0 & -0.3200 & -0.2400 \\ -0.2946 & 0.2946 & 0.2946 & -0.2946 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2946 & -0.2946 & -0.2946 & 0.2946 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8333 & 0 & 0 & 0 & 0.8333 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4267 & -0.3200 & 0 & 0 & 0 & 0.4267 & 0.3200 \\ -0.3200 & -0.2400 & 0 & 0 & 0 & 0.3200 & 0.2400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ -0.3200 \\ -0.3200 \\ -0.2400 \\ 8 \end{bmatrix}$$

และเราจะเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements ได้ในรูป

$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$		1.5546	0.0254	-0.2946	0.2946	-0.8333	0	-0.4267	-0.3200	$\begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix}$
-20	$\rangle = AE$	0.0254	0.5346	0.2946	-0.2946	0	0	-0.3200	-0.2400	$D_2$
$Q_3$		-0.2946	0.2946	0.2946	-0.2946	0	0	0	0	0
$Q_4$		0.2946	-0.2946	-0.2946	0.2946	0	0	0	0	-0.001
$Q_5$		-0.8333	0	0	0	0.8333	0	0	0	0
$Q_6$		0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Q_7$		-0.4267	-0.3200	0	0	0	0	0.4267	0.3200	0
$Q_8$	J	-0.3200	-0.2400	0	0	0	0	0.3200	0.2400	[0 ]

6. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$  เราจะได้ว่า  $\mathbf{D}_u = \mathbf{K}_{11}^{-1}[\mathbf{Q}_k - \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k]$  ดังนั้น

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \end{cases} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 186.552 & 3.048 \\ 3.048 & 64.157 \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} 35.355 \\ -55.355 \end{cases} = \begin{cases} 0.204 \\ -0.872 \end{cases} \quad 10^{-3} \, \text{m}$$
 Ans.

7. หาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับหรือ  $\mathbf{Q}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22} \mathbf{D}_k$  เราจะได้ว่า

$$\begin{cases}
 Q_{3} \\
 Q_{4} \\
 Q_{5} \\
 Q_{5} \\
 Q_{6} \\
 Q_{7} \\
 Q_{8}
\end{cases} = \begin{cases}
 -2.69 \\
 2.69 \\
 -20.40 \\
 0 \\
 23.04 \\
 17.28
\end{cases}$$
 kN

8. หาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

เราจะหาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนได้โดยใช้สมการที่ 6-19 โดยที่ถ้า  $q_F$  ที่มีค่าเป็นบวก แรงภายในที่เกิดขึ้นจะเป็นแรงดึงและถ้า  $q_F$  ที่มีค่าเป็นลบ แรงภายในที่เกิดขึ้นจะเป็นแรงกดอัด

$$q_{F} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\lambda_{x} & -\lambda_{y} & \lambda_{x} & \lambda_{y} \end{bmatrix} \begin{cases} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{cases}$$

$$q_{1} = \frac{120000}{1.697} \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.204(10^{-3}) \\ -0.872(10^{-3}) \\ 0 \\ -0.001 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$$

 $q_1 = 3.8 \, \mathrm{kN}$  (แรงดิง)

สุดท้าย เราสามารถตรวจสอบความถูกต้องของค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นที่ในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนโดยการตรวจ สอบความสมดุลของแรงที่ node หมายเลข 1 Ans.

#### ตัวอย่างที่ 6-2

จงวิเคราะห์โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-2a เพื่อหาการเปลี่ยนตำแหน่งและค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้น ส่วนของโครงข้อหมุน โดย matrix displacement method กำหนดให้ทุกชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีค่าความแกร่งในแนว แกน (axial stiffness) *AE* เท่ากันโดยมีค่าเท่ากับ 20000 m<sup>2</sup>.kN/m<sup>2</sup> และจุดรองรับ *B* เกิดการทรุดตัวในแนวนอน ไปทางขวามือเท่ากับ 2 mm และในแนวดิ่งลง 1 mm



 กำหนดระบบแกน global coordinate ระบบแกน local coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของ โครงข้อหมุน และหมายเลข degree of freedom

- กำหนดระบบแกน global coordinate system โดยให้จุดเชื่อมต่อ (joint) B เป็น node หมายเลข 1 และ เป็นจุดเริ่มต้นของระบบแกน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-2b จากนั้น ทำการกำหนดหมายเลขของ node ที่เหลือ
- กำหนดหมายเลขของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนและปลายด้านใกล้และปลายด้านไกลของชิ้นส่วนต่างๆ ของ
   โครงข้อหมุน
- กำหนดหมายเลข degree of freedom จากรูปที่ Ex 6-2b เนื่องจาก node หมายเลข 2 และหมายเลข 3 ไม่มี การยึดรั้ง เราจะให้ degree of freedom ที่ node ทั้งสองนี้มีหมายเลข 1 ถึง 4 (unconstrained degree of freedom) และเนื่องจาก node หมายเลข 1 และ node หมายเลข 4 เป็น pin ดังนั้น เรากำหนดให้ degree of freedom ที่ node ทั้งสองนี้มีหมายเลขเป็น 5 ถึง 8 (constrained degree of freedom)

2. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

จากรูปที่ Ex 6-2b เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อหมุนถูกรองรับที่ node หมายเลข 1 และหมายเลข 4 ในทิศทางของ degree of freedom หมายเลข 5 ถึง 8 เนื่องจาก degree of freedom หมายเลข 5 เกิดการเคลื่อนที่ไปทางขวามือเท่ากับ 2 mm และ degree of freedom หมายเลข 6 เกิดการทรุดตัวในทิศทางดิ่งลง 1 mm ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} 0.002 \\ -0.001 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{cases} \qquad \text{m}$$

3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

จากรูปที่ Ex 6-2b เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อหมุนถูกกระทำโดยแรง 10 kN ที่ node หมายเลข 2 ในทิศทางตรง กันข้ามกับ degree of freedom หมายเลข 4 เท่านั้น ดังนั้น

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} \quad kN$$

4. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

### ชิ้นส่วนที่ 1

ชิ้นส่วนที่ 1 มี node หมายเลข 4 เป็นปลายด้านใกล้และ node หมายเลข 3 เป็นปลายด้านไกล ดังนั้น จากพิกัด ของ node ทั้งสองเราจะหา direction cosine ของชิ้นส่วนที่ 1 ได้จากสมการที่ 6-5 และ 6-6

$$\lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1$$
  $\lambda_y = \frac{4-4}{3} = 0$ 

และจากสมการที่ 6-16 เราจะได้

$$\mathbf{k}_{1} = AE \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 0.3333 & 0 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

ชิ้นส่วนที่ 2 มี node หมายเลข 1 เป็นปลายด้านใกล้และ node หมายเลข 3 เป็นปลายด้านไกล

$$\lambda_x = \frac{3-0}{5} = 0.6 \qquad \lambda_y = \frac{4-0}{5} = 0.8$$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 0.0720 & 0.0960 & -0.0720 & -0.0960 \\ 0.0960 & 0.1280 & -0.0960 & -0.1280 \\ -0.0720 & -0.0960 & 0.0720 & 0.0960 \\ -0.0960 & -0.1280 & 0.0960 & 0.1280 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

. .

# ชิ้นส่วนที่ 3

์ ชิ้นส่วนที่ 3 มี node หมายเลข 1 เป็นปลายด้านใกล้และ node หมายเลข 4 เป็นปลายด้านไกล

$$\lambda_x = \frac{0-0}{4} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2500 & 0 & -0.2500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2500 & 0 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 4

$$\lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{3} = 0$$

$$\mathbf{k}_4 = AE \begin{bmatrix} 0.3333 & 0 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3333 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 5

$$\lambda_x = \frac{0-3}{5} = -0.6 \qquad \lambda_y = \frac{4-0}{5} = 0.8$$

$$\mathbf{k}_5 = AE \begin{bmatrix} 0.0720 & -0.0960 & -0.0720 & 0.0960 \\ -0.0960 & 0.1280 & 0.0960 & -0.1280 \\ -0.0720 & 0.0960 & 0.0720 & -0.0960 \\ 0.0960 & -0.1280 & -0.0960 & 0.1280 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 6

$$\lambda_x = \frac{3-3}{4} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{4-0}{4} = 1$$

$$\mathbf{k}_6 = AE \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2500 & 0 & -0.2500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2500 & 0 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. หา structure stiffness matrix  ${f K}$ 

เราจะหา matrix **K** ได้โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเข้าด้วยกัน ขอให้สังเกตด้วย ว่า เนื่องจากโครงข้อหมุนมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 8 ดังนั้น matrix **K** จะมีขนาดเท่ากับ 8x8 และเป็น matrix ที่มีความสมมาตร ซึ่งถ้าเราได้ matrix **K** ที่ไม่สมมาตรเราจะต้องตรวจสอบการรวม matrix **k** อีกครั้งหนึ่ง

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0.4053 & 0.0960 & 0 & 0 & -0.0720 & -0.0960 & -0.3333 & 0 \\ 0.0960 & 0.3780 & 0 & -0.2500 & -0.0960 & -0.1280 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4053 & -0.0960 & -0.3333 & 0 & -0.0720 & 0.0960 \\ 0 & -0.2500 & -0.0960 & 0.3780 & 0 & 0 & 0.0960 & -0.1280 \\ -0.0720 & -0.0960 & -0.3333 & 0 & 0.4053 & 0.0960 & 0 & 0 \\ -0.0960 & -0.1280 & 0 & 0 & 0.0960 & 0.3780 & 0 & -0.2500 \\ -0.3333 & 0 & -0.0720 & 0.0960 & 0 & 0 & 0.4053 & -0.0960 \\ 0 & 0 & 0.0960 & -0.1280 & 0 & -0.2500 & -0.0960 & 0.3780 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

และเราจะเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements ได้ในรูป

0		0.4053	0.0960	0	0	-0.0720	-0.0960	-0.3333	0 ]	$\begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix}$
0		0.0960	0.3780	0	-0.2500	-0.0960	-0.1280	0	0	$D_2$
0		0	0	0.4053	- 0.0960	-0.3333	0	-0.0720	0.0960	$D_3$
-10		0	-0.2500	- 0.0960	0.3780	0	0	0.0960	-0.1280	$D_4$
$Q_5$	= AL	-0.0720	-0.0960	-0.3333	0	0.4053	0.0960	0	0	0.002
$Q_6$		- 0.0960	-0.1280	0	0	0.0960	0.3780	0	-0.2500	-0.001
$Q_7$		-0.3333	0	-0.0720	0.0960	0	0	0.4053	- 0.0960	0
$Q_8$		0	0	0.0960	-0.1280	0	-0.2500	- 0.0960	0.3780	0

6. หาค่าการเปลี่ยนต่ำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$  เราจะได้ว่า  $\mathbf{D}_u = \mathbf{K}_{11}^{-1}[\mathbf{Q}_k - \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k]$ ดังนั้น

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{cases} = \begin{cases} 0.367 \\ -1.049 \\ 1.242 \\ -1.701 \end{cases} \quad 10^{-3} \, \mathrm{m}$$
 Ans.

7. หาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_{u}$ 

$$\mathbf{Q}_{u} = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_{u} + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_{k}$$

$$\begin{cases} Q_{5} \\ Q_{6} \\ Q_{7} \\ Q_{8} \end{cases} = \begin{cases} 7.5 \\ -1.739 \\ -7.5 \\ 11.739 \end{cases} kN$$

8. หาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

เราจะหาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนได้โดยใช้สมการที่ 6-19 โดยที่ถ้า  $q_F$  ที่มีค่าเป็นบวก แรงภายในที่เกิดขึ้นจะเป็นแรงดึงและถ้า  $q_F$  ที่มีค่าเป็นลบ แรงภายในที่เกิดขึ้นจะเป็นแรงกดอัด

$$q_{F} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\lambda_{x} & -\lambda_{y} & \lambda_{x} & \lambda_{y} \end{bmatrix} \begin{cases} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{cases}$$

ซึ่งเราจะได้ว่า

$$q_{1} = \frac{20000}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0.000367 \\ -0.001049 \end{bmatrix} = 2.447 \text{ kN}$$

$$q_{2} = \frac{20000}{5} \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{cases} 0.002 \\ -0.001 \\ 0.000367 \\ -0.001049 \end{bmatrix} = -4.076 \text{ kN}$$
$$q_{3} = \frac{20000}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} 0.002 \\ -0.001 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \text{ kN}$$
$$q_{4} = \frac{20000}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 0.002 \\ -0.001 \\ 0.001242 \\ -0.0017 \end{bmatrix} = -5.053 \text{ kN}$$
$$q_{5} = \frac{20000}{5} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{cases} 0.001242 \\ -0.0017 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 8.421 \text{ kN}$$
$$q_{6} = \frac{20000}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} 0.00124 \\ -0.0017 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3.256 \text{ kN}$$

สุดท้าย เราจะตรวจสอบความถูกต้องของค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นที่ในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนได้โดยการตรวจ สอบความสมดุลของแรงที่ joint ต่างๆ ของโครงข้อหมุน Ans.

#### Structural Analysis

### 6.7 การวิเคราะห์โครงข้อหมุนที่มีจุดรองรับเป็น Roller เอียง

ในบางกรณี จุดรองรับแบบล้อเลื่อน (roller) ของโครงข้อหมุนอาจจะวางอยู่บนฐานรากลาดเอียง (inclined foundation) ซึ่งจุดรองรับนี้จะทำให้เกิดการยึดรั้งต่อโครงข้อหมุนในทิศทางที่ไม่อยู่ในระบบแกน global coordinate ของ โครงข้อหมุน ดังนั้น เราจะไม่สามารถทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนที่มีลักษณะดังกล่าวโดย matrix displacement method ได้โดยตรง โดยทั่วไปแล้ว การวิเคราะห์โครงข้อหมุนดังกล่าวจะทำได้ 2 วิธีคือ

 1. โดยการตั้ง local coordinate x" - y" ขึ้นมาอีกหนึ่งชุดที่จุดรองรับดังกล่าว ซึ่งมีขั้นตอนการวิเคราะห์ดังต่อ ไปนี้

- a. ให้ local coordinate ดังกล่าวถูกตั้งไว้ที่จุดรองรับแบบล้อเลื่อน (roller support) ที่วางอยู่บนพื้นเอียง โดยให้
   แกน x" วางอยู่ในทิศทางที่ roller สามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระและแกน y" วางอยู่ในทิศทางที่ roller
   ถูกยึดรั้ง
- b. ทำการเขียน displacement transformation matrix และ force transformation matrix ระหว่างระบบแกน local coordinate x'' y'' และระบบแกน global coordinate x y
- c. แทน displacement transformation matrix และ force transformation matrix ลงในสมการของ member global stiffness matrix (สมการที่ 6-15,  ${f k}={f T}^T{f k}'{f T}$ )
- d. ทำการรวม matrix k ที่หามาได้ของชิ้นส่วนต่างๆ ที่เชื่อมติดกับ roller กับ matrix k ของชิ้นส่วนอื่นๆ ของ
   โครงข้อหมุนเข้าด้วยกัน
- e. ทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนตามที่ได้ศึกษาไปแล้ว

ถึงแม้นว่าวิธีการจะง่ายในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนด้วยมือ แต่มีข้อเสียอยู่ที่ว่า ในการวิเคราะห์โดย computer นั้น เราจะต้องทำการเขียน program ขึ้นมาอีกส่วนหนึ่งเพื่อใช้ในการหา displacement transformation matrix และ force transformation matrix ระหว่างระบบแกน local coordinate x'' - y'' และระบบแกน global coordinate x - y แล้ว นำมารวมกับส่วนที่มีอยู่แล้ว จากนั้น เราจึงจะสามารถทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยใช้ computer ได้ ซึ่งจะเห็นได้ว่าวิธี การนี้เหมาะสมกับผู้ที่จะเขียน program ขึ้นมาใช้เองเท่านั้น

 2. โดยการจำลอง (model) จุดรองรับแบบล้อเลื่อน (roller) ที่วางอยู่บนฐานรากเอียงให้เป็นชิ้นส่วนรับแรงสองแรง ในแนวแกน (two-force member) แล้วทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนตามที่ได้ศึกษาไปแล้ว ซึ่งมีขั้นตอนการวิเคราะห์ดังต่อ ไปนี้

a. จำลอง (model) จุดรองรับแบบล้อเลื่อน (roller) ให้เป็น two-force member ซึ่งอยู่ในแนวเดียวกันกับ roller โดยกำหนดให้มีความยาวโดยประมาณเท่ากับชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนและมีค่าความแกร่งในแนวแกน (axial stiffness) AE/L ที่สูงมากๆ เมื่อเทียบกับชิ้นส่วนอื่นๆ (ควรมีค่ามากกว่า 1000 เท่าของ axial stiffness สูงสุดของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน) ทั้งนี้ เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดการเปลี่ยนรูปร่างในแนวแกนของชิ้น ส่วนดังกล่าว ซึ่งจะทำให้ผลการวิเคราะห์โครงข้อหมุนมีความผิดพลาดเกิดขึ้นได้ นอกจากนั้นแล้ว เราจะ model ให้ปลายทั้งสองของ two-force member ยึดติดกับพื้นและโครงข้อหมุนโดยใช้หมุด

b. ทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยพิจารณาให้ two-force member ดังกล่าวเป็นขึ้นส่วนหนึ่งของโครงข้อหมุน เราจะเห็นได้ว่า โดยวิธีการนี้เราจะสามารถทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนได้โดยใช้ computer program ที่มีอยู่ แล้ว และเราจะศึกษาเฉพาะวิธีการที่ 2 ในวิชานี้เท่านั้น

### ตัวอย่างที่ 6-3

จงวิเคราะห์โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-3a โดย matrix displacement method เพื่อหาการเปลี่ยน ตำแหน่งและค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน กำหนดให้พื้นเอียงที่จุดรองรับ *B* ทำมุม 60° กับแนว นอนและกำหนดให้ทุกชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีค่า axial stiffness *AE* = 20000 m<sup>2</sup>.kN/m<sup>2</sup>



รูปที่ Ex 6-3

เนื่องจากโครงข้อหมุนมีจุดรองรับแบบเลื่อน (roller) ที่จุด *B* วางอยู่บนพื้นที่เอียง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-3a ดัง นั้น เราจะจำลอง (model) จุดรองรับดังกล่าวให้เป็น two-force member โดยที่ปลายหนึ่งยึดเข้ากับโครงข้อหมุนและอีก ปลายหนึ่งยึดเข้ากับพื้นเอียงโดยหมุด และกำหนดให้ชิ้นส่วนดังกล่าวมีค่า *AE / L* = 20(10<sup>6</sup>) kN/m ดังที่แสดงในรูป ที่ Ex 6-3b

 กำหนดระบบแกน global coordinate ให้เหมาะสมกับลักษณะของโครงข้อหมุน จากนั้น กำหนดหมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom ดังที่แสดงในรูป ที่ Ex 6-3b โดยให้จุดรองรับของ two-force member ที่ยึดเข้ากับพื้นเอียงโดยหมุดเป็น node หมายเลข 5 และมี degree of freedom เป็นหมายเลข 9 และ 10

2. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{cases} \mathbf{m}$$

3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ -10 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \end{cases} \quad \mathbf{kN}$$
4. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

เราจะเห็นได้ว่า ค่า member global stiffness matrix **k** ของชิ้นส่วนหมายเลข 1 ถึง 6 จะมีค่าเท่ากับค่า matrix **k** ที่เราหาได้ในตัวอย่างที่ 6-1 เนื่องจากโครงข้อหมุนมีระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วน ของโครงข้อหมุน และหมายเลข degree of freedom ที่เหมือนเดิม แต่ค่า matrix **k** ที่เราต้องหาเพิ่มในกรณีนี้คือ ค่า matrix **k** ของ two-force member

### ชิ้นส่วนที่ 7

ทำการคูณ matrix  ${f k}_7$  ด้วยค่า  ${AE\over (20000\,{
m m}^2.{
m kN/m}^2)}$  เราจะได้ว่า

$$\mathbf{k}_{7} = AE \begin{bmatrix} 9 & 10 & 5 & 6 \\ 750 & 433 & -750 & -433 \\ 433 & 250 & -433 & -250 \\ -750 & -433 & 750 & 433 \\ -433 & -250 & 433 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

5. หา structure stiffness matrix  ${f K}$ 

matrix **K** จะหาได้โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งเข้าด้วยกันโดยให้หมายเลขของ degree of freedom ใน matrix **k** ตรงกับหมายเลขของ degree of freedom ของ matrix **K** 

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	0.4053	0.0960	0	0	- 0.0720	- 0.0960	- 0.3333	0	0	0	1
	0.0960	0.3780	0	-0.2500	- 0.0960	- 0.1280	0	0	0	0	2
	0	0	0.4053	- 0.0960	- 0.3333	0	- 0.0720	0.0960	0	0	3
	0	- 0.2500	- 0.0960	0.3780	0	0	0.0960	-0.1280	0	0	4
$\mathbf{K} = AE$	- 0.0720	- 0.0960	- 0.3333	0	750.4053	433.0960	0	0	- 750	- 433	5
<b>K</b> – 712	- 0.0960	- 0.1280	0	0	433.0960	250.3780	0	- 0.2500	- 433	- 250	6
	- 0.3333	0	-0.0720	0.0960	0	0	0.4053	- 0.0960	0	0	7
	0	0	0.0960	-0.1280	0	-0.2500	- 0.0960	0.3780	0	0	8
	0	0	0	0	- 750	- 433	0	0	750	433	9
	0	0	0	0	- 433	- 250	0	0	433	250	10

และเราจะเขียนความสัมพันธ์ของ loads and displacements ได้ในรูป

Structural Analysis

0	)	0.4053	0.0960	0	0	-0.0720	-0.0960	-0.3333	0	0	0 ]	$\left[D_1\right]$
0		0.0960	0.3780	0	-0.2500	-0.0960	-0.1280	0	0	0	0	$D_2$
0		0	0	0.4053	-0.0960	-0.3333	0	-0.0720	0.0960	0	0	$D_3$
-10		0	-0.2500	-0.0960	0.3780	0	0	0.0960	-0.1280	0	0	$D_4$
<u>]</u> 0	= AE	-0.0720	-0.0960	-0.3333	0	750.4053	433.0960	0	0	-750	-433	$D_5$
0		-0.0960	-0.1280	0	0	433.0960	250.3780	0	-0.2500	-433	-250	$D_6$
$Q_7$		-0.3333	0	-0.0720	0.0960	0	0	0.4053	-0.0960	0	0	0
$Q_8$		0	0	0.0960	-0.1280	0	-0.2500	-0.0960	0.3780	0	0	0
$Q_9$		0	0	0	0	-750	-433	0	0	750	433	0
$Q_{10}$	J	0	0	0	0	-433	-250	0	0	433	250	0

6. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

$$\mathbf{Q}_{k} = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_{u} + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_{k}$$
$$\mathbf{D}_{u} = \mathbf{K}_{11}^{-1}[\mathbf{Q}_{k}]$$
$$\begin{bmatrix} D_{1} \\ D_{2} \\ D_{3} \\ D_{3} \\ D_{4} \\ D_{5} \\ D_{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.468 \\ -1.957 \\ -0.676 \\ -2.789 \\ -0.019 \\ 0.032 \end{bmatrix} \quad 10^{-3} \,\mathrm{m}$$

Ans.

7. หาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ $\mathbf{Q}_u$ จาก  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

$$\begin{cases} Q_{5} \\ Q_{6} \\ Q_{7} \\ Q_{8} \end{cases} = \begin{cases} -7.5 \\ 5.679 \\ 7.5 \\ 4.321 \end{cases} kN$$

8. หาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นที่ในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน จากสมการที่ 6-19 ยกตัวอย่างเช่น แรงภายในที่เกิดขึ้น ที่ในชิ้นส่วนหมายเลข 1 หมายเลข 2 และหมายเลข 6 มีค่าเท่ากับ

.

$$q_{1} = \frac{20000}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0.0004679 \\ -0.0019574 \end{bmatrix} = 3.119 \text{ kN}$$
$$q_{2} = \frac{20000}{5} \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{cases} -0.0000192 \\ 0.000324 \\ 0.0004679 \\ -0.0019574 \end{bmatrix} = -5.198 \text{ kN}$$

6-24

$$q_{6} = \frac{20000}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} -0.0006764 \\ -0.0027891 \\ 0.0004679 \\ -0.0019574 \end{bmatrix} = 4.159 \text{ kN}$$

สุดท้าย เราจะตรวจสอบความถูกต้องของค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นที่ในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนได้โดยการตรวจ สอบความสมดุลของแรงที่จุดเชื่อมต่อต่างๆ ของโครงข้อหมุน Ans.

# 6.8 การวิเคราะห์โครงข้อหมุนที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและการก่อสร้างผิดพลาด

เมื่อขึ้นส่วนของโครงข้อหมุนแบบ statically determinate ซึ่งมีความยาว L มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเกิดขึ้น  $\Delta T$  แล้ว ขึ้นส่วนดังกล่าวจะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (การยืดหรือการหดตัว) เท่ากับ  $\Delta L = \alpha L \Delta T$  โดยอิสระ โดยที่  $\alpha$  เป็นค่า coefficient of thermal expansion ของวัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน และโครงข้อหมุนดังกล่าวจะไม่ถูก กระทำโดยแรงเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิดังกล่าว

แต่ถ้าโครงข้อหมุนดังกล่าวเป็นโครงสร้าง statically indeterminate แล้ว การยืดหรือการหดตัว ΔL จะไม่ สามารถเกิดขึ้นได้อย่างอิสระ ซึ่งจะก่อให้เกิดแรงกระทำต่อโครงข้อหมุน และถ้าค่าหน่วยแรง (stress) ที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน ของโครงข้อหมุนเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิยังคงอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้นตรง (linear elastic) แล้ว จาก Hooke's law เราจะได้ว่า แรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับ  $q_0 = AE \alpha \Delta T$ 

ถ้าอุณหภูมิมีค่าเพิ่มขึ้นแล้ว การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง  $\Delta L$  จะมีค่าเป็นบวกหรือเกิดการยืดตัวขึ้น และเมื่อปลายทั้ง สองของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนถูกยึดแน่นทั้งสองด้านแล้ว การยืดตัวดังกล่าวจะถูกต้านทานไม่ให้เกิดขึ้น ซึ่งจะทำให้เกิด แรงกดอัด (compressive force) ขึ้นในแนวแกนของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

ในทางกลับกัน ถ้าอุณหภูมิมีค่าลดลงแล้ว การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ΔL จะมีค่าเป็นลบหรือเกิดการหดตัวขึ้น และ เมื่อปลายทั้งสองของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนถูกยึดแน่นทั้งสองด้านแล้ว การหดตัวดังกล่าวจะถูกต้านทานไม่ให้เกิดขึ้น ซึ่ง จะทำให้เกิดแรงดึง (tensile force) ขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนดังกล่าว

จากรูปที่ 6-7 เมื่ออุณหภูมิมีค่าเพิ่มขึ้น  $\Delta T$  แล้ว แรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะ หาได้จากสมการ

$$(q_N)_0 = AE\alpha\Delta T$$
$$(q_F)_0 = -AE\alpha\Delta T$$

หรือถ้าเขียนให้อยู่ในรูปของ matrix เราจะได้ว่า

$$\begin{cases} (q_N)_0 \\ (q_F)_0 \end{cases} = AE\alpha\Delta T \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$



เมื่อเราทำการ transform แรงในขึ้นส่วนทั้งสองไปยังระบบแกน global coordinate โดยใช้สมการ force transformation matrix  ${f Q}={f T}^T{f q}$  แล้ว เราจะได้ว่า

Structural Analysis

$$\begin{cases} (\mathcal{Q}_{N_{x}})_{0} \\ (\mathcal{Q}_{N_{y}})_{0} \\ (\mathcal{Q}_{F_{x}})_{0} \\ (\mathcal{Q}_{F_{y}})_{0} \end{cases} = \begin{bmatrix} \lambda_{x} & 0 \\ \lambda_{y} & 0 \\ 0 & \lambda_{x} \\ 0 & \lambda_{y} \end{bmatrix} A E \alpha \Delta T \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} = A E \alpha \Delta T \begin{cases} \lambda_{x} \\ \lambda_{y} \\ -\lambda_{x} \\ -\lambda_{y} \end{cases}$$
 (6-20)

ในลักษณะที่คล้ายๆ กันกับการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ เมื่อชิ้นส่วนใดๆ ของโครงข้อหมุนมีความยาวมากกว่าที่ได้ ออกแบบไว้ ΔL แล้ว ในการประกอบชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนดังกล่าวเข้ากับโครงข้อหมุน เราจะต้องให้แรงกดอัดกระทำ ต่อชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนดังกล่าวเพื่อให้ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีความยาวตามที่ได้ออกแบบไว้ เมื่อทำการประกอบ ชิ้นส่วนดังกล่าวเสร็จแล้วทำการปล่อยแรงกดอัดดังกล่าว ชิ้นส่วนดังกล่าวจะพยายามยืดตัวออกทำให้เกิดแรงกระทำด่อจุด เชื่อมต่อของโครงข้อหมุน ในทิศทางพุ่งเข้าหาจุดเชื่อมต่อ

ในทางกลับกัน ถ้าชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีความยาวน้อยกว่าที่ได้ออกแบบไว้ ∆L แล้ว ในการประกอบชิ้นส่วน ของโครงข้อหมุนดังกล่าวเข้ากับโครงข้อหมุน เราจะต้องให้แรงดึงกระทำต่อชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเพื่อให้ชิ้นส่วนของ โครงข้อหมุนมีความยาวตามที่ได้ออกแบบไว้ เมื่อทำการประกอบชิ้นส่วนดังกล่าวเสร็จแล้วทำการปล่อยแรงดังดังกล่าว ชิ้น ส่วนดังกล่าวจะพยายามหดตัวเข้าทำให้เกิดแรงกระทำด่อจุดเชื่อมต่อโครงข้อหมุนในทิศทางพุ่งออกจากจุดเชื่อมต่อ

ถ้าค่าหน่วยแรง (stress) ที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนยังอยู่ในช่วง linear elastic แล้ว จาก Hooke's law เราจะได้ว่า

$$(q_N)_0 = \frac{AE\Delta L}{L}$$
$$(q_F)_0 = -\frac{AE\Delta L}{L}$$

เมื่อเราทำการ transform แรงในชิ้นส่วนทั้งสองไปยังระบบแกน global coordinate โดยใช้สมการ force transformation matrix  ${f Q}={f T}^T{f q}$  และเราจะได้ว่า

$$\begin{cases} (Q_{Nx})_{0} \\ (Q_{Ny})_{0} \\ (Q_{Fx})_{0} \\ (Q_{Fy})_{0} \end{cases} = \frac{AE\Delta L}{L} \begin{cases} \lambda_{x} \\ \lambda_{y} \\ -\lambda_{x} \\ -\lambda_{y} \end{cases}$$
(6-21)

เนื่องจากแรงที่เกิดขึ้นในขึ้นส่วนของโครงข้อหมุนเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ (สมการที่ 6-20) และการก่อ สร้างผิดพลาด (สมการที่ 6-21) เป็นแรงที่กระทำที่ปลายของขึ้นส่วนของโครงข้อหมุนในระบบแกน global coordinate เมื่อ ปลายของขึ้นส่วนของโครงข้อหมุนถูกยึดแน่น ดังนั้น เราจะได้ forces-displacement matrix ของโครงข้อหมุนเนื่องจากแรง กระทำ การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ และการก่อสร้างผิดพลาดอยู่ในรูป

## $\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{D} + \mathbf{Q}_0$

หลังจากที่เราได้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ ของโครงข้อหมุนแล้ว เราจะหาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้น ส่วนของโครงข้อหมุนได้จากสมการ

### $\mathbf{q} = \mathbf{k'TD} + \mathbf{q}_0$

และจากสมการที่ 6-19 เราจะหาค่าแรงที่เกิดขึ้นในขึ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่ปลายด้านไกลได้จาก

$$q_{F} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\lambda_{x} & -\lambda_{y} & \lambda_{x} & \lambda_{y} \end{bmatrix} \begin{cases} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{cases} + (q_{F})_{0}$$
(6-22)

เมื่อ  $(q_F)_0 = -AElpha\Delta T$  สำหรับการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ และ  $(q_F)_0 = -rac{AE\Delta L}{L}$  สำหรับการก่อสร้างผิดพลาด

## ตัวอย่างที่ 6-4

จงวิเคราะห์โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-4a เพื่อหาการเปลี่ยนตำแหน่งและค่าปฏิกริยาของโครงข้อหมุน โดย matrix displacement method กำหนดให้ชิ้นส่วน *CD* มีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น 30°*C* เนื่องจากเป็นด้านที่ถูกกระทำ โดยแสงแดด และให้ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีค่า axial stiffness *AE* = 20000 m<sup>2</sup> kN/m<sup>2</sup>



รูปที่ Ex 6-4

กำหนดระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ระบบแกน
 local coordinate และ degree of freedom ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-4b

2. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \end{cases}$$

3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$  และ matrix  $\mathbf{Q}_0$ 

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{cases}$$

เนื่องจากขึ้นส่วนหมายเลข 6 มีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น  $30^{o}C$  และมี direction cosine  $\lambda_{x}=0$  และ  $\lambda_{y}=1$  ดังนั้น จากสมการที่ 6-20 เราจะได้ว่า

$$\begin{cases} (Q_3)_0 \\ (Q_4)_0 \\ (Q_1)_0 \\ (Q_2)_0 \end{cases} = (20000 \text{ m}^2 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}) 12(10^{-6} / {}^{o} C)(30^{o} C) \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 7.2 \\ 0 \\ -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 7.2 \\ 0 \\ -7.2 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 7.2 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \text{ kN}$$

4. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะหาได้ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 6-2

5. หา structure stiffness matrix  $\, K \,$ 

matrix **K** จะหามาได้โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเข้าด้วยกัน และเราจะเขียน ความสัมพันธ์ของ loads และ displacements ของโครงข้อหมุนได้ในรูป

0		0.4053	0.0960	0	0	-0.0720	- 0.0960	-0.3333	0	$\left[ D_{1} \right]$	ſ	0
0		0.0960	0.3780	0	-0.2500	- 0.0960	-0.1280	0	0	$D_2$		-7.2
0		0	0	0.4053	- 0.0960	- 0.3333	0	-0.0720	0.0960	$D_3$		0
0		0	-0.2500	- 0.0960	0.3780	0	0	0.0960	-0.1280	$D_4$		+ 7.2
$Q_5$	= AE	-0.0720	- 0.0960	- 0.3333	0	0.4053	0.0960	0	0	$\left[ 0 \right]$	• + {	0
$Q_6$		- 0.0960	-0.1280	0	0	0.0960	0.3780	0	-0.2500	0		0
$Q_7$		- 0.3333	0	-0.0720	0.0960	0	0	0.4053	- 0.0960	0		0
$Q_8$	J	0	0	0.0960	-0.1280	0	-0.2500	- 0.0960	0.3780	0		0

6. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{cases} = \begin{cases} -0.141 \\ 0.595 \\ -0.141 \\ -0.595 \end{cases} \quad 10^{-3} \, \text{m}$$
 Ans.

7. หาค่าของแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ $\mathbf{Q}_{u}$ 

$$\begin{cases} Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -1.25 \\ 0 \\ 1.25 \end{cases}$$
 kN Ans.

8. หาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นที่ในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน จากสมการที่ 6-22 ยกตัวอย่างเช่น แรงภายในที่เกิดขึ้น ที่ในชิ้นส่วนหมายเลข 1 และหมายเลข 6 มีค่าเท่ากับ

$$q_{1} = \frac{20000}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -0.000141 \\ 0.000595 \end{cases} + 0 = -0.94 \text{ kN}$$
$$q_{6} = \frac{20000}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} -0.000141 \\ -0.000595 \\ -0.000141 \\ 0.000595 \end{cases} - 7.2 = -1.25 \text{ kN}$$
Ans

6-30

#### 6.9 การวิเคราะห์ Space Truss

ขั้นตอนต่างๆ ในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนที่อยู่ในสามมิติ (space truss) โดย matrix displacement method มี ลักษณะเช่นเดียวกับขั้นตอนในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนที่อยู่ในสองมิติ (planar truss) แต่เนื่องจาก space truss เป็น โครงข้อหมุนที่อยู่ในสามมิติ ดังนั้น แต่ละ node ของ space truss จะมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 3 ซึ่งทำให้แต่ ละขึ้นส่วนของ space truss มีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 6 และจะทำให้ขนาดของ transformation matrix **T** และ member global stiffness matrix **k** มีขนาดใหญ่ขึ้นจาก 2x4 และ 4x4 ในกรณีของโครงข้อหมุนที่อยู่ในสองมิติเป็น 3x6 และ 6x6 ตามลำดับ ในกรณีของ space truss





$$\lambda_{x} = \cos\theta_{x} = \frac{x_{F} - x_{N}}{L} = \frac{x_{F} - x_{N}}{\sqrt{(x_{F} - x_{N})^{2} + (y_{F} - y_{N})^{2} + (z_{F} - z_{N})^{2}}}$$
(6-23)

$$\lambda_{y} = \cos\theta_{y} = \frac{y_{F} - y_{N}}{L} = \frac{y_{F} - y_{N}}{\sqrt{(x_{F} - x_{N})^{2} + (y_{F} - y_{N})^{2} + (z_{F} - z_{N})^{2}}}$$
(6-24)

$$\lambda_{z} = \cos\theta_{z} = \frac{z_{F} - z_{N}}{L} = \frac{z_{F} - z_{N}}{\sqrt{(x_{F} - x_{N})^{2} + (y_{F} - y_{N})^{2} + (z_{F} - z_{N})^{2}}}$$
(6-25)

ซึ่งจะทำให้เราได้ transformation matrix  $\, {f T} \,$  อยู่ในรูป

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix}$$

เมื่อเราแทน transformation matrix **T** และสมการที่ 6-4 ( $\mathbf{k'} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ) ลงในสมการที่ 6-15 ( $\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k'T}$ ) เราจะได้ member global stiffness matrix อยู่ในรูป

Г

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0\\ \lambda_y & 0\\ \lambda_z & 0\\ 0 & \lambda_x\\ 0 & \lambda_y\\ 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix}$$

<u>^</u>2

หรือ

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{vmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & \lambda_x \lambda_z & -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_x \lambda_z \\ \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 & \lambda_y \lambda_z & -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_y^2 & -\lambda_y \lambda_z \\ \lambda_x \lambda_z & \lambda_y \lambda_z & \lambda_z^2 & -\lambda_x \lambda_z & -\lambda_y \lambda_z & -\lambda_z^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_x \lambda_z & \lambda_x^2 & \lambda_x \lambda_y & \lambda_x \lambda_z \\ -\lambda_x \lambda_y & -\lambda_y^2 & -\lambda_y \lambda_z & \lambda_x \lambda_y & \lambda_y^2 & \lambda_y \lambda_z \\ -\lambda_x \lambda_z & -\lambda_y \lambda_z & -\lambda_z^2 & \lambda_x \lambda_z & \lambda_y \lambda_z & \lambda_z^2 \end{vmatrix}$$
(6-26)

เราจะเห็นได้ว่า matrix **k** ของ space truss นี้เป็น square และ symmetric matrix และถ้า space truss เป็น โครงสร้างที่มีเสถียรภาพแล้ว matrix **k** จะเป็น nonsingular matrix ซึ่งเราจะหา inverse ของ matrix นี้ได้

structure stiffness matrix ของ space truss จะหาได้โดยการราม matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของ space truss เข้าด้วยกัน ซึ่งจะอยู่ในรูป

$$Q = KD$$

และถ้า space truss เป็นโครงสร้างที่มีเสถียรภาพแล้ว matrix **K** จะเป็น nonsingular matrix ซึ่งเราจะหา inverse ของ matrix นี้เพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ ได้

โดยทั่วไปแล้ว เราจะหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ และค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับหรือจุดยึด รั้งโดยการแบ่ง partition เทอม matrix **Q** = **KD** ดังที่แสดงในสมการที่ 6-17 จากนั้น ทำการคำนวณตามขั้นตอนที่ได้ กล่าวไปแล้ว สุดท้าย ค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมูนจะหาได้จากสมการ **q** = **kTD** 

$$\mathbb{M}^{\mathbb{P}} \qquad \begin{bmatrix} q_{N} \\ q_{F} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{x} & \lambda_{y} & \lambda_{z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{x} & \lambda_{y} & \lambda_{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Nz} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{bmatrix}$$
(6-27)

เนื่องจาก  $q_N = -q_F$  ดังนั้น เราจะหาค่าของแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนได้โดยใช้สมการใดสมการ หนึ่งในสมการที่ 6-27 โดยทั่วไปแล้ว เราจะหาค่า  $q_F$  ซึ่งมีค่าบวกเมื่อเป็นแรงดึง

$$q_{F} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\lambda_{x} & -\lambda_{y} & -\lambda_{z} & \lambda_{x} & \lambda_{y} & \lambda_{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Nz} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{bmatrix}$$
(6-28)

#### ตัวอย่างที่ 6-5

จงวิเคราะห์ space truss ซึ่งถูกกระทำโดยแรงในทิศทางของ degree of freedom หมายเลข 1 ขนาด 20 kN ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-5 เพื่อหาการเปลี่ยนตำแหน่งและค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน โดย matrix displacement method เมื่อกำหนดให้ชิ้นส่วนของ space truss มีค่า axial stiffness เท่ากับ 20000 m<sup>2</sup>.kN/m<sup>2</sup>



จากการตรวจสอบ space truss พบว่า space truss ดังกล่าวเป็นโครงสร้างแบบ statically determinate

1. กำหนดระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของ space truss ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 6-5 โดยที่

- กำหนดระบบแกน global coordinate โดยให้ node หมายเลข 1 เป็นจุดเริ่มต้นของระบบแกน จากนั้น ทำ การกำหนดหมายเลขของ node ที่เหลือ
- กำหนดหมายเลขของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนและปลายด้านใกล้และปลายด้านไกลของชิ้นส่วนต่างๆ ของ
   โครงข้อหมุน
- กำหนดหมายเลข degree of freedom ดังต่อไปนี้ เนื่องจาก node หมายเลข 1 ไม่มีการยึดรั้ง เราจะให้ degree of freedom ที่ node ดังกล่าวมีหมายเลขเป็นหมายเลข 1 ถึง 3 และเนื่องจาก node หมายเลข 2 ถึง 4 เป็นหมุด (pin) ดังนั้น เรากำหนดให้ degree of freedom ที่ node ดังกล่าวมีหมายเลขเป็น 4 ถึง 12
- 2. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$

เนื่องจาก space truss ไม่มีการทรุดตัวเกิดขึ้นที่จุดรองรับ ดังนั้น

```
\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \\ 0 & 11 \\ 0 & 12 \end{cases}
```

## 3. เขียน matrix $\mathbf{Q}_k$

เนื่องจากแรงกระทำมีทิศทางอยู่ใน degree of freedom หมายเลข 1 เท่านั้น ดังนั้น

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} 20\\0\\0 \end{cases} \begin{cases} 1\\2\\3 \end{cases}$$

4. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

# ชิ้นส่วนที่ 1

ชิ้นส่วนที่ 1 มี node หมายเลข 1 เป็นปลายด้านใกล้และ node หมายเลข 2 เป็นปลายด้านไกล ดังนั้น จากพิกัด ของ node ทั้งสองเราจะหา direction cosine ของชิ้นส่วนที่ 1 ได้จากสมการที่ 6-23 และ 6-25

$$L = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-0)^2 + (-2-0)^2} = 3 \text{ m}$$
$$\lambda_x = \frac{-1-0}{3} = -0.3333$$
$$\lambda_y = \frac{-2-0}{3} = -0.6667$$
$$\lambda_z = \frac{-2-0}{3} = -0.6667$$

และจากสมการที่ 6-26 เราจะได้ว่า

$$\mathbf{k}_{1} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.037037 & 0.074074 & 0.074074 & -0.037037 - 0.074074 & -0.074074 \\ 0.074074 & 0.148148 & 0.148148 & -0.074074 - 0.148148 & -0.148148 \\ 0.074074 & 0.148148 & 0.148148 & -0.074074 - 0.148148 & -0.148148 \\ -0.037037 & -0.074074 & -0.074074 & 0.037037 & 0.074074 & 0.074074 \\ -0.074074 & -0.148148 & -0.148148 & 0.074074 & 0.148148 & 0.148148 \\ -0.074074 & -0.148148 & -0.148148 & 0.074074 & 0.148148 & 0.148148 \\ -0.074074 & -0.148148 & -0.148148 & 0.074074 & 0.148148 & 0.148148 \\ \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

์ ชิ้นส่วนที่ 2 มี node หมายเลข 1 เป็นปลายด้านใกล้และ node หมายเลข 3 เป็นปลายด้านไกล ดังนั้น

$$L = \sqrt{(-1-0)^2 + (1.5-0)^2 + (-2-0)^2} = 2.6926 \text{ m}$$
$$\lambda_x = \frac{-1-0}{2.6926} = -0.3714$$
$$\lambda_y = \frac{1.5-0}{2.6926} = 0.5571$$
$$\lambda_z = \frac{-2-0}{2.6926} = -0.7428$$

$$\mathbf{k}_{2} = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ 0.051226 & -0.076839 & 0.102453 & -0.051226 & 0.076839 & -0.102453 \\ -0.076839 & 0.115259 & -0.153679 & 0.076839 & -0.115259 & 0.153679 \\ 0.102453 & -0.153679 & 0.204905 & -0.102453 & 0.153679 & -0.204905 \\ -0.051226 & 0.076839 & -0.102453 & 0.051226 & -0.076839 & 0.102453 \\ 0.076839 & -0.115259 & 0.153679 & -0.076839 & 0.115259 & -0.153679 \\ -0.102453 & 0.153679 & -0.204905 & 0.102453 & -0.153679 & 0.204905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ -0.076839 & -0.115259 & 0.153679 \\ -0.102453 & 0.153679 & -0.204905 & 0.102453 \\ 0.076839 & -0.153679 & -0.204905 & 0.102453 & -0.153679 & 0.204905 \end{bmatrix}$$

## ชิ้นส่วนที่ 3

์ ชิ้นส่วนที่ 3 มี node หมายเลข 1 เป็นปลายด้านใกล้และ node หมายเลข 4 เป็นปลายด้านไกล ดังนั้น

$$L = 5.5902 \text{ m}$$
$$\lambda_x = 0.8944$$
$$\lambda_y = 0.2683$$
$$\lambda_z = -0.3578$$

	1	2	3	10	11	12	
	0.143108	0.042933	-0.057243	-0.143108	- 0.042933	0.057243	1
	0.042933	0.012880	-0.017173	-0.042933	-0.012880	0.017173	2
r = 4F	-0.057243	-0.017173	0.022897	0.057243	0.017173	-0.022897	3
$\mathbf{K}_3 = AL$	-0.143108	-0.042933	0.057243	0.143108	0.042933	-0.057243	10
	0.042933	-0.012880	0.017173	0.042933	0.012880	-0.017173	11
	0.057243	0.017173	-0.022897	-0.057243	-0.017173	0.022897	12

#### 5. หา structure stiffness matrix ${f K}$

เราจะหา matrix **K** ได้โดยการรวม member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเข้า ด้วยกัน ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากโครงข้อหมุนมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 12 ดังนั้น structure stiffness matrix จะมีขนาดเท่ากับ 12x12 ขอให้สังเกตด้วยว่า structure stiffness matrix **K** เป็น matrix ที่มีความสมมาตร ซึ่งถ้า เราได้ matrix **K** ที่ไม่สมมาตรเราจะต้องตรวจสอบการรวม matrix **k** อีกครั้งหนึ่ง

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	0.2314	0.0402	0.1193	-0.0370	-0.0741	-0.0741	-0.0512	0.0768	-0.1025	-0.1431	-0.0429	0.0572	1
	0.0402	0.2763	-0.0227	-0.0741	-0.1481	-0.1481	0.0768	-0.1153	0.1537	-0.0429	-0.0129	0.0172	2
	0.1193	-0.0227	0.3760	-0.0741	-0.1481	-0.1481	-0.1025	0.1537	-0.2049	0.0572	0.0172	-0.0229	3
	-0.0370	-0.0741	-0.0741	0.0370	0.0741	0.0741	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4
	-0.0741	-0.1481	-0.1481	0.0741	0.1481	0.1481	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	5
K = AE	-0.0741	-0.1481	-0.1481	0.0741	0.1481	0.1481	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	6
	-0.0512	0.0768	-0.1025	0.0000	0.0000	0.0000	0.0512	-0.0768	0.1025	0.0000	0.0000	0.0000	7
	0.0768	-0.1153	0.1537	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0768	0.1153	-0.1537	0.0000	0.0000	0.0000	8
	-0.1025	0.1537	-0.2049	0.0000	0.0000	0.0000	0.1025	-0.1537	0.2049	0.0000	0.0000	0.0000	9
	-0.1431	-0.0429	0.0572	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1431	0.0429	-0.0572	10
	-0.0429	-0.0129	0.0172	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0429	0.0129	-0.0172	11
	0.0572	0.0172	-0.0229	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0572	-0.0172	0.0229	12

จากนั้น ทำการเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements

6. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

$$\mathbf{Q}_{k} = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_{u} + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_{k}$$
$$\mathbf{D}_{u} = \mathbf{K}_{11}^{-1}[\mathbf{Q}_{k}]$$

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{cases} = \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 0.2314 & 0.0402 & 0.1193 \\ 0.0402 & 0.2763 & -0.0227 \\ 0.1193 & -0.0227 & 0.3760 \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} 20 \\ 0 \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 5.395 \\ -0.930 \\ -1.770 \end{cases} \quad \text{Ans.}$$

7. หาค่าของแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_{u}$ 

 $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u$ 

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_{4} \\ \mathcal{Q}_{5} \\ \mathcal{Q}_{6} \\ \mathcal{Q}_{7} \\ \mathcal{Q}_{8} \\ \mathcal{Q}_{9} \\ \mathcal{Q}_{10} \\ \mathcal{Q}_{11} \\ \mathcal{Q}_{12} \end{cases} = AE \begin{bmatrix} -0.0370 & -0.0741 & -0.0741 \\ -0.0741 & -0.1481 & -0.1481 \\ -0.0741 & -0.1481 & -0.1481 \\ -0.0768 & -0.1153 & 0.1537 \\ -0.1025 & 0.1537 & -0.2049 \\ -0.1431 & -0.0429 & 0.0572 \\ -0.0429 & -0.0129 & 0.0172 \\ 0.0572 & 0.0172 & -0.0229 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.395 \\ -0.930 \\ -1.770 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.333 \\ 5 \\ -6.667 \\ -16.667 \\ -5 \\ 6.667 \end{cases}$$
 kN

8. หาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นที่ในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน โดยใช้สมการที่ 6-28 .

# ชิ้นส่วนที่ 1

$$q_{1} = \frac{20000}{3} \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.6667 & 0.6667 & -0.3333 & -0.6667 & -0.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.395 \\ -0.930 \\ -1.770 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

 $\cong 0 \, k N$ ชิ้นส่วนที่ 2

$$q_{2} = \frac{20000}{2.6926} \begin{bmatrix} 0.3714 & -0.5571 & 0.7428 & -0.3714 & 0.5571 & -0.7428 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.395 \\ -0.930 \\ -1.770 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

# =8.97 kN

# ชิ้นส่วนที่ 3

# $q_3 = 18.63 \,\mathrm{kN}$

สุดท้าย ทำการตรวจสอบความถูกต้องของค่าแรงภายในที่ได้โดยใช้เงื่อนไขความสมดุลของแรงที่ node ดังที่ได้ ศึกษาไปแล้วในวิชากลศาสตร์วิศวกรรม1 (engineering mechanic 1 ) ในเรื่องสมดุลของอนุภาคในสามมิติ Ans.

### แบบฝึกหัดบทที่ 6

6-1 กำหนดให้โครงข้อหมุนมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-1 และให้ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีค่าความแกร่งในแนว แกนดังนี้ (*EA*)<sub>AB</sub> = 20000 kN และ (*EA*)<sub>BC</sub> = (*EA*)<sub>BD</sub> = 30000 kN ถ้าจุดรองรับที่ *C* มีการทรุดตัวในแนว ดิ่งลงเท่ากับ – 0.005 m จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ และค่าแรงภายในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครง ข้อหมุนโดยใช้ matrix displacement method



6-2 กำหนดให้โครงข้อหมุนเหล็ก (*E* = 200 GPa) ของหลังคามีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-2 และซิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนมีพื้นที่หน้าตัด *A* = 0.00015 m<sup>2</sup> จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ ของโครงข้อหมุน และแรงที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนโดยใช้ matrix displacement method



6-3 ถ้าเหล็กมีค่า  $\alpha = 12(10^{-6})/^{o} C$  จงหาแรงที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-3 เนื่องจากชิ้นส่วน *FE* มีอุณหภูมิเพิ่มสูงขึ้น  $30^{o}C$  โดยใช้ matrix displacement method



6-4 ถ้าชิ้นส่วน *BE* ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-4 มีค่ายาวเกินกว่าที่ได้ออกแบบไว้เท่ากับ 0.01m จง หาแรงที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนโดยใช้ matrix displacement method



6-5 ถ้าจุดรองรับ *B* ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 6-5 เกิดการทรุดตัว **0.01m** จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ ของโครงข้อหมุน และแรงที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนโดยใช้ matrix displacement method



รูปที่ Prob. 6-5

6-6 จงวิเคราะห์หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ และค่าแรงภายในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน ดังที่ แสดงในรูปที่ Prob. 6-6 โดยใช้ matrix displacement method กำหนดให้พื้นเอียงที่จุดรองรับ *B* ทำมุม 45° กับแนว นอนและกำหนดให้ทุกชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีค่า axial stiffness *AE* = 20000 m<sup>2</sup>.kN/m<sup>2</sup>



# บทที่ 7

# การวิเคราะห์คานและ Plane Frame โดยใช้ Matrix Displacement Method

#### 7.1 บทนำ

การวิเคราะห์คานและ plane frame โดย matrix displacement method มีแนวความคิดและขั้นตอนที่คล้ายกับ การวิเคราะห์โครงข้อหมุนคือ

- กำหนดหมายเลขของ node หมายเลขของชิ้นส่วนของคานและ frame และหมายเลขของ degree of freedom ให้เหมาะสมกับลักษณะของคานและ frame
- 2. หา member stiffness matrix  ${f k}'$  ของชิ้นส่วนของคานและ frame
- 3. M displacement transformation matrix  $\mathbf{T}$  was force transformation matrix  $\mathbf{T}^{T}$
- 4. หา member global stiffness matrix  $\, k\,$  จาก matrix  $\, k^{\,\prime}\,$  matrix  $\, T\,$ และ matrix  $\, T^{\,T}\,$
- 5. หา structure stiffness matrix **K** โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคานและ frame ที่ได้จากข้อ ที่ 4 เข้าด้วยกัน
- 6. แก้สมการหาค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node และแรงภายในที่ไม่ทราบค่า

#### การระบุชิ้นส่วนของโครงสร้างและ Node

จากบทที่แล้ว เราจะเห็นได้ว่า โครงข้อหมุนมี node และชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่แน่นอน ซึ่งจะถูกกำหนดโดย การจัดเรียงชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน แต่ในกรณีของคานและ frame นั้น node จะไม่ได้อยู่เฉพาะที่จุดเชื่อมต่อ (joint) หรือ จุดรองรับ (support) เท่านั้น แต่อาจจะอยู่ที่จุดอื่นๆ เหล่านี้ด้วย

- จุดที่มีแรงภายนอกกระทำ
- 🗸 จุดที่เป็นจุดเชื่อมต่อภายใน เช่น internal hinge เป็นต้น
- 🗸 จุดที่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดหน้าตัดอย่างฉับพลัน
- 🗸 จุดใดๆ ที่เราต้องการทราบค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง



โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 7-1a ถูกกำหนด node กำหนดชิ้นส่วนของโครงสร้าง และกำหนดปลายด้านใกล้ และปลายด้านไกลโดยใช้หลักการเช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุน จากรูป ตัวเลขภายในวงกลมแสดงหมายเลขของ node และตัวเลขภายในกรอบสี่เหลี่ยมแสดงหมายเลขของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง นอกจากนั้นแล้ว ปลายด้านไกลของชิ้น ส่วนของโครงข้อแข็งถูกกำหนดโดยหัวลูกศรและปลายด้านใกล้จะถูกกำหนดโดยหางลูกศร

### Global Coordinates และ Local Coordinates

เช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุน เราจะกำหนดให้ระบบแกน global coordinate (x, y, และ z) ของคาน และ frame มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ node ใด node หนึ่ง ซึ่งจะทำให้ค่าพิกัดของ node อื่นๆ มีค่าเป็นบวก ดังที่แสดงในรูปที่ 7-1a และกำหนดให้ระบบแกน local coordinate (x', y', และ z') มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ปลายด้านใกล้และแกน x' จะพุ่งไปที่ ปลายด้านไกลของชิ้นส่วนของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 7-1b

#### Degree of Freedom

#### Frames

ในการวิเคราะห์ frame โดย matrix displacement method เราจะใช้สมมุติฐานดังต่อไปนี้

- 1. วัสดุที่ใช้ทำ frame มีพฤติกรรมแบบ linear elastic ภายใต้แรงกระทำ
- 2. การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนของ frame มีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับขนาดของของชิ้นส่วนของ frame
- การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนของ frame เกิดจากโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกนเท่านั้น จะไม่เกิดจาก แรงเฉือน

้ดังนั้น จากสมมุติฐานดังกล่าว เราจะได้ว่า แต่ละ node ของ frame จะมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 3 คือ

- การเปลี่ยนดำแหน่งเชิงเส้นในแนวแกน x และแกน y
- การหมุนในแนวแกน z

การกำหนดลำดับของหมายเลขของ degree of freedom จะมีลักษณะเช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุนคือ เราจะกำหนดให้หมายเลขของ unconstrained degree of freedom มีลำดับมาก่อน constrained degree of freedom

พิจารณาโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 7-1a ซึ่งมีจำนวน degree of freedom ทั้งหมดเท่ากับ 12 ประกอบด้วย unconstrained degree of freedom (หรือการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่า) มีจำนวนเท่ากับ 1+3+3 = 7 (หมายเลข 1 ถึง 7) และ constrained degree of freedom (หรือการเปลี่ยนตำแหน่งที่ทราบค่า) มีจำนวนเท่ากับ 2+3 = 5 (หมายเลข 8 ถึง 12)

#### คาน

สมมุติฐานที่เราจะใช้ในการวิเคราะห์คานโดย matrix displacement method นั้นจะต่างกับสมมุติฐานที่เราจะใช้ ในการวิเคราะห์ frame อยู่เล็กน้อยคือ การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนของคานจะเกิดจากโมเมนต์ดัดเท่านั้น โดยที่แรง ในแนวแกนและแรงเฉือนจะไม่ทำให้คานเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังนั้น แต่ละ node ของคานจะมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 2 คือ

- การเปลี่ยนตำแหน่งเชิงเส้นในแนวแกน y
- การหมุนในแนวแกน z

อย่างไรก็ตาม ถ้าคานที่เราทำการวิเคราะห์ไม่เป็นคานที่มีปลายยื่น (overhanging beam) และไม่มีการทรุดตัว เกิดขึ้นที่ node แล้ว จำนวน degree of freedom ที่ node เหล่านั้นจะมีจำนวนลดลงจาก 2 เหลือแค่ 1 degree of freedom เท่านั้นคือ การหมุนในแนวแกน *z* ดังที่แสดงในรูปที่ 7-2 โดยที่ node หมายเลข 1 และ 2 เป็น unconstrained degree of freedom และ node หมายเลข 3 เป็น constrained degree of freedom



## น้ำหนักบรรทุกที่กระทำอยู่บนชิ้นส่วนของโครงสร้าง (Intermediate Member Loading)

ในขั้นตอนการวิเคราะห์คานและ frame โดย matrix displacement method นั้น เราจะต้องทำการพิจารณา ความสมดุลที่ node ต่างๆ ของคานและ frame เช่นเดียวกับการวิเคราะห์คานและ frame โดยวิธี slope-deflection และวิธี moment distribution ดังนั้น เราจะต้องทำการเปลี่ยนแรงหรือ moment ที่กระทำอยู่บนชิ้นส่วนของโครงสร้างดังกล่าว ให้ เป็น fixed-end moment และ/หรือ fixed-end shear ที่กระทำอยู่ที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงสร้าง จากนั้น ทำการถ่าย fixed-end moment และ/หรือ fixed-end shear ให้กลับมากระทำที่ node ซึ่งจะถูกพิจารณาเป็นแรงภายนอกที่กระทำต่อ โครงสร้างหรือ matrix **Q**<sub>u</sub> และจากกฏข้อที่ 3 ของ Newton ทิศทางของ fixed-end moment และ fixed-end shear ที่ถ่าย มาจะมีเครื่องมายตรงกันข้ามกับทิศทางของ fixed-end moment และ fixed-end shear



พิจารณาชิ้นส่วนของโครงสร้าง ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกระทำแบบกระจายคงที่ (uniformly distributed load) *พ* ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3a โดยใช้ principle of superposition เราจะแยกแรงกระทำดังกล่าวออกได้เป็น 2 กรณีคือ

 ชิ้นส่วนของโครงสร้าง ซึ่งถูกกระทำโดย fixed-end moment และ fixed-end shear ที่ปลาย ดังที่แสดงในรูป ที่ 7-3b และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ fixed-end moment และ fixed-end shear ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรง กระทำ w ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3c (การที่ต้องมีทิศทางตรงกันข้ามนั้นเนื่องจากว่า fixed-end moment และ fixed-end shear ดังกล่าวเป็นแรงปฏิกริยาของ fixed-end moment และ fixed-end shear ที่เกิดขึ้นเนื่อง จากแรงกระทำ w ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3c ที่กระทำอยู่ที่ node)  ชิ้นส่วนของโครงสร้าง ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกระทำแบบกระจายคงที่ w และ fixed-end moment และ fixed-end shear เนื่องจากแรงกระทำแบบกระจายคงที่ w ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3c

ใน matrix displacement method นั้น เราจะทำการวิเคราะห์ขึ้นส่วนของคานและ frame ซึ่งถูกกระทำโดย fixed-end moment และ fixed-end shear ที่กระทำต่อ node หรือ matrix  $\mathbf{Q}_{u}$  ซึ่งมีทิศทางเดียวกันกับ fixed-end moment และ fixed-end shear ที่กระทำที่ปลายของชิ้นส่วนของคานและ frame ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3b ซึ่งหลังจากที่เรา ทำการคำนวณหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ ได้แล้ว เราจะหาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วน ของคานและ frame (matrix  $\mathbf{q}$ ) ได้ จากนั้น โดยใช้ principle of superposition เราจะหาแรงภายในที่เกิดขึ้นจ**ริง**ที่ปลาย ของชิ้นส่วนของคานและ frame ดังที่แสดงในรูปที่ 7-3a ได้จากผลรวมของ

- 1. แรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ ที่เกิดจากแรงกระทำ matrix  ${f Q}_u$  (matrix  ${f q}$  )
- แรงกระทำและ fixed-end moment และ fixed-end shear ที่กระทำอยู่บนชิ้นส่วนของคานและ frame ดังที่ แสดงในรูปที่ 7-3c

#### 7.2 Frame-Member Stiffness Matrix

พิจารณาชิ้นส่วนของ frame ซึ่งมีระบบแกน local coordinate ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ปลายด้านใกล้ N และมีแกน + x' อยู่ในแนวแกนของชิ้นส่วนของ frame และมีทิศพุ่งไปทางปลายด้านไกล F ดังที่แสดงในรูปที่ 7-4 กำหนดให้ แรง ในแนวแกน (q<sub>Nx</sub>, และ q<sub>Fx</sub>) แรงเฉือน (q<sub>Ny</sub>, และ q<sub>Fy</sub>) และโมเมนต์ดัด (q<sub>Nz</sub>, และ q<sub>Fz</sub>) ที่เกิดขึ้นที่ปลายแต่ละ ด้านของชิ้นส่วนของ frame มีทิศทางที่เป็นบวก และแรงต่างๆ เหล่านี้จะทำให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งและการหมุนที่เกิดขึ้น ที่ปลายทั้งสองของชิ้นส่วนของ frame ในทิศทางที่เป็นบวก



โดยใช้ principle of superposition เราจะหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของ frame **q** กับค่าการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งเชิงเส้นและการหมุนของชิ้นส่วนของ frame **d** ได้ โดยเราจะแยกพิจารณาการ เปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นให้เป็นอิสระจากกัน 3 กรณีคือ

- การเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง x'
- การเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง y'
- การหมุน z'

## x' Displacement

เช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุน เมื่อมีการเปลี่ยนตำแหน่ง *d<sub>Nx</sub>,* และ *d<sub>Ny</sub>,* เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของ frame ดังที่แสดงในรูปที่ 7-5a และ 7-5b แล้ว ชิ้นส่วนของ frame จะมีแรงในแนวแกนเกิดขึ้นดังที่แสดงในรูป



รูปที่ 7-5

y' Displacement



ฐปที่ 7-6

เมื่อเรากำหนดให้มีการเปลี่ยนตำแหน่ง  $d_{_{N\!y'}}$  เกิดขึ้นที่ปลาย N ของชิ้นส่วนของ frame โดยที่ไม่มีการเปลี่ยน ตำแหน่งอื่นๆ เกิดขึ้นเลย ดังที่แสดงในรูปที่ 7-6a แล้ว เราจะหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านใกล้และ ปลายด้านไกลได้จากสมการ slope-deflection และสมการความสมดุลบนชิ้นส่วนของ frame ดังกล่าว

เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่ง *d<sub>Ny'</sub>* ทำให้ขึ้นส่วนของ frame เกิดการหมุนตามเข็มนาฬิกา ดังนั้น

$$q_{Nz'} = 2E \frac{I}{L} (2d_{Nz'} + d_{Fz'} - \frac{3d_{Ny'}}{L}) + (FEM)_N$$

$$q_{Nz'} = 2E \frac{I}{L} (0 + 0 - \frac{3d_{Ny'}}{L}) + 0$$

$$q_{Nz'} = -\frac{6EI}{L^2} d_{Ny'}$$

$$q_{Fz'} = 2E \frac{I}{L} (d_{Nz'} + 2d_{Fz'} - \frac{3d_{Ny'}}{L}) + (FEM)_F$$

$$q_{Fz'} = -\frac{6EI}{L^2} d_{Ny'}$$

จาก sign convention ที่ใช้ในวิธี slope-deflection เราจะได้ว่า โมเมนต์  $q_{_{Nz'}}$  และ  $q_{_{Fz'}}$  มีทิศหมุนทวนเข็ม นาฬิกา ดังที่แสดงในรูปที่ 7-6a ดังนั้น โดยใช้สมการความสมดุล  $\sum M_F = 0$  หรือ  $\sum M_N = 0$  เราจะหาแรงเฉือนที่ เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของ frame ได้ในรูป

$$q_{Ny'} = q_{Fy'} = \frac{q_{Nz'} + q_{Fz'}}{L} = \frac{12EI}{L^3} d_{Ny'}$$

ในลักษณะเดียวกัน ถ้าเรากำหนดให้มีการเปลี่ยนตำแหน่ง  $d_{Fy'}$  เกิดขึ้นที่ปลาย F ของชิ้นส่วนของ frame โดย ที่ไม่มีการเปลี่ยนตำแหน่งอื่นๆ เกิดขึ้นแล้ว เราจะหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านใกล้และปลายด้าน ใกลได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-6b

z' Rotation



เมื่อเรากำหนดให้มีการหมุน d<sub>Nz'</sub> เกิดขึ้นที่ปลาย N ของชิ้นส่วนของ frame โดยที่ไม่มีการเปลี่ยนตำแหน่งอื่นๆ เกิดขึ้นเลย ดังที่แสดงในรูปที่ 7-7a แล้ว เราจะหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านใกล้และปลายด้านไกล ได้จากการใช้สมการ slope-deflection และสมการความสมดุลบนชิ้นส่วนของ frame ดังกล่าว ้จากรูป เราจะได้ว่า เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่ง *d<sub>ุNz</sub>,* มีการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้น

$$q_{Nz'} = 2E \frac{I}{L} (-2d_{Nz'} + 0 - 0) + 0$$

$$q_{Nz'} = -\frac{4EI}{L} d_{Nz'}$$

$$q_{Fz'} = 2E \frac{I}{L} (0 - d_{Nz'} - 0) + 0$$

$$q_{Fz'} = -\frac{2EI}{L} d_{Nz'}$$

จาก sign convention ที่ใช้ในวิธี slope-deflection เราจะได้ว่า  $q_{_{Nz'}}$  และ  $q_{_{Fz'}}$  มีทิศหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังที่ แสดงในรูปที่ 7-7a ดังนั้น จากสมการความสมดุล  $\sum M_{_F}=0$  หรือ  $\sum M_{_N}=0$  เราจะหาแรงเฉือนที่เกิดขึ้นได้ในรูป

$$q_{Ny'} = q_{Fy'} = \frac{q_{Nz'} + q_{Fz'}}{L} = \frac{6EI}{L^2} d_{Nz}$$

ในลักษณะเดียวกัน ถ้าเรากำหนดให้มีการเปลี่ยนตำแหน่ง  $d_{Fz'}$  เกิดขึ้นที่ปลาย F ของชิ้นส่วนของ frame โดย ที่ไม่มีการเปลี่ยนตำแหน่งอื่นๆ เกิดขึ้นแล้ว เราจะหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นที่ปลายด้านใกล้และปลายด้าน ไกลได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-7b

เมื่อเราทำการรวมแรงภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของ frame ทั้ง 3 กรณีเข้าด้วยกันแล้ว เราจะได้ว่า

$$\begin{cases} q_{Nx'} \\ q_{Ny'} \\ q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fx'} \\ q_{Fx'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Nx'} \\ d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fx'} \\ d_{Fx'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix}$$
(7-1)  
$$\mathbf{q} = \mathbf{k'}\mathbf{d}$$

หรือ

โดยที่องค์ประกอบทั้ง 36 ของ member stiffness matrix  $\mathbf{k}'$  นี้มักจะถูกเรียกว่า member stiffness influence coefficients,  $k'_{ij}$  ซึ่งแสดงถึงค่าของแรงหรือโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ node i เมื่อมีการเปลี่ยนตำแหน่ง 1 หน่วยเกิดขึ้นที่ node j ยกตัวอย่างเช่น ถ้า  $d_{_{Nx'}} = 1$  และให้การเปลี่ยนตำแหน่งอื่นๆ มีค่าเท่ากับศูนย์แล้ว ชิ้นส่วนของ frame จะถูกกระทำ โดยแรงในแนวแกน  $q_{_{Nx'}} = AE / L$  และ  $q_{_{Fx'}} = -AE / L$  ดังที่แสดงโดย column แรกของ  $\mathbf{k}'$  matrix

#### 7.3 Displacement และ Force Transformation Matrices

เช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุน เราจะใช้สมมุติฐานที่ว่า การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของคานและ frame มีค่า น้อยมาก เมื่อเทียบกับขนาดของคานและ frame ในการหา transformation matrix ของคานและ frame Displacement Transformation Matrix

Displacement transformation matrix ของ frame จะเป็น matrix ที่แสดงความสัมพันธ์ของค่าการเปลี่ยนแปลง ตำแหน่งที่ปลายของชิ้นส่วนของ frame **d** ในระบบแกน local coordinate กับค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วน ของ frame **D** ในระบบแกน global coordinate

จากรูปที่ 7-8a เมื่อปลายด้านไกล (node  $\,F$  ) ของชิ้นส่วนของ frame ถูกยึดแน่นและปลายด้านใกล้ (node  $\,N$  ) มีการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน x เป็น  $D_{_{Nx}}$  แล้ว การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนของ frame ในแนวแกน x' และ y'จะอยู่ในรูป

$$d_{Nx'} = D_{Nx} \cos \theta_{x}$$

$$d_{Ny'} = -D_{Nx} \cos \theta_{y}$$

$$y'$$

$$d_{Ny'} = D_{Ny} \cos \theta_{x}$$

$$d_{Ny'} = D_{Ny} \cos \theta_{y}$$

$$d_{Nx'} = D_{Nx} \cos \theta_{y}$$

$$d_{Nx'} = D_{Nx} \cos \theta_{x}$$
(a)
(b)

ในลักษณะที่คล้ายกัน เมื่อปลายด้านใกล้ (node N ) F ) ของชิ้นส่วนของ frame มีการเปลี่ยนตำแหน่งในแนว แกน y เป็น  $D_{_{N_{\!Y}}}$  ดังที่แสดงในรูปที่ 7-8b แล้ว การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนของ frame ในแนวแกน x' และ y' จะ อยู่ในรูป

$$d_{Nx'} = D_{Ny} \cos \theta_y$$
$$d_{Ny'} = D_{Ny} \cos \theta_x$$

และเนื่องจากแกน z และแกน z' เป็นแกนๆ เดียวกัน ดังนั้น การหมุน  $D_{_{Nz}}$  รอบแกน z จะทำให้เกิดการหมุน  $d_{_{Nz'}}$ รอบแกน z' หรือ  $D_{\scriptscriptstyle Nz}=d_{\scriptscriptstyle Nz'}$ 

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราให้ปลายด้ายใกล้ (node  $\,N$  ) ของชิ้นส่วนของ frame ถูกยึดแน่นและปลายด้านไกลถูก กระทำโดยการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน x เป็น  $D_{\scriptscriptstyle Fx}$  การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน y เป็น  $D_{\scriptscriptstyle Fy}$  และการหมุน  $D_{\scriptscriptstyle Fz}$  แล้ว การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนของ frame ในแนวแกน x' แกน y' และแกน z' จะอยู่ในรูป

$$d_{Fx'} = D_{Fx} \cos \theta_x \qquad d_{Fy'} = -D_{Fx} \cos \theta_y d_{Fx'} = D_{Fy} \cos \theta_y \qquad d_{Fy'} = D_{Fy} \cos \theta_x d_{Fz'} = D_{Fz}$$

โดยใช้ principle of superposition และจากสมการ direction cosine  $\lambda_x = \cos heta_x$  และ  $\lambda_y = \cos heta_y$  เรา จะเขียน displacement transformation matrix ของ frame ได้ในรูป

$$\begin{pmatrix} d_{Nx'} \\ d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fx'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Nz} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{pmatrix}$$
(7-3)  
$$\mathbf{d} = \mathbf{TD}$$
(7-4)

หรือ

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Fz} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{D} \tag{(1)}$$

โดยที่ matrix  $\, T \,$  จะถูกเรียกว่า displacement transformation matrix

#### Force Transformation Matrix

Force transformation matrix ของ frame จะเป็น matrix ที่แสดงความสัมพันธ์ของแรงกระทำภายนอก **Q** ใน ระบบแกน global coordinate กับแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของ frame **q** ในระบบแกน local coordinate

พิจารณาชิ้นส่วนของ frame ดังที่แสดงในรูปที่ 7-9a ซึ่งถูกกระทำโดยแรง *q<sub>Nx</sub>,* เราจะได้ว่า แรงกระทำภายนอก ในระบบแกน global coordinate จะอยู่ในรูป

$$Q_{Nx} = q_{Nx'} \cos \theta_x \qquad \qquad Q_{Ny} = q_{Nx'} \cos \theta_y$$

เมื่อ *q<sub>Ny</sub>,* กระทำกับชิ้นส่วนของ frame ดังที่แสดงในรูปที่ 7-9b แล้ว เราจะได้ว่า แรงกระทำภายนอกในระบบแกน global coordinate system จะอยู่ในรูป

$$Q_{Nx} = -q_{Ny'} \cos \theta_y \qquad \qquad Q_{Ny} = q_{Ny'} \cos \theta_y$$

และเนื่องจาก  $q_{\scriptscriptstyle Nz}$ , มีทิศทางและอยู่ในแนวเดียวกันกับ  $Q_{\scriptscriptstyle Nz}$  ดังนั้น

$$Q_{Nz} = q_{Nz'}$$



ในทำนองเดียวกัน ถ้าเรากำหนดให้แรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของ frame ที่จุด F อยุ่ในรูป  $q_{_{Fx'}}$   $q_{_{Fy'}}$  และ  $q_{_{Fz'}}$  แล้ว แรงกระทำภายนอกในระบบแกน global coordinate system จะอยู่ในรูป

$$Q_{Fx} = q_{Fx'} \cos \theta_x \qquad \qquad Q_{Fy} = q_{Fx'} \cos \theta_y Q_{Fx} = -q_{Fy'} \cos \theta_y \qquad \qquad Q_{Fy} = q_{Fy'} \cos \theta_x Q_{Fz} = q_{Fz'}$$

โดยใช้ principle of superposition และจากสมการ direction cosine  $\lambda_x = \cos \theta_x$  และ  $\lambda_y = \cos \theta_y$  เรา จะเขียน force transformation matrix ของ frame ได้เป็น Structural Analysis

$$\begin{cases} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Nz} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \\ Q_{Fz} \end{cases} = \begin{bmatrix} \lambda_x & -\lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & -\lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{Nx'} \\ q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fx'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix}$$
(7-5)  
$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}$$
(7-6)

หรือ

I. \_

โดยที่ matrix  ${f T}^T$  จะถูกเรียกว่า force transformation matrix ซึ่งเป็น transpose ของ matrix  ${f T}$ 

#### 7.4 Frame-Member Global Stiffness Matrix

เมื่อเราแทนสมการที่ 7-4 ( $\mathbf{d} = \mathbf{TD}$ ) ลงในสมการที่ 7-2 ( $\mathbf{q} = \mathbf{k'd}$ ) แล้ว เราจะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ ของแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงสร้าง  $\mathbf{q}$  กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง  $\mathbf{D}$  ในรูป

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{I} \mathbf{D} \tag{(7-7)}$$

จากนั้น แทนค่าสมการที่ 7-7 ลงในสมการที่ 7-6 (**Q** = **T**<sup>T</sup>**q**) เราจะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ของแรงกระทำ **Q** กับ การเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง **D** ในรูป

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{k'TD}$$
 $\mathbf{Q} = \mathbf{kD}$ (7-8)เมื่อ $\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k'T}$ (7-9)

โดยที่ matrix  ${f k}$  คือ member global stiffness matrix และเนื่องจากเราทราบ matrix  ${f T}^{\scriptscriptstyle T}$ ,  ${f T}$ , และ  ${f k}^{\prime}$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &- \\ \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} \\ & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L^3}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L^3}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L^3}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L^3}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{6EI$$

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า matrix **k** ของ frame เป็น square และ symmetric matrix และถ้า frame เป็นโครงสร้างที่มีเสถียรภาพ แล้ว matrix **k** นี้จะเป็น nonsingular matrix ซึ่งเราจะสามารถหาค่า inverse ของ matrix นี้ได้ และเช่นเดียวกับ matrix **k**' แต่ละ column ของ **k** matrix (เรียงจาก 1 ถึง 6) จะแสดงถึงแรงภายนอกที่กระทำอยู่ที่ปลายของขึ้นส่วนของ frame ซึ่งจะใช้ในการต้านทานการเปลี่ยนตำแหน่ง 1 หน่วยในทิศทาง  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$ ,  $F_x$ ,  $F_y$ , และ  $F_z$  ตามลำดับ และเรา จะขยายสมการที่ 7-8 ใหม่ได้เป็น Structural Analysis

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Nz} \\ Q_{Nz} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \\ Q_{Fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L}\right) & \left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^{3}}\right) & -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{3}}\right) & -\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^{3}}\right) & -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ \left(\lambda_{x}\lambda_{y}\right) & \left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^{3}}\right) & \left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & -\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^{3}}\right) & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{y}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} \\ -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & -\left(\frac{AE}{L}-\frac{12EI}{L^{3}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{2EI}{L}\right) \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_{x}^{2}+\frac{1}{L^{2}}\right) & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} \\ -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{x} & \frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} \\ -\frac{6EI}{L^{2}}\lambda_{y} & \frac{6EI}{L^{2$$

#### 7.5 Beam-Member Global Stiffness Matrix

ถ้าคานที่เราทำการวิเคราะห์เป็นคานปลายยื่น (overhanging beam) และ/หรือเมื่อ node ที่อยู่ที่จุดรองรับมีการ ทรุดตัวเกิดขึ้นแล้ว จำนวน degree of freedom ที่ node เหล่านั้นค่าเท่ากับ 2 คือ การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวแกน y และ การหมุนในแนวแกน z ซึ่งในกรณีนี้ สมการที่ 7-1 ( $\mathbf{q} = \mathbf{k'd}$ ) จะลดรูปลงเหลือ 4x4 matrix โดยที่

$$\begin{cases} q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix}$$

และเนื่องจากคานเป็นองค์อาคารที่อยู่ในแนวนอนเท่านั้น ซึ่งเราจะได้ว่า  $\lambda_x = \cos 0^\circ = 1$  และ  $\lambda_y = \cos 90^\circ = 0$ ดังนั้น สมการ displacement transformation matrix **T** และสมการ force transformation matrix **T**<sup>T</sup> จะอยู่ในรูปของ identity matrix

	$\left[d_{Ny'}\right]$	[1	0	0	$0 \left[ D_{Ny} \right]$		$\left[ Q_{Ny} \right]$	[1	0	0	0]	$\left[q_{Ny'}\right]$
	$d_{\scriptscriptstyle N\!z'}$	0	1	0	$0 \left  \right  D_{Nz} \left $	11.0.1%	$Q_{Nz}$	0	1	0	0	$q_{\scriptscriptstyle Nz'}$
<	$d_{Fy'}$	0	0	1	$0 \int D_{Fy}$	และ	$\left[ Q_{Fy} \right]^{=}$	0	0	1	0	$q_{Fy'}$
	$\left[ d_{Fz'} \right]$	0	0	0	$1 \left[ D_{Fz} \right]$		$\left[ Q_{Fz} \right]$	0	0	0	1	$\left[q_{Fz'}\right]$
	اہے ایم				T	•		T		<b>.</b>		

ตามลำดับ ซึ่งเมื่อเราแทนค่า matrix  $\mathbf{T}^T$ ,  $\mathbf{T}$ , และ  $\mathbf{k'}$  ลงในสมการ  $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T \mathbf{k'TD}$  แล้ว เราจะได้ว่า

#### $\mathbf{Q} = \mathbf{k}'\mathbf{D} = \mathbf{k}\mathbf{D}$

ซึ่งเราจะได้ว่า **ในกรณีของคาน** member stiffness matrix **k**′ **จะมีค่าเท่ากับ** member global stiffness matrix **k** และเราจะได้ว่า

7-11

$$\begin{bmatrix} Q_{Ny} \\ Q_{Nz} \\ Q_{Fy} \\ Q_{Fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Ny} \\ D_{Nz} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{bmatrix}$$
(7-12)

นอกจากนั้นแล้ว เราจะได้สมการที่ 7-7 ซึ่งเป็นสมการที่เราจะใช้ในการหาค่าของแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน ของโครงสร้าง **q** จากค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของโครงสร้าง **D** อยู่ในรูป

#### q = k'TD = kD

ถ้าคานที่เราทำการวิเคราะห์ไม่เป็นคานปลายยื่นและถ้าเราสนใจเฉพาะ node ที่อยู่ที่จุดรองรับซึ่งไม่มีการทรุดตัว เท่านั้นแล้ว จำนวน degree of freedom ที่ node เหล่านั้นจะมีจำนวนแค่ 1 เท่านั้นคือ การหมุนในแนวแกน z ซึ่งในกรณีนี้ สมการที่ 7-12 จะลดรูปลงเหลือ

$$\begin{cases}
 Q_{Nz} \\
 Q_{Fz}
 \end{cases} = \begin{bmatrix}
 \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\
 \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L}
 \end{bmatrix}
 \begin{cases}
 D_{Nz} \\
 D_{Fz}
 \end{cases}$$
(7-13)

## 7.6 การใช้ Matrix Displacement Method ในการวิเคราะห์คานและ Plane Frames

หลังจากที่เราได้ member global stiffness matrix **k** ของแต่ละซิ้นส่วนของคานและ frame แล้ว เราจะทำการ รวม matrix **k** เหล่านั้นเข้าด้วยกัน ซึ่ง matrix ดังกล่าวจะถูกเรียกว่า structural stiffness matrix **K** ซึ่งเป็น matrix ที่ แสดงความสัมพันธ์ของแรงกระทำภายนอก **Q** กับการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ของชิ้นส่วนของคานและ frame **D** โดย จะอยู่ในรูป

#### Q = KD

การรวม matrix **k** ดังกล่าวจะมีลักษณะเช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุนคือ เริ่มต้น เราจะเขียนตาราง ซึ่งจะ มีจำนวน column และจำนวน row เท่ากับจำนวน degree of freedom ของคานและ frame จากนั้น ทำการเติมค่า **k**<sub>ij</sub> ของ matrix **k** ของแต่ละซิ้นส่วนของคานและ frame ลงในตารางดังกล่าว โดยต้องเติมลงในช่องที่มี global coordinate และ degree of freedom ที่สอดคล้องกัน

ถ้าเราทำการกำหนดหมายเลขของ node ของคานและ frame โดยจัดเรียงลำดับให้ unconstrained degree of freedom มีลำดับอยู่ก่อน constrained degree of freedom ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในตอนต้น เราจะสามารถแบ่ง partition ของเทอม structural stiffness matrix **K** ได้เช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุน

โดยสรุปแล้ว ขั้นตอนในการวิเคราะห์คานและ frame โดย matrix displacement method มีดังนี้

- กำหนด global coordinate system ให้เหมาะสมกับลักษณะของคานและ frame จากนั้น กำหนดหมายเลข ของ node หมายเลขของชิ้นส่วนของคานและ frame และหมายเลขของ degree of freedom
- 2. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ ที่เราทราบค่าและเขียน matrix  $\mathbf{D}_k$  โดยใช้ sign convention ของ ระบบแกน global coordinate
- หาค่า fixed-end moment และแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคานและ frame ซึ่งถูกกระทำโดย แรงภายนอก จากนั้น กลับทิศทางของ fixed-end moment และแรงเฉือนดังกล่าวให้เป็นแรงที่กระทำ ต่อ node ต่างๆ ของคานและ frame และเขียน matrix Q<sub>k</sub> โดยใช้ sign convention ของระบบแกน global coordinate

- 4. หาค่า direction cosine  $\lambda_x = \cos \theta_x$  และ  $\lambda_y = \cos \theta_y$  ในกรณีของ frame และหา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคานและ frame
- 5. หา structure stiffness matrix **K** โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคานและ frame ที่ได้เข้า ด้วยกัน
- 6. แก้สมการหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ  $\mathbf{D}_u$  จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$
- 7. หาค่าแรงและโมเมนต์ปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับหรือจุดยึดรั้ง  ${f Q}_u$  จากสมการ

$$\mathbf{Q}_{u} = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_{u} + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_{k}$$

8. หาค่าแรงและโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคานและ frame เนื่องจาก matrix  $\mathbf{Q}_k$  ได้จาก สมการที่ 7-7 หรือ

 หาค่าแรงและโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นจริงที่ปลายของชิ้นส่วนของคานและ frame ได้จากผลรวมของค่าแรง และโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคานและ frame q และค่า fixed-end moment และ แรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคานและ frame ซึ่งถูกกระทำโดยแรงภายนอกที่หาได้จากข้อที่ 3

### 7.7 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มีการทรุดตัวของจุดรองรับ

เมื่อฐานรากที่รองรับคานและ frame แบบ statically indeterminate เกิดการทรุดตัวแล้ว คานและ frame จะ พยายามต้านทานต่อการทรุดตัวดังกล่าว ซึ่งจะก่อให้เกิดโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนขึ้นภายในชิ้นส่วนของคานและ frame

ในที่นี้ เราจะหาค่าโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนดังกล่าวโดยการ

- 1. พิจารณาการทรุดตัวให้เป็นค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ทราบค่าใน matrix  $\mathbf{D}_k$
- ถ้าเราต้องการหาแรงปฏิกริยาที่เกิดจากการทรุดตัวและแรงกระทำภายนอกโดยตรงแล้ว เราจะกำหนดให้แรง ที่ต้านทานต่อการทรุดตัว F (มีทิศตรงกันข้ามกับการทรุดตัว) ซึ่งเป็นแรงที่เราไม่ทราบค่ากระทำอยู่ที่ node ที่มีการทรุดตัวร่วมกับแรงเฉือนเนื่องจากแรงกระทำภายนอกที่กระทำอยู่ที่ node ดังกล่าวในทิศทางของ degree of freedom ที่มีการทรุดตัว โดยทั่วไปแล้ว เรามักจะไม่หาค่าแรง F โดยตรง แต่จะหาได้จากผล รวมของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคานหรือ frame ที่เชื่อมต่อกันที่จุดรองรับดังกล่าว
- ทำการหาค่าโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนเนื่องจากการทรุดตัวโดยใช้ความสัมพันธ์ของ loads และ displacements ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 7-2

เราควรสังเกตด้วยว่า ในกรณีนี้ เราจะไม่คำนวณหาค่า fixed-end moment เนื่องจากการทรุดตัว เพราะว่าการ รวมค่าทรุดตัวไว้ใน matrix  $\mathbf{D}_k$  จะเทียบได้กับการหาค่า fixed-end moment ดังกล่าวแล้ว

#### 7.8 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มี Internal Hinges

เมื่อคานและ frame ซึ่งมีจุดหมุนภายใน (internal hinge) ถูกกระทำโดยแรงกระทำภายนอกแล้ว คานและ frame ดังกล่าวจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเกิดขึ้น โดยที่ค่าการโก่งตัวทางด้านซ้ายมือและทางด้านขวามือของ internal hinge จะมีค่าเท่ากัน แต่ค่าความชัน (slope) ทางด้านซ้ายมือและทางด้านขวามือของ internal hinge จะมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น ที่ node ที่เป็น internal hinge จะมีจำนวน degree of freedom 3 ค่าคือ

- 1. ค่าการโก่งตัว
- 2. ค่า slope ทางด้านซ้ายมือของ internal hinge
- 3. ค่า slope ทางด้านขวามือของ internal hinge

ซึ่งจะทำให้จำนวน degree of freedom ทั้งหมดของคานและ frame มีค่าเพิ่มขึ้นจากกรณีปกติ 1 ค่าต่อ 1 internal hinge จากนั้น เราจะทำการวิเคราะห์คานและ frame ตามขั้นตอนที่เราได้ศึกษามาแล้ว

# 7.9 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มีหน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงสร้างเปลี่ยนแปลงอย่างทันที

เมื่อคานและ frame มีหน้าตัดที่เปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใดที่จุดใดๆ บนคานและ frame แล้ว เราจะต้องกำหนด ให้จุดดังกล่าวเป็น node ของคานและ frame ซึ่งจะทำให้จำนวน degree of freedom ทั้งหมดของคานและ frame มีค่า เพิ่มขึ้น นอกจากนั้นแล้ว ในการหาค่า member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน เราจะต้องใช้ค่า *EI* ของแต่ละชิ้นส่วนของคานให้ถูกต้อง จากนั้น เราจะทำการวิเคราะห์คานและ frame ตามขั้นตอนที่เราได้ศึกษามาแล้ว 7.10 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

เช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุน เมื่อขึ้นส่วนของคานและ frame แบบ statically indeterminate ซึ่งมีหน้า ตัดลึก d และมีความยาว L มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ  $\Delta T$  แล้ว ขึ้นส่วนนั้นก็จะมีแรงในแนวแกนเกิดขึ้นเท่ากับ  $q_0 = AE \alpha \Delta T$  เมื่อ A เป็นพื้นที่หน้าตัดของขึ้นส่วนของคานหรือ frame E เป็นค่า modulus of elasticity ของวัสดุ และ  $\alpha$  ค่า coefficient of thermal expansion ของวัสดุ และถ้าอุณหภูมิในขึ้นส่วนของคานและ frame ดังกล่าวมีค่า เปลี่ยนแปลงตามความลึก d ของคานในลักษณะเชิงเส้นตรงแล้ว ชิ้นส่วนของคานและ frame นั้นก็จะเกิดการดัดขึ้นด้วย

พิจารณาชิ้นส่วนของคานหรือ frame ซึ่งถูกยึดแน่นที่ปลายทั้งสองด้าน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-10 ถ้าอุณหภูมิที่ผิว ด้านบนของชิ้นส่วนดังกล่าวมีค่า T<sub>2</sub> โดยมีค่าสูงกว่าอุณหภูมิที่ผิวด้านล่าง T<sub>1</sub> แล้ว ผิวด้านบนก็จะมีการยืดตัวมากกว่า ผิวด้านล่าง ซึ่งจะทำให้ชิ้นส่วนดังกล่าวเกิดการโค้งคว่ำ โดยที่ค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นจะหาได้จากสมการ



## 7.11 การวิเคราะห์คานและ Plane Frames ที่มีจุดรองรับเป็น Roller เอียง

เช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุน เมื่อจุดรองรับแบบล้อเลื่อน (roller) ที่รองรับคานและ frame วางอยู่บนพื้นที่ มีความลาดเอียง (inclined plane) แล้ว จุดรองรับดังกล่าวจะทำให้เกิดการยึดรั้งในทิศทางที่ไม่อยู่ในระบบแกน global coordinate ของคานและ frame ดังนั้น เราจะไม่สามารถทำการวิเคราะห์คานและ frame ที่มีจุดรองรับดังกล่าวโดย matrix displacement method ได้โดยตรง

โดยทั่วไปแล้ว เราจะทำการวิเคราะห์คานและ frame ที่มีจุดรองรับดังกล่าว โดยการจำลอง (model) จุดรองรับให้ เป็นขึ้นส่วนของโครงสร้างที่รับแรงในแนวแกน (two-force member) ที่อยู่ในแนวเดียวกันกับจุดรองรับ โดยที่ขึ้นส่วนดังกล่า วจะต้องมีค่าความแกร่งในแนวแกน AE/L ที่สูงมากเมื่อเทียบกับขึ้นส่วนอื่นๆ ของคานและ frame (ควรมีค่ามากกว่า 1000 เท่าของค่าความแกร่งสูงสุดของขึ้นส่วนของคานและ frame) เพื่อป้องกันไม่ให้การเปลี่ยนรูปร่างในแนวแกนของขึ้น ส่วนดังกล่าว และจะต้องมีค่าความแกร่งต่อการดัด EI/L ที่ใกล้เคียงศูนย์มากๆ เพื่อที่ชิ้นส่วนดังกล่าวจะได้ไม่มีความ ต้านทานต่อการดัด นอกจากนั้นแล้ว ปลายทั้งสองของชิ้นส่วนดังกล่าวจะถูกยึดรั้งกับพื้นและคานหรือ frame โดยใช้หมุด หลังจากที่ทำการจำลองจุดรองรับแล้ว เราจะทำการวิเคราะห์คานและ frame โดยพิจารณาให้ two-force member ดัง กล่าวเป็นชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่รวมอยู่กับคานและ frame

#### ตัวอย่างที่ 7-1

จงทำการวิเคราะห์คานเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1a โดยใช้ matrix displacement method กำหนดให้คานมี ค่า  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  และ  $I = 500(10^6)\,\mathrm{mm}^4$  จากนั้น จงเขียน moment diagram และร่าง elastic curve ของคาน



 กำหนดหมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วน ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom จากรูปที่ Ex 7-1b กำหนดให้จุดรองรับ A เป็น node หมายเลข 1 และจุดรองรับ B และจุดรองรับ C เป็น node หมายเลข 2 และหมายเลข 3 ตามลำดับ

เนื่องจากโครงสร้างไม่มีการทรุดตัวและไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดของหน้าตัดแบบทันทีทันใด เราจะกำหนดให้ node หมายเลข 3 และหมายเลข 2 ซึ่งไม่มีการยึดรั้ง (unconstrained degree of freedom) มี degree of freedom หมายเลข 1 และ 2 ตามลำดับ และกำหนดให้จุดรองรับแบบยึดแน่น (constrained degree of freedom) ที่ node หมาย เลข 1 มี degree of freedom หมายเลข 3

ในการวิเคราะห์คานโดยใช้ matrix displacement method เราจะกำหนดให้ ระบบแกน local coordinate ของ แต่ละชิ้นส่วนของคานมีปลายด้านใกล้ (near end) อยู่ทางด้านซ้ายมือ และปลายด้านไกล (far end) อยู่ทางด้านขวามือ เสมอ เพื่อความสะดวกในการหา **q** 

2. หาค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคาน ชิ้นส่วนที่ 1

$$(FEM)_{1L} = (FEM)_{1R} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2(24)^2}{12} = 96 \text{ kN} - \text{m}$$

เมื่อ (*FEM*)<sub>1L</sub> และ (*FEM*)<sub>1R</sub> คือค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 ทางด้านซ้ายมือ และทางด้านขวามือ ตามลำดับ

### ชิ้นส่วนที่ 2

$$(FEM)_{2L} = (FEM)_{2R} = \frac{PL}{8} = \frac{12(8)}{8} = 12 \text{ kN} - \text{m}$$

เมื่อ (*FEM*)<sub>2L</sub> และ (*FEM*)<sub>2R</sub> คือค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของซิ้นส่วนหมายเลข 2 ทางด้านซ้ายมือ และทางด้านขวามือ ตามลำดับ โดยที่ fixed-end moment ต่างๆ ที่หาได้มีทิศทาง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1c นอกจากนั้น แล้ว เราจะหาค่า moment ที่เกิดขึ้นที่ node หมายเลข 3 เนื่องจากแรง 10 kN กระทำที่ส่วนยื่นของคานได้มีค่าเท่ากับ 40 kN - m และมีทิศทางดังที่แสดง ค่า moment นี้จะถูกพิจารณาเป็นค่า fixed-end moment อีกค่าหนึ่งที่กระทำต่อ node หมายเลข 3

#### 3. เขียน matrix $\mathbf{Q}_k$

จาก fixed-end moment ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1c เราจะเขียนโมเมนต์ที่กระทำต่อ node ของคาน ซึ่งมีทิศทาง ตรงกันข้ามกับ fixed-end moment ที่ปลายของชิ้นส่วนของคานได้ดังที่แสดงโดยลูกศรเส้นประในรูปที่ Ex 7-1d จากนั้น เราจะรวมโมเมนต์ที่ node เพื่อหาองค์ประกอบของ matrix **Q**<sub>k</sub> ซึ่งแสดงโดยลูกศรเส้นทึบ ขอให้สังเกตด้วยว่า moment ภายนอก 40 kN - m ที่กระทำที่ node หมายเลข 2 จะถูกรวมกับ moment 96 kN - m และ moment 12 kN - m โดยตรง ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \end{cases} = \begin{cases} 12 - 40 \\ 96 - 12 - 40 \end{cases} = \begin{cases} -28 \\ 44 \end{cases} \text{ kN - m}$$

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

เนื่องจาก node หมายเลข 1 เป็นจุดรองรับแบบยึดแน่น ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\mathbf{D}_{k} = \{D_{3}\} = \{0\}$$

5. หา member global stiffness matrix  ${f k}$  ของแต่ละชิ้นส่วนของคานจากสมการที่ 7-13

### ชิ้นส่วนที่ 1

ชิ้นส่วนที่ 1 มี degree of freedom หมายเลข 3 ที่ปลายด้านใกล้และ degree of freedom หมายเลข 2 ที่ปลาย ด้านไกล ดังนั้น

$$\mathbf{k}_{1} = EI \begin{bmatrix} 3 & 2\\ 1/6 & 1/12\\ 1/12 & 1/6 \end{bmatrix} \frac{3}{2}$$

## ชิ้นส่วนที่ 2

ชิ้นส่วนที่ 2 มี degree of freedom หมายเลข 2 ที่ปลายด้านใกล้และ degree of freedom หมายเลข 1 ที่ปลาย ด้านไกล ดังนั้น

$$\mathbf{k}_{2} = EI \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. หา structure stiffness matrix  $\, K \,$ 

matrix **K** จะหาได้โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคานเข้าด้วยกัน โดยให้หมายเลขของ degree of freedom ใน matrix **k** ตรงกับหมายเลขของ degree of freedom ของ matrix **K** ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากคานมี

จำนวน degree of freedom เท่ากับ 3 ดังนั้น matrix  ${f K}$  จะมีขนาดเท่ากับ 3x3 และ matrix  ${f K}$  เป็น matrix ที่มีความ สมมาตร

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 2/3 & 1/12 \\ 0 & 1/12 & 1/6 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

และเราจะเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements ของคานได้ในรูป

$$\begin{cases} -28\\ 44\\ \overline{Q_3} \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0\\ 1/4 & 2/3 & 1/12\\ 0 & 1/12 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1\\ D_2\\ 0 \end{bmatrix}$$

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{\mu}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11} \mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12} \mathbf{D}_k$  และเนื่องจากคานไม่มีการทรุดตัว เราจะได้ว่า

$$\mathbf{D}_u = \mathbf{K}_{11}^{-1} [\mathbf{Q}_k]$$

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \end{cases} = \frac{1}{EI} \begin{cases} -109.54 \\ 107.08 \end{cases}$$
radian

8. หาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

$$\{Q_3\} = \{8.923\}$$
 kN - m

9. หาค่า moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคาน **q** 

จากสมการ  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D} = \mathbf{k} \mathbf{D}$  เราจะได้ว่า

ชิ้นส่วนที่ 1

$$\begin{cases} q_3 \\ q_2^1 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/6 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ 107.08/EI \end{cases} = \begin{cases} 8.923 \\ 17.847 \end{cases} \text{ kN - m}$$

เมื่อ  $\, q_{2}^{\, 1}\,$  แสดงถึง  $\, q_{2}\,$  ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 ของคาน เราควรสังเกตด้วยว่า  $\, q_{3} = Q_{3}\,$ 

## ชิ้นส่วนที่ 2

$$\begin{cases} q_2^2 \\ q_1 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{cases} 107.08/EI \\ -109.54/EI \end{cases} = \begin{cases} 26.155 \\ -28 \end{cases} \text{ kN - m}$$

จาก sign convention ที่เราใช้ เราจะเขียนแผนภาพของ moment ภายใน *q* ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1e และ เมื่อเรานำค่า moment ภายใน *q* มารวมกับ fixed-end moment ที่เราหามาได้ในขั้นตอนที่ 2 ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1f แล้ว เราจะได้ ค่า moment ภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงภายนอกที่ปลายของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-1g



10. ทำการเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram และร่าง elastic curve ของคาน

รูปที่ Ex 7-1h แสดงแผนภาพ moment diagram ของคานและรูปที่ Ex 7-1i แสดงร่าง elastic curve ของคาน โดยใช้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่หาได้และ moment diagram



Ans.

#### ตัวอย่างที่ 7-2

จงทำการวิเคราะห์คานเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-2a โดยใช้ matrix displacement method เพื่อหาค่าการ เปลี่ยนตำแหน่งและแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ กำหนดให้จุดรองรับ *B* ของคานเกิดการทรุดตัว (settlement) ในทิศ ทางดิ่งลง 10 mm และคานมีค่า *E* = 200 GPa และ *I* = 500(10<sup>6</sup>)mm<sup>4</sup>



 กำหนดหมายเลข node หมายเลขขึ้นส่วน ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom จากรูปที่ Ex 7-2b ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจาก node หมายเลข 2 เกิดการทรุดตัวในแนวดิ่ง ดังนั้น node นี้จึงมี degree of freedom หมายเลข 3 เพื่อพิจารณาถึงการทรุดตัวดังกล่าว

2. หาค่า fixed-end shear force และ fixed-end moment

ค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 และชิ้นส่วนหมายเลข 2 ของคานจะมีค่าเท่ากับ ค่าที่เราหาได้ในตัวอย่างที่ 7-1 ดังที่แสดงอยู่ในรูปที่ Ex 7-2c แต่เนื่องจาก node หมายเลข 2 เกิดการทรุดตัวในแนวดิ่ง ดัง นั้น เราจะต้องหาค่าแรงเฉือน (shear force) ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 และชิ้นส่วนหมายเลข 2 ของคาน ด้วย

### 3. เขียน matrix $\mathbf{Q}_k$

จาก fixed-end shear force และ fixed-end moment ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-2c เราจะเขียนแรงและโมเมนต์ที่ กระทำต่อ node ของคาน ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามกับ fixed-end shear force และ fixed-end moment ได้ดังที่แสดงโดย ลูกศรเส้นประในรูปที่ Ex 7-2d จากนั้น เราจะรวมแรงเพื่อหาองค์ประกอบของ matrix **Q**<sub>k</sub> ซึ่งแสดงโดยลูกศรเส้นทึบ โดย ที่

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \end{cases} = \begin{cases} 12 \\ 96 - 12 \end{cases} = \begin{cases} 12 \\ 84 \end{cases} \quad kN - m \\ kN - m \end{cases}$$

ขอให้สังเกตด้วยว่า ในที่นี้ เราให้แรงต้านทานต่อการทรุดตัว F ซึ่งเป็นแรงที่เราไม่ทราบค่าและมีทิศทางเดียวกัน กับ degree of freedom หมายเลข 3 รวมอยู่กับแรงเฉือนเนื่องจากแรงกระทำภายนอก ซึ่งเราจะได้ว่า

$$Q_3 = -24 - 6 + F = F - 30 \,\mathrm{kN}$$

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{3} \\ D_{4} \end{cases} = \begin{cases} -0.010 \\ 0 \end{cases} \mathbf{m}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน จากสมการที่ 7-12

$$\begin{bmatrix} Q_{Ny} \\ Q_{Nz} \\ Q_{Fy} \\ Q_{Fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Ny} \\ D_{Nz} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{bmatrix}$$

ขอให้สังเกตว่า matrix **k** ของขึ้นส่วนทั้งสองของคานจะเป็น matrix 3x3 เนื่องจากแต่ละชิ้นส่วนมี degree of freedom เท่ากับ 3

#### ชิ้นส่วนที่ 1

ชิ้นส่วนที่ 1 มี degree of freedom หมายเลข 4 ที่ปลายด้านใกล้และ degree of freedom หมายเลข 3 และ หมายเลข 2 ตามลำดับ ที่ปลายด้านไกล ดังนั้น

$$\mathbf{k}_{1} = EI \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1/6 & -1/96 & 1/12 \\ -1/96 & 1/1152 & -1/96 \\ 1/12 & -1/96 & 1/6 \end{bmatrix} 2$$

## ชิ้นส่วนที่ 2

ชิ้นส่วนที่ 2 มี degree of freedom หมายเลข 3 และหมายเลข 2 ตามลำดับ ที่ปลายด้านใกล้และ degree of freedom หมายเลข 1 ที่ปลายด้านใกล ดังนั้น

$$\mathbf{k}_{2} = EI \begin{bmatrix} 3/128 & 3/32 & 3/32 \\ 3/32 & 1/2 & 1/4 \\ 3/32 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\\ 2\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}$$

6. หา structure stiffness matrix  ${f K}$ 

matrix **K** จะหาได้โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละซิ้นส่วนของคานเข้าด้วยกัน โดยให้หมายเลขของ degree of freedom ใน matrix **k** ตรงกับหมายเลขของ degree of freedom ของ matrix **K** ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากคานมี จำนวน degree of freedom เท่ากับ 4 ดังนั้น structure stiffness matrix จะมีขนาดเท่ากับ 4x4
$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.5000 & 0.2500 & 0.0938 & 0 \\ 0.2500 & 0.6667 & 0.0833 & 0.0833 \\ 0.0938 & 0.0833 & 0.0243 & -0.0104 \\ 0 & 0.0833 & -0.0104 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

เมื่อเรากำหนดให้ F เป็นแรงปฏิกริยาที่ต้านทานต่อการทรุดตัวของคานในแนว degree of freedom หมายเลข 3 แล้ว เราจะเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements ของคานได้ในรูป

$$\begin{cases} 12\\ 84\\ F-30\\ Q_4 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.2500 & 0.0938 & 0\\ 0.2500 & 0.6667 & 0.0833 & 0.0833\\ 0.0938 & 0.0833 & 0.0243 & -0.0104\\ 0 & 0.0833 & -0.0104 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1\\ D_2\\ -0.010\\ 0 \end{bmatrix}$$

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$  เราจะได้ว่า  $\mathbf{D}_k - \mathbf{K}_k^{-1}[\mathbf{O}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{D}_k]$ 

$$\mathbf{D}_{u} = \mathbf{K}_{11} [\mathbf{Q}_{k} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{D}_{k}]$$

$$\begin{cases} D_{1} \\ D_{2} \end{cases} = \mathbf{K}_{11}^{-1} \begin{cases} 12 + 93.8 \\ 84 + 83.3 \end{cases} = \begin{cases} 1.06 \\ 2.11 \end{cases} 10^{-3} \text{ radian} \qquad \text{Ans.} \end{cases}$$

8. หาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ $\mathbf{Q}_u$  จะหาได้จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k$  ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\begin{cases} F \\ Q_4 \end{cases} = \begin{cases} 30 + 3.22 \\ 28.03 \end{cases} = \begin{cases} 33.22 \\ 28.03 \end{cases} kN$$
Ans.

9. หาค่าแรงและโมเมนต์ภายใน  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D} = \mathbf{k} \mathbf{D}$ 

# ชิ้นส่วนที่ 1

$$\begin{cases} q_4 \\ q_3^1 \\ q_2^1 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/6 & -1/96 & 1/12 \\ -1/96 & 1/1152 & -1/96 \\ 1/12 & -1/96 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.010 \\ 2.11(10^{-3}) \end{bmatrix} = \begin{cases} 28.0 \\ -3.066 \\ 45.583 \end{bmatrix} kN - m$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\begin{cases} q_3^2 \\ q_2^2 \\ q_1 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 3/128 & 3/32 & 3/32 \\ 3/32 & 1/2 & 1/4 \\ 3/32 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.010 \\ 2.11(10^{-3}) \\ 1.06(10^{-3}) \end{bmatrix} = \begin{cases} 6.281 \\ 38.25 \\ 12.0 \end{bmatrix}$$
 kN kN - m kN - m

10. ทำการเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram และร่าง elastic curve ของคาน

นำค่าแรงและโมเมนต์ภายในที่ได้ในขั้นตอนที่ 9 มารวมกับ fixed-end shear force และ fixed-end moment ใน ขั้นตอนที่ 2 ซึ่งเราจะได้ free-body diagram ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน จากนั้น ทำการเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram และร่าง elastic curve ของคาน

จงทำการวิเคราะห์คานเหล็ก ซึ่งมีจุดหมุนภายใน (internal hinge) ที่จุด D ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-3a โดยใช้ matrix displacement method กำหนดให้คานมีค่า  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  และ  $I = 500(10^6) \mathrm{mm}^4$  จากนั้น จงเขียน moment diagram และร่าง elastic curve ของคาน



 กำหนดหมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วน ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom จากรูปที่ Ex 7-3b ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจาก node หมายเลข 2 เป็นจุดหมุนภายใน (internal hinge) ดังนั้น node ดังกล่าวจะมี degree of freedom รวม 3 ค่าคือ degree of freedom หมายเลข 2 ถึงหมายเลข 4

2. หาค่า fixed-end shear force และ fixed-end moment

fixed-end shear force และ fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 และชิ้นส่วนหมายเลข 3 ของคานมีค่าและทิศทาง ดังที่แสดงอยู่ในรูปที่ Ex 7-3c เนื่องจาก node หมายเลข 2 เป็น internal hinge ดังนั้น เราต้อง หาค่าของแรงเฉือน (shear force) ที่เกิดขึ้นที่ node ดังกล่าวด้วย

3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

จาก fixed-end shear force และ fixed-end moment ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-3c เราจะเขียนแรงและโมเมนต์ที่ กระทำต่อ node ของคาน ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามกับ fixed-end shear force และ fixed-end moment ได้ดังที่แสดงโดย ลูกศรเส้นประในรูปที่ Ex 7-3d จากนั้น เราจะรวมแรงเพื่อหาองค์ประกอบของ matrix **Q**<sub>k</sub> และเราจะได้ว่า

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \\ Q_{3} \\ Q_{4} \end{cases} = \begin{cases} -12 \\ 0 \\ kN - m \\ 24 \\ -12 \end{cases} kN - m$$

### 4. เขียน matrix $\mathbf{D}_k$

เนื่องจาก node หมายเลข 1 และ 4 เป็นจุดรองรับแบบยึดแน่น ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{5} \\ D_{6} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \mathbf{m}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคานจากสมการที่ 7-12

ขอให้สังเกตว่า matrix  $\mathbf{k}_1$  และ matrix  $\mathbf{k}_2$  เป็น matrix 3x3 เนื่องจากแต่ละชิ้นส่วนมี degree of freedom เท่า กับ 3 แต่ matrix  $\mathbf{k}_3$  เป็น matrix 2x2 โดยการพิจารณาลำดับก่อนหลังของ degree of freedom ที่ปลายด้านใกล้และที่ ปลายด้านไกล เราจะได้ว่า

ชิ้นส่วนที่ 1

$$\mathbf{k}_{1} = EI \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 1/3 & -1/24 & 1/6 \\ -1/24 & 1/144 & -1/24 \\ 1/6 & -1/24 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\mathbf{k}_{2} = EI \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1/144 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/3 & 1/6 \\ 1/24 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 3

$$\mathbf{k}_{3} = EI \begin{bmatrix} 1 & 5\\ 1/2 & 1/4\\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ 5 \end{bmatrix}$$

6. หา structure stiffness matrix  $\, K \,$ 

matrix **K** จะหาได้โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคานเข้าด้วยกัน โดยให้หมายเลขของ degree of freedom ใน matrix **k** ตรงกับหมายเลขของ degree of freedom ของ matrix **K** ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากคานมี จำนวน degree of freedom เท่ากับ 6 ดังนั้น structure stiffness matrix จะมีขนาดเท่ากับ 6x6

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.83333 & 0.16667 & 0 & 0.04167 & 0.25000 & 0 \\ 0.16667 & 0.33333 & 0 & 0.04167 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.33333 & -0.04167 & 0 & 0.16667 \\ 0.04167 & 0.04167 & -0.04167 & 0.01389 & 0 & -0.04167 \\ 0.25000 & 0 & 0 & 0 & 0.50000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16667 & 0.04167 & 0 & 0.33333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

และเราจะเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements ของคานได้ในรูป

Structural Analysis

$$\begin{bmatrix} -12\\0\\24\\-12\\Q_5\\Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0.83333 & 0.16667 & 0 & 0.04167 & 0.25000 & 0\\0.16667 & 0.33333 & 0 & 0.04167 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.33333 & -0.04167 & 0 & 0.16667\\0.04167 & 0.04167 & -0.04167 & 0.01389 & 0 & -0.04167\\0.25000 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.16667 & -0.04167 & 0 & 0.33333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1\\D_2\\D_3\\D_4\\0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11} \mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12} \mathbf{D}_k$  และเนื่องจากคานไม่มีการทรุดตัว เราจะได้ว่า  $\mathbf{D}_u = \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_k$ 

	$\left(D_{1}\right)$		0.67		radian
	$D_2$		3.41	$10^{-3}$	radian
•	$D_3$	~ _ `	-3.03	10	radian
	$\left[D_{4}\right]$		– 29.98		m

8. หาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

$$\begin{cases} Q_5 \\ Q_6 \end{cases} = \begin{cases} 16.75 \\ 74.43 \end{cases} kN - m$$

หาค่าแรงและโมเมนต์ภายใน q ที่เกิดขึ้นที่ปลายของคาน

จากสมการ  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D} = \mathbf{k} \mathbf{D}$  เราจะได้ว่า

ชิ้นส่วนที่ 1

$$\begin{cases} q_6 \\ q_4^1 \\ q_3 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/3 & -1/24 & 1/6 \\ -1/24 & 1/144 & -1/24 \\ 1/6 & -1/24 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -29.98 \\ -3.03 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{cases} 74.46 \\ -8.19 \\ 24 \end{cases} \begin{array}{c} \text{kN} - \text{m} \\ \text{kN} \\ \text{kN} - \text{m} \end{cases}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\begin{cases} q_4^2 \\ q_2 \\ q_1^2 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/144 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/3 & 1/6 \\ 1/24 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -29.98 \\ 3.41 \\ 0.667 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{cases} -3.81 \\ 0 \\ -45.60 \end{bmatrix} \text{ kN - m}$$

ชิ้นส่วนที่ 3

$$\begin{cases} q_1^3 \\ q_5 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{cases} 0.667 \\ 0 \end{cases} 10^{-3} = \begin{cases} 33.6 \\ 16.75 \end{cases} \text{ kN - m}$$

เราควรสังเกตด้วยว่า  $q_5=Q_5$  และ  $q_6=Q_6$ 

จาก sign convention ที่เราใช้ เราจะเขียนแผนภาพของแรงและ moment ภายใน *q* ได้ และเมื่อเรานำค่าแรง และ moment ดังกล่าวรวมกับแผนภาพของ fixed-end shear และ fixed-end moment แล้ว เราจะได้ ค่าแรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงภายนอกที่ปลายของคาน และเราจะเขียน moment diagram และ elastic curve ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-3e และ Ex 7-3f



Ans.

จงทำการวิเคราะห์คานเหล็กที่มีหน้าตัดเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใดที่จุด D ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-4a โดยใช้ matrix displacement method เพื่อหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและแรงปฏิกริยา กำหนดให้คานมีค่า  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  และ  $I = 500(10^6)\,\mathrm{mm}^4$ 



 กำหนดหมายเลข node หมายเลขขึ้นส่วน ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom จากรูปที่ Ex 7-4b ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจาก node หมายเลข 2 เป็นจุดที่หน้าตัดของคานมีการเปลี่ยนแปลง ดังนั้น node นี้จึงมี degree of freedom หมายเลข 2 และ 3 เพื่อรองรับต่อการเปลี่ยนแปลงของ flexural stiffness ของ คานที่ node ดังกล่าว

2. หาค่า fixed-end shear force และ fixed-end moment

fixed-end shear force และ fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของคานมีค่าและทิศทาง ดัง ที่แสดงอยู่ในรูปที่ Ex 7-4c เนื่องจาก node หมายเลข 2 มี degree of freedom ในแนวดิ่ง ดังนั้น เราต้องหาค่าของ shear force ที่ node นี้ด้วย

#### 3. เขียน matrix $\mathbf{Q}_k$

จาก fixed-end shear force และ fixed-end moment ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-4c เราจะเขียนแรงและโมเมนต์ที่ กระทำต่อ node ของคาน ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามกับ fixed-end shear force และ fixed-end moment ดังกล่าวได้ดังที่ แสดงโดยลูกศรเส้นประในรูปที่ Ex 7-4d จากนั้น เราจะรวมแรงเพื่อหาองค์ประกอบของ matrix **Q**<sub>k</sub> ซึ่งแสดงโดยลูกศร เส้นทึบ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \\ Q_{3} \end{cases} = \begin{cases} 12 \\ 20 \\ -24 \end{cases} \begin{array}{c} kN - m \\ kN - m \\ kN \end{cases}$$

### 4. เขียน matrix $\mathbf{D}_k$

เนื่องจาก node หมายเลข 1 และ 4 เป็นจุดรองรับแบบยึดแน่น ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{4} \\ D_{5} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \mathbf{m}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคานจากสมการที่ 7-12

ขอให้สังเกตว่า matrix  $\mathbf{k}_1$  และ matrix  $\mathbf{k}_2$  เป็น matrix 3x3 เนื่องจากแต่ละชิ้นส่วนมี degree of freedom เท่า กับ 3 แต่ matrix  $\mathbf{k}_3$  เป็น matrix 2x2 โดยการพิจารณาลำดับก่อนหลังของ degree of freedom ที่ปลายด้านใกล้และที่ ปลายด้านไกล เราจะได้ว่า

ชิ้นส่วนที่ 1

$$\mathbf{k}_{1} = EI \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1/3 & -1/24 & 1/6 \\ -1/24 & 1/144 & -1/24 \\ 1/6 & -1/24 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\mathbf{k}_{2} = \frac{EI}{2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1/144 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/3 & 1/6 \\ 1/24 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 3

$$\mathbf{k}_{3} = \frac{EI}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \frac{1}{4}$$

6. หา structure stiffness matrix  $\, K \,$ 

matrix **K** จะหาได้โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละขึ้นส่วนของคานเข้าด้วยกัน โดยให้หมายเลขของ degree of freedom ใน matrix **k** ตรงกับหมายเลขของ degree of freedom ของ matrix **K** ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากคานมี จำนวน degree of freedom เท่ากับ 5 ดังนั้น structure stiffness matrix จะมีขนาดเท่ากับ 5x5

	1	2	3	4	5	
	0.41667	0.08333	0.02083	0.12500	0	1
	0.08333	0.5	-0.02083	0	0.16667	2
K = EI	0.02083	-0.02083	0.01042	0	-0.04167	3
	0.12500	0	0	0.25000	0	4
	0	0.16667	-0.04167	0	0.33333	5

และเราจะเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements ของคานได้ในรูป

$$\begin{cases} 12\\ 20\\ -24\\ Q_4\\ Q_5 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 0.41667 & 0.08333 & 0.02083 & 0.12500 & 0\\ 0.08333 & 0.50000 & -0.02083 & 0 & 0.16667 \\ 0.02083 & -0.02083 & 0.01042 & 0 & -0.04167 \\ 0.12500 & 0 & 0 & 0.25000 & 0 \\ 0 & 0.16667 & -0.04167 & 0 & 0.33333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1\\ D_2\\ D_3\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

7. หาค่าการเปลี่ยนต่ำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{D}_u = \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_k$  เราจะได้ว่า

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{cases} = \begin{cases} 1.98 \\ -1.15 \\ -29.31 \end{cases} \text{ radian}$$
 Ans.

8. หาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

$$\begin{cases} Q_4 \\ Q_5 \end{cases} = \begin{cases} 24.80 \\ 102.93 \end{cases} \quad \text{kN - m}$$
Ans.

Note

ในการเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคาน เริ่มต้น ทำการหาค่าแรงและโมเมนต์ ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของคานจากสมการ  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D} = \mathbf{k} \mathbf{D}$  เราจะได้ว่า

ชิ้นส่วนที่ 1

$$\begin{cases} q_5 \\ q_3^1 \\ q_2 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/3 & -1/24 & 1/6 \\ -1/24 & 1/144 & -1/24 \\ 1/6 & -1/24 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -29.31 \\ -1.15 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{cases} 102.93 \\ -15.56 \\ 83.79 \end{cases} kN - m$$

สิ้นส่วนที่ 2

$$\begin{cases} q_3^2 \\ q_2 \\ q_1^2 \end{cases} = \frac{EI}{2} \begin{bmatrix} 1/144 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/3 & 1/6 \\ 1/24 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -29.31 \\ -1.15 \\ 1.98 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{cases} -8.45 \\ -63.73 \\ -37.65 \end{bmatrix} kN - m$$

ชิ้นส่วนที่ 3

$$\begin{cases} q_1^3 \\ q_4 \end{cases} = \frac{EI}{2} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{cases} 1.98 \\ 0 \end{cases} 10^{-3} = \begin{cases} 49.6 \\ 24.8 \end{cases} \text{ kN - m}$$

จาก sign convention ที่เราใช้ เราจะเขียนแผนภาพของแรงและ moment ภายใน q ได้ จากนั้น นำมารวมกับ fixed-end shear force และ fixed-end moment ในขั้นตอนที่ 2 ซึ่งเราจะได้ free-body diagram ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน สุดท้าย ทำการเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram และร่าง elastic curve ของคาน

จงทำการวิเคราะห์คานเหล็ก ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในช่วง AB ของคานแบบเป็นเส้นตรงจากผิวบนของ คานถึงท้องคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-5a โดยใช้ matrix displacement method จากนั้น จงทำการเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram และร่าง elastic curve ของคาน กำหนดให้คานมีความลึก d = 0.5 m และมีค่า  $\alpha = 12(10^{-6} / ^{o} C) E = 200 \text{ GPa } I = 500(10^{6}) \text{mm}^{4}$ 



 กำหนดหมายเลข node หมายเลขขึ้นส่วน ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom เนื่องจากคานไม่มีการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวดิ่ง ดังนั้น เราจะพิจารณา degree of freedom ที่สอดคล้องกับการ หมุนที่เกิดขึ้นที่ node ของคานเท่านั้น ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-5b

2. หาค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคาน ดังที่แสดงอยู่ในรูปที่ Ex 7-5c fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของคานมีลักษณะดังที่แสดงอยู่ในรูปที่ Ex 7-5c โดยมีค่าเท่ากับ

$$\frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{d} = \frac{12(10^{-6} / {}^{o} C)200(10^{6} \text{ kN/m}^2)500(10^{-6} \text{ m}^4)[70^{o} C - 20^{o} C]}{0.5 \text{ m}} = 120 \text{ kN - m}$$

3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

จาก fixed-end moment ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-5c เราจะเขียนโมเมนต์ที่กระทำต่อ node ของคาน ซึ่งมีทิศทาง ตรงกันข้ามกับ fixed-end moment ดังกล่าวได้ดังที่แสดงโดยลูกศรเส้นประในรูปที่ Ex 7-5d จากนั้น เราจะรวมแรงเพื่อหา องค์ประกอบของ matrix **Q**<sub>k</sub> ซึ่งเราจะได้ว่า

 $\mathbf{Q}_{k} = \{Q_{1}\} = \{-120\} \text{ kN} - \text{m}$ 

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

เนื่องจาก node หมายเลข 1 และ 3 ไม่มีการทรุดตัว ดังนั้น เราจะได้ว่า

Structural Analysis

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{2} \\ D_{3} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \mathbf{m}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคาน ชิ้นส่วนที่ 1

$$\mathbf{k}_{1} = EI \begin{bmatrix} 3 & 1\\ 1/6 & 1/12\\ 1/12 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\\ 1 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\mathbf{k}_{2} = EI\begin{bmatrix} 1 & 2\\ 1/2 & 1/4\\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ 2 \end{bmatrix}$$

6. หา structure stiffness matrix  ${f K}$  และเขียนความสัมพันธ์ของ loads and displacements

โดยการรวม member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของคานเข้าด้วยกัน และเราจะเขียนความ สัมพันธ์ของ loads and displacements ได้ในรูป

(-120)	$\left\lceil 2/3 \right\rceil$	1/4	1/12	$\left(D_{1}\right)$	
$\left\{ Q_2 \right\} = E$	<i>I</i> 1/4	1/2	0	{0	ļ
$\left[ \mathcal{Q}_{3} \right]$	1/12	0	1/12	0	J

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

$$\{D_1\} = \{-1.80\}10^{-3}$$
 radian

8. หาค่าแรงปฏิกริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ $\mathbf{Q}_{u}$ 

$$\begin{cases} Q_2 \\ Q_3 \end{cases} = \begin{cases} -45 \\ -15 \end{cases} kN - m$$

9. หาค่าโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของคาน

ชิ้นส่วนที่ 1

$$\begin{cases} q_3 \\ q_1^1 \\ \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/6 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{cases} 0 \\ -180/EI \\ \end{cases} = \begin{cases} -15 \\ -30 \\ \end{cases} \text{ kN - m}$$

เมื่อ  $q_1^1$  แสดงถึง  $q_1$  ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 ของคาน

# ชิ้นส่วนที่ 2

$$\begin{cases} q_1^2 \\ q_2 \end{cases} = EI \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{cases} -180/EI \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -90 \\ -45 \end{cases} \text{ kN - m}$$

10. เขียน moment diagram และ elastic curve ของคาน

จาก sign convention ที่เราใช้ เราจะเขียนแผนภาพของ moment ภายใน *q* ได้ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-5e และ เมื่อเรานำค่า moment ภายใน *q* มารวมกับ fixed-end moment ที่เราหามาได้ในขั้นตอนที่ 2 ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-5f แล้ว เราจะได้ ค่า moment ภายในที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงภายนอกที่ปลายของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-5g



สุดท้าย เราจะเขียน moment diagram และ elastic curve ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-5h และ Ex 7-5i



Ans.

จงวิเคราะห์โครงข้อแข็งเหล็ก ซึ่งมีหน้าตัดแบบ wide-flange ขนาด W200x22 ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-6a โดยใช้ matrix displacement method จากนั้น จงเขียนแผนภาพ moment diagram และร่าง elastic curve ของโครงข้อ แข็ง กำหนดให้ชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งมี E = 200 GPa,  $I = 20(10^6) \text{ mm}^4$ , และ  $A = 2860 \text{ mm}^2$ 





กำหนดระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom

 จากรูปที่ Ex 7-6b เนื่องจาก node หมายเลข 2 ไม่มีการยึดรั้ง ดังนั้น เราจะให้ degree of freedom ที่ node ดังกล่าวมีหมายเลข 1 ถึง 3 (unconstrained degree of freedom) นอกจากนั้นแล้ว เนื่องจากจุดรองรับ แบบเลื่อน (roller support) ที่จุดรองรับ A ไม่มีการยึดรั้งในแนวนอนและการหมุน เราจะให้ degree of freedom ดังกล่าวเป็นหมายเลข 4 และ 5 ตามลำดับ และ degree of freedom ที่มีการยึดรั้งในแนวดิ่งจะ เป็นหมายเลข 6 (constrained degree of freedom) สุดท้าย เนื่องจาก node หมายเลข 3 เป็นจุดรองรับ แบบยึดแน่น ดังนั้น เรากำหนดให้ degree of freedom ที่ node ดังกล่าวมีหมายเลขจาก 7 ถึง 9

2.หาค่า fixed-end forces และ fixed-end moment

### ชิ้นส่วนที่ 1

จากรูปที่ Ex 7-6a เมื่อเราทำการถ่ายแรงกระทำ 10 kN จากส่วนยื่นมากระทำที่โครงข้อแข็ง เราจะได้ว่า ชิ้นส่วน ที่ 1 นี้จะโดนกระทำโดยแรงในแนวแกน 10 kN และ moment 10 kN - m ที่กึ่งกลางความยาวของชิ้นส่วน และเราจะ หาค่า fixed-end forces และ fixed-end moment ได้ดังนี้

จากรูปที่ Ex 7-6c ค่า fixed-end moment และ fixed-end shear เนื่องจาก moment  $10\,\mathrm{kN}$  - m มีค่าเท่ากับ

$$(FEM)_{1B} = (FEM)_{1T} = \frac{M}{4} = \frac{-10}{4} = -2.5 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(V)_{1B} = (V)_{1T} = \frac{3M}{2L} = -5 \text{ kN}$ 

เมื่อ (*FEM*)<sub>1B</sub> และ (*FEM*)<sub>1T</sub> คือ ค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 ทางด้านล่าง (bottom) และทางด้านบน (top) ตามลำดับ และ (V)<sub>1B</sub> และ (V)<sub>1T</sub> คือค่า fixed-end shear ที่เกิดขึ้นที่ปลายของ ชิ้นส่วนหมายเลข 1 ทางด้านล่างและทางด้านบน ตามลำดับ จากรูปที่ Ex 7-6c ค่า fixed-end axial force เนื่องจากแรงในแนวแกน  $10\,\mathrm{kN}$  มีค่าเท่ากับ



# ชิ้นส่วนที่ 2

$$(FEM)_{2L} = (FEM)_{2R} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2(4)^2}{12} = \frac{8}{3} \text{ kN} - \text{m}$$

โดยที่ (*FEM*)<sub>2L</sub> และ (*FEM*)<sub>2R</sub> คือ ค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 2 ทางด้าน ซ้ายมือ (left) และทางด้านขวามือ (right) ตามลำดับ

โดยสรุปแล้ว fixed-end forces และ fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงสร้างจะมี ลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-6d



3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

จากรูปที่ Ex 7-6d เราจะเขียนแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อ node ต่างๆ ของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-6e ซึ่งแรงและโมเมนต์มีทิศทางตรงกันข้ามกับ fixed-end moment และ fixed-end shear ในรูปที่ Ex 7-6d ดังนั้น จาก sign convention เราจะได้

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \\ Q_{3} \\ Q_{4} \\ Q_{5} \end{cases} = \begin{cases} 5 \\ -9 \\ -1/6 \\ -5 \\ 2.5 \end{cases} \begin{cases} kN \\ kN \\ kN - m \\ kN \\ kN - m \end{cases}$$

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

เนื่องจากโครงข้อแข็งไม่มีการทรุดตัวเกิดขึ้น ดังนั้น

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{6} \\ D_{7} \\ D_{8} \\ D_{9} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ชิ้**นส่วนที่ 1** 

$$\frac{AE}{L} = 190666.67 \text{ kN/m}$$
$$\frac{12EI}{L^3} = 1777.78 \text{ kN/m}$$
$$\frac{6EI}{L^2} = 2666.67 \text{ kN}$$
$$\frac{4EI}{L} = 5333.33 \text{ kN - m}$$
$$\frac{2EI}{L} = 2666.67 \text{ kN - m}$$
$$\lambda_x = \frac{0-0}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{-3-0}{3} = -1$$

จากสมการที่ 7-10 และเนื่องจากปลายด้านใกล้ (near end) ของระบบแกน local coordinate มี degree of freedom หมายเลข 1, 2, และ 3 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' และปลายด้านไกลมี degree of freedom หมายเลข 4, 6, และ 5 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' ดังนั้น เราจะได้ว่า

	1	2	3	4	6	5	
	1777.78	0.00	2666.67	-1777.78	0.00	2666.67	1
	0.00	190666.67	0.00	0.00	-190666.67	0.00	2
Ъ _	2666.67	0.00	5333.33	-2666.67	0.00	2666.67	3
$\mathbf{\kappa}_1 =$	-1777.78	0.00	-2666.67	1777.78	0.00	- 2666.67	4
	0.00	-190666.67	0.00	0.00	190666.67	0.00	6
	2666.67	0.00	2666.67	-2666.67	0.00	5333.33	5

# ชิ้นส่วนที่ 2

$$\frac{AE}{L} = 143000 \text{ kN/m}$$
$$\frac{12EI}{L^3} = 750 \text{ kN/m}$$
$$\frac{6EI}{L^2} = 1500 \text{ kN}$$
$$\frac{4EI}{L} = 4000 \text{ kN - m}$$
$$\frac{2EI}{L} = 2000 \text{ kN - m}$$

Structural Analysis

$$\lambda_x = \frac{4-0}{4} = 1 \qquad \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{4} = 0$$

จากสมการที่ 7-10 และเนื่องจากปลายด้านใกล้ (near end) ของระบบแกน local coordinate มี degree of freedom หมายเลข 1, 2, และ 3 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' และปลายด้านไกลมี degree of freedom หมายเลข 7, 8, และ 9 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' ดังนั้น เราจะได้ว่า

	1	2	3	7	8	9	
	143000	0	0	-143000	0	0 -	1
	0 750 1500		0	-750	1500	2	
ŀ _	0	1500	4000	0	-1500	2000	3
$\mathbf{k}_2 =$	-143000	0	0	143000	0	0	7
	0	-750	-1500	0	750	-1500	8
	0	1500	2000	0	-1500	4000	9

6. หา structure stiffness matrix  $\, K \,$ 

matrix **K** จะหาได้โดยการรวม matrix **k** ของแต่ละซิ้นส่วนของโครงข้อแข็งเข้าด้วยกันโดยให้หมายเลขของ degree of freedom ใน matrix **k** ตรงกับหมายเลขของ degree of freedom ของ matrix **K** ขอให้สังเกตด้วยว่า เนื่องจากโครงข้อแข็งมีจำนวน degree of freedom เท่ากับ 9 ดังนั้น matrix **K** จึงมีขนาด 9x9 นอกจากนั้นแล้ว matrix **K** เป็น matrix ที่มีความสมมาตรด้วย จากนั้น เราจะเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements ได้ในรูป

5	)	[144777.78	0	2666.67	-1777.78	2666.67	0	-143000	0	0 ]	$\left[D_{1}\right]$
-9		0	191416.67	1500	0	0	-190666.67	0	-750	1500	$D_2$
-1/6		2666.67	1500	9333.33	-2666.67	2666.67	0	0	-1500	2000	$D_3$
-5		-1777.78	0	-2666.67	1777.78	- 2666.67	0	0	0	0	$D_4$
2.5	} =	2666.67	0	2666.67	- 2666.67	5333.33	0	0	0	0	$\left\{ D_{5} \right\}$
$Q_6$		0	-190666.67	0	0	0	190666.67	0	0	0	0
$Q_7$		-143000	0	0	0	0	0	143000	0	0	0
$Q_8$		0	-750	-1500	0	0	0	0	750	-1500	0
$Q_9$	J	0	1500	2000	0	0	0	0	-1500	4000	0

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_{u}$ 

เนื่องจากโครงสร้างไม่มีการทรุดตัว จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$  เราจะได้ว่า

$$\mathbf{D}_u = \mathbf{K}_{11}^{-1} [\mathbf{Q}_k]$$

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{cases} = \begin{cases} \approx 0 \\ -0.02 \\ -3.16(10^{-3}) \\ -17.92 \\ -6.91(10^{-3}) \end{cases}$$
mm radian

8. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_u$ จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{vmatrix} = \begin{cases} 4.25 \\ 0 \\ kN \\ kN \\ 4.75 \\ -6.35 \end{cases} kN$$

9. หาค่าแรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง

จากสมการ  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D}$  เราจะได้ว่า

ชิ้นส่วนที่ 1

$\left[q_{1}\right]$		190666.67	0.00	0.00	-190666.67	0.00	0.00	0	-1	0	0	0	0	0
$q_2$		0.00	1777.78	2666.67	0.00	-1777.78	2666.67	1	0	0	0	0	0	$-2.23(10^{-5})$
$ q_3 $	_	0.00	2666.67	5333.33	0.00	-2666.67	2666.67	0	0	1	0	0	0	$-3.16(10^{-3})$
$q_4$		-190666.67	0.00	0.00	190666.67	0.00	0.00	0	0	0	0	-1	0	$-17.92(10^{-3})$
$q_6$		0.00	-1777.78	-2666.67	0.00	1777.78	-2666.67	0	0	0	1	0	0	0
$\left q_{5}\right $		0.00	2666.67	2666.67	0.00	-2666.67	5333.33	0	0	0	0	0	1	$\left[-6.91(10^{-3})\right]$

$$\begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_6 \\ q_5 \end{cases} = \begin{cases} 4.25 \\ 5.0 \\ 12.5 \\ -4.25 \\ -5.0 \\ kN \\ kN - m \end{cases}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$\left[ q_{1} \right]$		143000	0	0	-143000	0	0 ]	[1	0	0	0	0	0]	[0 ]
$ q_2 $		0	750	1500	0	-750	1500	0	1	0	0	0	0	$-2.23(10^{-5})$
$ q_3 $		0	1500	4000	0	-1500	2000	0	0	1	0	0	0	$-3.16(10^{-3})$
$\int q_7$	$\geq =$	-143000	0	0	143000	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$ q_8 $		0	-750	-1500	0	750	-1500	0	0	0	0	1	0	0
$ q_9 $		0	1500	2000	0	-1500	4000	0	0	0	0	0	1	0

$\left[ q_{1} \right]$		0	kN
$q_2$		-4.75	kN
$q_3$	[	-12.67	kN - m
$q_7$		0	kN
$q_8$		4.75	kN
$\left(q_{9}\right)$		-6.35	kN - m

10. เขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram, และร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง

 จาก sign convention ของแรงและ moment ภายในในระบบแกน local coordinate (x', y') เราจะเขียน แผนภาพของแรงและ moment ภายใน q ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-6f ถึง Ex 7-6g

7-36

- น้ำค่าแรงและ moment ภายใน q ดังกล่าวมารวมกับ fixed-end forces และ fixed-end moment เราจะได้ แผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง
- ทำการเขียนแผนภาพ shear diagram และแผนภาพ moment diagram ของโครงข้อแข็ง รูปที่ Ex 7-6h แสดง แผนภาพ moment diagram
- จากค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node **D**<sub>u</sub> และแผนภาพ moment diagram เราจะร่าง elastic curve ของ โครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-6i



จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็งเหล็กหน้าตัด wide-flange ขนาด W200x22 ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-7a โดย ใช้ matrix displacement method จากนั้น จงเขียนแผนภาพ moment diagram กำหนดให้ชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็ง มี E = 200 GPa,  $I = 20(10^6) \text{mm}^4$ , และ  $A = 2860 \text{ mm}^2$  และให้จุดรองรับ A เกิดการทรุดตัวในแนวดิ่ง 20 mm และเกิดการหมูนตามเข็มนาฬิกา 0.006 radian





1. กำหนดระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-7a และ Ex 7-7b

ในที่นี้ degree of freedom หมายเลข 1 ถึง 3 เป็น degree of freedom ที่ไม่มีการยึดรั้ง

2.หาค่า fixed-end forces และ fixed-end moment

รูปที่ Ex 7-7c แสดง fixed-end forces และ fixed-end moment ของโครงข้อแข็ง โดยที่ ชิ้นส่วนที่ 2



3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

จากรูปที่ Ex 7-7c เราจะเขียนแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อ node ของโครงข้อแข็ง ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามกับ fixed-end moment และ fixed-end shear ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนโครงสร้างที่เชื่อมต่อกับ node ดังกล่าวได้ ดังที่ แสดงในรูปที่ Ex 7-7d โดยที่ Structural Analysis

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \\ Q_{3} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -20 \\ -40/3 \end{cases} \begin{array}{c} kN \\ kN \\ kN - m \end{cases}$$

เนื่องจากจุดรองรับ A ของโครงข้อแข็งเกิดการทรุดตัวในแนวดิ่งและเกิดการหมุนในทิศตามเข็มนาฬิกา ดังนั้น

- a.) แรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่า Q<sub>5</sub> จะประกอบด้วยแรงต้านทานต่อการทรุดตัว F ซึ่งเป็นแรงที่เราไม่ทราบค่า และมีทิศทางตรงกันข้ามกับการทรุดตัวลงในแนวดิ่ง (ในทิศทางเดียวกันกับ degree of freedom หมายเลข
   5) รวมอยู่กับแรงในแนวแกนเนื่องจากแรงกระทำภายนอก ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น Q<sub>5</sub> = F
- b.) โมเมนต์ปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่า Q<sub>6</sub> จะประกอบด้วยโมเมนต์ต้านทานต่อการทรุดตัว M ซึ่งเป็นโมเมนต์ที่ เราไม่ทราบค่าและมีทิศทางตรงกันข้ามกับการหมุน (ในทิศทางเดียวกันกับ degree of freedom หมายเลข
  6) รวมอยู่กับโมเมนต์เนื่องจากแรงกระทำภายนอก ซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น Q<sub>6</sub> = M

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

เนื่องจาก node หมายเลข 1 เกิดการทรุดตัวในแนวดิ่ง 20 mm และเกิดการหมุน 0.006 radian ในทิศตาม เข็มนาฬิกา ดังนั้น

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง

### ชิ้นส่วนที่ 1

จากสมการที่ 7-10 และเนื่องจากปลายด้านใกล้ (near end) ของระบบแกน local coordinate มี degree of freedom หมายเลข 1, 2, และ 3 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' และปลายด้านใกลมี degree of freedom หมายเลข 4, 5, และ 6 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' ดังนั้น เราจะได้ว่า

	1	2	3	4	5	6	
	1777.78	0.00	2666.67	-1777.78	0.00	2666.67	1
	0.00	190666.67	0.00	0.00	-190666.67	0.00	2
Iz _	2666.67	0.00	5333.33	-2666.67	0.00	2666.67	3
$\mathbf{k}_1 =$	-1777.78	0.00	-2666.67	1777.78	0.00	- 2666.67	4
	0.00	-190666.67	0.00	0.00	190666.67	0.00	5
	2666.67	0.00	2666.67	-2666.67	0.00	5333.33	6

### ชิ้นส่วนที่ 2

จากสมการที่ 7-10 และเนื่องจากปลายด้านใกล้ (near end) ของระบบแกน local coordinate มี degree of freedom หมายเลข 1, 2, และ 3 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' และปลายด้านไกลมี degree of freedom หมายเลข 7, 8, และ 9 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' ดังนั้น เราจะได้ว่า

	1	2	3	7	8	9	
	143000	0	0	-143000	0	0 -	1
	0	750 1500		0	-750	1500	2
k –	0	1500	4000	0	-1500	2000	3
$\mathbf{k}_2 =$	-143000	0	0	143000	0	0	7
	0	-750	-1500	0	750	-1500	8
	0	1500	2000	0	-1500	4000	9

6. หา structure stiffness matrix  ${f K}$  และเขียนความสัมพันธ์ของ loads and displacements ได้ในรูป

0	)	[144777.78	0	2666.67	-1777.78	0	2666.67	-143000	0	0 ]	$\begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix}$	
- 20		0	191416.67	1500	0	-190666.67	0	0	- 750	1500	$D_2$	
-40/3		2666.67	1500	9333.33	- 2666.67	0	2666.67	0	-1500	2000	$D_3$	
$Q_4$		-1777.78	0	- 2666.67	1777.78	0	- 2666.67	0	0	0	0	
$Q_5$	}=	0	-190666.67	0	0	190666.67	0	0	0	0	$\{-0.020\}$	
$Q_6$		2666.67	0	2666.67	- 2666.67	0	5333.33	0	0	0	- 0.006	
$Q_7$		-143000	0	0	0	0	0	143000	0	0	0	
$Q_8$		0	- 750	-1500	0	0	0	0	750	-1500	0	
$Q_9$	J	0	1500	2000	0	0	0	0	-1500	4000	0	
	7 หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ <b>D</b>											
			0 U F		ן <i>ע</i>							
		จากสมการ	$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{L}$	$\mathbf{P}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{I}$	) <sub>k</sub> ดงนั้น							

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ 
$$\mathbf{D}_{\iota}$$

จากสมการ 
$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$$
 ดังนั้น

ſ	$D_1$		144777.78	0	2666.67	$^{-1}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$		-16		0.046	mm
ł	$D_2$	}=	0	191416.67	1500	{.	- 20	> — <	3813.33	> } =	{-20.054	mm
	$D_3$		2666.67	1500	9333.33		[-40/3]		-16	J	$(3.495(10^{-3}))$	radian

8. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22} \mathbf{D}_k$  เราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.40 \\ 3823.54 \\ 9.45 \\ -6.60 \\ 9.80 \\ -23.09 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16.00 \\ -3813.33 \\ -32.00 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.60 \\ 10.21 \\ -22.55 \\ kN - m \\ -6.60 \\ 9.80 \\ kN \\ -23.09 \end{bmatrix} kN - m$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า แรงต้านทานต่อการทรุดตัว  $F=10.21\,{
m kN}$  ทิศพุ่งขึ้น และโมเมนต์ต้านทานต่อการทรุดตัว  $M = 22.55 \ {
m kN}$  - m ทิศหมุนตามเข็มนาฬิกา ซึ่งกระทำอยู่ที่ node หมายเลข 1

9. หาค่าแรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง

จากสมการ  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' \mathbf{T} \mathbf{D}$  เราจะได้ว่า

# ชิ้นส่วนที่ 1

$$\begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{cases} = \begin{cases} 10.20 \\ -6.60 \\ 2.76 \\ -10.20 \\ 6.60 \\ -22.55 \end{cases} \frac{kN}{kN - m}$$

# ชิ้นส่วนที่ 2

$\left[ q_{1}\right]$	]	[ 143000	0	0	-143000	0	0	1	0	0	0	0	0	0.046
$ q_2 $	-	0	750	1500	0	-750	1500	0	1	0	0	0	0	- 20.054
$ q_3 $		0	1500	4000	0	-1500	2000	0	0	1	0	0	0	$3.495(10^{-3})$
$\int q_7$	$\rangle =$	-143000	0	0	143000	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$ q_8 $		0	- 750	-1500	0	750	-1500	0	0	0	0	1	0	0
$ q_9 $		0	1500	2000	0	-1500	4000	0	0	0	0	0	1	0

$$\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{vmatrix} = \begin{cases} 6.60 \\ -9.80 \\ -16.10 \\ kN \\ -16.10 \\ kN - m \\ -6.60 \\ kN \\ kN \\ -23.09 \\ kN - m \end{cases}$$

10. เขียนแผนภาพ moment diagram

เมื่อเรารวมแรงและ moment ภายในที่ได้เข้ากับ fixed-end forces และ fixed-end moment แล้ว เราจะเขียน แผนภาพ shear diagram ของโครงข้อแข็งได้ จากนั้น เราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-7e Ans.



จงวิเคราะห์โครงข้อแข็งเหล็ก ซึ่งมีหน้าตัดแบบ wide-flange ขนาด W200x22 ดังที่แสดงในรปที่ Ex 7-8a โดยใช้ matrix displacement method จากนั้น จงเขียนแผนภาพ moment diagram และร่าง elastic curve ของโครงข้อ แข็ง กำหนดให้ชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งมี  $E=200~{
m GPa}$ ,  $I=20(10^6){
m mm}^4$ , และ  $A=2860~{
m mm}^2$  และจุด เชื่อมต่อ B เป็นจุดหมุนภายใน (internal hinge)





1. กำหนดระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-8a และ Ex 7-8b

เนื่องจาก node หมายเลข 2 เป็นจุดหมุนภายใน (internal hinge) การหมุน (rotation) ที่เกิดขึ้นที่ปลายของ ้ชิ้นส่วนหมายเลข 1 และหมายเลข 2 ที่เชื่อมต่อกันที่ node ดังกล่าวมีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น node ดังกล่าวจึงต้องมี degree of freedom ของการหมุน 2 ค่าคือ degree of freedom หมายเลข 3 และหมายเลข 4

2. หาค่า fixed-end shear และ fixed-end moment



สิ้นส่วนที่ 1

$$(FEM)_{1B} = -(FEM)_{1T} = \frac{PL}{8} = \frac{10(3)}{8} = 3.75 \text{ kN} - \text{m}$$

สิ้นส่วนที่ 2

$$(FEM)_{2L} = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{10(1)3^2}{4^2} = 5.625 \text{ kN} - \text{m}$$

$$(FEM)_{2R} = -\frac{Pa^2b}{L^2} = -\frac{10(1^2)3}{4^2} = -1.875 \text{ kN} - \text{m}$$

รูปที่ Ex 7-8c แสดงค่า fixed-end shear และ fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง

3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

แรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อ node ของโครงข้อแข็ง ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามกับ fixed-end shear และ fixed-end moment ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-8c จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-8d ดังนั้น

$$Q_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \\ Q_{3} \\ Q_{4} \end{cases} = \begin{cases} 5.0 \\ -8.4375 \\ 3.75 \\ -5.625 \end{cases} kN - m$$

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

เนื่องจากโครงสร้างไม่มีการทรุดตัว ดังนั้น

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{5} \\ D_{6} \\ D_{7} \\ D_{8} \\ D_{9} \\ D_{10} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง

### ชิ้นส่วนที่ 1

จากสมการที่ 7-10 และเนื่องจากปลายด้านใกล้ (near end) ของระบบแกน local coordinate มี degree of freedom หมายเลข 1, 2, และ 3 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' และปลายด้านใกลมี degree of freedom หมายเลข 5, 6, และ 7 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' ดังนั้น เราจะได้ว่า

	1	2	3	5	6	7	
	1777.78	0.00	2666.67	-1777.78	0.00	2666.67	1
	0.00	190666.67	0.00	0.00	-190666.67	0.00	2
Ŀ _	2666.67	0.00	5333.33	-2666.67	0.00	2666.67	3
<b>K</b> <sub>1</sub> –	-1777.78	0.00	-2666.67	1777.78	0.00	-2666.67	5
	0.00	-190666.67	0.00	0.00	190666.67	0.00	6
	2666.67	0.00	2666.67	-2666.67	0.00	5333.33	7

## ชิ้นส่วนที่ 2

จากสมการที่ 7-10 และเนื่องจากปลายด้านใกล้ (near end) ของระบบแกน local coordinate มี degree of freedom หมายเลข 1, 2, และ 4 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' และปลายด้านไกลมี degree of freedom หมายเลข 8, 9, และ 10 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' ดังนั้น เราจะได้ว่า

	1	2	4	8	9	10	
	[ 143000	0	0	-143000	0	0	1
	0	750	1500	0	-750	1500	2
Ŀ	0	1500	4000	0	-1500	2000	4
$\mathbf{K}_2 =$	-143000	0	0	143000	0	0	8
	0	-750	-1500	0	750	-1500	9
	0	1500	2000	0	-1500	4000	10

6. หา structure stiffness matrix **K** และเขียนความสัมพันธ์ของ loads and displacements

5		[144777.78	0	2666.67	0	-1777.78	0	2666.67	-143000	0	0 7	$ D_1 $
-8.4375		0	191416.67	0	1500	0	-190666.67	0	0	-750	1500	$  D_2 $
3.75		2666.67	0	5333.33	0	-2666.67	0	2666.67	0	0	0	$  D_3 $
-5.625		0	1500	0	4000	0	0	0	0	-1500	2000	$D_4$
$Q_5$		-1777.78	0	-2666.67	0	1777.78	0	-2666.67	0	0	0	0
$Q_6$		0	-190666.67	0	0	0	190666.67	0	0	0	0	0
$Q_7$		2666.67	0	2666.67	0	-2666.67	0	5333.33	0	0	0	0
$Q_8$		-143000	0	0	0	0	0	0	143000	0	0	0
$Q_9$		0	-750	0	-1500	0	0	0	0	750	-1500	0
$Q_{10}$	J	0	1500	0	2000	0	0	0	0	-1500	4000	0

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ  $\mathbf{D}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

$\left[D_{1}\right]$	(0.022)	mm
$D_2$	-0.033	mm
$D_3$	$0.69(10^{-3})$	radian
$\left[ D_{4} \right]$	$\left[-1.39(10^{-3})\right]$	radian

8. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ $\mathbf{Q}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}
Q_5 \\
Q_6 \\
Q_7
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
-1.88 \\
6.32 \\
1.90 \\
kN - m
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
Q_8 \\
Q_9 \\
Q_{10}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
-3.12 \\
kN \\
2.12 \\
kN \\
-2.84
\end{bmatrix} kN - m$$

9. หาค่าแรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง **q** 

จากสมการ **q** = **k′TD** เมื่อเรารวมแรงและ moment ภายในที่ได้เข้ากับ fixed-end forces และ fixed-end moment แล้ว เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram จากนั้น เราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ของโครงข้อแข็งได้

ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-8e สุดท้าย เราจะร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็งได้โดยใช้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node **D**<sub>u</sub> และแผนภาพ moment diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-8f Ans.



จงวิเคราะห์โครงข้อแข็งเหล็กหน้าตัดแบบ wide-flange ขนาด W200x22 และมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-9a โดยใช้ matrix displacement method จากนั้น จงเขียน moment diagram และร่าง elastic curve กำหนดให้  $\alpha = 12(10^{-6} / ^{o} C)$ , E = 200 GPa,  $I = 20(10^{6}) \text{mm}^{4}$ ,  $A = 2860 \text{ mm}^{2}$ , และคาน BCมีความลึก d = 0.206 m





กำหนดระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-9b

2. หาค่า fixed-end axial force และ fixed-end moment

จากแผนภาพของ fixed-end axial force และ fixed-end moment ที่เกิดขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ เราจะได้ว่า



$$M = \frac{\alpha EI(T_2 - T_1)}{d} = \frac{12(10^{-6} / {}^{o} C)200(10^{6} \text{ kN/m}^2)20(10^{-6} \text{ m}^4)[70^{\circ} C - 20^{\circ} C]}{0.206 \text{ m}} = 11.65 \text{ kN - m}$$
$$R = AE\alpha(T_2 - T_1) = 2860(10^{-6} \text{ m}^2)200(10^{6} \text{ kN/m}^2)12(10^{-6} / {}^{o} C)[70^{\circ} C - 20^{\circ} C] = 343.2 \text{ kN}$$

รูปที่ Ex 7-9c แสดงค่า fixed-end axial force และ fixed-end moment ที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนหมายเลข 2



3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

จากรูปที่ Ex 7-9c เราจะเขียนแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อ node ของโครงข้อแข็ง ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามกับ fixed-end axial force และ fixed-end moment ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-9d ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \\ Q_{3} \end{cases} = \begin{cases} -343.2 \\ 0 \\ 11.65 \end{cases} kN kN kN - m$$

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

เนื่องจากโครงข้อแข็งไม่มีการทรุดตัว

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{4} \\ D_{5} \\ D_{6} \\ D_{7} \\ D_{8} \\ D_{9} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโควงข้อแข็ง ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 7-7

6. หา structure stiffness matrix  ${f K}$  และเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements

[-343.2]		144777.78	0	2666.67	-1777.78	2666.67	0	-143000	0	0	$\left  \left[ D_1 \right] \right $
0		0	191416.67	1500	0	0	-190666.67	0	-750	1500	$D_2$
11.65		2666.67	1500	9333.33	- 2666.67	2666.67	0	0	-1500	2000	$D_3$
$Q_4$		-1777.78	0	-2666.67	1777.78	-2666.67	0	0	0	0	0
$Q_5$	} =	2666.67	0	2666.67	- 2666.67	5333.33	0	0	0	0	{0
$Q_6$		0	-190666.67	0	0	0	190666.67	0	0	0	0
$Q_7$		-143000	0	0	0	0	0	143000	0	0	0
$Q_8$		0	-750	-1500	0	0	0	0	750	-1500	0
$Q_{9}$		0	1500	2000	0	0	0	0	-1500	4000	0

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ  $\mathbf{D}_u$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11} \mathbf{D}_u$  เราจะได้

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{cases} = \begin{cases} -2.410 \\ -0.015 \\ 1.933 \end{cases} (10^{-3}) \text{ m} \\ \text{radian}$$

และแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ $\mathbf{Q}_u$  จะหาได้จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u$ 

8. หาค่าแรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งเนื่องจากแรง  $\mathbf{Q}_{\scriptscriptstyle k}$ 

q = k'TD

# ชิ้นส่วนที่ 1

$ q_1 $	2.90	kN
$q_2$	0.89	kN
$q_3$	3.92	kN - m
$q_4$	-2.90	kN
$q_5$	-0.89	kN
$\left  q_{6} \right $	[-1.25]	kN - m

ชิ้นส่วนที่ 2

$\left[ q_{1} \right]$		(-344.0)	kN
$ q_2 $		2.90	kN
$\int q_3$	\ \   = \	7.73	kN - m
$]q_7$		344.09	kN
$ q_8 $		-2.90	kN
$ q_9 $		3.85	kN - m

จากนั้น เมื่อเรารวมแรงและ moment ภายในดังกล่าวกับค่า fixed-end moment แล้ว เราจะเขียน moment diagram ของ โครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-9e



สุดท้าย โดยใช้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_u$  และแผนภาพ moment diagram เราจะเขียน elastic curve ของโครง ข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-9f Ans.

จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็งเหล็กรูป wide-flange ขนาด W200x22 ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-10a โดยใช้ matrix displacement method จากนั้น จงเขียนแผนภาพ moment diagram และร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง กำหนดให้  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$ ,  $I = 20(10^6)\,\mathrm{mm}^4$ , และ  $A = 2860\,\mathrm{mm}^2$ 



รูปที่ Ex 7-10

กำหนดระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-10b

ในที่นี้ จุดรองรับแบบล้อเลื่อน (roller support) ที่ node หมายเลข 1 จะถูกเปลี่ยนให้เป็นชิ้นส่วนที่รับแรงใน แนวแกน (two-force member) ที่มีค่าความแกร่งในแนวแกน (axial stiffness) ( $\frac{AE}{L}$ )<sub>3</sub> เท่ากับ 1000(10<sup>6</sup>) kN/m ซึ่ง มีค่าสูงมากเมื่อเทียบกับค่าความแกร่งในแนวแกนของชิ้นส่วนอื่นๆ ของโครงข้อแข็ง

2. หาค่า fixed-end shear และ fixed-end moment

เนื่องจากแวง 5 kN กระทำอยู่ที่ node เท่านั้น ดังนั้น จึงไม่มี fixed-end shear และ fixed-end moment เกิดขึ้น ที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง

3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ เนื่องจากแรง 5 kN กระทำอยู่ที่ node เท่านั้น ดังนั้น

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \\ Q_{3} \\ Q_{4} \\ Q_{5} \\ Q_{6} \end{cases} = \begin{cases} 5 \\ 0 \\ kN \\ 0 \\ kN - m \\ 0 \\ kN \\ 0 \\ kN \end{cases}$$

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

เนื่องจากโครงข้อแข็งไม่มีการทรุดตัวเกิดขึ้น ดังนั้น

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{7} \\ D_{8} \\ D_{9} \\ D_{10} \\ D_{11} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง **ชิ้นส่วนที่ 1** 

$$\frac{AE}{L} = 190666.67 \text{ kN/m}$$
$$\frac{12EI}{L^3} = 1777.78 \text{ kN/m}$$
$$\frac{6EI}{L^2} = 2666.67 \text{ kN}$$
$$\frac{4EI}{L} = 5333.33 \text{ kN - m}$$
$$\frac{2EI}{L} = 2666.67 \text{ kN - m}$$
$$\lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{3} = 1$$

จากสมการที่ 7-10 และเนื่องจากปลายด้านใกล้ (near end) ของระบบแกน local coordinate มี degree of freedom หมายเลข 4, 6, และ 5 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' และปลายด้านไกลมี degree of freedom หมายเลข 1, 2, และ 3 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' ดังนั้น เราจะได้ว่า

0

$$\mathbf{k}_{1} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 190666.67 & 0.00 & 0.00 & -190666.67 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1777.78 & 2666.67 & 0.00 & -1777.78 & 2666.67 \\ 0.00 & 2666.67 & 5333.33 & 0.00 & -2666.67 & 2666.67 \\ -190666.67 & 0.00 & 0.00 & 190666.67 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -1777.78 & -2666.67 & 0.00 & 1777.78 & -2666.67 \\ 0.00 & 2666.67 & 2666.67 & 0.00 & -2666.67 & 5333.33 \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\frac{AE}{L} = 190666.67 \text{ kN/m}$$
$$\frac{12EI}{L^3} = 1777.78 \text{ kN/m}$$
$$\frac{6EI}{L^2} = 2666.67 \text{ kN}$$
$$\frac{4EI}{L} = 5333.33 \text{ kN - m}$$
$$\frac{2EI}{L} = 2666.67 \text{ kN - m}$$
$$\lambda_x = \frac{3-3}{3} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{-3-0}{3} = -1$$

จากสมการที่ 7-10 และเนื่องจากปลายด้านใกล้ (near end) ของระบบแกน local coordinate มี degree of freedom หมายเลข 1, 2, และ 3 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' และปลายด้านไกลมี degree of freedom หมายเลข 7, 8, และ 9 เรียงตามลำดับจากแกน x', y', และ z' ดังนั้น เราจะได้ว่า

	1	2	3	7	8	9	
	1777.78	0.00	2666.67	-1777.78	0.00	2666.67	1
	0.00	190666.67	0.00	0.00	-190666.67	0.00	2
Ъ _	2666.67	0.00	5333.33	-2666.67	0.00	2666.67	3
$\mathbf{K}_2 =$	-1777.78	0.00	-2666.67	1777.78	0.00	-2666.67	7
	0.00	-190666.67	0.00	0.00	190666.67	0.00	8
	2666.67	0.00	2666.67	-2666.67	0.00	5333.33	9

# ชิ้นส่วนที่ 3

 $\lambda_x = -0.6$   $\lambda_y = -0.8$ 

เนื่องจากชิ้นส่วนหมายเลข 3 เป็นชิ้นส่วนที่รับแรงในแนวแกน (two-force member) และมีปลายด้านใกล้ (near end) ของระบบแกน local coordinate มี degree of freedom หมายเลข 4 และ 6 และปลายด้านไกลมี degree of freedom หมายเลข 10 และ 11ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\mathbf{k}_{3} = 1000(10^{6}) \begin{bmatrix} 4 & 6 & 10 & 11 \\ 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.64 & 0.48 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

#### 6. หา structure stiffness matrix ${f K}$ และเขียนความสัมพันธ์ของ loads และ displacements

ſ	5)	[	192444.45	0	2666.67	-190666.67	0	0 :	-1777.78	0	2666.67	0	0 ]	$\int D_1$
	0		0	192444.45	- 2666.67	0	- 2666.67	-1777.78	0	-190666.67	0	0	0	$D_2$
	0		2666.67	- 2666.67	10666.67	0	2666.67	2666.67	- 2666.67	0	2666.67	0	0	$D_3$
	0		-190666.67	0	0	360190666.67	0	480(10 <sup>6</sup> )	0	0	0	$-360(10^6)$	$-480(10^6)$	$D_4$
	0		0	- 2666.67	2666.67	0	5333.33	2666.67	0	0	0	0	0	$D_5$
ł	0 }	=	0	-1777.78	2666.67	480(10 <sup>6</sup> )	2666.67	640001777.78	0	0	0	$-480(10^6)$	$-640(10^6)$	$D_6$
1	$\overline{Q}_7$		-1777.78	0	- 2666.67	0	0	0	1777.78	0	- 2666.67	0	0	0
	$Q_8$		0	-190666.67	0	0	0	0	0	190666.67	0	0	0	0
	$Q_9$		2666.67	0	2666.67	0	0	0	- 2666.67	0	5333.33	0	0	0
	$Q_{10}$		0	0	0	$-360(10^6)$	0	$-480(10^6)$	0	0	0	360(10 <sup>6</sup> )	480(10 <sup>6</sup> )	0
	$Q_{11}$		0	0	0	$-480(10^{6})$	0	$-640(10^6)^{\frac{1}{6}}$	0	0	0	$480(10^6)$	$640(10^6)$	0

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ  $\mathbf{D}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

	$\left[D_{1}\right]$		2.894	mm
	$D_2$		-0.009	mm
	$D_3$		$\int -0.519(10^{-3})$	radian
5	$D_4$	\ <	2.888	mm
	$D_5$		-2.166	mm
	$\left[ D_{6} \right]$	ļ	$1.338(10^{-3})$	radian

8. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_u$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

9. หาค่าแรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง

q = k'TD

# ชิ้นส่วนที่ 1

$\left[ q_{4} \right]$		[-1.24]	kN
$q_5$		-1.65	kN
$ q_6 $		0	kN - m
$]q_1$	$\left(\begin{array}{c} - \end{array}\right)$	1.24	kN
$ q_2 $		1.65	kN
$\left[q_{3}\right]$		- 4.95	kN - m

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_3 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{cases} = \begin{cases} 1.65 \\ 3.76 \\ 4.95 \\ -1.65 \\ -3.76 \\ kN \\ kN - m \end{cases}$$

10. เขียนแผนภาพ moment diagram และร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง

เมื่อเรารวมแรงและ moment ภายในที่ได้เข้ากับ fixed-end forces และ fixed-end moment แล้ว เราจะได้ แผนภาพ free-body diagram ของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง จากนั้น เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และเขียน แผนภาพ moment diagram ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-10e สุดท้าย เราจะร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็งได้โดยใช้ค่า การเปลี่ยนตำแหน่งที่ node **D**, และแผนภาพ moment diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-10f **Ans**.



#### Structural Analysis

## ตัวอย่างที่ 7-11

จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็งคอนกรีตเสริมเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-11a ซึ่งถูกกระทำโดยแรงต่างๆ และมี การทรุดตัวในแนวดิ่งเกิดขึ้นที่ node 3 เท่ากับ 2.5 mm จากนั้น จงแผนภาพ moment diagram และร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง กำหนดให้ชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งคอนกรีตเสริมเหล็กมี  $E = 20 \,\mathrm{GPa}$ ,  $I = 350(10^6)\,\mathrm{mm}^4$ , และ  $A = 20(10^3)\,\mathrm{mm}^2$ 



1. กำหนดระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-11b

2.หาค่า fixed-end forces และ fixed-end moment

้จากรูปที่ Ex 7-11c ค่า fixed-end moment และ fixed-end shear ที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนหมายเลข 1 จะหาได้ดังนี้

$$(FEM)_{11} = (FEM)_{12} = \frac{wL^2}{12} = \frac{10(4)^2}{12} = 13.333 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(V)_{11} = (V)_{12} = \frac{wL}{2} = \frac{10(4)}{2} = 20 \text{ kN}$ 

เมื่อ (*FEM*)<sub>11</sub> และ (*FEM*)<sub>12</sub> คือ ค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 ที่ node หมายเลข 1 และหมายเลข 2 ตามลำดับ และ (*V*)<sub>11</sub> และ (*V*)<sub>12</sub> คือค่า fixed-end shear ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วน หมายเลข 1 ที่ node หมายเลข 1 และหมายเลข 2 ตามลำดับ

ค่า fixed-end moment และ fixed-end shear ที่เกิดขึ้นบนขึ้นส่วนหมายเลข 2 จะหาได้ดังนี้

$$(FEM)_{22} = (FEM)_{23} = \frac{wL^2}{12} = \frac{10(\sqrt{20})^2}{12} = 16.667 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(V)_{22} = (V)_{23} = \frac{wL}{2} = \frac{10(\sqrt{20})}{2} = 22.361 \text{ kN}$ 

ขอให้สังเกตด้วยว่า ในกรณีนี้ fixed-end shear ที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนหมายเลข 2 จะไม่อยู่ในระบบแกน global coordinate ดังนั้น เราจะต้องทำการแตกแรงดังกล่าวให้อยู่ในระบบแกน ซึ่งเราจะได้แผนภาพของ fixed-end moment และ fixed-end shear ของโครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-11d



3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

จาก fixed-end moment และ fixed-end shear ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-11d เราจะเขียนแรงและโมเมนต์ที่ กระทำต่อ node ของโครงข้อแข็ง ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามกับแรงและโมเมนต์ดังกล่าวได้ในรูป

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \\ Q_{3} \end{cases} = \begin{cases} 30 \\ -20 \\ -3.333 \end{cases} \begin{cases} kN \\ kN \\ kN - m \end{cases}$$

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

เนื่องจากโครงข้อแข็งมีการทรุดตัวในแนวดิ่งเกิดขึ้นที่ node 3 และอยู่ในทิศทางลบของ degree of freedom หมายเลข 5 เท่ากับ **2.5 mm** ดังนั้น

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{4} \\ D_{5} \\ D_{6} \\ D_{7} \\ D_{8} \\ D_{9} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ -0.0025 \text{ m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \end{cases}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ชิ้**นส่วนที่ 1** 

$$\frac{AE}{L} = 10^5 \text{ kN/m}$$
$$\frac{12EI}{L^3} = 1312.5 \text{ kN/m}$$
$$\frac{6EI}{L^2} = 2625 \text{ kN}$$
$$\frac{4EI}{L} = 7000 \text{ kN - m}$$
$$\frac{2EI}{L} = 3500 \text{ kN - m}$$

Structural Analysis

$$\lambda_x = \frac{0-0}{4} = 0 \qquad \qquad \lambda_y = \frac{4-0}{4} = 1$$

จากสมการที่ 7-10 เราจะได้ว่า

$$\mathbf{k}_{1} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 1312.5 & 0.00 & -2625 & -1312.5 & 0.00 & -2625 \\ 0.00 & 10^{5} & 0.00 & 0.00 & -10^{5} & 0.00 \\ -2625 & 0.00 & 7000 & 2625 & 0.00 & 3500 \\ -1312.5 & 0.00 & 2625 & 1312.5 & 0.00 & 2625 \\ 0.00 & -10^{5} & 0.00 & 0.00 & 10^{5} & 0.00 \\ -2625 & 0.00 & 3500 & 2625 & 0.00 & 7000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\frac{AE}{L} = 89442.72 \text{ kN/m}$$
$$\frac{12EI}{L^3} = 939.15 \text{ kN/m}$$
$$\frac{6EI}{L^2} = 2100 \text{ kN}$$
$$\frac{4EI}{L} = 6261 \text{ kN - m}$$
$$\frac{2EI}{L} = 3130.5 \text{ kN - m}$$
$$\lambda_x = \frac{4-0}{4.472} = 0.89443 \qquad \qquad \lambda_y = \frac{6-4}{4.472} = 0.44721$$

จากสมการที่ 7-10 เราจะได้ว่า

	1	2	3	4	5	6	
$\mathbf{k}_2 =$	71742.45	35401.26	-939.14	-71742.45	-35401.26	-939.14	1
	35401.26	18639.58	1878.30	-35401.26	-18639.58	1878.30	2
	-939.14	1878.30	6260.99	939.14	-1878.30	3130.5	3
	-71742.45	-35401.26	939.14	71742.45	35401.26	939.14	4
	-35401.26	-18639.58	-1878.30	35401.26	18639.58	-1878.30	5
	-939.14	1878.30	3130.5	939.14	-1878.30	6260.99	6

6. หา structure stiffness matrix  $\, {f K} \,$ 

โดยการนำ matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงข้อแข็งมารวมกัน เราจะได้ matrix **K** และเราจะเขียนความสม พันธ์ของ load-displacement ของโครงข้อแข็งได้ดังนี้

[10		73054.95	35401.26	1685.86	- 71742.45	- 35401.26	- 939.14	-1312.5	0	2625.0	$\begin{bmatrix} D_1 \end{bmatrix}$
- 20		35401.26	118639.58	1878.30	- 35401.26	-18639.58	1878.30	0	$-10^{5}$	0	$D_2$
- 3.333		1685.86	1878.30	13260.99	939.14	-1878.30	3130.5	- 2625.0	0	3500	$D_3$
$Q_4$		- 71742.45	- 35401.26	939.14	71742.45	35401.26	939.14	0	0	0	0
$Q_5$	} =	- 35401.26	-18639.58	-1878.30	35401.26	18639.58	-1878.30	0	0	0	$\{-0.0025\}$
$Q_6$		- 939.14	1878.30	3130.5	939.14	-1878.30	6260.99	0	0	0	0
$Q_7$		-1312.5	0	- 2625.0	0	0	0	1312.5	0	- 2625.0	0
$Q_8$		0	$-10^{5}$	0	0	0	0	0	$10^{5}$	0	0
$Q_9$	J	2625.0	0	3500	0	0	0	- 2625.0	0	7000	0

7-56
7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node  $\mathbf{D}_u$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$  เราจะได้ว่า  $\mathbf{D}_u = \mathbf{K}_{11}^{-1}[\mathbf{Q}_k - \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k]$  และ

$$\begin{cases} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{cases} = \begin{cases} -0.610 \\ -0.372 \\ -4.75(10^{-4}) \end{cases} mm$$
radian

8. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22} \mathbf{D}_k$  เราจะได้ว่า

$[Q_4]$	(-32.05)	kN
$Q_5$	-17.19	kN
$Q_6$	 6.42	kN - m
$Q_7$	2.05	kN
$Q_8$	37.19	kN
$[Q_9]$	-3.26	kN - m

9. หาค่าแรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง

q = k'TD

## ชิ้นส่วนที่ 1

$\left[ q_{7} \right]$	$\left[ 10^{5} \right]$	0	0	$-10^{5}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0
$ q_8 $	0	1312.5	2625	0	-1312.5	2625	-1	0	0	0	0	0	0
$ q_9 $	0	2625	7000	0	- 2625	3500	0	0	1	0	0	0	0
$\left  q_1 \right ^{=}$	$ -10^{5}$	0	0	10 <sup>5</sup>	0	0	0	0	0	0	1	0	$-610(10^{-6})$
$ q_2 $	0	-1312.5	-2625	0	1312.5	- 2625	0	0	0	-1	0	0	$-372(10^{-6})$
$\left[q_{3}\right]$	0	2625	3500	0	-2625	7000	0	0	0	0	0	1	$-47.5(10^{-6})$

$$\begin{cases} q_{7} \\ q_{8} \\ q_{9} \\ q_{9} \\ q_{1} \\ q_{2} \\ q_{3} \end{cases} = \begin{cases} 37.20 \\ -2.05 \\ -3.26 \\ -3.26 \\ kN - m \\ -37.20 \\ kN \\ kN - m \end{cases}$$

## ชิ้นส่วนที่ 2

$$\begin{cases} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{cases} = \begin{cases} 36.32 \\ 1.046 \\ 1.596 \\ 1.596 \\ -36.32 \\ kN - m \\ kN \\ kN - m \end{cases}$$

10. เขียนแผนภาพ moment diagram และร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็ง

เมื่อเรารวมแรงและ moment ภายในที่ได้เข้ากับ fixed-end forces และ fixed-end moment แล้ว เราจะเขียน แผนภาพ shear diagram ของโครงข้อแข็งได้ จากนั้น เราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-11e สุดท้าย เราจะร่าง elastic curve ของโครงข้อแข็งได้โดยใช้ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node **D**<sub>u</sub> และแผนภาพ moment diagram ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-11f



## ตัวอย่างที่ 7-12

จงทำการวิเคราะห์โครงสร้างประกอบ (composite structure) ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-12a จากนั้น จงหาแรงใน แนวแกนที่เกิดขึ้นในขึ้นส่วน *BC* และขึ้นส่วน *BD* กำหนดให้เหล็กโครงสร้างมี *E* = 200 GPa โดยที่คานมีค่า  $I_{AB} = 350(10^6) \text{mm}^4$ ,  $A_{AB} = 9500 \text{ mm}^2$  และขึ้นส่วนที่รับแรงในแนวแกนมีค่า  $A_{BC} = A_{BD} = 3600 \text{ mm}^2$ 



กำหนดระบบแกน global coordinate หมายเลข node หมายเลขชิ้นส่วนของโครงข้อแข็ง ระบบแกน local coordinate และหมายเลข degree of freedom ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-12b

2. หาค่า fixed-end shear และ fixed-end moment

จากโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ Ex 7-12b เราจะเห็นได้ว่า fixed-end shear และ fixed-end moment จะเกิดขึ้น ในชิ้นส่วนหมายเลข 1 เท่านั้น โดยที่

$$(FEM)_{1L} = (FEM)_{1R} = \frac{wL^2}{12} = \frac{2(10)^2}{12} = 16.667 \text{ kN} - \text{m}$$
  
 $(V)_{1L} = (V)_{1R} = \frac{wL}{2} = \frac{2(10)}{2} = 10.0 \text{ kN}$ 

เมื่อ (*FEM*)<sub>1L</sub> และ (*FEM*)<sub>1R</sub> คือ ค่า fixed-end moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 ทางด้านซ้ายมือ และทางด้านขวามือ ตามลำดับ และ (V)<sub>1L</sub> และ (V)<sub>1R</sub> คือ ค่า fixed-end shear ที่เกิดขึ้นที่ปลายของชิ้นส่วนหมายเลข 1 ทางด้านซ้ายมือและทางด้านขวามือ ตามลำดับ 3. เขียน matrix  $\mathbf{Q}_k$ 

แรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อ node ของโครงสร้างประกอบ ซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามกับ fixed-end moment และ fixed-end shear จะอยู่ในรูป

$$\mathbf{Q}_{k} = \begin{cases} Q_{1} \\ Q_{2} \\ Q_{3} \\ Q_{4} \end{cases} = \begin{cases} -16.667 \\ 16.667 \\ 0 \\ -10-20 = -30 \end{cases} \begin{cases} kN - m \\ kN - m \\ kN \end{cases}$$

4. เขียน matrix  $\mathbf{D}_k$ 

เนื่องจากโครงสร้างประกอบไม่มีการทรุดตัวเกิดขึ้น ดังนั้น

$$\mathbf{D}_{k} = \begin{cases} D_{5} \\ D_{6} \\ D_{7} \\ D_{8} \\ D_{9} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

5. หา member global stiffness matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้างประกอบ **ชิ้นส่วนที่ 1** 

$$\left(\frac{AE}{L}\right)_{1} = 190000 \text{ kN/m}$$
$$\left(\frac{12EI}{L^{3}}\right)_{1} = 840 \text{ kN/m}$$
$$\left(\frac{6EI}{L^{2}}\right)_{1} = 4200 \text{ kN}$$
$$\left(\frac{4EI}{L}\right)_{1} = 28000 \text{ kN - m}$$
$$\left(\frac{2EI}{L}\right)_{1} = 14000 \text{ kN - m}$$
$$\lambda_{x} = 1 \qquad \lambda_{y} = 0$$

จากสมการที่ 7-10 เราจะได้ว่า

$$\mathbf{k}_{1} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 840 & 4200 & 0 & -840 & 4200 \\ 4200 & 28000 & 0 & -4200 & 14000 \\ 0 & 0 & 190000 & 0 & 0 \\ -840 & -4200 & 0 & 840 & -4200 \\ 4200 & 14000 & 0 & -4200 & 28000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$\lambda_x = \frac{7-10}{5} = -0.6$$

$$\lambda_y = \frac{-4 - 0}{5} = -0.8$$
$$\left(\frac{AE}{L}\right)_2 = 144(10^3) \text{ kN/m}$$

จากสมการที่ 7-10 เราจะได้ว่า

$$\mathbf{k}_{2} = 144(10^{3}) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.6 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.64 & 0.48 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 3

$$\lambda_x = \frac{14 - 10}{4\sqrt{2}} = 0.7071$$
$$\lambda_y = \frac{-4 - 0}{4\sqrt{2}} = -0.7071$$
$$\left(\frac{AE}{L}\right)_3 = 127.279(10^3) \text{ kN/m}$$

จากสมการที่ 7-10 เราจะได้ว่า

$$\mathbf{k}_{3} = 127.279(10^{3}) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

6. หา structure stiffness matrix  ${f K}$ 

โดยการน้ำ matrix **k** ของแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้างประกอบมารวมกัน เราจะได้ matrix **K** และเราจะเขียน ความสมพันธ์ของ load-displacement ของโครงสร้างประกอบได้ดังนี้

-16.667		28	14	0	- 4.2	0	0	0	0	4.2	$\left[D_1\right]$
16.667		14	28	0	-4.2	0	0	0	0	4.2	$D_2$
0		0	0	305.48	5.48	- 51.84	- 69.12	- 63.64	63.64	0	$D_3$
- 30		- 4.2	- 4.2	5.45	155.64	- 69.12	-92.16	63.64	- 63.64	- 0.84	$D_4$
$Q_5$	$=10^{3}$	0	0	- 51.84	- 69.12	51.84	69.12	0	0	0	$\left\{ 0 \right\}$
$Q_6$		0	0	- 69.12	- 92.16	69.12	92.16	0	0	0	0
$Q_7$		0	0	- 63.64	63.64	0	0	63.64	- 63.64	0	0
$Q_8$		0	0	63.64	- 63.64	0	0	- 63.64	63.64	0	0
$Q_9$		4.2	0	4.2	-0.84	0	0	0	0	0.84	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

7. หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ node ต่างๆ  $\mathbf{D}_u$ เนื่องจากโครงสร้างประกอบไม่มีการทรุดตัวเกิดขึ้น ดังนั้น จาก  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$  เราจะได้

$$\mathbf{D}_{u} = \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{Q}_{k}$$

$$\begin{cases} D_{1} \\ D_{2} \\ D_{3} \\ D_{4} \end{cases} = 10^{3} \begin{bmatrix} 28 & 14 & 0 & -4.2 \\ 14 & 28 & 0 & -4.2 \\ 0 & 0 & 305.48 & 5.48 \\ -4.2 & -4.2 & 5.48 & 155.64 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -16.667 \\ 16.667 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} D_{1} \\ D_{2} \\ D_{3} \\ D_{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2099 \\ 1.171 \\ 3.479(10)^{-3} \\ -0.1941 \end{bmatrix}$$
rad 
$$10^{-3} \text{ rad} \\ m \\ m \end{bmatrix}$$

8. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ  $\mathbf{Q}_{u}$ 

จากสมการ  $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21} \mathbf{D}_u$  เราจะได้ว่า

9. หาค่าแรงและ moment ภายในที่เกิดขึ้นที่ปลายของคาน

$$q = k'TD = kD$$

## ชิ้นส่วนที่ 1

$\left[q_9\right]$	]	840	4200	0	-840	4200 ]	0		0	kN
$q_1$		4200	28000	0	-4200	14000	$-1.2099(10)^{-3}$		-16.667	kN - m
$\left\{ q_{3}\right\}$	} =	0	0	190000	0	0	$3.479(10)^{-6}$	} = <	0.661	> kN
$ q_4 $		-840	4200	0	840	-4200	$-0.1942(10)^{-3}$		0	kN
$\left  q_{2} \right $	J	4200	14000	0	-4200	28000	$1.171(10)^{-3}$		16.667	kN - m

10. เขียนแผนภาพ moment diagram และร่าง elastic curve

เมื่อเราทำการรวม moment ภายในที่ได้เข้ากับ fixed-end moment เราจะเขียนแผนภาพ shear diagram และ แผนภาพ moment diagramของคาน และแผนภาพการโก่งตัวของโครงสร้างประกอบได้

11. หาค่าแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้น

เราจะหาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนได้โดยใช้สมการที่ 6-19 โดยที่ถ้า  $q_F$  ที่มีค่าเป็นบวก แรงภายในที่เกิดขึ้นจะเป็นแรงดึงและถ้า  $q_F$  ที่มีค่าเป็นลบ แรงภายในที่เกิดขึ้นจะเป็นแรงกดอัด

$$q_{F} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -\lambda_{x} & -\lambda_{y} & \lambda_{x} & \lambda_{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$

ชิ้นส่วนที่ 2

$$q_{2} = 144(10^{3}) \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & -0.6 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{cases} 3.479(10^{-6}) \\ -0.1941(10^{-3}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \begin{cases} 3.479(10^{-6}) \\ 4.5 \\ 5.6 \\ 6$$

 ${q_2} = 22.06\,{
m kN}$  (แรงกดอัด) นอกจากนั้นแล้ว เราจะหาค่าของแรงในชิ้นส่วนที่ 2 นี้ได้โดยใช้ค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ โดยที่

$$q_2 = \sqrt{Q_5^2 + Q_6^2} = \sqrt{13.224^2 + 17.631^2} = 22.04 \text{ kN}$$

ชิ้นส่วนที่ 3

$$q_{3} = 127.279(10^{3}) \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3.479(10^{-6}) \\ -0.1941(10^{-3}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

 $q_{3} = 17.78 \, \mathrm{kN}$  (แรงกดอัด)

Ans.

### แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

7-1 กำหนดให้คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-1 มีค่า moment of inertia  $I = 50(10^{-6}) \,\mathrm{m}^4$  และ modulus of elasticity  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ โดยใช้ matrix displacement method และจงเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram, และ elastic curve ของคาน



7-2 กำหนดให้ girder ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-2 มีการทรุดตัวที่จุดรองรับ *C* เท่ากับ  $-0.010 \,\mathrm{m}$  และมีค่า  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  และ  $I = 50(10^6) \,\mathrm{mm}^4$  เท่ากันทุกชิ้นส่วน จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ โดย ใช้ matrix displacement method และจงเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram, และ elastic curve ของ girder



7-3 กำหนดให้คานดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-3 มีค่า  $I_{AD} = 60(10^6) \,\mathrm{mm}^4$ ,  $I_{DC} = I_{BC} = 80(10^6) \,\mathrm{mm}^4$ , และ modulus of elasticity  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  จงวิเคราะห์คานโดยใช้ matrix displacement method จากนั้น จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram และจงร่าง elastic curve ของคาน



7-4 จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram และจงร่าง elastic curve ของคานเหล็ก ซึ่งมีการ เปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในช่วง AB ของคานแบบเป็นเส้นตรงจากผิวบนของคานถึงท้องคาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-4 โดยใช้ การวิเคราะห์ matrix displacement method กำหนดให้คานมีความลึก  $d_{AB} = 0.5$  m และมีค่า  $\alpha = 12(10^{-6} / ^{o} C) E = 200$  GPa  $I_{AB} = 0.0008$  m<sup>4</sup> และ  $I_{BC} = 0.0006$  m<sup>4</sup>



7-5 คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-5 มีค่า  $EI = 10000 \,\mathrm{kN} - \mathrm{m}^2$  คงที่ตลอดช่วงความยาวของคาน กำหนดให้คานมี การทรุดตัวในแนวดิ่งที่จุดรองรับ *B* เท่ากับ 10 mm จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ โดยใช้ matrix displacement method และจงเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram, และ elastic curve ของคาน



7-6 คาน ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-6 มีค่า *EI* = 1000 kN - m<sup>2</sup> คงที่ตลอดช่วงความยาวของคาน จงหาค่าการเปลี่ยน ตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ โดยใช้ matrix displacement method และจงเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram, และ elastic curve ของคาน



7-7 จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-7 โดยใช้ matrix displacement method เพื่อหาค่าการ เปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ และเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram, และ elastic curve ของ โครงข้อแข็ง กำหนดให้  $EI = 3000 \,\mathrm{kN}$  - m<sup>2</sup> และ  $AE = 572,000 \,\mathrm{kN}$ 



รูปที่ Prob. 7-7

7-8 โครงข้อแข็งมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-8 จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ โดยใช้ matrix displacement method และจงเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram, และ elastic curve ของโครงข้อแข็ง เมื่อโครงข้อแข็งมีการทรุดตัวที่ A เท่ากับ 25 mm และกำหนดให้  $EI = 2000 \,\mathrm{kN}$  - m<sup>2</sup> และ  $AE = 60,000 \,\mathrm{kN}$ 



7-9 กำหนดให้โครงข้อแข็งมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-9 และชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อแข็งมี *EI* และ *AE* คงที่เท่ากับ 13,500 kN - m<sup>2</sup> และ 1.8(10<sup>6</sup>) kN จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ โดยใช้ matrix displacement method และจงเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram, และ elastic curve ของโครงข้อแข็ง



7-10 โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ Prob. 7-10 มีจุดรองรับที่ A และ D แบบยึดแน่นมีจุดเชื่อมต่อ C เป็น internal hinge วัสดุของโครงข้อแข็งมี  $E = 200 \,\mathrm{GPa}$  กำหนดให้  $I = 20(10^6) \,\mathrm{mm}^4$  และ  $A = 2,860 \,\mathrm{mm}^2$  จงหาค่าการ เปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่ node ต่างๆ โดยใช้ matrix displacement method และจงเขียนแผนภาพ shear diagram, moment diagram, และ elastic curve ของโครงข้อแข็ง



7-66

# หนังสืออ้างอิง

- 1. Hibberler, R.C., "Structural Analysis," 3<sup>rd</sup> Ed., Prentice-Hall, New Jersey, NY, 1997
- 2. McCormac, J.C., "Structural Analysis, "3rd Ed., Harper & Row, New York, NY, 1975
- 3. Arbabi, F., " Structural Analysis and behaviors," International Ed., McGraw-Hill, Singapore, 1991
- 4. Wang, C.K., "Intermediate Structural Analysis, "1<sup>st</sup> Ed., McGraw-Hill, New York, NY, 1983
- 5. Hsieh, Y.Y., " Elementary Theory of Structures, " 2<sup>nd</sup> Ed., Prentice-Hall, New Jersey, NY, 1982
- 6. Kassimali, A., " Structural Analysis," 2<sup>nd</sup> Ed., Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1999
- 7. Kassimali, A., "Matrix Analysis of Structures," 1<sup>st</sup> Ed., Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1999
- 8. West, H.H., "Fundamentals of Structural Analysis," John Wiley & Sons, New York, NY, 1993
- 9. "ศัพท์วิทยาการวิศวกรรมโยธา" คณะกรรมการวิชาการวิศวกรรมโยธา, วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย, 2540

# **Structural Analysis: A historical perspective**

By Frederick M. Law, Ph.D., P.E.

ew of today's engineering textbooks dealing with structural analysis include any historical perspective. In fact, most of them fail to name even a single engineer associated with the development of structural analysis. This omission has lead many students and practitioners to believe that engineering is merely the application of science and mathematics conceived and formulated by scientists and mathematicians.

Even a brief look into the history, however, reveals that this is not the case. Many important theories were conceived and formulated by engineers. They developed these concepts and methods, not as theoretical abstractions, but to solve real engineering problems. As engineers, their goal was not merely to explore, but to create. Brief biographies of three influential engineers follows.

#### **Charles Augustin Coulomb**

Charles Augustin Coulomb was born in France in 1736. He received his engineering education at the Ecole du Corps Royale du Genie. Shortly after graduating in 1763, he was posted to the Island of Martinique in the Americas, where he was responsible for the design and construction of the island's fortifications, among other projects.

As a young military engineering officer, however, Coulomb soon realized that he did not understand the true behavior of structures. This led him to study a number of structural problems while on Martinique, including the bending of beams.

In 1772, Coulomb returned to France, and for the next 10 years undertook various engineering assignments. In 1773, he presented his now-famous Elastic Theory of Bending to the French Academy. Coulomb could be called the "Father of Structural Analysis" for his theory because he was the first person to state formally that beams must satisfy three equations of equilibrium. For the sum of the horizontal forces to be equal to zero, he reasoned that the internal tensile force at a given cross-section must equal the internal compression force. For the sum of the vertical forces to be equal to zero, he reasoned that the internal shear force at a given cross-section must equal the applied vertical loads. Finally, for the sum of the moments to be equal to zero, he reasoned that the internal moment at a given section must equal the moment caused by the loads at that section. Coulomb also assumed correctly, that plane sections before bending remain plane during bending. And, he assumed that typical beams could be considered to be perfectly, linearly elastic.

The Elastic Theory of Bending, stated in modern terms, is: f = M/S, where *f* is the bending stress, *M* is the bending moment at a particular section, and *S* is the section modulus.

### Louis Marie Henri Navier

Louis Marie Henri Navier was born in France in 1785 and was raised by his uncle, Gauthey, a famous engineer. He graduated from the Ecole Polytechnique in 1804 and from the Ecole des Pontes et Chaussees in 1808.

After the untimely death of Gauthey in 1807, Navier began his career by undertaking the monumental task of completing his uncle's three-volume, definitive work on bridges and channels. Although Navier occupied most of his professional career with editing books and theoretical work, he always practiced engineering as well, usually designing bridges.

In 1824, Navier joined the faculty of the Ecole Polytechnique and, in 1836, published his Lecons, the first textbook dealing with structural analysis. In his book, Navier used Coulomb's Elastic Theory and Euler's Calculus, and stated that the curvature of a beam was equal to M/EI, where M is the bending moment, E is the modulus of elasticity, and I is the moment of inertia of the cross-section. More importantly, he was the first person to state that, for small deflections, the curvature of a beam is approximately equal to the second derivative of the deflection,  $d^2y/dx^2$ . Thus, he first formulated the General Differential Equation of Bending:  $d^2y/dx^2 = M/EI$ .

Navier used this equation to determine the deflections of various statically determinate beams. He used this equation further to determine the reactions of various statically indeterminate beams. Therefore, Navier was the first person to formulate what we now call the Double Integration Method, or in a broader sense, he was the first person to employ the Force Method of Structural Analysis.

The fundamental equation of the Force Method is a set of compatibility of displacement equations: (U)(F) = (D), where U is the displacement-force relationships (the flexibility matrix), *F* is the unknown forces, and *D* is the displacements.

### **B.P.E. Clapeyron**

B.P.E. Clapeyron was born in France in 1799. He graduated from the Ecole Polytechnique in 1818 and the School of Mines in Paris in 1820. Clapeyron helped start The Institute of Engineers of Ways of Communications, in St. Petersburg, Russia. Besides his role as mathematics, physics, and engineering teacher, he also helped the Russians with the design of several important structures, including multi-span and suspension bridges.

In 1831, Clapeyron returned to France and worked on the design and construction of the French railroads. In 1844, he joined the faculty of Ecole des Pontes et Chaussees, where he shared his practical experience and great theoretical knowledge.

In 1848, while involved in the design of a multi-span bridge, Clapeyron reformulated the equations of Navier in terms of unknown rotations and unknown moments at the supports. He then wrote a set of equations, which could be described as elementary Slope Deflection Equations. In a broader sense, therefore, Clapeyron was the first person to employ the Displacement Method of Structural Analysis.

The fundamental equation of the Displacement Method is a set of equilibrium equations: (K)(D) = (F) where K is the force-displacement relationships (the stiffness matrix), D is the unknown displacements, and F is the forces.

### Conclusion

Even this brief historical perspective should convince the reader that it was not scientists or mathematicians, but engineers, who first conceived and formulated the fundamental theories and methods of structural analysis. These findings were conceived and formulated by engineers to help them in their efforts to create structures for the good of mankind.

Frederick M. Law, Ph.D., P.E., is a professor of civil engineering at the University of Massachusetts. Dartmouth. During the past 35 years he has been engineer of-record for a number of structures, ranging from commercial and industrial buildings to highway and pedestrian bridges to geodesic domes and shell structures.