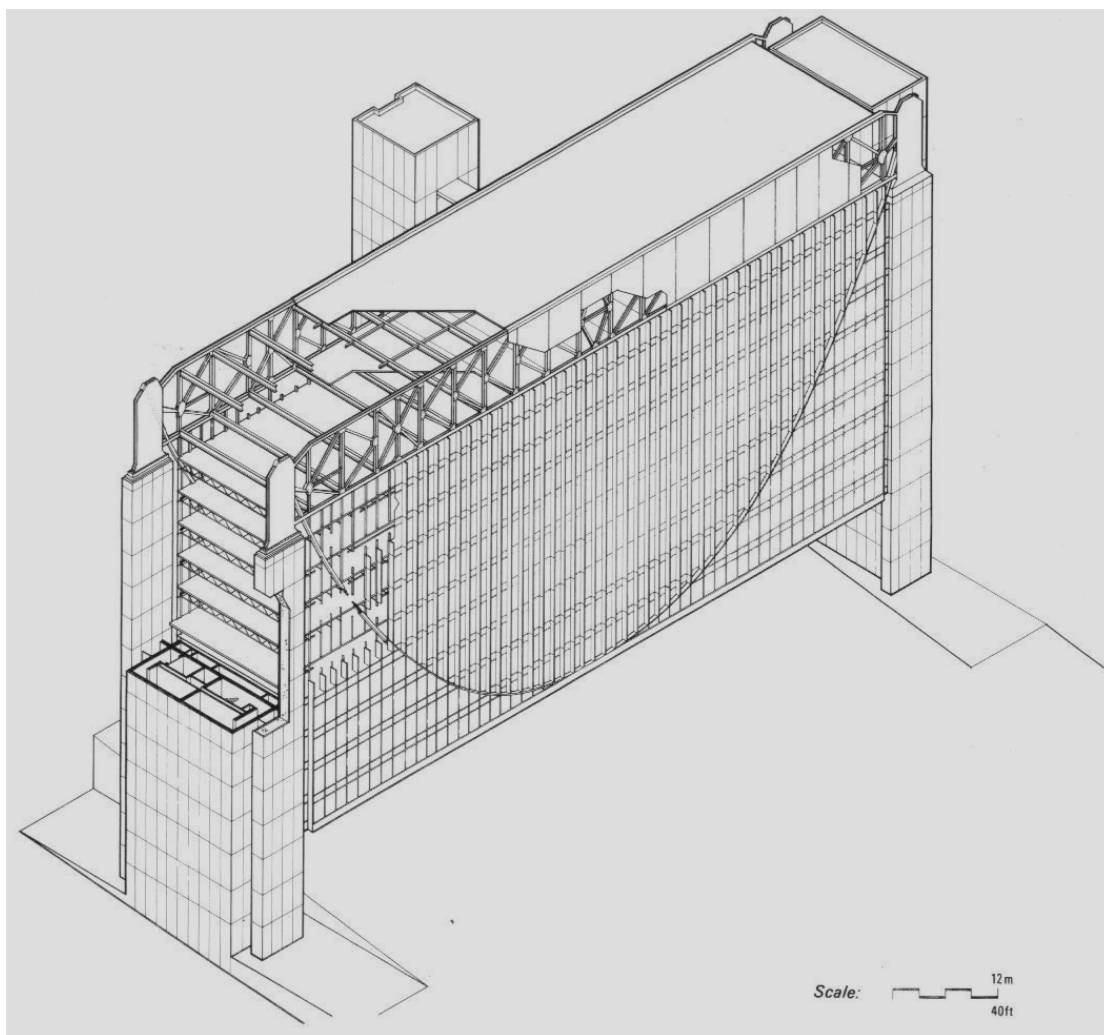




ทฤษฎีโครงสร้าง

Theory of Structures

เรียบเรียงโดย

ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

Rev. 3

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนวิชา Theory of Structures เล่มนี้ ได้ถูกแปลและเรียบเรียงขึ้นมาด้วยจุดประสงค์ที่จะช่วยให้นักศึกษาส่วนหนึ่งที่มีพื้นฐานความรู้ภาษาอังกฤษที่ไม่ดีพอ ใช้เป็นเอกสารอ้างอิงอ่านประกอบการอ่าน textbook ในวิชา Theory of Structures นอกจากนั้นแล้ว จะได้ช่วยให้นักศึกษาอีกส่วนหนึ่งที่ไม่สามารถจดคำบรรยายได้ทัน เนื่องจากการบรรยายเนื้อหาวิชาที่เร็วเกินไปหรือจำนวนนักศึกษาในชั้นเรียนมีมาก ได้มีเอกสารที่จะใช้ทบทวนหลังจากการบรรยาย ซึ่งผู้แปลและเรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่าจะช่วยให้นักศึกษาท่นเวลาในการอ่านและทำความเข้าใจในเนื้อหาของวิชาได้บ้างไม่มากก็น้อย สุดท้าย เอกสารการสอนเล่มนี้ยังขาดความสมบูรณ์อยู่มาก ถ้านักศึกษาเห็นควรว่าจะต้องเปลี่ยนแปลงแก้ไข และปรับปรุงในส่วนใด ช่วยกรุณาแจ้งให้ทราบด้วยจะขอบคุณมาก

ดร. สิทธิชัย แสงอาทิตย์

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สารบัญ

บทที่ 1 โครงสร้างและน้ำหนักบรรทุก

1.1 บทนำ	1-1
1.2 ประเภทของโครงสร้าง (Classification of Structures)	1-2
1.3 น้ำหนักบรรทุก (Loads)	1-6

บทที่ 2 การวิเคราะห์โครงสร้าง Statically Determinate

2.1 การสร้างแบบจำลองเพื่อใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง	2-1
2.2 หลักการ superposition (Principle of Superposition)	2-7
2.3 สมการความสมดุล (Equations of Equilibrium)	2-7
2.4 Determinacy และ Stability	2-9
2.5 การใช้สมการความสมดุล (Application of the Equations of Equilibrium)	2-12

บทที่ 3 การวิเคราะห์โครงข้อหมุนแบบ Statically Determinate

3.1 รูปแบบของโครงข้อหมุน (Types of Trusses)	3-1
3.2 ประเภทของโครงข้อหมุนที่อยู่ในระนาบเดียว (Classification of Coplanar Trusses)	3-4
3.3 วิธีตัดรูปข้อต่อ (Method of Joints)	3-9
3.4 Zero-Force Members	3-9
3.5 วิธีตัดรูปตัด (Method of Sections)	3-10
3.6 โครงข้อหมุนประกอบ (Compound Trusses)	3-11
3.7 โครงข้อหมุนซับซ้อน (Complex Trusses)	3-16

บทที่ 4 แรงและโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นในองค์อาคารของโครงสร้าง

4.1 แรงภายใน (Internal Load)	4-1
4.2 ฟังก์ชันของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด (Shear and Moment Functions)	4-1
4.3 แผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของคาน (Shear and Moment Diagrams for a Beam)	4-5
4.4 แผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของโครงข้อแข็ง (Shear and Moment Diagrams for a Frame)	4-17
4.5 การเขียน moment diagrams โดยใช้วิธี superposition (Moment Diagrams by the Method of Superposition)	4-20

บทที่ 5 Cables และ Arches

5.1 Cables	5-1
5.2 Cable ที่ถูกกระทำโดย Concentrated Loads (Cable Subjected to Concentrated Loads)	5-1
5.3 Cable ที่ถูกกระทำโดยแรงกระจายสม่ำเสมอ (Cable Subjected to Uniform Distributed Loads)	5-7
5.4 โค้งตั้ง (Arch)	5-15
5.5 Three-Hinged Arch	5-16

บทที่ 6 อินฟลูเอนซ์ไลน์ของโครงสร้าง Statically Determinate

6.1 อินฟลูเอนซ์ไลน์ (Influence Lines)	6-1
6.2 อินฟลูเอนซ์ไลน์ของคาน (Influence Lines for Beams)	6-8
6.3 Qualitative Influence Lines.....	6-11
6.4 อินฟลูเอนซ์ไลน์ของ girder ที่รองรับพื้น (Influence Lines for Floor Girders)	6-15
6.5 อินฟลูเอนซ์ไลน์ของโครงข้อหมุน (Influence Lines for Trusses)	6-21
6.6 น้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อสะพาน (Live Loads for Bridges)	6-24
6.7 ค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ตัดที่จุดใดจุดหนึ่ง เนื่องจากกลุ่มของน้ำหนักจรแบบเป็นจุด (Maximum Influence at a Point Due to a Series of Concentrated Loads)	6-24
6.8 ค่าสูงสุดที่แท้จริง (สัมบูรณ์) ของแรงเฉือนและของโมเมนต์ (Absolute Maximum Shear and Moment)	6-32

บทที่ 7 การโก่งตัวของโครงสร้าง

7.1 แผนภาพการโก่งตัวและเส้นโค้งอีลาสติก (Deflection Diagram and Elastic Curve)	7-1
7.2 Elastic Beam Theory	7-3
7.3 The Double Integration Method	7-6
7.4 ทฤษฎี Moment-Area (Moment-Area Theorems)	7-12
7.5 วิธี Conjugate-Beam	7-18
7.6 งานภายนอกและพลังงานความเครียด (External Work and Strain Energy)	7-27
7.7 หลักการของงานและพลังงาน (Principle of Work and Energy)	7-30
7.8 หลักการงานเสมือน (Principle of Virtual Work)	7-31
7.9 วิธี Virtual Work ในการหาค่าการแอ่นตัวของโครงข้อหมุน	7-32
7.10 วิธี Virtual Work ในการหาค่าการโก่งตัวของคานและโครงข้อแข็ง	7-40
7.11 Virtual Strain Energy	7-47
7.12 ทฤษฎีของ Castigliano	7-52
7.13 วิธี Castigliano ในการหาค่าการโก่งตัวของโครงข้อหมุน	7-53
7.14 วิธี Castigliano ในการหาค่าการโก่งตัวของคานและโครงข้อแข็ง	7-56

บทที่ 8 Analysis of Indeterminate Structures by the Force Method

8.1 Statically Indeterminate Structures	8-1
8.2 วิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง (method of consistent deformation)	8-4
8.3 กฎผกผันของ Maxwell (Maxwell's Theorem of Reciprocal Displacements)	8-12
8.4 ข้อสังเกตเพิ่มเติมในการวิเคราะห์โครงสร้าง Statically Indeterminate โดยวิธี Force Method	8-13
8.5 Moment Diagram ของคาน Statically Indeterminate	8-14
8.6 การวิเคราะห์โครงข้อแข็ง (frame) โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง	8-18
8.7 การวิเคราะห์โครงข้อหมุน (truss) โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง	8-21
8.8 การวิเคราะห์โครงสร้างประกอบ (Composite Structures) เปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง	8-25

8.9 วิธีงานน้อยที่สุด (Method of Least Work)	8-27
8.10 การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธี least work	8-28
8.11 การวิเคราะห์คานและโครงข้อแข็งโดยวิธี least work	8-31

บทที่ 1

โครงสร้างและน้ำหนักบรรทุก

1.1 บทนำ

โครงสร้าง (structure) ในทางวิศวกรรมโยธาคือสิ่งก่อสร้างใดๆ ที่ได้จากการก่อสร้างหรือการนำองค์อาคารหรือชิ้นส่วนโครงสร้าง (structural member) มาเชื่อมต่อกันเพื่อรองรับแรงกระทำและน้ำหนักบรรทุกต่างๆ (load) ตามวัตถุประสงค์ของโครงสร้างนั้น อย่างมีประสิทธิภาพและปลอดภัย ตัวอย่างของโครงสร้างที่เราเห็นโดยทั่วไปได้แก่ อาคารเรียน อาคารที่พักอาศัย อาคารพาณิชย์ สะพานลอย และเขื่อน เป็นต้น

วิศวกรรมโครงสร้าง (structural engineering) เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับการใช้กฎและหลักการต่างๆ เพื่อที่จะออกแบบและก่อสร้างโครงสร้าง

ขั้นตอนการออกแบบโครงสร้างทางวิศวกรรม

โดยทั่วไปแล้ว ขั้นตอนการออกแบบโครงสร้างทางวิศวกรรมจะถูกแบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอนหลักคือ การวางแผนงาน (planning) การวิเคราะห์ (analysis) การออกแบบ (design) และการก่อสร้าง (construction)

การวางแผน

ในขั้นตอนนี้ เราเริ่มจากการกำหนดจุดประสงค์และลักษณะการใช้งานของโครงสร้างจากความคิดเห็นของผู้ว่าจ้าง สถาปนิก นักวางแผน เป็นต้น จากนั้น ทำการเลือกรูปแบบของโครงสร้างที่เหมาะสม มีความปลอดภัย (safe) มีความสุนทรีย์ภาพ (aesthetic) และมีความประหยัด (economic) ทั้งในการก่อสร้างและการบำรุงรักษาโครงสร้าง เมื่อได้รูปแบบของโครงสร้างที่ต้องการแล้ว เราจะกำหนดชนิดของวัสดุที่จะใช้ การจัดวางองค์อาคารของโครงสร้าง และขนาดความกว้าง ยาว และสูงของโครงสร้างโดยรวม

การวิเคราะห์

การวิเคราะห์โครงสร้างเป็นขั้นตอนที่สำคัญมากเพราะผลการวิเคราะห์ที่ไม่ถูกต้องจะนำไปสู่การออกแบบที่ไม่ถูกต้องและจะเป็นอันตรายต่อชีวิตและทรัพย์สินเป็นอย่างสูง ในขั้นตอนนี้ เริ่มต้นเราจะทำการจำลองโครงสร้าง (structural idealization) ตามการจัดวางองค์อาคารของโครงสร้างดังที่ได้มาจากการวางแผน โดยให้มีการเชื่อมต่อขององค์อาคารและการรองรับโครงสร้างอย่างเหมาะสมและพอเพียง จากนั้น คำนวณหาขนาดของแรงกระทำและน้ำหนักบรรทุก (load) ที่คาดว่าจะกระทำต่อองค์อาคารและโครงสร้าง โดยกำหนดให้มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับค่าที่ได้ถูกกำหนดอยู่ในมาตรฐานการออกแบบ (Design code) และข้อกำหนดการออกแบบ (Design specification) ในพื้นที่ที่จะทำการก่อสร้าง เช่น ตามข้อกำหนดของกรุงเทพมหานคร ในกรณีที่เราที่กำลังออกแบบอยู่ในเขตพื้นที่ของกรุงเทพมหานคร เป็นต้น และหาค่าแรงที่เกิดขึ้นภายใน (Internal force) และการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ขององค์อาคารและโครงสร้าง

การออกแบบ

ในขั้นตอนนี้ เราจะทำการออกแบบหาขนาดรูปตัดและจุดเชื่อมต่อ (connection) ขององค์อาคารของโครงสร้าง โดยใช้ค่าของแรงภายในที่คำนวณได้จากขั้นตอนที่แล้ว โดยเราจะต้องออกแบบขององค์อาคารและโครงสร้างให้มีกำลัง (strength) มีเสถียรภาพ (stability) และมีการแอ่นตัว (deflection) และการสั่น (vibration) ตามที่ได้กำหนดไว้ในมาตรฐาน และข้อกำหนดการออกแบบในพื้นที่นั้นๆ เช่น ตามข้อกำหนดของกรุงเทพมหานคร ในกรณีที่โครงสร้างที่เราที่กำลังออกแบบอยู่ในเขตพื้นที่ของกรุงเทพมหานคร เป็นต้น

โดยทั่วไปแล้ว การวิเคราะห์และการออกแบบควรจะมีการทำซ้ำหลายครั้ง เพื่อให้ได้ขนาดของโครงสร้างที่เหมาะสม และเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลการคำนวณ

การก่อสร้าง

การก่อสร้างจะต้องถูกตรวจสอบให้เป็นไปตามที่ได้ออกแบบไว้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ และจะต้องเป็นไปตามแผนการก่อสร้างและแผนการจัดการการก่อสร้างที่ได้วางไว้

1.2 ประเภทของโครงสร้าง (Classifications of Structures)

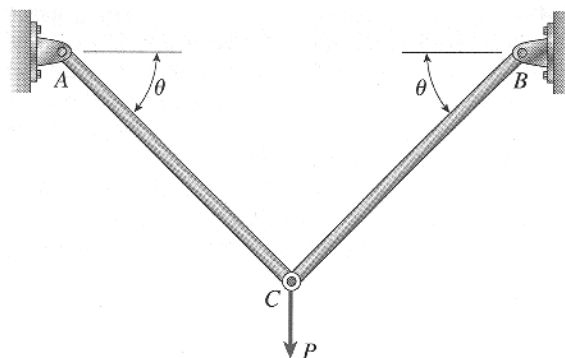
เนื่องจากโครงสร้างในทางวิศวกรรมโยธามีความหลากหลายมาก ดังนั้น วิศวกรโครงสร้าง (Structural engineer) จะต้องมีความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับรูปแบบต่างๆ ของโครงสร้างเป็นอย่างดี และสามารถที่จะแยกประเภทของโครงสร้างตามรูปแบบ (form) และการใช้งาน (function) ของโครงสร้างได้

องค์ประกอบของโครงสร้าง (Structural Elements)

เราจะแบ่งประเภทขององค์ประกอบของโครงสร้างได้ดังต่อไปนี้

Tie Rod และ Strut

tie rod เป็นองค์ประกอบของโครงสร้างที่ต้านทานต่อการกระทำของแรงภายนอกโดยการพัฒนาแรงดึง (tensile force) ขึ้นในองค์ประกอบของโครงสร้างเท่านั้น ยกตัวอย่างเช่น โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-1 ภายใต้การกระทำของแรง P ที่จุด C ชิ้นส่วน AC และ BC ของโครงข้อหมุนจะต้านทานต่อแรง P ด้วยการพัฒนาแรงดึงขึ้นในตัวของชิ้นส่วนดังกล่าว โดยทั่วไปแล้ว tie rod มักจะมีขนาดหน้าตัดที่เล็กเมื่อเปรียบเทียบกับความยาว (slender) เนื่องจากแรงดึงจะทำให้เกิดการดึงตัวใน tie rod ซึ่งจะป้องกันไม่ให้เกิดการโก่งเดาะ (buckling) ขึ้นใน tie rod



รูปที่ 1-1

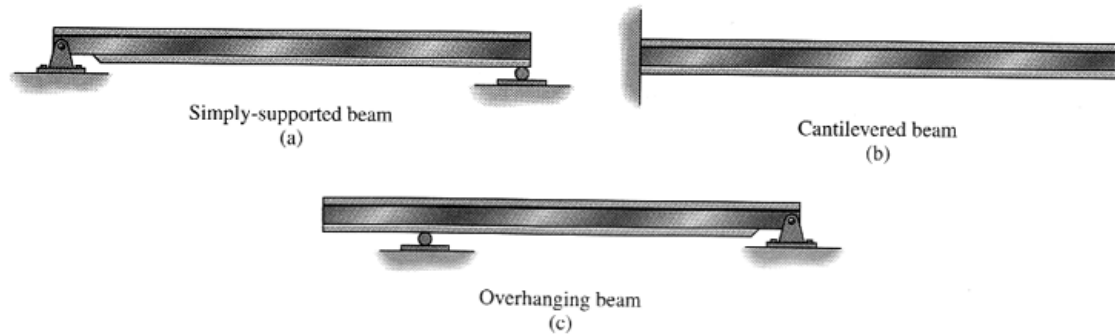
ในทางตรงกันข้าม strut จะเป็นองค์ประกอบของโครงสร้างที่ต้านทานต่อการกระทำของแรงภายนอกโดยการพัฒนาแรงกดอัด (compressive force) ขึ้นในองค์ประกอบของโครงสร้างเท่านั้น ยกตัวอย่างเช่น โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-1 เมื่อแรง P มีทิศทางที่ตรงกันข้ามกับที่แสดงในรูป ชิ้นส่วน AC และ BC จะต้านทานต่อแรง P ด้วยการพัฒนาแรงกดอัดขึ้นในตัวของชิ้นส่วนดังกล่าว โดยทั่วไปแล้ว ถ้าแรงกดอัดที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับแรงดึงที่เกิดขึ้นแล้ว ชิ้นส่วน AC และ BC ที่รับแรงกดอัดจะมีขนาดใหญ่กว่าชิ้นส่วน AC และ BC ที่รับแรงดึง เนื่องจากการโก่งเดาะ (buckling) ที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนที่รับแรงกดอัด

คานเป็นองค์ประกอบของโครงสร้างที่มีลักษณะตรง วางอยู่ในแนวนอน และรองรับแรงหรือน้ำหนักบรรทุก (load) ในแนวตั้งไปตามความยาวของคาน คานมักจะถูกออกแบบให้ต้านทานเฉพาะโมเมนต์ดัด (Bending moments) แต่ถ้าคานเป็นคานที่สั้นแล้ว เราอาจจะต้องออกแบบคานโดยพิจารณาถึงแรงเฉือนด้วย โดยทั่วไปแล้ว คานมักจะถูกเรียกตามลักษณะการรองรับของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 1.2

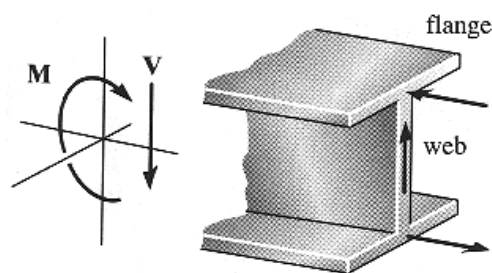
หน้าตัดของคานเหล็กมักจะมีรูปร่างดังที่แสดงในรูปที่ 1.3 เราเรียกคานแบบนี้ว่า Wide-flange beam ซึ่งเป็นหน้าตัดของคานที่ใช้วัสดุอย่างมีประสิทธิภาพ เพราะว่าแรงภายในที่ปีกบน (top flange) และปีกล่าง (bottom flange) ของคาน

จะทำให้เกิดแรงคู่ควบ (couple) ซึ่งจะต้านโมเมนต์ (Moment) M ที่เกิดขึ้นจากแรงภายนอก และแฉ (web) ของคานจะทำให้หน้าตัดต้านแรงเฉือน (shear force) V ที่เกิดขึ้น

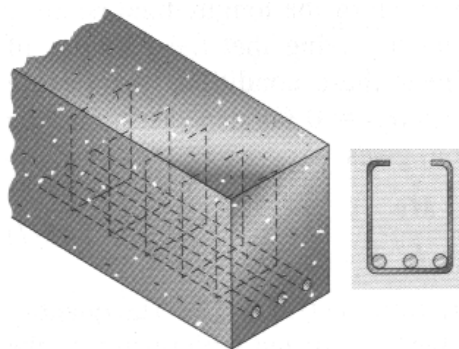
คานคอนกรีต (concrete beam) มักจะมีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพราะง่ายต่อการก่อสร้าง เนื่องจากคอนกรีตมีกำลังรับแรงดึง (tensile strength) ต่ำ ประมาณ 10% ของกำลังรับแรงอัด (compressive strength) ดังนั้น คานคอนกรีตมักจะถูกเสริมด้วยเหล็กเสริม (steel rebar) ในส่วนของคานคอนกรีตที่รับแรงดึงและแรงเฉือน ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ 1-4 ซึ่งเรียกว่า **คานคอนกรีตเสริมเหล็ก** (reinforced concrete beam)



รูปที่ 1-2



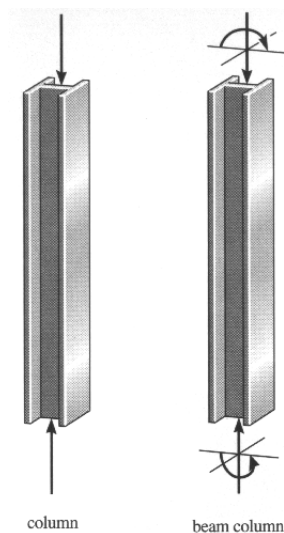
รูปที่ 1-3



รูปที่ 1-4

เสา (Columns)

เสาเป็นองค์อาคารของโครงสร้างที่อยู่ใแนวตั้งและรองรับแรงอัดในแนวแกน (axial compressive loads) ที่ถ่ายลงมาจากพื้นหรือคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-5 เสาเหล็ก (steel columns) มักจะมีหน้าตัดเป็นท่อกกลมกลวง ท่อเหลี่ยมกลวง หรือ wide-flange เสาที่ทำด้วยคอนกรีต (reinforced concrete column) มักจะมีหน้าตัดเป็นรูปทรงกลมหรือรูปสี่เหลี่ยม โดยส่วนใหญ่แล้ว เสาจะถูกกระทำโดยแรงอัดในแนวแกนและโมเมนต์ดัดร่วมกัน ดังที่แสดงในรูปที่ 1-5 เสาแบบนี้จะมีพฤติกรรมแบบ **Beam-column**



รูปที่ 1-5

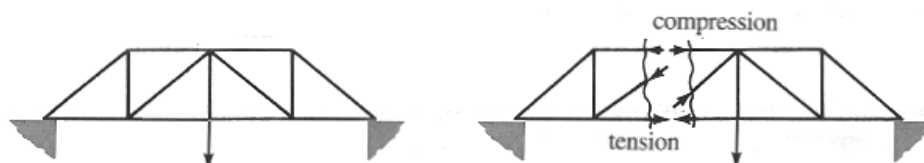
โครงสร้าง (Structures)

ระบบโครงสร้าง (structural system) เกิดจากการนำองค์อาคารของโครงสร้างตามที่ได้กล่าวไปแล้ว และโครงสร้างต่างๆ ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะมาประกอบเข้าด้วยกัน

โครงข้อหมุน (Trusses)

โครงข้อหมุนเป็นโครงสร้างที่เหมาะสมในกรณีที่มีระยะระหว่างจุดรองรับ (span) ของโครงสร้างมีความยาวมาก และความลึกหรือความสูงของโครงข้อหมุนไม่เป็นปัจจัยสำคัญในการออกแบบและก่อสร้างโครงข้อหมุน โครงข้อหมุนจะประกอบด้วยชิ้นส่วนที่รองรับรับแรงดึงและแรงอัด ชิ้นส่วนเหล่านี้จะถูกจัดเรียงในลักษณะของสามเหลี่ยมต่อเนื่องกันไป ซึ่งจะทำให้โครงข้อหมุนมีพฤติกรรมเหมือนกับคานขนาดใหญ่ โดยที่โมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในโครงข้อหมุนจะถูกเปลี่ยนเป็นแรงดึงและแรงอัดในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน ในลักษณะที่แสดงในรูปที่ 1-6 ดังนั้น โครงข้อหมุนจะใช้วัสดุน้อยกว่าคานในการรองรับแรงกระทำที่มีขนาดเท่ากันและจะมีน้ำหนักเบากว่าคาน

โครงข้อหมุนถูกแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบใหญ่ๆ คือ โครงข้อหมุน 2 มิติ (planar truss) และโครงข้อหมุน 3 มิติ (space truss) โดยที่ planar truss เป็นโครงข้อหมุนที่มีชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนและแรงกระทำอยู่ในระนาบเดียวกัน และมักจะถูกใช้เป็นโครงสร้างของสะพานและหลังคา ส่วน space truss จะเป็นโครงข้อหมุนที่มีชิ้นส่วนและแรงกระทำวางอยู่ใน 3 มิติ ซึ่งมักจะใช้ในโครงสร้างจำพวก tower cranes และปั้นจั่น (derricks) โดยทั่วไปแล้ว โครงข้อหมุนมักจะถูกใช้เมื่อ span ของโครงสร้างมีค่าอยู่ระหว่าง 3 m ถึง 120 m



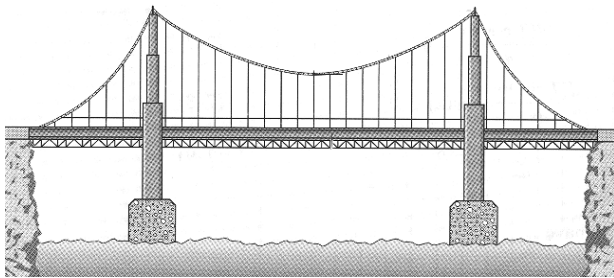
รูปที่ 1-6

Cables และ Arches

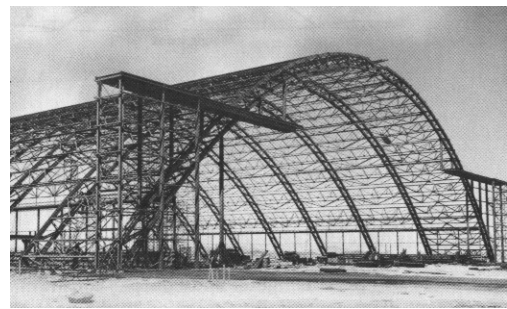
เคเบิล (cable) และโค้งตั้ง (arch) เป็นโครงสร้างอีกรูปแบบหนึ่งที่จะถูกนำมาใช้เมื่อโครงสร้างมี span ที่ยาวมากๆ cable เป็นโครงสร้างที่ดัดไปมาได้ง่าย (flexible) และรองรับแรงกระทำโดยการพัฒนาแรงดึงในตัว cable เพื่อต้านแรงกระทำภายนอก ดังนั้น cable จะมีรูปร่างตกท้องช้าง (sag) ดังที่แสดงในรูปที่ 1-7 cable มักจะถูกใช้เพื่อรองรับสะพานและหลังคาอาคาร โดยทั่วไปแล้ว cable จะมีข้อได้เปรียบเหนือคานและโครงข้อหมุนเมื่อ span ของโครงสร้างมีความยาวมากกว่า 45 m เพราะเมื่อ span มีความยาวเพิ่มขึ้น ราคาค่าก่อสร้างและความลึกของคานและโครงข้อหมุนจะเพิ่มขึ้น

อย่างรวดเร็ว ซึ่งเป็นการไม่ประหยัด อย่างไรก็ตาม การใช้ cable นั้นจะถูกจำกัดโดยน้ำหนักของตัว cable และวิธีการยึดเหนี่ยว (anchorage) cable เข้ากับฐานรองรับ

arch เป็นโครงสร้างที่มีความโค้ง (curvature) กลับด้านกับเคเบิล ดังที่แสดงในรูปที่ 1-8 ดังนั้น arch จะต้านทานแรงกระทำโดยการพัฒนาแรงอัด (compressive forces) ขึ้นภายในตัว arch เป็นหลัก เนื่องจาก arch จะต้องมีความแกร่ง (rigidity) เพื่อที่จะรักษารูปร่างภายใต้แรงกด ซึ่งจะก่อให้เกิดแรงเฉือน (shear) และโมเมนต์ดัด (bending moment) ขึ้นภายในตัว arch และเราจะต้องพิจารณาแรงและโมเมนต์ดังกล่าวในการออกแบบ arch โดยทั่วไปแล้ว arch มักจะถูกใช้ในโครงสร้างของสะพานและโครงหลังคาของ dome



รูปที่ 1-7

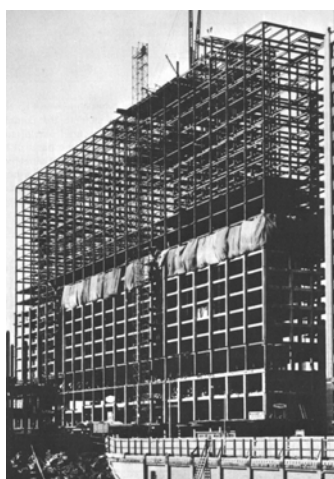


รูปที่ 1-8

Frame (โครงข้อแข็ง)

โครงข้อแข็ง (frames) มักจะถูกใช้ในอาคาร ซึ่งได้มาจากการนำคานและเสามาเชื่อมต่อกันด้วยข้อต่อแบบหมุด (pinned joint) หรือข้อต่อแข็ง (rigid joint) ดังรูปที่ 1-9

โครงข้อแข็งมักจะถูกแบ่งย่อยออกเป็นโครงข้อแข็ง 2 มิติ (planar frame) และโครงข้อแข็ง 3 มิติ (space frame) แรงที่กระทำต่อโครงข้อแข็งจะก่อให้เกิดการดัด (bending) บนคานและเสา ในกรณีที่โครงข้อแข็งประกอบขึ้นจากคานและเสาโดยใช้ข้อต่อแข็ง (rigid joints) แล้ว โครงข้อแข็งนั้นจะเป็นโครงสร้างแบบ indeterminate และกำลังรับแรงกระทำของโครงข้อแข็งจะขึ้นอยู่กับ moment interactions ระหว่างคานกับเสาที่ข้อต่อแข็งนั้น ดังนั้น ในการที่จะทำให้โครงข้อแข็งมีประสิทธิภาพดีขึ้นนั้น เราอาจจะต้องลดขนาดของคานและเพิ่มขนาดของเสา



รูปที่ 1-9

Surface Structures

surface structures เป็นโครงสร้างที่มีพื้นผิวอยู่ใน 3 มิติและถูกสร้างขึ้นโดยใช้วัสดุที่มีขนาดบาง เมื่อเปรียบเทียบกับความกว้างและความยาวของโครงสร้างโดยรวม ดังที่แสดงในรูปที่ 1-10a ในกรณีที่วัสดุที่ใช้อยู่ในรูปของ tent แล้ว โครง

สร้างนี้จะมีประพฤติกรรมแบบ membrane และจะต้านทานแรงกระทำโดยแรงดึงเท่านั้น เมื่อ surface structures ถูกสร้างขึ้นด้วยวัสดุที่แกร่ง ซึ่งจะอยู่ในรูปของ folded plate หรือ cylinder แล้ว โครงสร้างนี้มักจะถูกเรียกว่า Thin plates หรือ Thin shells ดังที่แสดงในรูปที่ 1-10b



(a.)



(b.)

รูปที่ 1-10

1.3 น้ำหนักบรรทุก (Loads)

น้ำหนักบรรทุกหรือ load ที่ใช้ในการออกแบบโครงสร้างมักจะถูกกำหนดอยู่ในมาตรฐานหรือข้อบัญญัติ (code) ต่างๆ โดยทั่วไปแล้ว วิศวกรโครงสร้างจะต้องใช้ code อยู่ 2 ประเภทในการอ้างอิง คือ มาตรฐานอาคาร (building code) และมาตรฐานการออกแบบ (design code)

มาตรฐานอาคาร (building code) จะระบุข้อกำหนดต่างๆ ที่องค์กรของรัฐบาลบัญญัติขึ้นมาเพื่อกำหนดค่าต่ำสุดของแรงหรือน้ำหนักบรรทุกที่จะใช้ในการออกแบบโครงสร้าง (minimum design load) และมาตรฐานต่ำสุดที่จะใช้ในการก่อสร้างโครงสร้างนั้น เช่น ข้อบัญญัติกรุงเทพมหานครของกรุงเทพมหานคร Uniform Building Code ของ International Conference of Building Officials และ American National Standard Building Code ของ American National Standard Institute (ANSI) เป็นต้น

มาตรฐานการออกแบบ (design code) จะกำหนดมาตรฐานของรายละเอียดทางเทคนิคในการออกแบบโครงสร้าง เช่น ข้อบัญญัติกรุงเทพมหานครของกรุงเทพมหานคร มาตรฐาน ว.ส.ท. ของวิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย Building Code Requirements for Reinforced Concrete ของ American Concrete Institute (ACI) Standard Specifications for Highway Bridges ของ American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) และ Manual of Steel Construction ของ American Institute of Steel Construction (AISC) เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม มาตรฐานเหล่านี้เป็นเฉพาะแนวทางที่ใช้ในการออกแบบโครงสร้างเท่านั้น ในกรณีที่มีความผิดพลาดเกิดขึ้นในการออกแบบ ความรับผิดชอบทั้งหมดจะตกอยู่กับวิศวกรผู้วิเคราะห์และออกแบบโครงสร้าง

ในการออกแบบโครงสร้าง เราจะเริ่มจากส่วนของโครงสร้างที่รับแรงโดยตรงก่อน จากนั้น เราจะออกแบบส่วนอื่นๆ ของโครงสร้างที่ทำหน้าที่รองรับส่วนโครงสร้างนั้นๆ เป็นลำดับไป จนกระทั่งถึงฐานราก (foundation) ยกตัวอย่างเช่น ในการออกแบบอาคาร เราจะออกแบบแผ่นพื้น (floor slab) เป็นอันดับแรก แล้วตามด้วยคานที่รองรับแผ่นพื้น เสาที่รองรับคาน

และสุดท้ายที่ฐานราก ดังนั้น ในการที่จะออกแบบอาคาร เราจำเป็นต้องเริ่มจากการหาขนาดและทิศทางของแรงหรือน้ำหนักบรรทุกที่กระทำอยู่บนพื้นของอาคารก่อน โดยปกติแล้ว โครงสร้างมักจะถูกกระทำโดยแรงหรือน้ำหนักบรรทุกต่างๆ ดังที่จะได้กล่าวต่อไป

น้ำหนักบรรทุกคงที่ (Dead Loads)

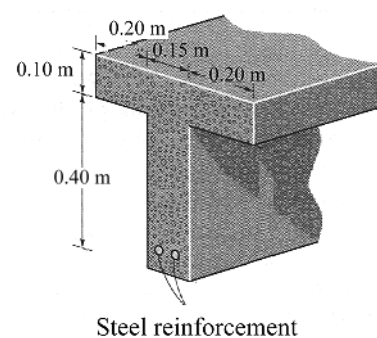
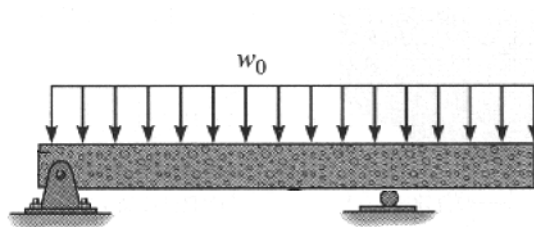
น้ำหนักบรรทุกคงที่หรือ dead loads เป็นน้ำหนักของโครงสร้างหรือน้ำหนักของวัตถุใดๆ ที่วางอยู่บนโครงสร้างอย่างถาวร โดยปกติแล้ว น้ำหนักบรรทุกคงที่จะเป็นน้ำหนักของเสา น้ำหนักคาน น้ำหนักแผ่นพื้น และน้ำหนักท่อระบายน้ำ เป็นต้น เมื่อเราทราบชนิดของวัสดุและขนาดขององค์อาคารแล้ว เราจะหาน้ำหนักขององค์อาคารได้จากค่าความหนาแน่นของวัสดุคูณกับขนาดขององค์อาคาร ตารางที่ 1-1 แสดงค่าต่ำสุดของน้ำหนักบรรทุกคงที่ที่จะใช้ในการออกแบบ (minimum design dead loads)

ตารางที่ 1-1 ค่าต่ำสุดของน้ำหนักบรรทุกคงที่ที่จะใช้ในการออกแบบโครงสร้าง

คอนกรีตเสริมเหล็ก	23.6	kN/m ³
เหล็ก	77.0	kN/m ³
อิฐ	18.9	kN/m ³
ไม้	6.0	kN/m ³
ไม้อัด	5.7	kN/m ³
อลูมิเนียม	25.9	kN/m ³
วัสดุผนังหุ้ม	50-180	N/m ²
โครงหลังคาไม้	100-200	N/m ²
ฝ้าเพดาน	140-250	N/m ²
กำแพงอิฐมวลเบา	1.8-3.5	kN/m ²
กำแพงอิฐบล็อก	1.0-2.0	kN/m ²
กำแพงคอนกรีตบล็อก	1.0-2.4	kN/m ²
ฝ้าไม้ ไม้อัด รวมคร่าว	120-300	N/m ²
พื้นไม้ รวมตง	300	N/m ²

ตัวอย่างที่ 1-1

จงหา dead load ของคานคอนกรีตเสริมเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ 1-11



รูปที่ 1-11

พิจารณาคานคอนกรีตเสริมเหล็ก เราจะหาน้ำหนักของคานซึ่งเป็น dead load ที่กระทำต่อคานและมีการกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวของคานได้โดยการคำนวณหาผลคูณของปริมาตรของคานต่อความยาว 1 m ของคานและความหนาแน่นของคอนกรีตเสริมเหล็ก

จากหน้าตัดของคาน ปริมาตรของคานคอนกรีตเสริมเหล็กต่อความยาว 1 m ของคานจะมีค่าเท่ากับ

$$0.1 \text{ m} (0.55 \text{ m}) + 0.15 \text{ m} (0.40 \text{ m}) = 0.115 \text{ m}^3$$

ดังนั้น จากตารางที่ 1-1 น้ำหนักของคานต่อความยาวคาน 1 m จะมีค่าเท่ากับ

$$0.115 \text{ m}^3 (23.6 \text{ kN/m}^3) = 2.714 \text{ kN} \text{ หรือ } w_0 = 2.714 \text{ kN/m}$$

น้ำหนักบรรทุกจร (Live loads)

น้ำหนักบรรทุกจรหรือ live loads เป็นน้ำหนักบรรทุกที่มีการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาด (magnitude) และตำแหน่ง (location) ตามเวลา หรือเป็นน้ำหนักของวัตถุใดๆ ที่วางอยู่บนโครงสร้างแบบชั่วคราวและแรงกระทำที่เกิดจากธรรมชาติ เช่น แรงแลมและแรงแผ่นดินไหว เป็นต้น เรา สามารถที่จะแบ่งน้ำหนักบรรทุกจรได้ดังนี้

น้ำหนักบรรทุกจบบนอาคาร (Building loads)

น้ำหนักบรรทุกจรที่กระทำอยู่บนพื้นของอาคาร (floor slab) จะถูกสมมุติให้มีการกระจายสม่ำเสมอและมีค่าขึ้นอยู่กับลักษณะการใช้งานของอาคาร ดังเช่นที่แสดงไว้ในตารางที่ 1-2

ตารางที่ 1-2 ค่า minimum design live loads ที่มักใช้ในการออกแบบอาคาร

หลังคา	0.5	kN/m ²
กันสาด	1.0	kN/m ²
ที่พักอาศัย โรงเรียนอนุบาล ห้องน้ำ ห้องส้วม	1.5	kN/m ²
อาคารชุด หอพัก โรงแรม	2.0	kN/m ²
สำนักงาน ธนาคาร	2.5	kN/m ²
อาคารพาณิชย์ มหาวิทยาลัย วิทยาลัย โรงเรียน	3.0	kN/m ²
ห้องโถง บันได ทางเดินของอาคารชุด หอพัก โรงแรม		
โรงพยาบาล สำนักงาน และธนาคาร	3.0	kN/m ²
ห้างสรรพสินค้า โรงมหรสพ หอประชุม ภัตตาคาร		
และที่จอดรถหรือเก็บรถยนต์นั่ง	4.0	kN/m ²
ห้องโถง บันได ทางเดินของอาคารพาณิชย์		
มหาวิทยาลัย วิทยาลัย และโรงเรียน	4.0	kN/m ²
คลังสินค้า พิพิธภัณฑ์ อัฒจันทร์ โรงงานอุตสาหกรรม		
โรงพิมพ์ ห้องเก็บเอกสารและพัสดุ	5.0	kN/m ²
ห้องโถง บันได ทางเดินของห้างสรรพสินค้า โรงมหรสพ		
หอประชุม ภัตตาคาร และหอสมุด	5.0	kN/m ²
ห้องเก็บหนังสือของหอสมุด	6.0	kN/m ²
ที่จอดรถหรือเก็บรถยนต์บรรทุกเปล่า และรถอื่นๆ	8.0	kN/m ²

นอกจากค่าต่ำสุดของน้ำหนักบรรทุกจรแบบกระจายสม่ำเสมอแล้ว ในโครงสร้างบางประเภทเช่นลานจอดรถ เรา จะต้องพิจารณาค่าน้ำหนักบรรทุกจรแบบจุด (minimum concentrated live loads) ด้วย เช่น น้ำหนักของรถยนต์ เป็นต้น เพื่อหาตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกจรที่จะก่อให้เกิดหน่วยแรงสูงสุดบนพื้นอาคาร

ในโครงสร้างต่างๆ ยกเว้น โรงมหรสพ หอประชุม หอสมุด พิพิธภัณฑ์ อัฒจันทร์ คลังสินค้า โรงงานอุตสาหกรรม อาคารจอดรถยนต์หรือเก็บรถยนต์ ข้อบัญญัติกรุงเทพมหานคร พ.ศ. 2522 กำหนดให้มีการลดค่าต่ำสุดของน้ำหนักบรรทุกจรแบบกระจายสม่ำเสมอที่กระทำอยู่บนพื้น เพื่อใช้ในการคำนวณหาน้ำหนักที่ถ่ายลงเสาและฐานราก เนื่องจากความน่าจะเป็นที่น้ำหนักบรรทุกจรที่กำหนดจะกระทำตลอดทั้งพื้นที่ของโครงสร้างในเวลาเดียวกันนั้นมีน้อยมาก ดังตารางที่ 1-3

ANSI A58.1-1982 อนุญาตให้ลดขนาดของค่าต่ำสุดของน้ำหนักบรรทุกจรแบบกระจายสม่ำเสมอบนองค์อาคารที่มีพื้นที่อิทธิพล (influence area) เท่ากับ 400 ft² หรือมากกว่าจากสมการ

$$L = L_0 \left(0.25 + \frac{15}{\sqrt{A_f}} \right) \quad (1-1)$$

เมื่อ L = ค่าของน้ำหนักบรรทุกที่ลดลง

L_0 = ค่าของน้ำหนักบรรทุกตามมาตรฐานการออกแบบของ ANSI

A_f = ค่าพื้นที่อิทธิพล ซึ่งมีค่าเท่ากับ 4 เท่าของพื้นที่ประสิทธิผลที่รองรับน้ำหนักบรรทุก (effective load-carrying floor area) ของเสา และ 2 เท่าของพื้นที่ประสิทธิผลที่รองรับน้ำหนักบรรทุกของคาน

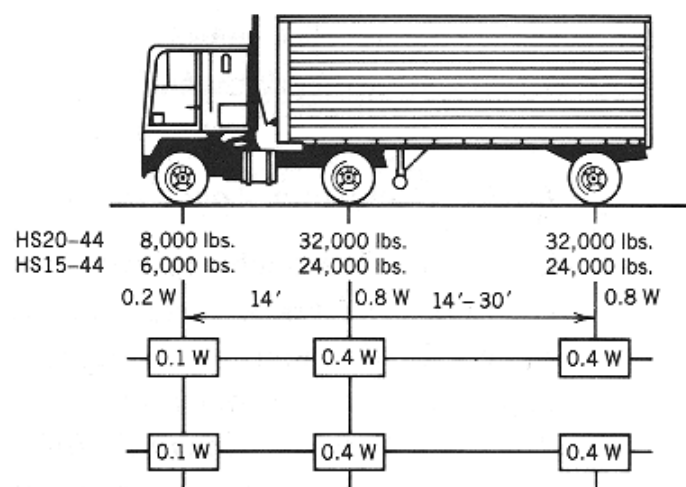
ค่า L นี้จะถูกจำกัดไม่ให้มีค่าน้อยกว่า 50% ของ L_0 สำหรับองค์อาคารที่รองรับพื้นเพียง 1 ชั้นและจะไม่ให้น้อยกว่า 40% ของ L_0 สำหรับองค์อาคารที่รองรับมากกว่า 1 ชั้น การลดลงของน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายสม่ำเสมอจะไม่อนุญาตให้กระทำในอาคารสาธารณะ อาคารที่จอดรถ และหลังคา

ตารางที่ 1-3

หลังคาหรือดาดฟ้า	ลดลงได้ร้อยละ	0
ชั้นที่ 1 ถัดจากหลังคาหรือดาดฟ้า	ลดลงได้ร้อยละ	0
ชั้นที่ 2 ถัดจากหลังคาหรือดาดฟ้า	ลดลงได้ร้อยละ	0
ชั้นที่ 3 ถัดจากหลังคาหรือดาดฟ้า	ลดลงได้ร้อยละ	10
ชั้นที่ 4 ถัดจากหลังคาหรือดาดฟ้า	ลดลงได้ร้อยละ	20
ชั้นที่ 5 ถัดจากหลังคาหรือดาดฟ้า	ลดลงได้ร้อยละ	30
ชั้นที่ 6 ถัดจากหลังคาหรือดาดฟ้า	ลดลงได้ร้อยละ	40
ชั้นที่ 7 ถัดจากหลังคาหรือดาดฟ้า และชั้นต่อไป	ลดลงได้ร้อยละ	50

น้ำหนักบรรทุกบนสะพาน (Bridge Loads)

มาตรฐานสะพานบนทางหลวง (Standard Specifications for Highway Bridges) ของ American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) ประเทศสหรัฐอเมริกา ได้กำหนดน้ำหนักบรรทุกของรถบรรทุกที่จะใช้ในการออกแบบสะพาน โดยใช้ค่าน้ำหนักล้อ (wheel loads) และระยะห่างของล้อของรถบรรทุก ดังที่แสดงในรูปที่ 1-12 และเราจะคำนวณหาค่าหน่วยแรงสูงสุดจากน้ำหนักบรรทุก (maximum live-load stress) ในองค์อาคารต่าง ๆ ของสะพานได้โดยการวางน้ำหนักล้อรถในส่วนที่วิกฤติที่สุดของสะพาน



รูปที่ 1-12

เนื่องจากพื้นของสะพานหรือคอสสะพานมักจะมีผิวขรุขระ ซึ่งทำให้รถยนต์ที่วิ่งผ่านมีการกระโดดและกระแทกกับพื้นของสะพาน ซึ่งก่อให้เกิดแรงกระแทก (impact loads) กระทำต่อสะพาน ดังนั้น ในการออกแบบส่วนโครงสร้างของสะพานนั้น AASHTO ได้กำหนดสมการที่จะใช้ในการคำนวณหาแรงกระแทกนี้ ซึ่งมีค่าเป็นเปอร์เซ็นต์ที่น้ำหนักบรรทุกจรควรจะมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากแรงกระแทก ซึ่งถูกเรียกว่าเศษส่วนของแรงกระแทก (impact fraction) หรือ I โดยที่

$$I = \frac{50}{L + 125} \quad \text{แต่ไม่มากกว่า 0.3}$$

เมื่อ L เป็นความยาวของ spans ที่ถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกจรมีหน่วยเป็น foot

แรงลม (Wind Loads)

เมื่อโครงสร้างขวางทางการเคลื่อนที่ของลม พลังงานจลน์ (Kinetic energy) ของลมจะถูกแปลงเป็นพลังงานศักย์ (potential energy) ซึ่งก่อให้เกิดแรงลม (wind loads) กระทำกับโครงสร้างนั้น แรงลมจะขึ้นอยู่กับความหนาแน่น (density) และความเร็ว (velocity) ของอากาศ มุมที่ลมกระทำกับโครงสร้าง รูปร่างและความแกร่ง (stiffness) ของโครงสร้าง และความหยาบของผิวของโครงสร้าง กรุงเทพมหานครได้ออกข้อบัญญัติกรุงเทพมหานคร พ.ศ. 2522 สำหรับใช้คำนวณออกแบบโครงสร้างเนื่องจากแรงลมดังต่อไปนี้

แรงลมสำหรับส่วนของอาคาร

- ที่สูงไม่เกิน 10 เมตร	0.5	kN/m ²
- ที่สูงกว่า 10 เมตร แต่ไม่เกิน 20 เมตร	0.8	kN/m ²
- ที่สูงกว่า 20 เมตร แต่ไม่เกิน 40 เมตร	1.2	kN/m ²
- ที่สูงกว่า 40 เมตร	1.6	kN/m ²

โดยทั่วไปแล้ว เราสามารถที่จะคำนวณหาค่าของแรงลมได้โดยใช้วิธีสถิตย (static) หรือวิธีจลน์ (dynamic) ในวิธี static นั้น ความดันของลมที่เปลี่ยนแปลงไปมาซึ่งเกิดจากการพัดของลมจะถูกประมาณจากความดันของลมเฉลี่ย (Mean wind pressure) ซึ่งกระทำอยู่ทางด้านที่ลมกระทำ (windward) และด้านท้ายลม (leeward) ของโครงสร้าง ความดันของลม q นี้จะถูกหามาได้โดยใช้สมการของพลังงานจลน์ของลมในรูป

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2$$

เมื่อ ρ = ความหนาแน่นของอากาศ = 2.376×10^{-3} slug/ft³ หรือ = 1.2244 kg/m³

v = ความเร็วลม (miles/ ชั่วโมง หรือ กิโลเมตร/ชั่วโมง)

หลังจากที่เราแปลงหน่วยต่าง ๆ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} q \text{ (psf)} &= 0.00256 [v \text{ (mph)}]^2 \\ q \text{ (N/m}^2\text{)} &= 0.04724 [v \text{ (km/h)}]^2 \\ q \text{ (kg/m}^2\text{)} &= 0.004816 [v \text{ (km/h)}]^2 \end{aligned} \quad (1-2)$$

เมื่อ q เป็นความดันของลมที่กระทำอยู่บนพื้นที่เรียบและตั้งฉากกับทิศทางของความเร็วลม โดยทั่วไปแล้ว ในประเทศสหรัฐอเมริกา ความเร็วลมที่ 100 mph หรือ 160 km/h มักจะถูกนำมาใช้ในการออกแบบโครงสร้างที่มีความสูงน้อยๆ (low-rise structure) อย่างไรก็ตาม ค่าความเร็วลมที่ถูกต้องจะขึ้นอยู่กับลักษณะภูมิประเทศและสิ่งแวดล้อมรอบโครงสร้างและความสูงของโครงสร้างจากพื้นดิน

ระดับความสูงของโครงสร้างจากพื้นดินนั้นมีความสำคัญมากในการคำนวณหาความดันลมโดยวิธีนี้ เนื่องจากว่าความเร็วลมจะมีค่าสูงขึ้น เมื่อระดับความสูงจากพื้นดินมีค่ามากขึ้น ดังนั้น ตึกที่สูงกว่าจะถูกกระทำโดยความดันลมที่มีค่า

มากกว่าตึกที่เตี้ยกว่า หลังจากที่เราทราบค่าความดันของลมเฉลี่ยแล้ว เราจะคูณค่าความดันของลมเฉลี่ยนั้นด้วยค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ เพื่อหาค่าความดันลมที่จะใช้ในการออกแบบ p โดยค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้จะประกอบด้วย

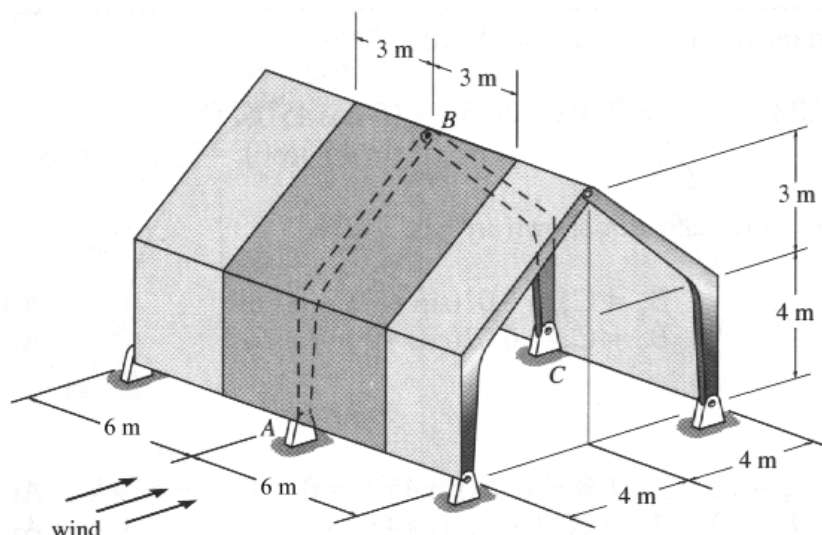
1. ค่าสัมประสิทธิ์ความสูงของโครงสร้าง ลักษณะที่ตั้งของโครงสร้าง (exposure) และการกระโชกของลม (wind gust) C_e
2. ค่าสัมประสิทธิ์ความสำคัญของโครงสร้าง I_w
3. ค่าสัมประสิทธิ์ของความดันลม (pressure coefficient) เนื่องจากจากรูปร่างของโครงสร้าง C_q

สุดท้าย ค่าความดันลม p ที่ได้จะถูกคูณด้วยระยะระหว่างโครงสร้างหลักที่รับแรงลม เพื่อเปลี่ยนหรือถ่ายค่าความดันลมมาเป็นแรงลมที่กระทำต่อโครงสร้างนั้น

ตัวอย่างที่ 1-2

จงหาแรงลมที่กระทำต่อโครงสร้างของโรงงานผลิตอิฐบล็อกจากที่มีแบบแปลนของโครงสร้างหลักที่ใช้ด้านทานต่อแรงลม ดังที่แสดงในรูปที่ 1-13 ตามมาตรฐานของ Uniform Building Code กำหนดให้

1. โรงงานนี้ตั้งอยู่ในเขตพื้นที่นิคมอุตสาหกรรมในเขตจังหวัดนครราชสีมา โดยที่พื้นที่รอบโรงงานนี้เป็นทุ่งโล่งล้อมรอบด้วยโรงงานอุตสาหกรรมอีกจำนวนหนึ่งที่มีความสูงใกล้เคียงกัน
2. จากข้อมูลของกรมอุตุนิยมวิทยาและแผนที่แบ่งเขตความเร็วลม (Wind-zone map) กำหนดให้ความเร็วลมในเขตพื้นที่ดังกล่าวมีค่าเท่ากับ 160 km/h



รูปที่ 1-13

การคำนวณหาค่าแรงลมที่กระทำต่อโครงสร้างของโรงงานผลิตอิฐบล็อกจากมีมาตรฐานของ Uniform Building Code มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. คำนวณหาค่าความดันลม (wind pressure) เนื่องจากลมกระทำต่อโครงสร้างด้วยความเร็ว 160 km/h

$$q = 0.04724 (160)^2 = 1.21 \text{ kN/m}^2$$

2. หาค่าสัมประสิทธิ์ C_e ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่รวมถึงความสูงของโครงสร้าง (height) ลักษณะที่ตั้งของโครงสร้าง (exposure) และการกระโชกของลม (wind gust) จากตารางที่ 1-14 จากแบบแปลนของโครงสร้างที่ให้มา ความสูงเฉลี่ยของหน้าจั่วของโครงสร้างของโรงงานผลิตอิฐบล็อกจากมีค่าเท่ากับ $(7+4)/2 = 5.5 \text{ m}$ และจากรูปที่ 1-14 ลักษณะที่ตั้งของโครงสร้างถูกจัดอยู่ใน Exposure C ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\text{ระดับความสูงเฉลี่ยเหนือพื้นดิน} = 4.6 \text{ m}, \text{ ค่าสัมประสิทธิ์ } C_e = 1.06$$

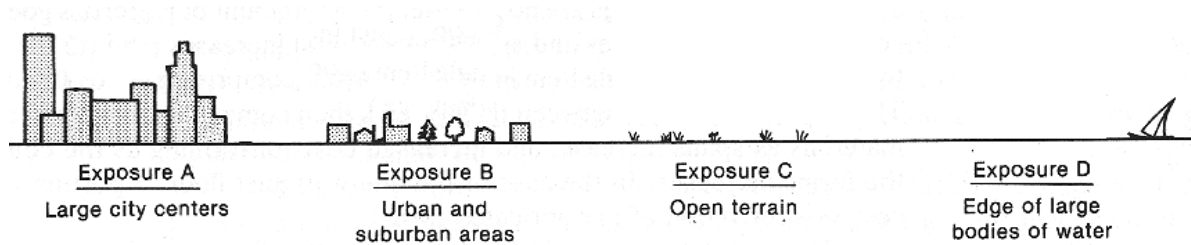
$$\text{ระดับความสูงเฉลี่ยเหนือพื้นดิน} = 6.0 \text{ m}, \text{ ค่าสัมประสิทธิ์ } C_e = 1.13$$

ความแตกต่างของความสูงเฉลี่ย = $6.0 - 4.6 = 1.4 \text{ m}$

ความแตกต่างของค่าสัมประสิทธิ์ $C_e = 1.13 - 1.06 = 0.07$

ดังนั้น เมื่อระดับความสูงเฉลี่ยเหนือพื้นดิน = 5.5 m แล้ว

$$C_e = 1.06 + 0.07(0.9)/1.4 = 1.105$$



รูปที่ 1-14

ตารางที่ 1-4 ค่าสัมประสิทธิ์ C_e

ระดับความสูงเฉลี่ยเหนือพื้นดิน (m)	Exposure D	Exposure C	Exposure B
0-4.6	1.39	1.06	0.62
6.0	1.45	1.13	0.67
7.6	1.50	1.19	0.72
9.1	1.54	1.23	0.76
12.2	1.62	1.31	0.84
18.3	1.73	1.43	0.95
24.4	1.81	1.53	1.04
30.5	1.88	1.61	1.13
36.6	1.93	1.67	1.20
48.8	2.02	1.79	1.31
61.0	2.10	1.87	1.42
91.4	2.23	2.05	1.63
122.0	2.34	2.19	1.80

3. หาค่าสัมประสิทธิ์ I_w ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ที่แสดงถึงความสำคัญของโครงสร้าง (importance factor) จากตารางที่ 1-5 เนื่องจากโรงงานที่เราพิจารณาอยู่เป็นโรงงานผลิตอิฐบล็อก ซึ่งในขั้นตอนการผลิตไม่ได้ใช้วัตถุดิบที่เป็นอันตราย ดังนั้น $I_w = 1.0$

ตารางที่ 1-5 ค่าสัมประสิทธิ์ I_w

ลักษณะการใช้งาน	Importance factor
I. Essential facilities	1.15
II. Hazardous facilities	1.15
III. Special occupancy structures	1.00
IV. Standard occupancy structures	1.00

4. หาค่าสัมประสิทธิ์ C_q ซึ่งเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของความดันลม (pressure coefficient) จากลักษณะและรูปร่างของโครงสร้างหลักของโรงงานผลิตอิฐบดอัดที่ด้านทานลม จากตารางที่ 1-6 เราจะหาค่าสัมประสิทธิ์ C_q ของผนังและหลังคาของโครงสร้างได้ดังต่อไปนี้

ส่วนของโครงสร้าง	ค่าสัมประสิทธิ์ C_q	ทิศทางที่แรงลมกระทำ
ผนังด้านรับลม	0.8	inward
ผนังด้านท้ายลม	0.5	outward
หลังคาด้านรับลม	0.4	inward
หลังคาด้านท้ายลม	0.7	outward

ตารางที่ 1-6 ค่าสัมประสิทธิ์ C_q ของโครงสร้างหลักที่ใช้ด้านแรงลม

รายละเอียดของโครงสร้าง	ค่าสัมประสิทธิ์ C_q
ผนัง	
- ผนังด้านรับลม (Windward wall)	0.8 inward
- ผนังด้านท้ายลม (Leeward wall)	0.5 outward
หลังคา	
ลมพัดในทิศทางตั้งฉากกับแนวสันหลังคา (Ridge)	
- หลังคาด้านท้ายลม (Leeward roof) หรือหลังคาแบบแบนราบ (Flat roof)	0.7 outward
- หลังคาด้านรับลม (Windward roof)	
ความชันหลังคาน้อยกว่า 1:6	0.7 outward
ความชันหลังคามีค่า 1:6 แต่ไม่น้อยกว่า 3:4	0.9 outward หรือ 0.3 inward
ความชันหลังคามีค่า 3:4 ถึง 1:1	0.4 inward
ความชันหลังคามีค่ามากกว่า 1:1	0.7 inward
ลมพัดในทิศทางขนานกับแนวสันหลังคา (Ridge) และแบบแบนราบ (Flat roof)	0.7 outward

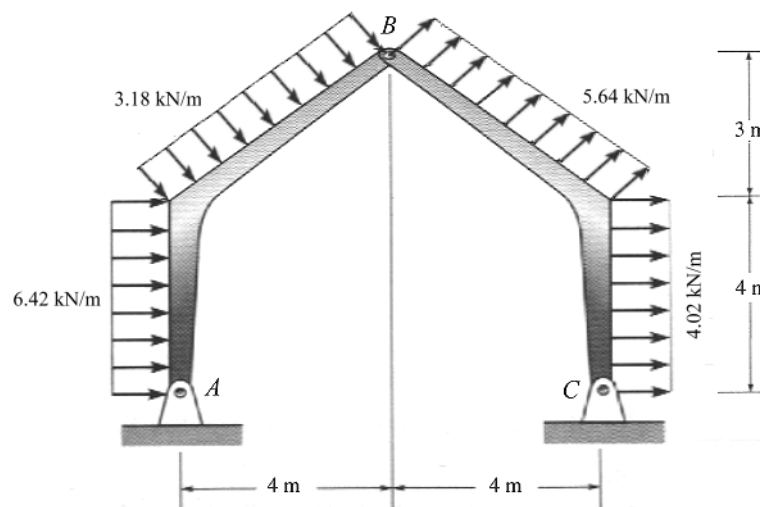
5. คำนวณหาค่าความดันลมที่กระทำบนผนังและหลังคาของโครงสร้าง p จากสมการ

$$p = C_e C_q I_w q$$

ส่วนของโครงสร้าง	ค่าความดันลม p (kN/m ²)	ทิศทางที่แรงลมกระทำ
ผนังด้านรับลม	$p = 1.105 \times 0.8 \times 1.0 \times 1.21 = 1.07 \text{ kN/m}^2$	inward
ผนังด้านท้ายลม	$p = 1.105 \times 0.5 \times 1.0 \times 1.21 = 0.67 \text{ kN/m}^2$	outward
หลังคาด้านรับลม	$p = 1.105 \times 0.4 \times 1.0 \times 1.21 = 0.53 \text{ kN/m}^2$	inward
หลังคาด้านท้ายลม	$p = 1.105 \times 0.7 \times 1.0 \times 1.21 = 0.94 \text{ kN/m}^2$	outward

6. คำนวณหาค่าของแรงลมที่กระทำบนโครงสร้างหลักของโรงงานผลิตอิฐบล็อกจากการคูณค่าความดันลม p ด้วยระยะห่างระหว่างโครงสร้างหลัก ซึ่งมีค่าเท่ากับ 6 m (สมมติให้ การถ่ายแรงจากผนังและหลังคาลงสู่โครงสร้างเป็นการถ่ายแรงแบบทางเดียว) และสุดท้าย เราสามารถที่จะเขียนการกระทำของแรงได้ดังที่แสดงในรูปที่ 1-15

ส่วนของโครงสร้าง	ค่าแรงลม (kN/m)	ทิศทางที่แรงลมกระทำ
ผนังด้านรับลม	$p = 1.07 \text{ kN/m}^2 (6 \text{ m}) = 6.42 \text{ kN/m}$	inward
ผนังด้านท้ายลม	$p = 0.67 \text{ kN/m}^2 (6 \text{ m}) = 4.02 \text{ kN/m}$	outward
หลังคาด้านรับลม	$p = 0.53 \text{ kN/m}^2 (6 \text{ m}) = 3.18 \text{ kN/m}$	inward
หลังคาด้านท้ายลม	$p = 0.94 \text{ kN/m}^2 (6 \text{ m}) = 5.64 \text{ kN/m}$	outward

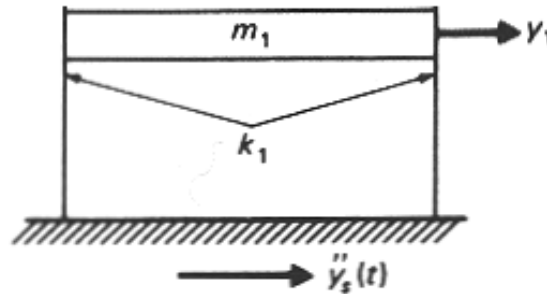


รูปที่ 1-15

ในกรณีของอาคารสูง (high-rise building) หรือมีรูปร่างที่มีการตอบสนองต่อแรงลมที่รุนแรง หรืออยู่ในพื้นที่ที่มีลมพัดรุนแรงมากแล้ว วิธีหาแรงลมแบบ dynamic จะถูกนำมาใช้ โดยการใช้อุโมงค์ลม (wind-tunnel) ในการทดสอบแบบจำลองย่อ (scaled model) ของอาคารและสิ่งก่อสร้างที่ตั้งอยู่รอบๆ อาคาร โดยที่ความดันของลมที่กระทำต่อแบบจำลองจะหาได้จากอุปกรณ์วัดความดัน (pressure transducer) ที่ติดอยู่บนแบบจำลอง นอกจากนั้นแล้ว ถ้าแบบจำลองมีความแกร่งเป็นสัดส่วนกับความแกร่งของอาคารแล้ว ค่าการโก่งตัวของอาคารก็จะสามารถหาได้จากการทดสอบนี้

แรงเนื่องจากแผ่นดินไหว (Earthquake Loads)

แผ่นดินไหวก่อให้เกิดแรงกระทำต่อโครงสร้างโดยการกระทำต่อกัน (interaction) ของการเคลื่อนที่ของพื้นดิน (ground motion) และการตอบสนองของโครงสร้าง โดยที่ขนาดของแรงเนื่องจากแผ่นดินไหวจะขึ้นอยู่กับขนาดและชนิดของความเร่งของพื้นดิน (ground acceleration) และมวลและความแกร่ง (stiffness) ของโครงสร้าง



รูปที่ 1-16

พิจารณาแบบจำลองของอาคารชั้นเดียว ดังที่แสดงในรูปที่ 1-16 โดยที่ block m_1 เป็นมวลรวม (lumped mass) ของหลังคาและ k_1 เป็นความแกร่งรวม (lumped stiffness) ของเสา ในช่วงที่เกิดแผ่นดินไหว พื้นดินจะเกิดการสั่นทั้งในแนวดิ่งและแนวนอน การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งมักจะมีค่าน้อยมากและมักจะไม่นำมาคิดในการออกแบบ ความเร่งในแนวนอน $\ddot{y}_s(t)$ จะทำให้เกิดแรงเฉือน (Shear force) ขึ้นในเสาของอาคารซึ่งจะก่อให้เกิดการเคลื่อนที่ y_1 ของ block อย่างต่อเนื่องไปกับพื้นดิน ถ้าเสามีความแกร่งสูงและ block มีมวลน้อยแล้ว คาบของการสั่นของ block จะสั้นและ block จะมีความเร่งและการเคลื่อนที่เกือบเท่ากับพื้นดิน ซึ่งจะทำให้ค่าความแตกต่างของการเปลี่ยนตำแหน่งของ block กับพื้นดินที่น้อยมาก และหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในองค์อาคารจะมีค่าน้อย แต่ในทางกลับกัน ถ้าเสามีความความแกร่งน้อยและ block มีมวลที่มากแล้ว การเคลื่อนที่เนื่องจากแผ่นดินไหวจะก่อให้เกิดความเร่งบนตัว block เพียงเล็กน้อย แต่จะก่อให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งสัมพัทธ์ระหว่าง block กับพื้นดินที่มีค่ามาก ซึ่งจะทำให้เกิดหน่วยแรงที่มีค่าสูงมากบนโครงสร้างและอาจจะทำให้โครงสร้างเกิดความเสียหายหรือพังทลายลงมาได้

ในทางปฏิบัติ ความเร่ง ความเร็ว และการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้น จะสามารถหามาได้ในรูปของกราฟแสดงการตอบสนองต่อแผ่นดินไหว (earthquake response spectrum) หลังจากที่ได้กราฟนี้มาแล้ว เราจะสามารถคำนวณหาแรงเนื่องจากแผ่นดินไหวได้โดยใช้ทฤษฎีของ structural dynamics การวิเคราะห์นี้จะค่อนข้างยุ่งยากและใช้เวลานาน ปกติจะกระทำโดยใช้ computer

โดยทั่วไปแล้ว การออกแบบโครงสร้างเพื่อต้านทานต่อแผ่นดินไหว (earthquake design) จะกระทำเมื่อโครงสร้างมีขนาดใหญ่ หรือเป็นโครงสร้างที่ตั้งอยู่ในพื้นที่ที่มีการเกิดแผ่นดินไหวบ่อยครั้ง หรือในอาคารสูง หรือใน nuclear power plant ในประเทศสหรัฐอเมริกา การตรวจสอบว่าโครงสร้างนั้นจะต้องออกแบบให้ต้านทานต่อแผ่นดินไหวขนาดเท่าใดจะทำได้โดยการตรวจสอบจาก seismic map ใน ANSI A 58.1-1982 สำหรับโครงสร้างขนาดเล็ก การวิเคราะห์หาแรงเนื่องจากแผ่นดินไหวจะกระทำได้ด้วยวิธีสถิตย์ (static) วิธีการนี้จะเป็นการประมาณค่าแรงเนื่องจากแผ่นดินไหวให้อยู่ในรูปของแรงแบบสถิตย์ (static loads) กระทำต่อโครงสร้างทางด้านข้าง เช่น ANSI A58.1-1992 ได้กำหนดสมการที่จะใช้ในการคำนวณหาค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ฐานราก (base shear) ของโครงสร้างเนื่องจากแผ่นดินไหวอยู่ในรูป

$$V = ZIKCSW \quad (1-3)$$

โดยที่ค่า factor ต่างๆ เหล่านี้จะหาได้จากตารางใน ANSI code ซึ่ง

Z	ขึ้นอยู่กับ	earthquake zone
I	ขึ้นอยู่กับ	ความสำคัญของอาคารในแง่ของการใช้งาน

K	ขึ้นอยู่กับ	รูปร่างของโครงสร้างของอาคาร
C	ขึ้นอยู่กับ	vibrational characteristics ของโครงสร้างของอาคาร
S	ขึ้นอยู่กับ	ชนิดของดินที่รองรับโครงสร้าง
W	ขึ้นอยู่กับ	น้ำหนักของโครงสร้าง

แรงดันน้ำสถิตยและแรงดันของดิน(Hydrostatic and Soil Pressure)

เมื่อโครงสร้างถูกใช้ในการกักเก็บน้ำหรือกั้นดินแล้ว แรงดันที่เกิดจากวัสดุเหล่านี้จะต้องนำมาพิจารณาในการออกแบบด้วย ตัวอย่างของโครงสร้างเหล่านี้ประกอบด้วย ถังน้ำ เขื่อน และกำแพงกั้นดิน (retaining wall) แรงดันเหล่านี้จะหามาได้โดยใช้หลักทาง hydrostatic และกลศาสตร์ของดิน

แรงอื่นๆ

ยังมีน้ำหนักบรรทุกจรชนิดอื่นๆ ที่ต้องนำมาพิจารณาในการออกแบบโครงสร้าง ซึ่งขึ้นอยู่กับที่ตั้งและการใช้งานของโครงสร้าง ซึ่งประกอบไปด้วยแรงที่เกิดจากการกระเบิด การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ และการทรุดตัวที่ไม่เท่ากันของฐานราก เป็นต้น

Load Combinations

โดยปกติแล้ว ในการออกแบบโครงสร้างเราจะให้โครงสร้างถูกกระทำโดยผลรวมของแรงและน้ำหนักบรรทุกต่างๆ ที่ถูกกำหนดไว้ในมาตรฐานการออกแบบ เพื่อที่จะหาค่าแรงวิกฤติและใกล้เคียงกับความเป็นจริงที่สุดที่กระทำอยู่บนโครงสร้าง โดยรูปแบบการรวมของแรงต่างๆ จะพิจารณาจากความเป็นไปได้ที่แรงเหล่านั้นจะกระทำต่อโครงสร้างในเวลาเดียวกัน ซึ่งถูกกำหนดให้อยู่ในรูปของ load factor ตัวอย่างต่อไปนี้ เป็น load combinations ที่ได้กล่าวถึงไว้ในมาตรฐานการออกแบบต่างๆ โดยกำหนดให้ D = Dead load L = Live load W = Wind load และ E = Earthquake load

Load and Resistance Factor Design (LRFD) หรือ Ultimate Strength Design (USD)

ในกรณีของโครงอาคารคอนกรีตเสริมเหล็ก

- 1.) $1.4 D + 1.7 L$
- 2.) $0.75 [1.4 D + 1.7 L + 1.7 W]$
- 3.) $0.9 D + 1.3 W$
- 4.) $1.4 D + 1.7 L + 1.7(\text{soil pressure})$
- 5.) $0.75 [1.4 D + 1.7(\text{temperature load}) + 1.7 L]$
- 6.) $1.4(D + \text{temperature load})$

ในกรณีของโครงอาคารเหล็ก

- 1.) $1.4 D$
- 2.) $1.2 D + 1.6 L + 0.5(\text{roof live load})$
- 3.) $1.2 D + 0.5 L$ (หรือ $0.8 W$) + $1.6(\text{roof live load})$
- 4.) $1.2 D + 0.5 L + 0.5(\text{roof live load}) + 1.3 W$
- 5.) $1.2 D + 0.5 L + 1.5 E$
- 6.) $0.9 D - 1.3 W$ (หรือ $1.5 E$)

Allowable Stress Design (ASD)

- 1.) $D + L + [\text{roof live load}]$
- 2.) $D + L + [W \text{ หรือ } E]$

บทที่ 2

การวิเคราะห์โครงสร้าง Statically Determinate

2.1 การสร้างแบบจำลองเพื่อใช้ในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้าง

การวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างมีความไม่เที่ยงตรงแม่นยำเนื่องจาก

1. ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างจะขึ้นอยู่กับสมมุติฐานต่างๆ เกี่ยวกับพฤติกรรม (behavior) และคุณสมบัติทางกล (mechanical properties) ของวัสดุและโครงสร้าง ซึ่งมักจะแตกต่างจากพฤติกรรมและคุณสมบัติทางกลของวัสดุและโครงสร้างที่เกิดขึ้นจริง เพื่อให้การวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างมีความง่ายขึ้น ยกตัวอย่างเช่น ในการวิเคราะห์และออกแบบคานคองกรีตเสริมเหล็ก เรามักจะสมมุติให้คานคองกรีตเสริมเหล็กมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่น E (modulus of elasticity) ที่คงที่ตลอดความยาวคาน แต่เนื่องจากว่า ในความเป็นจริงแล้ว เรามักจะเสริมเหล็กที่หน้าตัดต่างๆ ไม่เท่ากันตามค่าของหน่วยแรง (stress) ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดนั้นๆ ของคาน เป็นต้น
2. ขนาด ตำแหน่ง และรูปแบบของแรงและน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อโครงสร้างมีการแปรเปลี่ยนไปตามตลอดเวลาและมีค่าไม่คงที่
3. ปัจจัยอื่นๆ เช่น จุดรองรับ จุดเชื่อมต่อ ขนาดหน้าตัดของโครงสร้าง เป็นต้น ที่มักจะมีค่าแตกต่างจากที่ได้สมมุติไว้เมื่อตอนทำการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้าง

ในบางกรณี ผลที่ได้จากการวิเคราะห์โครงสร้างจะแตกต่างจากที่เกิดขึ้นในโครงสร้างจริงค่อนข้างมาก ดังนั้น เราจำเป็นต้องต้องทราบวิธีการจำลองโครงสร้างที่ถูกต้องและเหมาะสม เพื่อที่ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์หามีค่าใกล้เคียงกับการตอบสนองจริงของโครงสร้างจริงมากที่สุด และนำไปใช้ได้ทางปฏิบัติ

แบบจำลองของจุดเชื่อมต่อและจุดรองรับ (Idealized Connections and Supports)

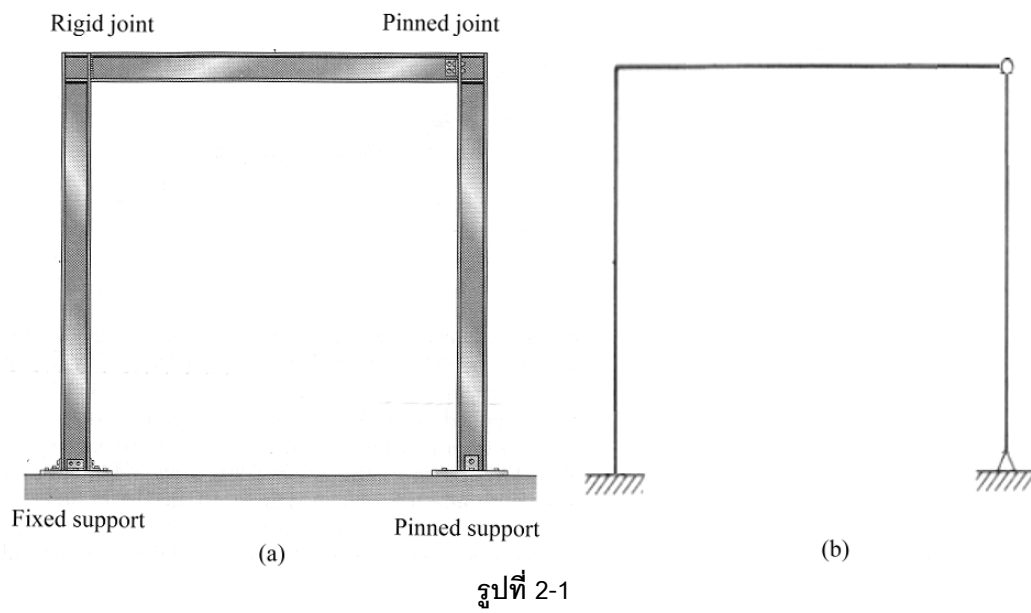
แบบจำลองของจุดเชื่อมต่อและจุดรองรับขององค์อาคารของโครงสร้างที่มักจะใช้ในการสร้างแบบจำลองของโครงสร้างมีอยู่ 4 แบบคือ

- จุดต่อหมุน (pinned joint)
- จุดต่อยึดแน่น (rigid joint)
- จุดรองรับหมุน (Pinned support)
- จุดรองรับยึดแน่น (Fixed support)

ซึ่งการเลือกใช้นั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะและการใช้งานของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 2-1

องค์อาคารที่ถูกเชื่อมต่อโดยจุดต่อหมุนและจุดรองรับหมุนจะมีการหมุนสัมพัทธ์ซึ่งกันและกันเกิดขึ้นได้บ้างเล็กน้อย ซึ่งเรามักจะพบจุดต่อและจุดรองรับหมุนในโครงสร้างเหล็ก (Steel structure) และโครงสร้างไม้ แต่สำหรับองค์อาคารที่ถูกเชื่อมต่อโดยจุดต่อยึดแน่นและจุดรองรับยึดแน่นแล้ว องค์อาคารที่ถูกเชื่อมต่อจะไม่มีการหมุนสัมพัทธ์ระหว่างองค์อาคารเกิดขึ้นเลย ซึ่งมักจะพบในโครงสร้างคานคองกรีตเสริมเหล็ก

ไว้ในกรณีการวิเคราะห์โครงสร้าง เราจะต้องทราบว่าแบบจำลองที่ใช้มีความใกล้เคียงกับการตอบสนองจริงของโครงสร้างอย่างไร และเพียงใด โดยทั่วไปแล้ว จุดรองรับและจุดต่อหมุนในโครงสร้างมักจะมีพฤติกรรมที่แตกต่างไปจากพฤติกรรมของจุดรองรับและจุดต่อหมุนที่ได้สมมุติไว้ในกรณีการวิเคราะห์โครงสร้าง แต่จะมีความแกร่ง (Stiffness) ในการต้านทานโมเมนต์ดัดอยู่บ้าง เนื่องจากความเสียดทาน (Friction) ที่จุดรองรับหรือจุดต่อและพฤติกรรมของวัสดุที่ใช้ทำจุดรองรับหรือจุดต่อนั้น นอกจากนั้นแล้ว จุดต่อและจุดรองรับแบบยึดแน่นในโครงสร้างก็ไม่เป็นไปตามที่สมมุติไว้ด้วย เนื่องจากจุดเชื่อมต่อดังกล่าวยังคงมีการให้ตัวได้อยู่บ้าง ภายใต้แรงกระทำ



ตารางที่ 2-1 แสดงสัญลักษณ์ของจุดต่อหรือจุดรองรับชนิดต่างๆ ที่มักพบในโครงสร้าง โดยที่จุดต่อหรือจุดรองรับดังกล่าวจะมีแรงปฏิกิริยา (reaction) กระทำต่อองค์อาคารในลักษณะต่างๆ ขึ้นอยู่กับการที่จุดต่อหรือจุดรองรับป้องกันไม่ให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacements) ขององค์อาคารอย่างไร

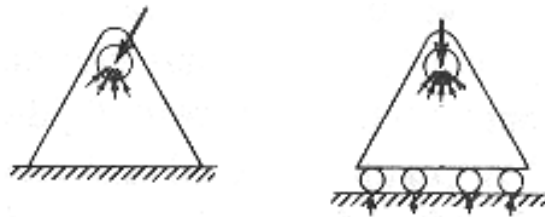
ตารางที่ 2-1

ชนิดของจุดต่อหรือจุดรองรับ	สัญลักษณ์	แรงปฏิกิริยา
 rollers rocker	 	
 pin or hinge		
 slider fixed-connected collar	 	
 fixed support		

- ถ้าจุดรองรับหรือจุดต่อป้องกันการเลื่อน (Translation) ขององค์อาคารในทิศทางใด จุดรองรับหรือจุดต่อนั้นจะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยากระทำกับองค์อาคารในทิศทางนั้น
- ถ้าจุดรองรับหรือจุดต่อป้องกันการหมุนขององค์อาคารในทิศทางใด จุดรองรับหรือจุดต่อนั้นจะทำให้เกิดโมเมนต์ดัด (Bending moment) กระทำกับองค์อาคารในทิศทางนั้น

ยกตัวอย่างเช่น หมุด (Pin) จะป้องกันไม่ให้เกิดการเลื่อนในทิศทางใดๆ ดังนั้น หมุดจะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยา F_x และ F_y กระทำต่อองค์อาคาร และจุดรองรับยึดแน่น (Fixed support) จะป้องกันไม่ให้เกิดการเลื่อนและหมุนขององค์อาคารในทุกทิศทาง ดังนั้น จุดรองรับนี้จะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยา F_x , F_y และโมเมนต์ดัด M กระทำต่อองค์อาคาร

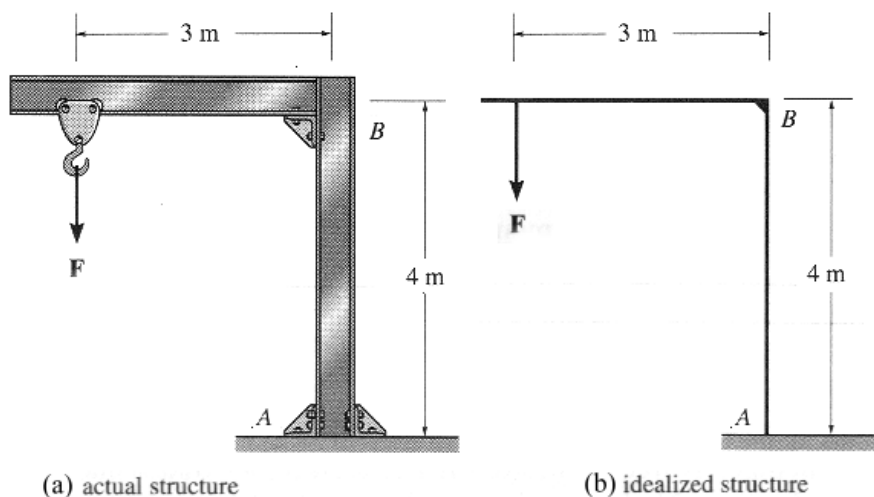
เราควรที่จะทราบไว้ด้วยว่า ในจุดรองรับหรือจุดต่อหมุดในโครงสร้างจริงนั้น แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดเชื่อมต่อซึ่งถ่ายผ่านมาจากองค์อาคารจะมีลักษณะเป็นแรงแผ่กระจาย (distributed loads) ดังที่แสดงในรูปที่ 2-2 แต่เนื่องจากว่าพื้นที่ผิวที่แรงกระทำมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับพื้นที่ผิวทั้งหมดขององค์อาคาร ดังนั้น เราจะจำลองแรงปฏิกิริยาให้เป็นแรงเป็นจุดได้



รูปที่ 2-2

แบบจำลองของโครงสร้าง

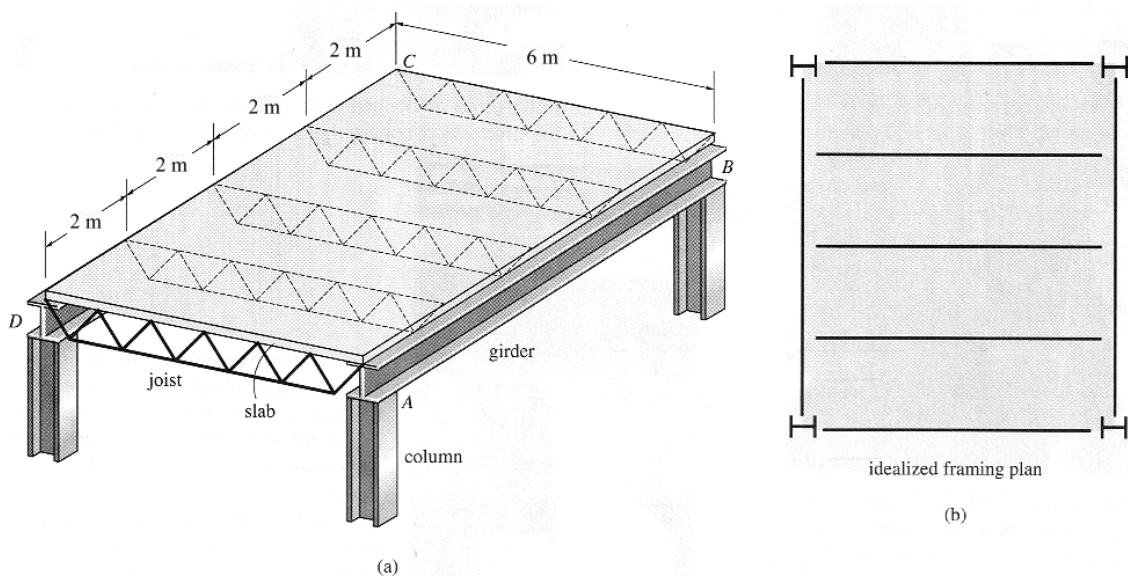
พิจารณาโครงสร้างของปั้นจั่นแขนยื่น (Jib crane) ดังที่แสดงในรูปที่ 2-3a ในการวิเคราะห์โครงสร้างนี้ เราจะไม่พิจารณาความลึกของคานและเสา และรายละเอียดของ trolley เราจะสมมุติให้จุดรองรับที่ A เป็นจุดรองรับยึดแน่นและให้จุดต่อที่ B เป็นจุดต่อแข็ง (Rigid joint) ดังนั้น แบบจำลองของโครงสร้างดังกล่าวจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 2-3b หลังจากที่เราทำการวิเคราะห์แบบจำลองของโครงสร้างแล้ว ผลที่ได้จะถูกนำไปออกแบบโครงสร้างของปั้นจั่นแขนยื่น



รูปที่ 2-3

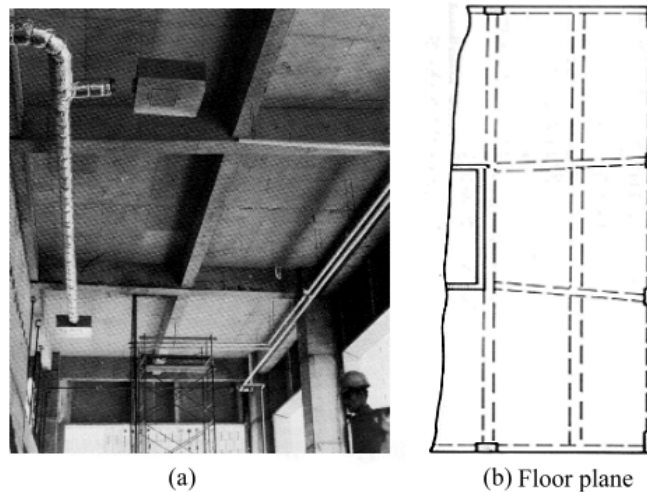
คาน (Beam) และคานขนาดใหญ่ (Girder) มักจะใช้ในการรองรับพื้นของอาคาร girder จะเป็นองค์อาคารหลักที่รองรับแรงที่ถ่ายมาจากพื้นผ่านทางคาน รูปที่ 2-4a แสดงแบบจำลองของแผ่นพื้น (Floor slab) ซึ่งถูกรองรับโดยตง (Joists) ที่ระยะทุกๆ 2 เมตรและตงจะถูกรองรับโดย girder AB และ CD ในการวิเคราะห์โครงสร้างนี้ เราจะสมมุติให้จุดรองรับที่ปลายด้านหนึ่งของตงเป็นจุดรองรับหมุด และจุดรองรับที่ปลายอีกด้านหนึ่งเป็น roller นอกจากนั้นแล้ว ให้ปลายด้านหนึ่ง

ของ girder เชื่อมต่อกับเสาเป็นแบบหมุด และที่ปลายอีกด้านหนึ่งเชื่อมต่อกับเสาเป็นแบบ roller ดังนั้น เราจะเขียนรูป top view ของโครงสร้างตามรูปที่ 2-4a ได้ตามที่แสดงในรูปที่ 2-4b



รูปที่ 2-4

ถ้าคานเป็นคานคอนกรีตเสริมเหล็กแบบหล่อในที่ (Cast-in-place reinforced concrete beam) ดังที่แสดงในรูปที่ 2-5a การเชื่อมต่อหรือรองรับของคานและเสาจะเป็นแบบยึดแน่นและเราจะเขียนรูป top view ของโครงสร้างนี้ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 2-5b



รูปที่ 2-5

การถ่ายแรงบนโครงสร้าง (Tributary Loadings)

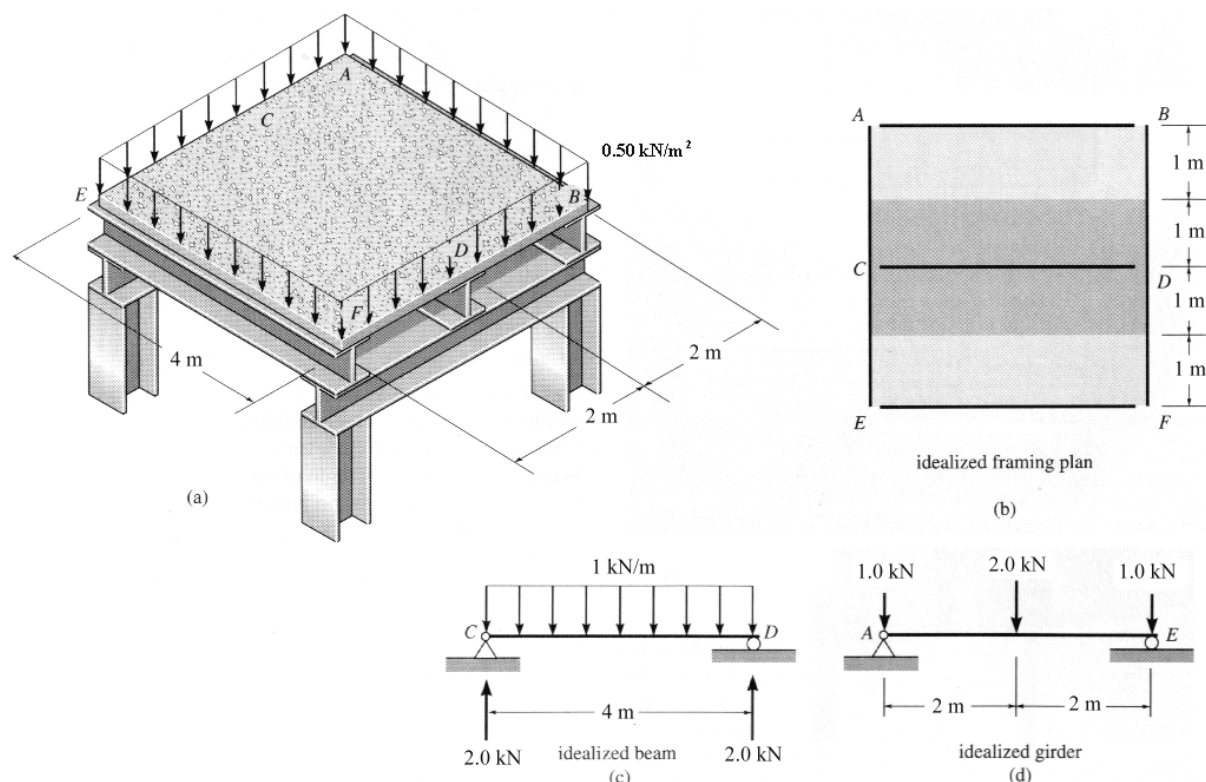
น้ำหนักบรรทุกที่กระทำอยู่บนโครงสร้างมักจะถูกถ่ายจากองค์อาคารหนึ่งไปยังองค์อาคารอื่นๆ ก่อนที่จะถูกถ่ายลงสู่พื้นดินที่รองรับอาคาร ยกตัวอย่างเช่น น้ำหนักบรรทุกที่กระทำอยู่บนแผ่นพื้นจะถูกถ่ายลงสู่คาน จากคานสู่เสา และจากเสาไปสู่ฐานราก เป็นต้น นอกจากนั้นแล้ว เรามักจะวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้างโดยการแยกองค์อาคารต่างๆ ของโครงสร้างออกเป็นชิ้นๆ ยกตัวอย่างเช่น ในการวิเคราะห์และออกแบบคาน เราจะพิจารณาแยกคานออกจากพื้นและเสา เป็นต้น ดังนั้น ในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้าง เราจะเริ่มจากการคำนวณหาแรงและน้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนแต่ละองค์อาคารของโครงสร้างก่อน จากนั้น ทำการถ่ายแรงและน้ำหนักบรรทุกจากองค์อาคารหนึ่งไปยังองค์อาคารอื่นๆ โดยเราจะต้องทราบถึงลักษณะการถ่ายแรงและน้ำหนักบรรทุกจากองค์อาคารหนึ่งไปยังองค์อาคารอื่นๆ ว่าเป็นอย่างไรด้วย

โดยทั่วไปแล้ว การถ่ายแรงที่กล่าวถึงจะเป็นการส่งถ่ายแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่องค์อาคารนั้นไปยังองค์อาคารอื่นๆ ยกตัวอย่างเช่น แรงปฏิกิริยาของพื้นจะถ่ายลงสู่คาน ที่จุดเชื่อมต่อของพื้นและคาน และแรงปฏิกิริยาของคานจะถูกถ่ายลงสู่เสา ที่จุดเชื่อมต่อของคานและเสา เป็นต้น

การถ่ายแรงจากพื้นลงสู่คานจะขึ้นอยู่กับลักษณะของพื้น วัสดุที่ใช้ทำพื้นและคาน และวิธีการก่อสร้าง โดยทั่วไปการถ่ายแรงดังกล่าวจะถูกแบ่งออกได้เป็น 2 แบบคือ

1. การถ่ายแรงทางเดียว (One-way action)
2. การถ่ายแรงสองทาง (Two-way action)

การถ่ายแรงทางเดียว (One-Way Action)



รูปที่ 2-6

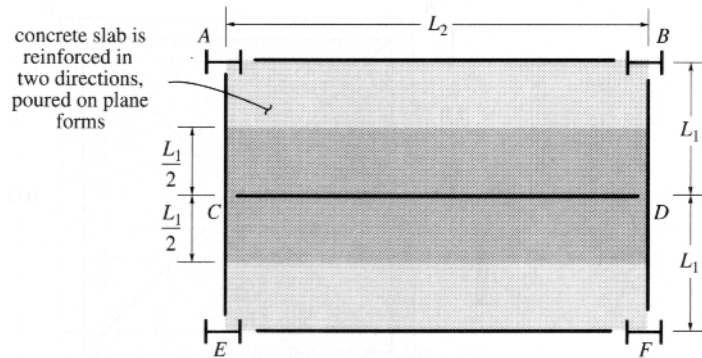
พิจารณาพื้นของอาคาร ดังที่แสดงในรูปที่ 2-6a ซึ่งถูกรองรับโดยคาน AB คาน CD และคาน EF น้ำหนักบรรทุกทุกที่กระทำบนแผ่นพื้นจะถ่ายลงสู่คานดังกล่าวในลักษณะการถ่ายแรงทางเดียว (One-way action) และเราจะเรียกพื้นลักษณะนี้ว่า แผ่นพื้นทางเดียว (One-way slab) นอกจากนั้นแล้ว จากรูป เราจะเห็นว่า แรงปฏิกิริยาของ คาน AB คาน CD และคาน EF จะถ่ายลงสู่ girder AE และ BF ซึ่งรองรับคานดังกล่าวอยู่ และแรงปฏิกิริยาของ girder AE และ BF จะถ่ายลงสู่เสาที่รองรับ girder เหล่านั้น

กำหนดให้แรงที่กระทำอยู่บนพื้นเป็นแรงแผ่กระจายสม่ำเสมอ (uniformly distributed load) และมีขนาดเท่ากับ 0.50 kN/m^2 ดังนั้น เราจะสามารถทำการถ่ายแรงกระทำจากพื้นไปยังองค์อาคารของโครงสร้างได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. คาน CD จะรองรับแรงที่ถ่ายจากพื้นโดยมีพื้นที่ถ่ายแรง (tributary area) ดังที่แสดงโดยสีทึบในรูปที่ 2-6b และแรงนี้จะมีลักษณะเป็นแรงกระจายสม่ำเสมอที่มีขนาด $(0.50 \text{ kN/m}^2)(2 \text{ m}) = 1.0 \text{ kN/m}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-6c
2. แรงปฏิกิริยาของคาน CD ขนาด 2.0 kN จะถ่ายลงที่กึ่งกลาง span ของ girder AE และ BF ในรูปแบบแรงกระทำเป็นจุด (Concentrated load) ดังที่แสดงในรูปที่ 2-6d

3. แรงปฏิกิริยาของคาน CD ขนาด 2.0 kN และแรงปฏิกิริยาของคาน AB และคาน EF ขนาด 1.0 kN จะกระทำต่อ girder AE ดังที่แสดงในรูปที่ 2-6d และจะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยา 2.0 kN ถ่ายลงสู่เสาที่จุด A และ E

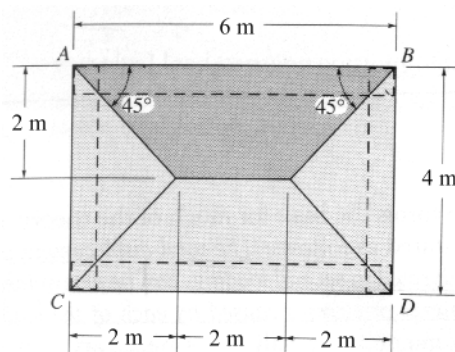
รูปแบบอื่นๆ ของแผ่นพื้นทางเดียวที่เราพบเห็นโดยทั่วไปคือ พื้นที่ทำด้วยพื้นคอนกรีตสำเร็จรูปอัดแรง พื้นคอนกรีตเสริมเหล็กทางเดียว (One-way reinforcement) และพื้นคอนกรีตที่หล่ออยู่บน corrugated metal deck



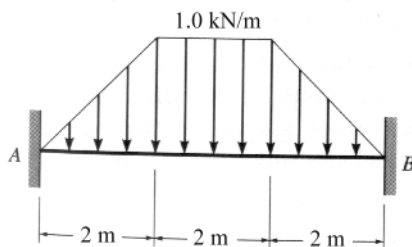
รูปที่ 2-7

ในทางกลับกัน ถ้าพื้นคอนกรีตมีการเสริมเหล็กสองทิศทาง (Two-way reinforcement) แล้ว ลักษณะการถ่ายแรงจากพื้นลงสู่องค์อาคารที่รองรับพื้นอาจจะเป็นแบบทางเดียวหรือสองทางก็ได้ ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนของความกว้างต่อความยาวของพื้น ยกตัวอย่างเช่น พื้น ตามรูปที่ 2-7 ถ้าอัตราส่วนของ L_2 ต่อ L_1 มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2 แล้ว พื้นจะมีพฤติกรรมแบบแผ่นพื้นทางเดียว เพราะว่าเมื่อ L_1 มีค่าลดลงแล้ว คาน AB คาน CD และคาน EF จะมีความแข็งแรงเพิ่มขึ้นในการที่จะรับแรงที่ถ่ายลงมาจากพื้น

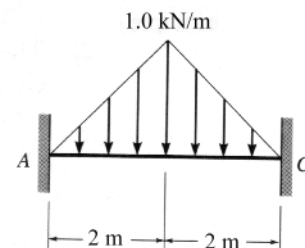
การถ่ายแรงสองทาง (Two-Way Action)



(a) idealized framing plan



(b) idealized beam



(c) idealized beam

รูปที่ 2-8

ตามรูปที่ 2-7 เมื่ออัตราส่วน $L_2 / L_1 < 2$ แล้ว พื้นจะถ่ายแรงกระทำไปยังคานและ girders ในลักษณะสองทิศทาง พื้นนี้มักจะถูกเรียกว่าแผ่นพื้นสองทาง (Two-way slab) ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ 2-8a ซึ่งเป็นโครงสร้างคอนกรีตเสริม

เหล็กที่มีอัตราส่วน $L_2 / L_1 = 1.5$ พื้นที่ถ่ายแรงของคาน AB และคาน CD จะหาได้จากการลากเส้นตรงทำมุม 45° กับแนวนอน AB และคาน CD ตามลำดับ จนไปตัดกับเส้นที่ลากผ่านกึ่งกลางของคาน AC และคาน BD ดังที่แสดงในรูป ซึ่งพื้นที่ถ่ายแรงของคาน AB และคาน CD จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู และพื้นที่ถ่ายแรงของคาน AC และคาน BD จะเป็นรูปสามเหลี่ยม กำหนดให้แรงที่กระทำต่อพื้นมีการกระจายสม่ำเสมอและมีค่าเท่ากับ 0.50 kN/m^2 ดังนั้นค่าสูงสุดของแรงกระจายที่กระทำอยู่บนคานจะมีค่าเท่ากับ $(0.50 \text{ kN/m}^2)(2 \text{ m}) = 1.0 \text{ kN/m}$ รูปที่ 12-8b และ 12-8c แสดงแบบจำลองของคาน AB และคาน AC ตามลำดับ

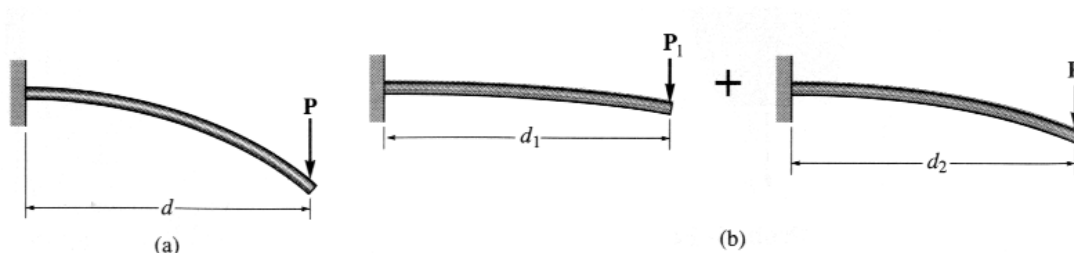
2.2 หลักการ Superposition (Principle of Superposition)

หลักการ superposition เป็นหลักการที่มีความสำคัญมากในการวิเคราะห์โครงสร้าง ซึ่งทฤษฎีและวิธีวิเคราะห์โครงสร้างหลายทฤษฎีถูกพัฒนาขึ้นมาโดยใช้หลักการนี้เป็นพื้นฐาน หลักการ superposition กล่าวว่า

"ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) หรือค่าหน่วยแรง (stress) ลัพธ์ที่จุดใดจุดหนึ่งบนโครงสร้างเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกทุกและแรงกระทำสามารถหาได้จากการรวมทางพีชคณิตของค่าการเปลี่ยนตำแหน่งหรือค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นจากแรงแต่ละแรงและน้ำหนักบรรทุกแต่ละน้ำหนักบรรทุกที่กระทำอยู่บนโครงสร้างนั้น"

หลักการ superposition จะใช้ได้เมื่อ

1. **วัสดุที่ใช้ทำโครงสร้างจะต้องมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic** ซึ่งในช่วงนี้น้ำหนักบรรทุกหรือแรงกระทำจะแปรผันโดยตรงกับค่าการเปลี่ยนตำแหน่งและค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในตัววัสดุ เช่น ในกรณีของแท่งเหล็กที่ถูกกระทำโดยแรงดึง P หน่วยแรงดึงที่เกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางแท่งเหล็กจะมีค่าเท่ากับ $\sigma = P / A$ ($\sigma \propto P$) เมื่อ A เป็นพื้นที่หน้าตัดของแท่งเหล็ก และการยืดตัวที่ปลายของแท่งเหล็กจะมีค่าเท่ากับ $\delta = PL / AE$ ($\delta \propto P$) เมื่อ L เป็นความยาวของแท่งเหล็กและ E เป็นโมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of elasticity) ของเหล็ก
2. **การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงสร้างจะต้องมีค่าน้อยมาก** เมื่อโครงสร้างถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกและแรงกระทำ เพราะว่าเมื่อค่าการเปลี่ยนตำแหน่งมีค่ามากแล้ว ตำแหน่งและทิศทางของแรงกระทำจะเปลี่ยนไปจากเดิม ซึ่งทำให้ผลรวมที่เกิดจากแรงกระทำต่างๆ ที่กระทำแยกกันมีค่าไม่เท่ากับผลที่เกิดจากแรงกระทำต่างๆ ที่กระทำพร้อมกัน ดังที่แสดงในรูปที่ 2-9 เราจะเห็นว่าค่าโมเมนต์ดัด (Bending moment) ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับยึดแน่นขณะที่แรง P กระทำ จะมีค่าไม่เท่ากับค่าโมเมนต์ดัดของผลรวมของแรง P_1 และ P_2 ซึ่ง $P_1 + P_2 = P$ เมื่อ P_1 และ P_2 ทำให้ span ของคานเปลี่ยนจาก d เป็น d_1 และ d_2 ตามลำดับ ($Pd \neq P_1d_1 + P_2d_2$ เนื่องจาก $d \neq d_1 + d_2$)



รูปที่ 2-9

2.3 สมการความสมดุล (Equations of Equilibrium)

จากวิชากลศาสตร์วิศวกรรม (engineering mechanics) เราทราบมาแล้วว่า โครงสร้างจะอยู่ในสมดุล (equilibrium) เมื่อโครงสร้างนั้นมีดุลภาพของแรง (balance of force) และดุลภาพของโมเมนต์ (balance of moment)

ดุลภาพของแรงจะป้องกันการเคลื่อนที่ของโครงสร้างอย่างมีความเร่ง (acceleration) หรือ $\sum F = 0$ และดุลภาพของโมเมนต์จะป้องกันการหมุนของโครงสร้างรอบจุด o ใดๆ หรือ $\sum M_o = 0$

โดยทั่วไปแล้ว สมการความสมดุล (equations of equilibrium) ของโครงสร้างจะเขียนอยู่ในระบบแกนตั้งฉาก Cartesian (orthogonal Cartesian coordinate) ใน 3 มิติ ซึ่งมีแกนเป็น x , y , และ z หรือ

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 & \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 & \sum M_y &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned} \quad (2-1)$$

แต่โดยส่วนใหญ่แล้ว โครงสร้างและแรงกระทำมักจะอยู่ในระนาบเดียวกัน (coplanar) ซึ่งสมการความสมดุลจะลดรูปลงเป็น

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \sum F_y &= 0 \\ \sum M_o &= 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

เมื่อ $\sum F_x$ และ $\sum F_y$ เป็นผลรวมทางพีชคณิตขององค์ประกอบของแรงในแนวแกน x และแนวแกน y ตามลำดับ และ $\sum M_o$ เป็นผลรวมทางพีชคณิตของโมเมนต์ขององค์ประกอบของแรงเหล่านั้น รอบแกนที่ตั้งฉากกับระนาบ $x-y$ (แกน z) ที่ผ่านจุด o ใดๆ

ในการใช้สมการความสมดุลเพื่อหาแรงปฏิกิริยาที่จุดใดๆ บนโครงสร้างนั้น จะมีขั้นตอนการหาดังต่อไปนี้

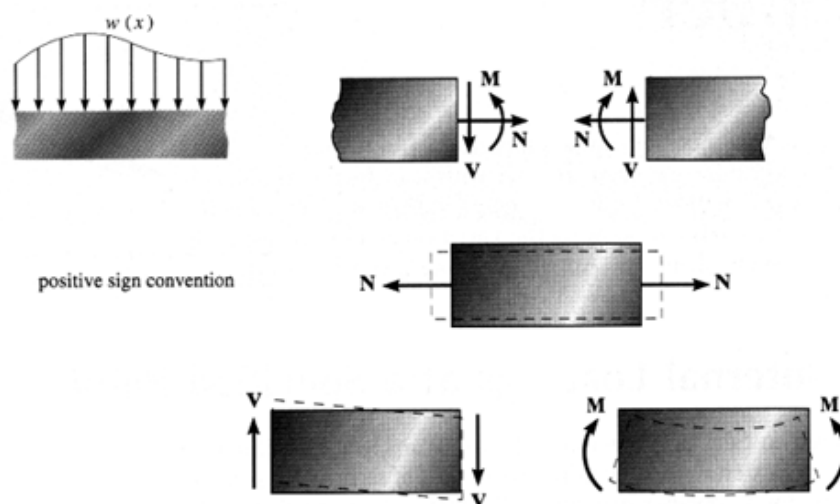
1. เราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของโครงสร้าง โดยการแยกโครงสร้างให้เป็นอิสระจากจุดรองรับ
2. เขียนทิศทางและสัญลักษณ์ของแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์ที่จะเกิดขึ้นลงที่จุดรองรับนั้น
3. ใช้สมการความสมดุลหาแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยา

โดยใช้หลักการเดียวกัน เราจะหาแรงและโมเมนต์ภายในโครงสร้างที่จุดใดๆ ได้โดยใช้วิธี method of sections ดัง

นี้

1. ตัดโครงสร้างออกเป็นสองส่วนที่จุดที่เราต้องการหาแรงและโมเมนต์ภายใน โดยให้แนวตัดตั้งฉากกับแนวแกนของโครงสร้าง
2. เขียนแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนเหล่านั้น
3. ใช้สมการความสมดุลหาแรงและโมเมนต์ภายใน

โดยทั่วไปแล้ว แรงและโมเมนต์ภายในที่หน้าตัดของโครงสร้างใน 2 มิติจะประกอบไปด้วย แรงตั้งฉาก N (normal force) แรงเฉือน V (shear force) และโมเมนต์ดัด M (bending moment) โดยเราจะกำหนดให้มีทิศทางที่เป็นบวก ดังที่แสดงในรูปที่ 2-10



รูปที่ 2-10

2.4 Determinacy และ Stability

Determinacy

เราทราบมาแล้วจากวิชากลศาสตร์วิศวกรรมว่า สมการความสมดุลเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอต่อความสมดุลของโครงสร้าง เมื่อเราสามารถหาแรงและโมเมนต์ที่ไม่ทราบค่าในโครงสร้างได้โดยใช้สมการความสมดุลเพียงอย่างเดียวแล้ว โครงสร้างดังกล่าวจะถูกเรียกว่า **Statically determinate structures** แต่ถ้าโครงสร้างมีแรงและโมเมนต์ที่ไม่ทราบค่ามากกว่าจำนวนของสมการความสมดุลแล้ว โครงสร้างดังกล่าวจะถูกเรียกว่า **Statically indeterminate structures**

โดยทั่วไปแล้ว การที่จะหาว่าโครงสร้างเป็น statically determinate หรือ statically indeterminate นั้น เราจำเป็นต้องเขียนแผนภาพ free body diagram ขององค์อาคาร (ทั้งหมดหรือเพียงบางส่วน เท่าที่เห็นว่าจำเป็น) ของโครงสร้างนั้น แล้วทำการเปรียบเทียบจำนวนของแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดกับจำนวนของสมการความสมดุลของโครงสร้างทั้งหมดที่มีอยู่ ในกรณีของโครงสร้างในระนาบเดียวกัน (coplanar structures) แต่ละองค์อาคารของโครงสร้างจะมีสมการความสมดุลได้มากที่สุด 3 สมการ ดังนั้น ถ้าให้ n เป็นจำนวนขององค์อาคารในโครงสร้างและ r เป็นจำนวนขององค์ประกอบของแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยาแล้ว

$$r = 3n \quad \text{Statically determinate}$$

$$r > 3n \quad \text{Statically indeterminate}$$

ถ้าโครงสร้างเป็น statically indeterminate แล้ว เราจะหาสมการเพิ่มเติมที่จะนำมาหาแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าได้โดยใช้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่างๆ บนโครงสร้าง สมการนี้มักถูกเรียกว่าสมการความสอดคล้อง (compatibility equations) ซึ่งจะต้องมีจำนวนเท่ากับ degree of indeterminacy ของโครงสร้างนั้น

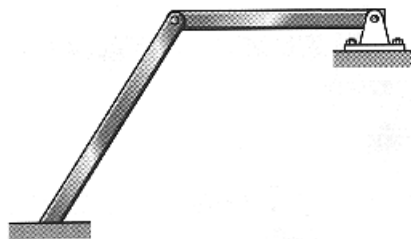
ตัวอย่างที่ 2-1



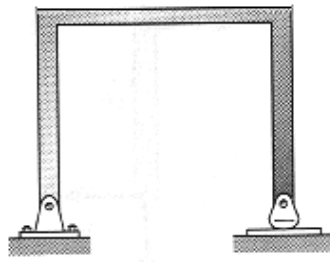
$r = 3$	$n = 1$	$r = 3n$	Statically determinate beam
---------	---------	----------	-----------------------------



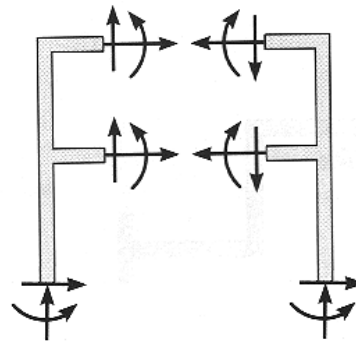
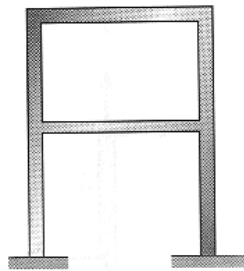
$r = 6$	$n = 1$	$r > 3n$	Statically indeterminate beam with 3 degrees of indeterminacy
---------	---------	----------	---



$r = 7$	$n = 2$	$r > 3n$	Statically indeterminate structure with 1 degrees of indeterminacy
---------	---------	----------	--



$r = 3$	$n = 1$	$r = 3n$	Statically determinate frame
---------	---------	----------	------------------------------



$r = 12$	$n = 2$	$r > 3n$	Statically indeterminate frame with 6 degrees of indeterminacy
----------	---------	----------	--

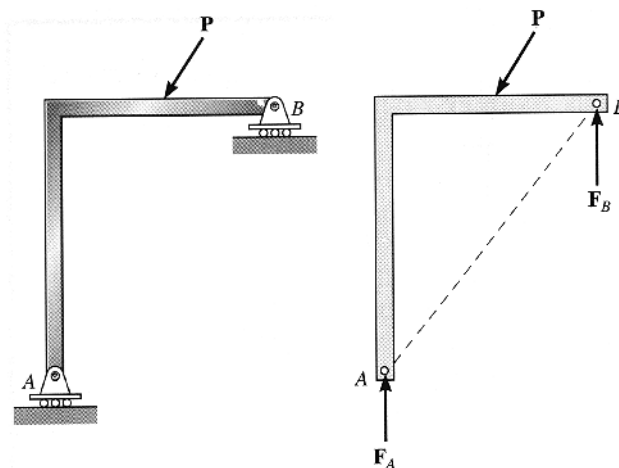
เสถียรภาพ (Stability) ของโครงสร้าง

ในการที่โครงสร้างจะอยู่ในความสมดุลนั้น นอกจากโครงสร้างจะต้องมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขของสมการความสมดุลแล้ว โครงสร้างนั้นจะต้องถูกรองรับและถูกยึดรั้งเข้ากับโครงสร้างอื่นๆ หรือฐานรากอย่างเหมาะสมและเพียงพอ เพื่อให้โครงสร้างมีเสถียรภาพ

การรองรับและการยึดรั้ง (constraints) โครงสร้างที่ไม่เหมาะสมสามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบคือ

การยึดโครงสร้างอย่างไม่เพียงพอ (Partial constraint)

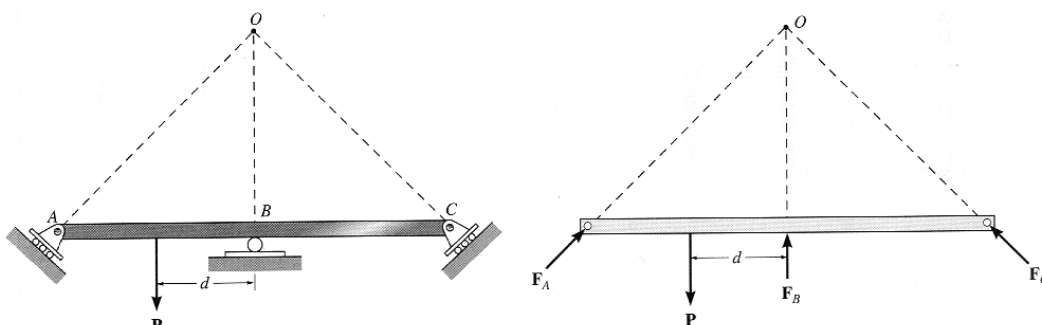
การยึดโครงสร้างอย่างไม่เพียงพอเป็นการที่โครงสร้างมีแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยาน้อยกว่าสมการความสมดุล ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2-11 เมื่อพิจารณาแผนภาพ free body diagram ของโครงสร้างดังกล่าว เราจะเห็นว่า $\sum F_x \neq 0$ ดังนั้น โครงสร้างจึงไม่อยู่ในสมดุลในแนวแกนนอน



รูปที่ 2-11

การยึดโครงสร้างอย่างไม่เหมาะสม (Improper constraint)

การยึดโครงสร้างอย่างไม่เหมาะสมเป็นการที่โครงสร้างมีแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าเท่ากับจำนวนสมการความสมดุล แต่โครงสร้างขาดเสถียรภาพ ดังที่แสดงในรูปที่ 2-12 จากแผนภาพ free body diagram ของคาน เราจะเห็นว่า $\sum M_o = Pd \neq 0$ ซึ่งทำให้เกิดการหมุนของคานรอบจุด o



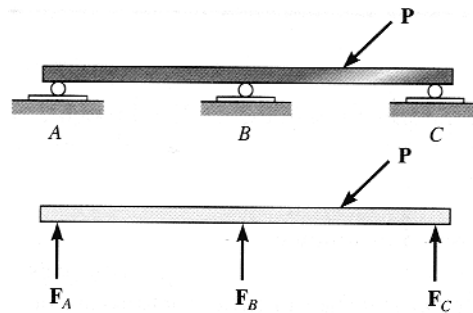
รูปที่ 2-12

อีกกรณีหนึ่งของการยึดโครงสร้างอย่างไม่เหมาะสมคือ การที่โครงสร้างมีแรงปฏิกิริยาที่ขนานกันทั้งหมด ดังที่แสดงในรูปที่ 2-13 เมื่อแรง P กระทำต่อคานในรูป เราจะเห็นได้ว่า $\sum F_x \neq 0$

ดังนั้น เราจะสรุปได้ว่า ในกรณีของโครงสร้างในระนาบเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ n เป็นจำนวนขององศาอิสระในโครงสร้าง และ r เป็นจำนวนขององค์ประกอบของแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าแล้ว

$r < 3n$ unstable

$r \geq 3n$ unstable ถ้าโครงสร้างนั้นมีแรงปฏิกิริยาที่ขนานกันทั้งหมด หรือมีแนวของแรงปฏิกิริยาทั้งหมดตัดรวมกันที่จุดๆ หนึ่ง หรือถ้าโครงสร้างมีรูปแบบที่พังทลายได้



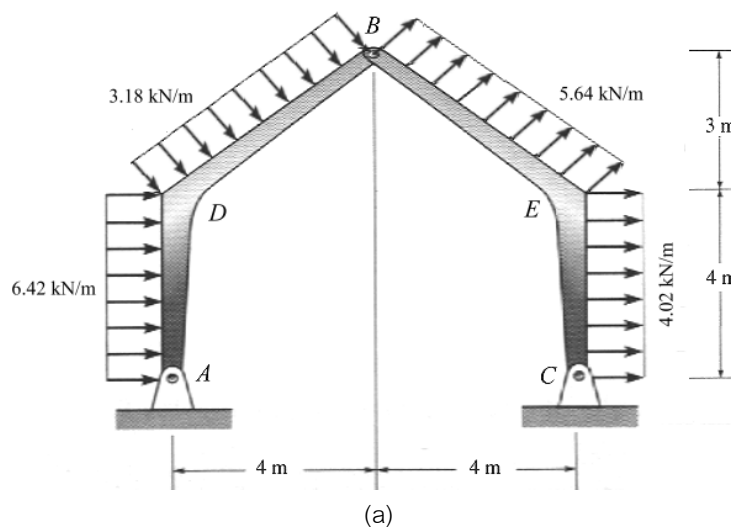
รูปที่ 2-13

2.5 การใช้สมการความสมดุล (Application of the Equations of Equilibrium)

โครงสร้างที่จะพิจารณาต่อไปนี้เป็นโครงสร้างแบบ statically determinate และมีเสถียรภาพ ขั้นตอนในการหาค่าแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยาที่จุดรองรับของโครงสร้าง และที่จุดเชื่อมต่อขององค์อาคารของโครงสร้าง จะแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอนใหญ่ๆ คือ เขียนแผนภาพ free body diagram และใช้สมการความสมดุล

ตัวอย่างที่ 2-2

จงหาค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A และ C และ Internal hinge ที่จุด B ของโครงสร้างของอาคารซึ่งถูกระทำโดยแรงลม (wind load) ตามที่แสดงในรูปที่ 2-14a

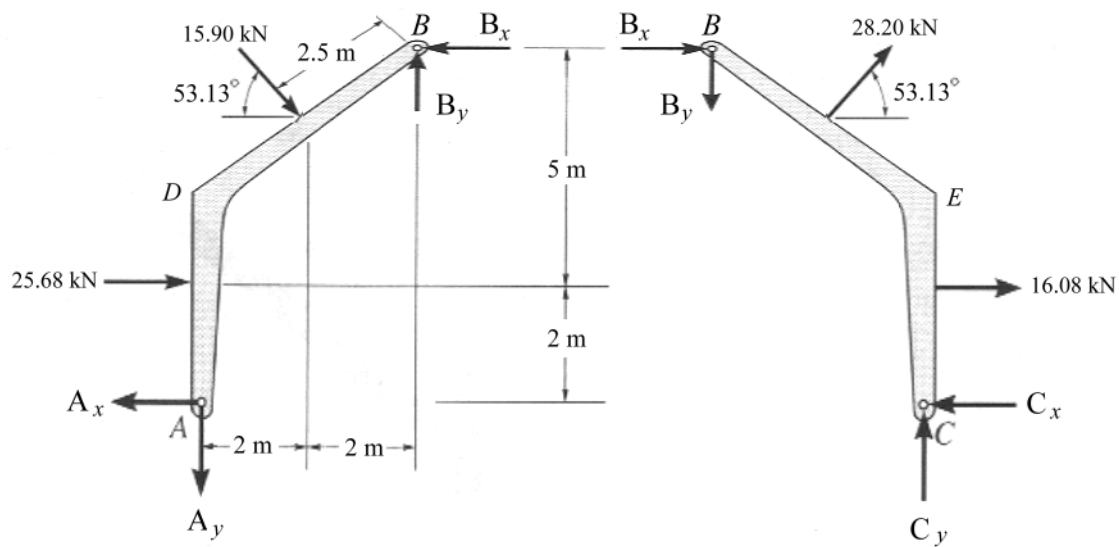


รูปที่ 2-14

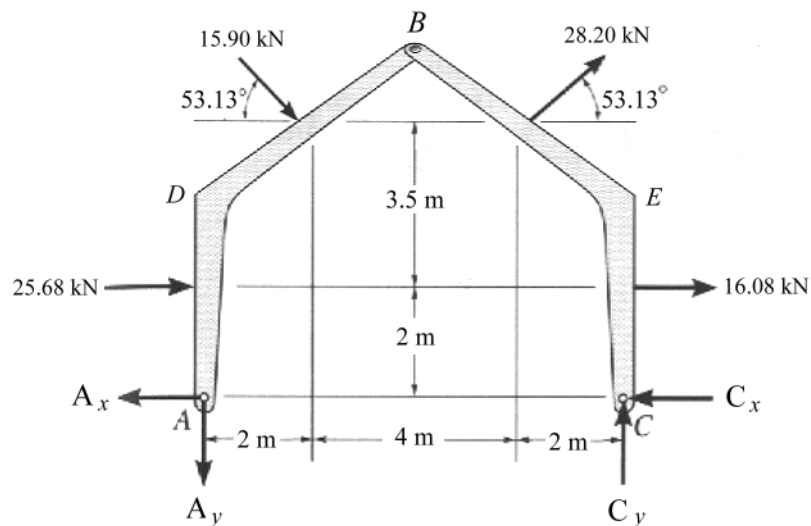
จากการตรวจสอบโครงสร้างของอาคาร เราจะเห็นได้ว่า โครงสร้างนี้ประกอบด้วยส่วนของโครงสร้าง 2 ส่วนคือ ADB และ BEC ดังที่แสดงในรูปที่ 2-14b โดยที่จุดรองรับ A และ C และจุดต่อ (joint) ที่ B เป็นจุดรองรับและจุดต่อแบบหมุด (pin) ดังนั้น จากรูปที่ 2-14b โครงสร้างนี้จึงมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด 6 ค่าคือ

- แรงปฏิกิริยา A_x และ A_y ที่จุดรองรับ A
- แรงปฏิกิริยาภายใน B_x และ B_y ที่จุดต่อ B
- แรงปฏิกิริยา C_x และ C_y ที่จุดรองรับ C

เนื่องจากโครงสร้างประกอบด้วยส่วนของโครงสร้าง 2 ส่วน ดังนั้น เราจึงมีสมการความสมดุลที่จะใช้ในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดเท่ากับ $2(3) = 6$ สมการ และเนื่องจากจำนวนของสมการความสมดุลมีจำนวนเท่ากับแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่า ดังนั้น โครงสร้างนี้จึงเป็นโครงสร้างแบบ statically determinate



(b)



(c)

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 12-14c เราจะหาค่าแรงปฏิกิริยา A_y และ C_y ได้ดังนี้

$$\uparrow + \sum M_A = 0; (25.68 + 16.08)2 + (15.90 + 28.20)(\cos 53.13^\circ)5.5 + 15.90(\sin 53.13^\circ)2 - 28.20(\sin 53.13^\circ)6 - C_y(8) = 0$$

$$C_y = 14.89 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; -A_y - 15.90(\sin 53.13^\circ) + 28.20(\sin 53.13^\circ) + 14.89 = 0$$

$$A_y = 24.73 \text{ kN}$$

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของส่วน ADB ที่แสดงในรูปที่ 12-14b เพื่อหาแรงปฏิกิริยา A_x B_x และ B_y

$$\uparrow + \sum M_B = 0; \quad A_x(7) - 24.73(4) - 25.68(5) - 15.9(2.5) = 0$$

$$A_x = 38.15 \text{ kN}$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad -38.15 + 25.68 + 15.90 \cos 53.13^\circ - B_x = 0$$

$$B_x = -2.93 \text{ kN}$$

เครื่องหมายลบแสดงว่าทิศทางของแรงปฏิกิริยา B_x ที่เรสมมุติมีทิศทางตรงกันข้ามกับที่เกิดขึ้นจริง

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -24.73 - 15.90 \sin 53.13^\circ + B_y = 0$$

$$B_y = 37.45 \text{ kN}$$

พิจารณา free body diagram ของส่วน BEC ที่แสดงในรูปที่ 12-14b เพื่อหาแรงปฏิกิริยา C_x

$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad -C_x + 16.08 + 28.20 \cos 53.13^\circ - 2.93 = 0$$

$$C_x = 30.07 \text{ kN}$$

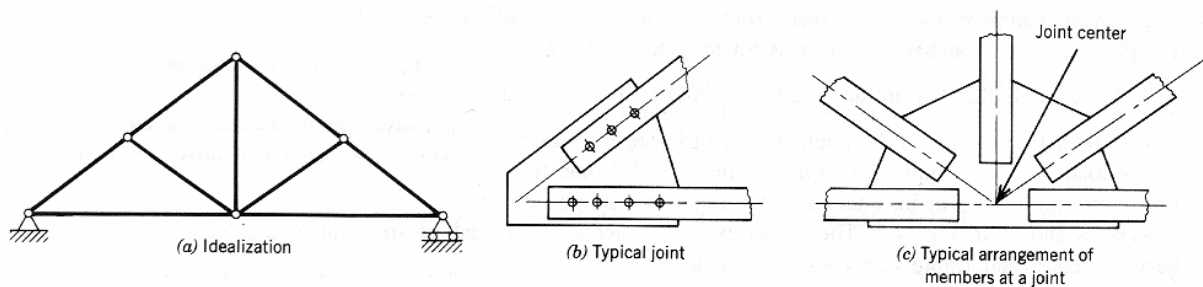
เราควรที่จะทราบด้วยว่า เราสามารถที่จะหาค่าของแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าดังกล่าวได้ โดยการหาค่าของแรงปฏิกิริยาภายใน B_x และ B_y ที่จุดรองรับ B ก่อน ซึ่งจะทำให้ได้โดยใช้สมการความสมดุลของโมเมนต์บนส่วน AB โดยให้ผลรวมของโมเมนต์รอบจุดรองรับ A มีค่าเป็นศูนย์และใช้สมการความสมดุลของโมเมนต์บนส่วน BC โดยให้ผลรวมของโมเมนต์รอบจุดรองรับ C มีค่าเป็นศูนย์ จากนั้นทำการแก้สมการหาค่าของ B_x และ B_y สุดท้าย ใช้สมการความสมดุลของแรงบนส่วน AB และ BC หาค่าแรงปฏิกิริยาที่เหลือ

บทที่ 3

การวิเคราะห์โครงข้อหมุนแบบ Statically Determinate

3.1 รูปแบบของโครงข้อหมุน (Types of Trusses)

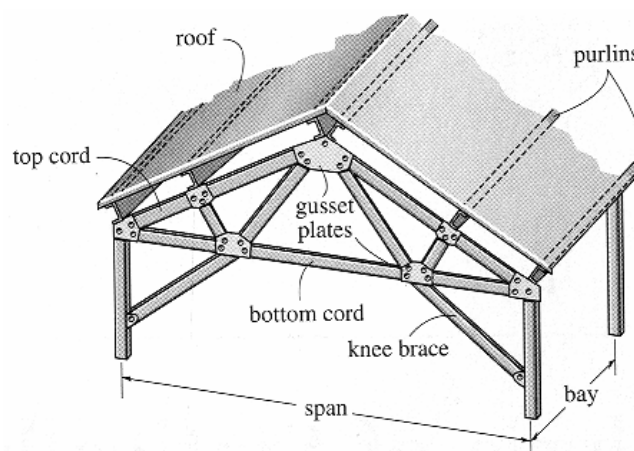
โครงข้อหมุน (truss) เป็นโครงสร้างที่ได้มาจากการนำชิ้นส่วนที่ตรงและมีขนาดหน้าตัดที่เล็กเมื่อเทียบกับความยาวหลายๆ ชิ้นมาเชื่อมต่อกันที่ปลายในรูปแบบที่เป็นสามเหลี่ยม เพื่อให้ได้มาซึ่งโครงสร้างที่มีน้ำหนักเบา แข็งแรง และมีเสถียรภาพ ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 3-1a การเชื่อมต่องดกล่าวมักจะทำโดยใช้สลักเกลียว (bolting) หรือการเชื่อม (welding) เข้ากับแผ่นประกบ (gusset plates) ดังที่แสดงตามรูปที่ 3-1b หรือโดยใช้สลักเกลียวหรือการเชื่อมปลายของชิ้นส่วนดังกล่าวเข้าด้วยกันโดยตรง ดังที่แสดงตามรูปที่ 3-1c โดยทั่วไปแล้ว แรงภายนอกจะกระทำต่อโครงข้อหมุนที่จุดเชื่อมต่องดกล่าวนั้น



รูปที่ 3-1

โครงข้อหมุนรองรับหลังคา (Roof Truss)

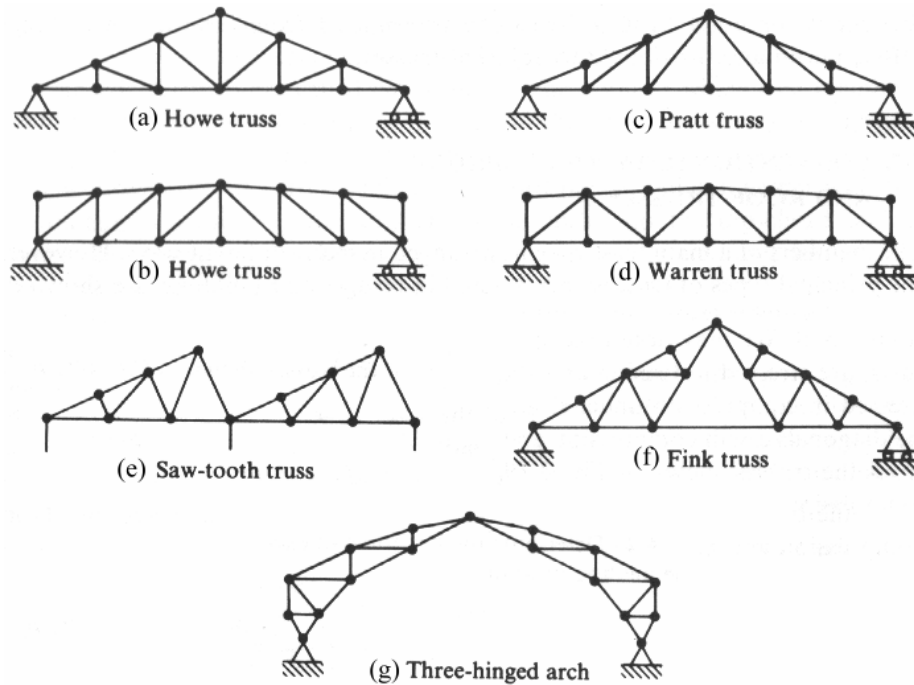
roof truss เป็นโครงข้อหมุนที่ใช้ในการรองรับหลังคา ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 3-2 ตามรูป แรงที่กระทำบนแผ่นมุงหลังคาจะถ่ายลงมาถึงจุดต่อของโครงข้อหมุนโดยผ่านทางแป (purlin) roof truss มักจะถูกรองรับโดยเสาหรือกำแพง roof truss ที่ถูกรองรับโดยเสามักจะถูกเรียกว่า **Bent** ซึ่งมักจะถูกออกแบบให้มีความแข็งแรง (rigidity) สูง เพื่อด้านทานต่อแรงกระทำที่มีทิศทางขนานไปกับ bent เช่น แรงลม เป็นต้น ช่องว่างระหว่าง bent สองอันมักจะถูกเรียกว่าช่วงเสา (bay) ซึ่งช่วงเสาควรมีระยะประมาณ 4.5 เมตร เมื่อ roof truss มี span ประมาณ 18 เมตร และมีระยะประมาณ 6 เมตร เมื่อ roof truss มี span ประมาณ 30 เมตร โดยปกติแล้ว bent ที่อยู่ติดกันมักจะถูกยึดติดกันด้วยค้ำยันแบบทแยง (diagonal bracing) เพื่อจะทำให้โครงสร้างมีความแข็งแรงมากขึ้นในการต้านทานแรงกระทำที่มีทิศทางตั้งฉากกับ bent



รูปที่ 3-2

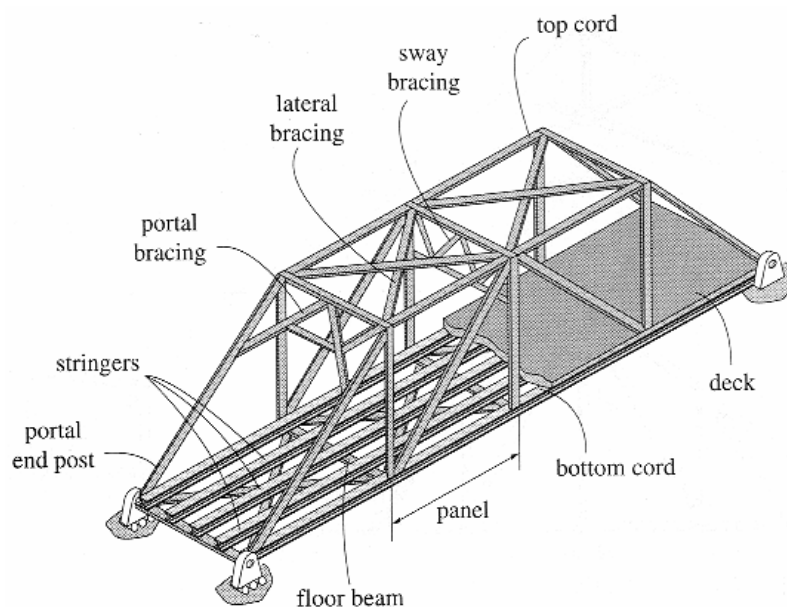
ในการเลือกรูปแบบของ roof truss นั้น เราจะต้องพิจารณาจากความยาวของ span ของหลังคา ความชัน (slope) ของหลังคา และชนิดของวัสดุที่ใช้มุงหลังคา รูปที่ 3-3 แสดงรูปแบบต่างๆ ของ roof truss รูปที่ 3-3 a ถึง 3-3c เป็น

Howe และ Pratt truss ซึ่งเหมาะกับหลังคาที่มีระยะระหว่างเสาค้ำ (span) ประมาณ 18-30 เมตร แต่ถ้า span ยาวกว่านี้ Fink truss ตามรูปที่ 3-3f มักจะถูกนำมาใช้ ถ้าหลังคามีความชันน้อย Warren truss ตามรูปที่ 3-3d มักจะถูกนำมาใช้ Sawtooth truss ตามรูปที่ 3-3e เหมาะสำหรับอาคารที่ต้องการแสงสว่างเข้าสู่อาคารโดยตรง Arched truss ตามรูปที่ 3-3g เหมาะสำหรับอาคารที่สูงและมี span ที่กว้างมาก เช่น gymnasium เป็นต้น



รูปที่ 3-3

โครงข้อหมุนรองรับพื้นสะพาน (Bridge Truss)

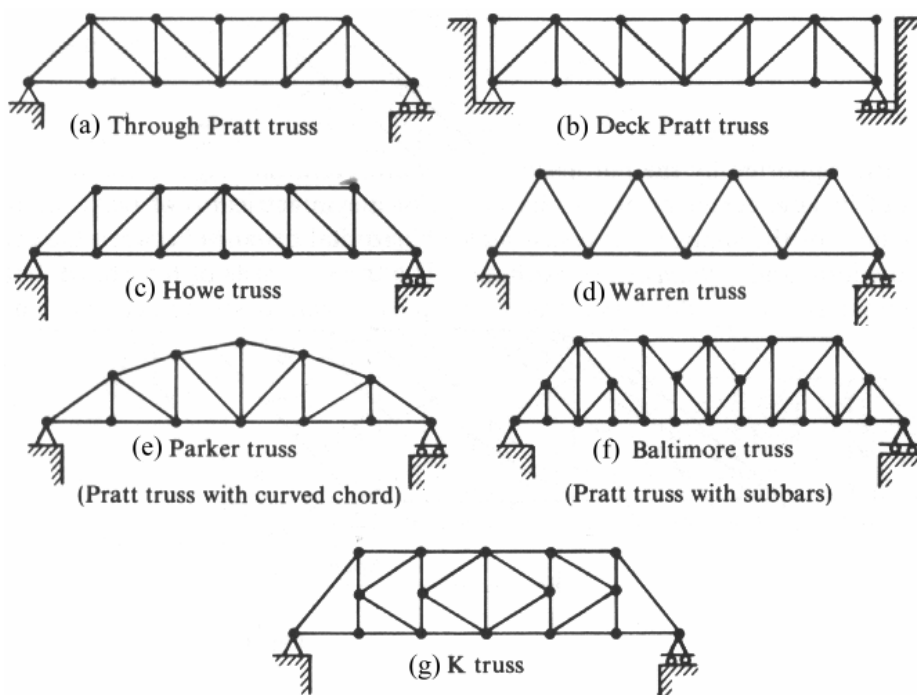


รูปที่ 3-4

รูปที่ 3-4 แสดงตัวอย่างของ bridge truss เราจะเห็นได้ว่า แรงที่กระทำบนพื้นของสะพาน (bridge deck) จะถ่ายลงที่คานชอย (stringer) แล้วแรงที่กระทำต่อคานชอยก็จะถ่ายต่อไปที่คานรับพื้น (floor beam) จากนั้น แรงที่กระทำต่อคานรับพื้นก็จะถ่ายไปลงที่จุดต่อของ bridge truss และสุดท้ายที่จุดรองรับหรือฐานรากของ bridge truss ตามรูป จันทัน

หรือคอร์ดบน (top cord) และชื่หรือคอร์ดล่าง (bottom cords) ของ bridge truss ถูกค้ำยันทางขวาง (lateral bracing) เพื่อด้านทานแรงกระทำด้านข้าง (lateral forces) ซึ่งเกิดจากลมและด้านทานต่อการเซ (sidesway) ซึ่งเกิดจากน้ำหนักบรรทุกที่เคลื่อนที่ผ่านสะพาน นอกจากนั้นแล้ว bridge truss มักจะถูกค้ำยันโดยใช้ portal bracing และ sway bracing ดังที่แสดงตามรูปด้วย เพื่อเพิ่มเสถียรภาพให้มากขึ้น ส่วนที่ยึดอยู่ภายในระหว่างคอร์ดบนและคอร์ดล่างมักจะถูกเรียกว่า Web

รูปที่ 3-5 แสดงตัวอย่างของ bridge truss สำหรับสะพานที่มี span เดียว Pratt, Howe, และ Warren truss ตามที่แสดงในรูปที่ 3-5a ถึง 3-5d มักจะใช้ในสะพานที่มีความยาวของ span ถึงประมาณ 60 เมตร ในกรณีที่ความยาวของ span มีค่ามากกว่า 60 เมตรจนถึงความยาวประมาณ 90 เมตร Bridge truss เช่น Parker truss ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5e จะใช้วัสดุน้อยกว่าโครงข้อหมุน 3 แบบแรก



รูปที่ 3-5

รูปแบบของ bridge truss ที่ประหยัดวัสดุที่สุดคือ รูปแบบที่ขึ้นส่วนของโครงข้อหมุนในแนวทแยง (diagonals) ทำมุมเฉียงระหว่าง 45° ถึง 60° กับแนวนอน ดังนั้น ถ้าความยาวของ span ของสะพานมีค่ามากขึ้นแล้ว ความลึกของ bridge truss ก็จะมีค่ามากขึ้นด้วย ซึ่งจะส่งผลให้ความยาวของ panels ของ bridge truss มีค่ามากขึ้นและน้ำหนักของระบบพื้นของสะพานก็จะมีค่ามากขึ้นตามไปด้วย เพื่อที่จะควบคุมน้ำหนักของระบบพื้นของสะพานให้อยู่ในค่าจำกัดที่ยอมรับได้ (tolerable limits) แล้ว Subdivided truss อย่างเช่น Baltimore truss ดังที่แสดงในรูปที่ 3-5f ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาใช้ในกรณีนี้ นอกจากนั้นแล้ว เราอาจจะใช้ K-truss ตามรูปที่ 3-5g ก็ได้

ข้อสมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงข้อหมุน (Assumptions for Truss Analysis)

ก่อนที่จะออกแบบโครงข้อหมุน เราจำเป็นที่จะต้องทำการวิเคราะห์หาแรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนก่อน ซึ่งเราจะใช้สมมุติฐาน 3 ข้อ ดังต่อไปนี้

1. จุดต่อหรือข้อต่อ (Joint) ของโครงข้อหมุนเป็นหมุดที่ไร้แรงเสียดทาน (frictionless pin) ดังนั้น ผลรวมของโมเมนต์ตัดที่ข้อต่อนี้จะมีค่าเป็นศูนย์
2. แรงภายนอกหรือน้ำหนักบรรทุกจะกระทำต่อโครงข้อหมุนที่จุดต่อเท่านั้น โดยเราจะไม่พิจารณา น้ำหนักของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน เนื่องจากมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงกระทำ

3. วัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic

จากสมมุติฐานที่ 1 เราจะได้ว่า ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะรับแรงดึงในแนวแกน (tensile axial force) หรือแรงกดอัดในแนวแกน (compressive axial force) เท่านั้น

สมมุติฐานข้อที่ 2 จะทำให้ไม่เกิดการดัดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเนื่องจากแรงในแนวแกน

สมมุติฐานข้อที่ 3 กำหนดให้การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงข้อหมุนภายใต้แรงกระทำมีค่าน้อยมาก ซึ่งทำให้เราสามารถวิเคราะห์ให้โครงข้อหมุนได้โดยใช้รูปร่างของโครงข้อหมุนก่อนที่จะถูกแรงภายนอกกระทำ

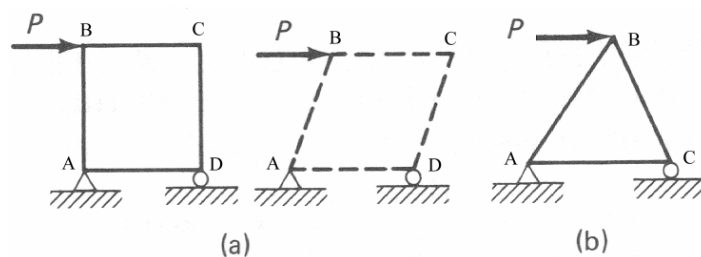
เราควรทราบด้วยว่า ในกรณีที่ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่รับแรงดึงและแรงอัดมีความยาวเท่ากันและถูกกระทำโดยแรงที่มีขนาดเท่ากันแล้ว ชิ้นส่วนที่รับแรงอัดมักจะมีหน้าตัดที่ใหญ่กว่าชิ้นส่วนที่รับแรงดึง เพราะว่าชิ้นส่วนที่รับแรงอัดมักจะขาดเสถียรภาพเนื่องจากการโก่งเดาะ (buckling)

3.2 ประเภทของโครงข้อหมุนที่อยู่ในระนาบเดียว (Classification of Coplanar Trusses)

เราสามารถที่จะแยกประเภทของโครงข้อหมุนที่อยู่ในระนาบเดียวออกได้เป็น 3 ประเภทคือ โครงข้อหมุนพื้นฐาน (simple truss) โครงข้อหมุนประกอบ (compound truss) และโครงข้อหมุนซับซ้อน (complex truss)

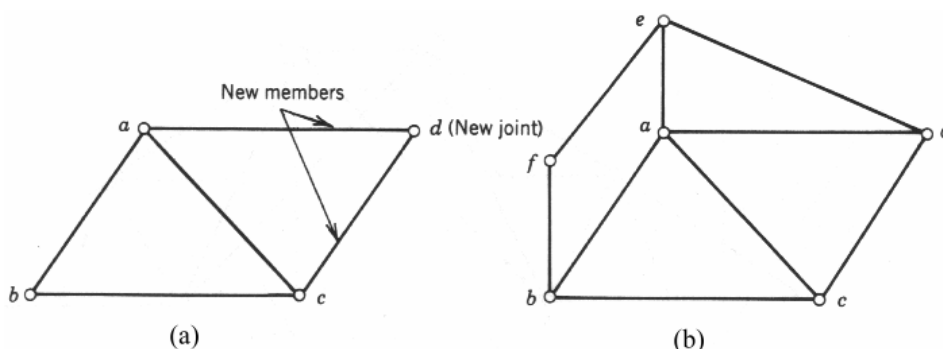
โครงข้อหมุนพื้นฐาน (Simple Truss)

พิจารณาโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 3-6a ซึ่งประกอบด้วยชิ้นส่วน 4 ชิ้นเชื่อมต่อกันด้วยหมุด โครงข้อหมุนนี้ จะไม่สามารถรับแรงกระทำได้ ถ้าไม่มีชิ้นส่วนในแนวทแยง AC หรือ BD มาเสริม ดังนั้น รูปแบบพื้นฐานที่สุดของโครงข้อหมุนซึ่งมีความแข็งแรง (rigidity) และมีเสถียรภาพ (stability) จะมีรูปร่างเป็นรูปสามเหลี่ยม ดังที่แสดงในรูปที่ 3-6b



รูปที่ 3-6

จากรูปที่ 3-7a เราจะขยายโครงข้อหมุน abc ออกได้โดยการเพิ่มชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนทีละ 2 ชิ้น ยกตัวอย่างเช่น ad และ cd เป็นต้น ซึ่งทำให้มีจุดต่อของโครงข้อหมุนเพิ่มขึ้น 1 จุด โครงข้อหมุนที่มีลักษณะเช่นนี้จะถูกเรียกว่า โครงข้อหมุนพื้นฐาน หรือ Simple truss ดังตัวอย่างที่แสดงไว้ในรูปที่ 3-7a และ 3-7b อย่างไรก็ตาม ตามรูปที่ 3-7b เราจะเห็นว่า โครงข้อหมุนพื้นฐานไม่จำเป็นต้องประกอบไปด้วยการต่อชิ้นส่วนแบบสามเหลี่ยมทั้งหมด



รูปที่ 3-7

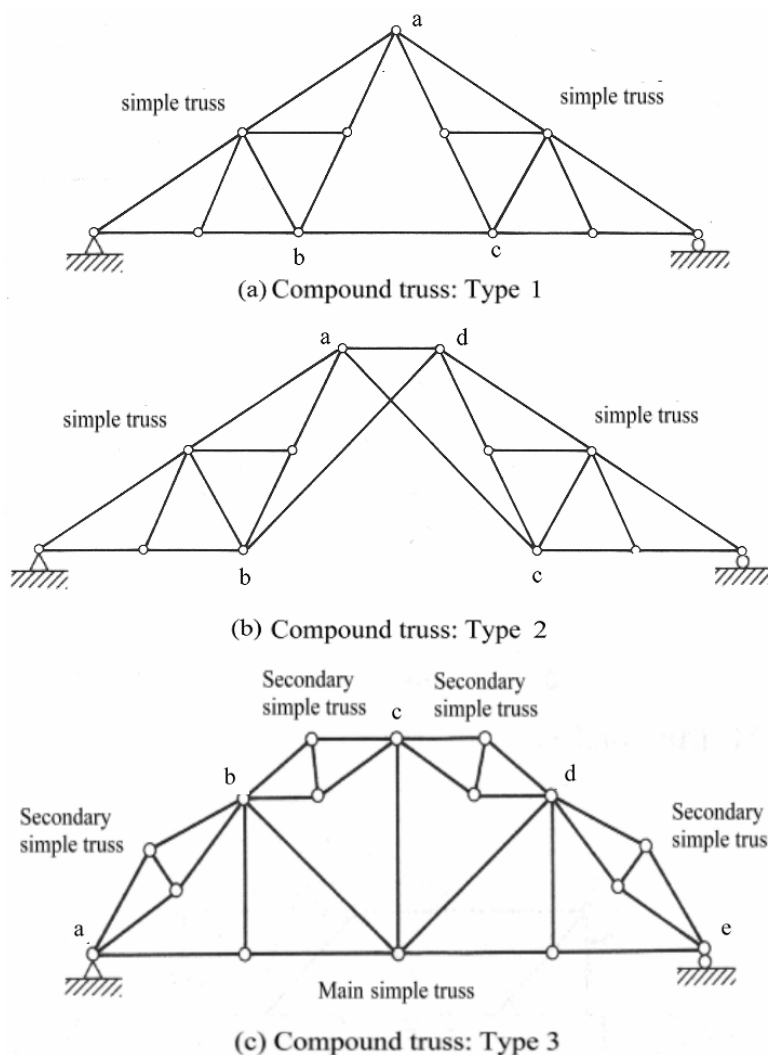
โครงข้อหมุนประกอบ (Compound Truss)

โครงข้อหมุนประกอบเป็นโครงข้อหมุนที่ได้จากการเชื่อมต่อโครงข้อหมุนพื้นฐานเข้าด้วยกัน ซึ่งมักจะใช้ในโครงสร้างที่มี span ที่ยาวมากขึ้นจากโครงข้อหมุนพื้นฐาน เราสามารถที่จะประกอบโครงข้อหมุนพื้นฐานให้เป็นโครงข้อหมุนประกอบได้ 3 แบบคือ

แบบที่ 1: เชื่อมต่อกันโดยมีจุดต่อและขึ้นส่วนร่วมกัน ดังที่แสดงในรูปที่ 3-8a ซึ่งเราจะเห็นว่า โครงข้อหมุนพื้นฐานเชื่อมต่อกันโดยมีจุดต่อร่วมกันที่ a และใช้ขึ้นส่วน bc ร่วมกัน

แบบที่ 2: เชื่อมต่อกันโดยใช้ขึ้นส่วน 3 ขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 3-8b ซึ่งเราจะเห็นว่า โครงข้อหมุนพื้นฐานถูกเชื่อมต่อกันโดยใช้ขึ้นส่วน ad , bd , และ ac

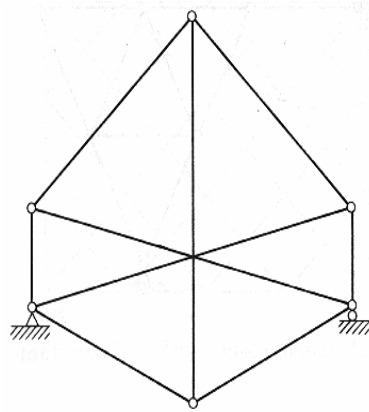
แบบที่ 3: เชื่อมต่อกันโดยใช้ secondary simple truss เป็นขึ้นส่วนของ main simple truss อย่างที่แสดงในรูปที่ 3-8c เราจะเห็นว่า $abcdea$ เป็น main simple truss โดยมี secondary simple truss ab , bc , cd และ de เป็นขึ้นส่วนของ main simple truss นั้น



รูปที่ 3-8

โครงข้อหมุนซับซ้อน (Complex Truss)

โครงข้อหมุนซับซ้อนเป็นโครงข้อหมุนที่เราไม่สามารถจัดให้เป็นโครงข้อหมุนพื้นฐานหรือโครงข้อหมุนซับซ้อนได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 3-9



รูปที่ 3-9

Determinacy

เมื่อโครงข้อหมุนอยู่ในระนาบเดียวกับแรงกระทำ (coplanar truss) ผลรวมของโมเมนต์ที่จุดต่อจะมีค่าเท่ากับ ศูนย์เพราะจุดต่อของโครงข้อหมุนเป็นหมุดที่ไม่มีแรงเสียดทาน ซึ่งจะทำให้เรามีสมการสมดุลของแรงที่จุดต่อของโครงข้อ หมุนเพียง 2 สมการเท่านั้นคือ $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ ถ้าให้ j เป็นจำนวนของจุดต่อของโครงข้อหมุน ดังนั้น เรา จะมีจำนวนทั้งหมดของสมการสมดุลที่จะใช้ในการวิเคราะห์หาแรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเท่ากับ $2j$

แรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนและแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับจะเป็นแรงไม่ทราบค่า (unknown forces) ถ้าให้ b เป็นจำนวนชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนซึ่งมีค่าเท่ากับแรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน และ r เป็นจำนวนของแรงปฏิกิริยาที่จุด รองรับแล้ว โครงข้อหมุนจะมีจำนวนของแรงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดเท่ากับ $(b + r)$ ดังนั้น เราจะหา determinacy ของโครง ข้อหมุนได้ว่า

$$\begin{aligned} (b + r) &= 2j && \text{Statically determinate} \\ (b + r) &> 2j && \text{Statically indeterminate} \end{aligned} \quad (3-1)$$

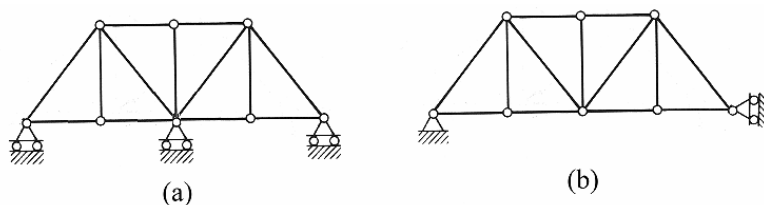
และ degree of indeterminacy จะมีค่าเท่ากับ $(b + r) - 2j$

เสถียรภาพ (Stability)

ถ้า $(b + r) < 2j$ แล้ว โครงข้อหมุนจะขาดเสถียรภาพ ในกรณีอื่นๆ เราจะตรวจสอบการขาดเสถียรภาพของ โครงข้อหมุนได้ดังต่อไปนี้

เสถียรภาพภายนอก (External Stability)

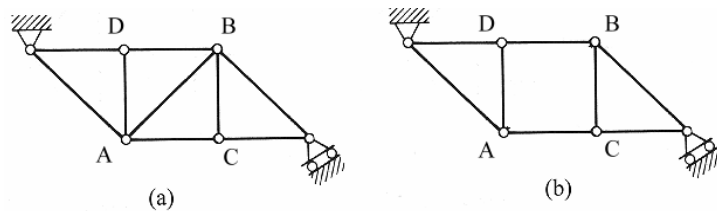
โครงข้อหมุนจะขาดเสถียรภาพภายนอก เมื่อแรงปฏิกิริยามีทิศทางที่ขนานกัน (parallel reactions) ดังที่แสดงใน รูปที่ 3-10a และเมื่อแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นกระทำร่วมกันที่จุดใดจุดหนึ่ง (concurrent reactions) ดังที่แสดงในรูปที่ 3-10b



รูปที่ 3-10

เสถียรภาพภายใน (Internal Stability)

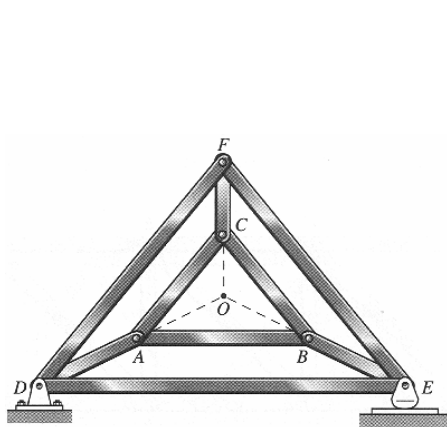
เราจะตรวจสอบเสถียรภาพภายในของโครงข้อหมุนได้จากการพิจารณาลักษณะการจัดเรียงชิ้นส่วนของโครงข้อ หมุน โครงข้อหมุนจะมีเสถียรภาพภายใน เมื่อจุดต่อของโครงข้อหมุนถูกจัดเรียงและถูกยึดติดกันอย่างไม่มีการเคลื่อนที่ แบบวัตถุเกร็ง (rigid body) เมื่อเทียบกับจุดต่ออื่นๆ ดังเช่นในโครงข้อหมุนพื้นฐานตามที่แสดงในรูปที่ 3-11a เป็นต้น



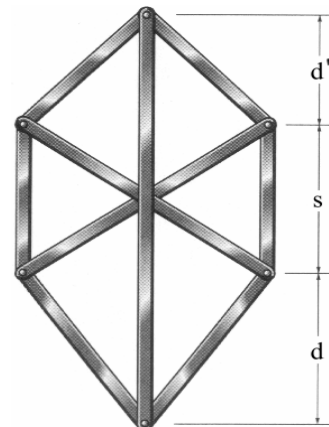
รูปที่ 3-11

รูปที่ 3-11b แสดงตัวอย่างของโครงข้อหมุนที่มีการจัดเรียงชิ้นส่วนที่ไม่เหมาะสม โครงข้อหมุนนี้จะขาดเสถียรภาพภายใต้แรงกระทำ เนื่องจากการไม่มีการยึดจุดต่อ A เข้ากับจุดต่อ B หรือจุดต่อ C เข้ากับจุดต่อ D

การตรวจสอบเสถียรภาพภายในของโครงข้อหมุนประกอบจะทำได้โดยการพิจารณาการจัดเรียงโครงข้อหมุนพื้นฐานเข้าด้วยกัน ยกตัวอย่างเช่น โครงข้อหมุนประกอบ ตามรูปที่ 3-12 จะเป็นโครงข้อหมุนประกอบที่ขาดเสถียรภาพภายใน เนื่องจากชิ้นส่วน AD , BE , และ CF มีแนวแกนที่ร่วมกันที่จุด O ซึ่งถ้ามีแรงภายนอกมากระทำที่จุดต่อ A , B , หรือ C แล้ว โครงข้อหมุน ABC จะเกิดการหมุนขึ้น ซึ่งทำให้โครงข้อหมุนขาดเสถียรภาพ



รูปที่ 3-12



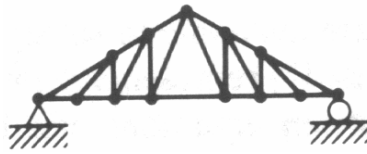
รูปที่ 3-13

ในกรณีของโครงข้อหมุนซับซ้อน การตรวจสอบนี้จะไม่สามารถที่จะกระทำได้ง่าย แต่จะทำได้โดยวิธีวิเคราะห์หาแรง (force analysis) เช่น โครงข้อหมุนซับซ้อน ตามรูปที่ 3-13 จะไม่มีเสถียรภาพภายใน เมื่อระยะ $d = d'$ เท่านั้น กล่าวโดยสรุปแล้ว เราจะได้ว่า

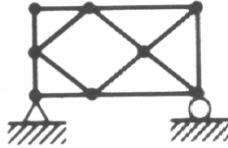
$$(b + r) < 2j \quad \text{unstable}$$

$(b + r) \geq 2j$ unstable เมื่อแรงปฏิกิริยาของโครงข้อหมุนที่เกิดขึ้นกระทำร่วมที่จุดเดียวกัน (concurrent) หรือเมื่อแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นมีทิศทางที่ขนานกัน (parallel) หรือถ้ารูปแบบของโครงข้อหมุนเป็นรูปแบบที่พังทลายได้

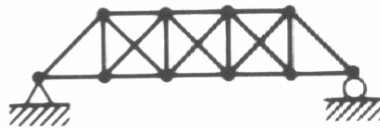
ตัวอย่างที่ 3-1



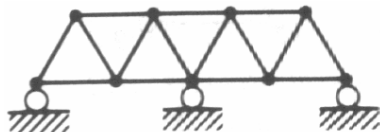
$b = 23$	$r = 3$	$j = 13$	$23 + 3 = 2(13)$	Statically determinate compound truss: type 2
----------	---------	----------	------------------	---



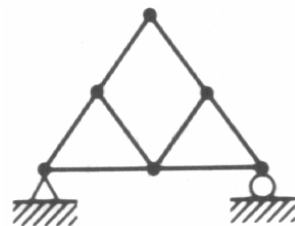
$b = 13$	$r = 3$	$j = 8$	$13 + 3 = 2(8)$	Statically determinate truss
----------	---------	---------	-----------------	------------------------------



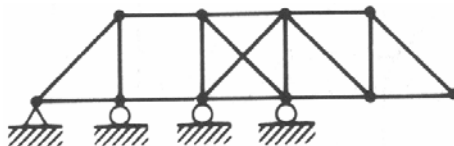
$b = 20$	$r = 3$	$j = 10$	$20 + 3 > 2(10)$	Statically indeterminate truss with 3 degree of indeterminacy
----------	---------	----------	------------------	---



$b = 15$	$r = 3$	$j = 9$	$15 + 3 = 2(9)$	Externally unstable truss
----------	---------	---------	-----------------	---------------------------



$b = 8$	$r = 3$	$j = 6$	$8 + 3 < 2(6)$	Internally unstable truss
---------	---------	---------	----------------	---------------------------

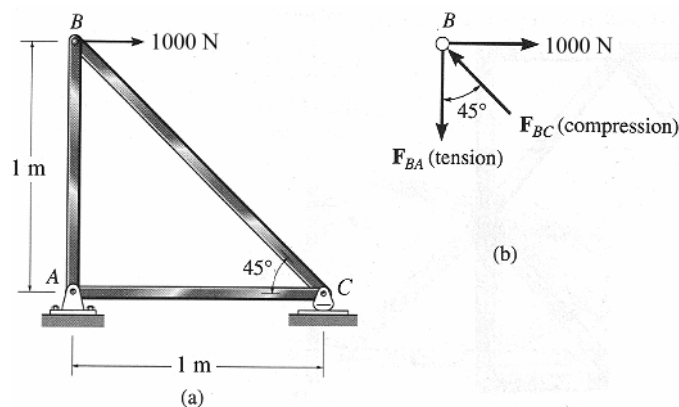


$b = 17$	$r = 5$	$j = 10$	$17 + 5 > 2(10)$	Internally unstable truss
----------	---------	----------	------------------	---------------------------

3.3 วิธีตัดรูปรอบจุดต่อ (Method of Joints)

เมื่อโครงข้อหมุนอยู่ในสภาวะสมดุลแล้ว จุดต่อของโครงข้อหมุนก็จะอยู่ในสภาวะสมดุลด้วย ในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธี method of joints เราจะใช้เงื่อนไขความสมดุลของแรง $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ ที่จุดต่อของโครงข้อหมุน ในวิธีการนี้ หลังจากที่เราได้ค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ (support reactions) ของโครงข้อหมุนแล้ว เราจะวาดแผนภาพ free body diagram ของจุดต่อ แล้วใช้สมการความสมดุลหาค่าของแรงที่เกิดขึ้นที่จุดต่อเหล่านั้น โดยเราจะเริ่มจาก จุดต่อที่มีแรงไม่ทราบค่า (unknown forces) ไม่เกิน 2 ค่า

โดยทั่วไปแล้ว การหาทิศทางของแรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะทำได้โดยการสมมติให้แรงภายในชิ้นส่วนที่ไม่ทราบค่ามีทิศทางเป็นแบบแรงดึงเสมอ ดังนั้น ถ้าค่าที่คำนวณได้มีค่าเป็นบวก แรงนั้นก็จะเป็แรงดึง และถ้าเป็นลบ แรงนั้นก็จะเป็แรงอัด จากนั้น เราจะใช้ทิศทางและขนาดของแรงที่เราหาได้กระทำต่อจุดต่ออื่นๆ ต่อๆ ไป แล้วทำการหาค่าแรงไม่ทราบค่าที่จุดต่อเหล่านั้น อีกวิธีการหนึ่งจะเป็นแบบการตรวจสอบ ซึ่งต้องอาศัยความเข้าใจเป็นหลัก อย่างเช่นตามรูปที่ 3-19b ซึ่งเป็นแผนภาพ free body diagram ของจุดต่อ B ของโครงข้อหมุนตามรูปที่ 3-14a เราจะเห็นว่า F_{BC} ควรที่จะเป็นแรงอัดที่กระทำต่อมุม B เนื่องจากว่าแรงในแนวแกนนอน $F_{BC} \sin 45^\circ$ ต้องมีค่าเท่ากับ 1000 N ($\sum F_x = 0$) และรูปที่ 3-14b แรงในแนวแกนตั้ง $F_{BC} \cos 45^\circ$ ต้องมีค่าเท่ากับแรงในแนวแกนตั้ง F_{BA} ซึ่งควรที่จะมีทิศทางแบบแรงดึง ถ้าเป็นไปได้ วิธีการทั้งสองนี้ควรที่จะใช้ร่วมกัน

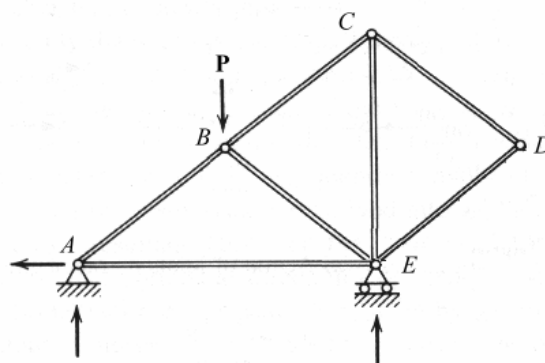


รูปที่ 3-14

3.4 Zero-Force Members

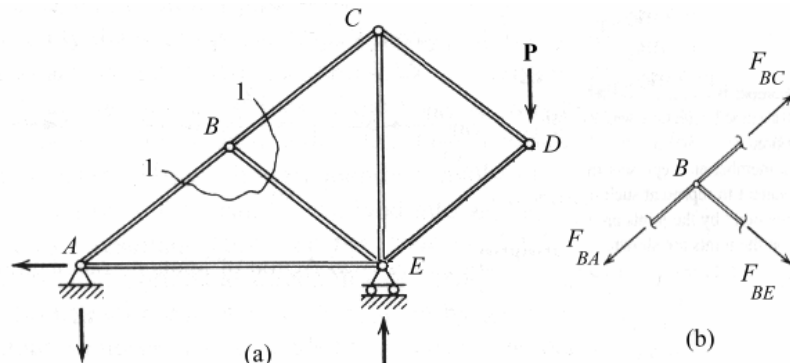
การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธี method of joints จะกระทำได้ง่ายขึ้น ถ้าเราสามารถหา zero-force members หรือชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่ไม่มีแรงกระทำได้ โดยที่ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะเป็น zero-force member เมื่อ

1. จุดต่อของโครงข้อหมุนเกิดจากการเชื่อมต่อกันโดยชิ้นส่วนเพียง 2 ชิ้นและไม่มีแรงภายนอกหรือแรงปฏิกิริยากระทำที่จุดต่อนั้น เช่น ชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ D ในรูปที่ 3-15 เป็นต้น



รูปที่ 3-15

2. จุดต่อของโครงข้อหมุนเกิดจากการเชื่อมต่อกันโดยชิ้นส่วน 3 ชิ้น โดยที่ 2 ใน 3 ของชิ้นส่วนเหล่านั้นอยู่ในแนวเดียวกัน (collinear) และไม่มีแรงภายนอกหรือแรงปฏิกิริยากระทำที่จุดต่อนั้น ชิ้นส่วนที่เหลือจะเป็น zero-force member เช่น ชิ้นส่วน BE ตามที่แสดงในรูปที่ 3-16 ซึ่งเชื่อมต่ออยู่กับชิ้นส่วน AB และ BC และไม่มีแรงกระทำที่จุดต่อ B นั้น เป็นต้น



รูปที่ 3-16

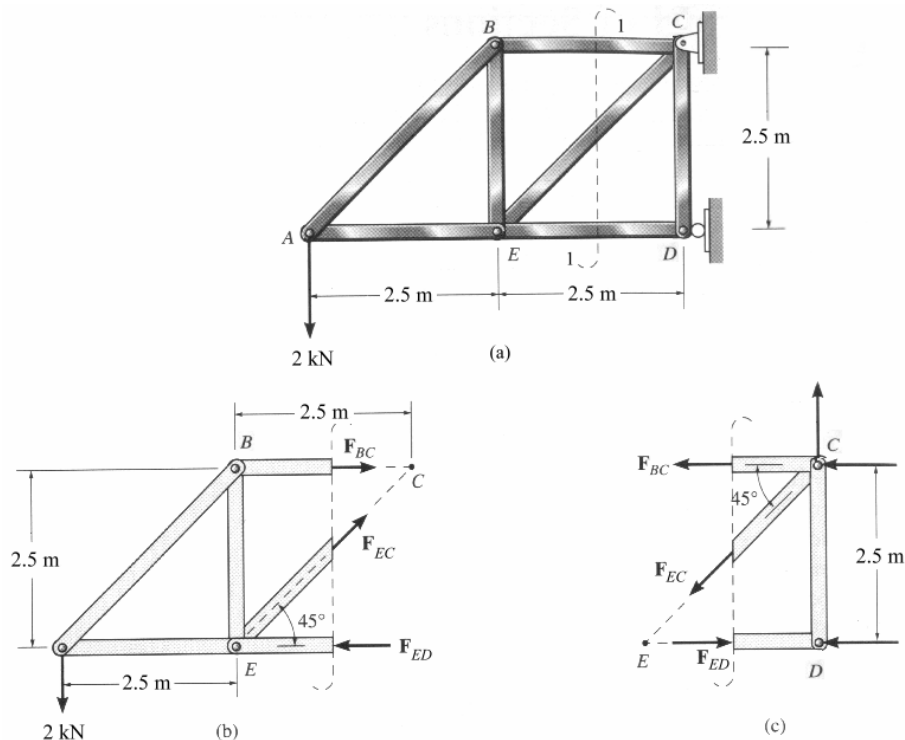
เราควรทราบว่า เราจะไม่สามารถตัด zero-force members ออกจากโครงข้อหมุนได้ เนื่องจากชิ้นส่วนเหล่านี้อาจจะถูกใช้ในการรักษาเสถียรภาพของโครงข้อหมุนในระหว่างการก่อสร้างและในกรณีที่แรงกระทำต่อโครงข้อหมุนมีการเปลี่ยนแปลงทิศทางและตำแหน่งที่กระทำ

3.5 วิธีตัดรูปตัด (Method of Sections)

การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธี method of sections จะใช้เมื่อเราต้องการหาแรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเพียงบางชิ้นส่วนเท่านั้น วิธีการนี้เริ่มจากการตัดโครงข้อหมุนผ่านชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่เราต้องการหาค่าแรงภายในออกเป็น 2 ส่วน ถ้าโครงข้อหมุนอยู่ในสมดุลแล้ว ส่วนที่ถูกตัดแยกออกจากกันก็จะอยู่ในสมดุลด้วย ดังนั้น เราจะใช้สมการความสมดุลของแรงและโมเมนต์บนส่วนของโครงข้อหมุน (อาจจะใช้แค่ส่วนใดส่วนหนึ่งหรือทั้งสองส่วนพร้อมกันขึ้นอยู่กับสถานการณ์ที่มีอยู่) หาค่าแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

ในวิธีการนี้ การพิจารณาส่วนที่จะตัดผ่านมีความสำคัญมาก โดยที่จุดที่จะตัดผ่านต้องมีค่าแรงไม่ทราบค่าไม่เกิน 3 ค่า เพราะว่าเรามีสมการความสมดุลแค่ 3 สมการต่อหนึ่งส่วนของโครงข้อหมุน ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการหาค่าแรงในชิ้นส่วน EC ตามที่แสดงในรูปที่ 3-17 เราควรตัดโครงข้อหมุนในแนว 1-1 และเราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ได้ตามรูปที่ 3-17b และ 3-17c ซึ่งมีแรงที่ไม่ทราบค่าอยู่ 3 แรงคือ F_{BC} , F_{EC} และ F_{ED} จากนั้น ใช้สมการความสมดุล 3 สมการหาค่าแรงดังกล่าว

การหาทิศทางของแรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่ไม่ทราบค่าจะมีลักษณะคล้ายกันกับที่ได้กล่าวไปแล้ว โดยสมมติให้แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่ไม่ทราบค่ามีทิศทางเป็นแรงดึงเสมอ ดังนั้น ถ้าค่าแรงที่คำนวณได้มีค่าเป็นบวก แรงนั้นก็จะเป็แรงดึงและถ้าเป็นลบ แรงนั้นก็จะเป็แรงอัด อีกวิธีการหนึ่งจะเป็นแบบการตรวจสอบ อย่างเช่นตามรูปที่ 3-17b เราจะเห็นว่า แรง F_{BC} ควรที่จะเป็นแรงดึงที่กระทำต่อหมุด B เนื่องจากว่าในทิศทางนี้ F_{BC} จะก่อให้เกิดสมดุลของโมเมนต์รอบจุด E กับโมเมนต์เนื่องจากแรงกระทำขนาด 2 kN ที่จุดต่อ A นอกจากนั้นแล้วแรง F_{EC} ก็ควรที่จะเป็นแรงดึง เพราะว่าในทิศทางนี้ องค์ประกอบของแรง F_{EC} ในแนวดิ่งจะมีทิศทางพุ่งขึ้นบน ซึ่งจะทำให้เกิดสมดุลในแนวดิ่งกับแรง 2 kN ถ้าเป็นไปได้ วิธีการทั้งสองนี้ควรที่จะนำมาใช้ร่วมกัน



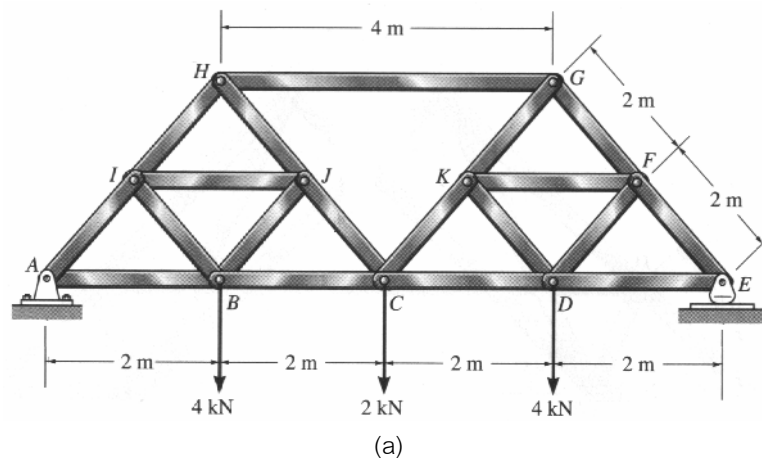
รูปที่ 3-17

3.6 โครงข้อหมุนประกอบ (Compound Trusses)

โดยทั่วไปแล้ว การวิเคราะห์โครงข้อหมุนประกอบจะทำได้โดยใช้วิธี method of joints และ method of sections ร่วมกัน โดยเริ่มต้น เราจะจำแนกประเภทของโครงข้อหมุนออกเป็น 3 ประเภทตามที่ได้กล่าวถึงไปแล้ว และใช้ขั้นตอนดังตัวอย่างต่อไปนี้ในการวิเคราะห์

โครงข้อหมุนประกอบ แบบที่ 1:

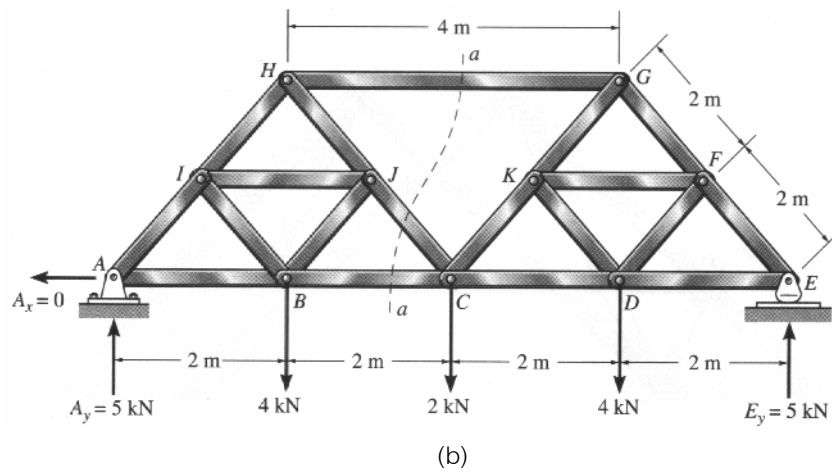
ตัวอย่างที่ 3-2



รูปที่ 3-18

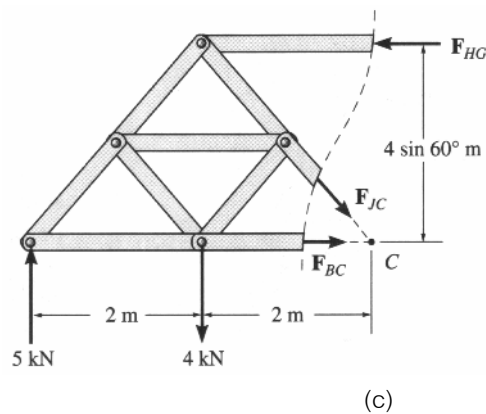
1. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของโครงข้อหมุนประกอบ

จากแผนภาพ free body diagram ของโครงข้อหมุนและสมการความสมดุล เราจะได้ว่า แรงปฏิกิริยา $A_x = 0 \text{ kN}$ $A_y = 5 \text{ kN}$ และ $E_y = 5 \text{ kN}$



2. ใช้ method of sections โดยตัดโครงข้อหมุนประกอบผ่านชิ้นส่วนเชื่อมต่อและจุดต่อที่เชื่อมโครงข้อหมุนพื้นฐาน จากนั้น หาค่าแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อโครงข้อหมุน

ในกรณีนี้ใช้ section $a - a$ ตัดโครงข้อหมุนประกอบ ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของส่วนของโครงข้อหมุนที่ถูกตัดได้ดังแสดง จากนั้น ใช้ $\sum M_C = 0$ ในการหาค่าแรง F_{HG} ซึ่งเราจะได้ $F_{HG} = 3.46 \text{ kN (C)}$

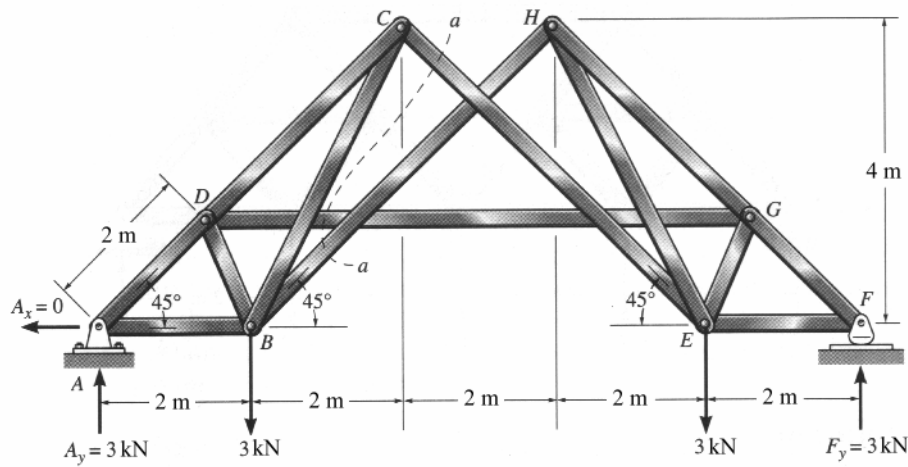


3. ทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนพื้นฐานทั้งสองโดยใช้วิธี method of joints และ method of sections ตามที่ได้กล่าวไปแล้ว

โครงข้อหมุนประกอบ แบบที่ 2:

ตัวอย่างที่ 3-3

1. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของโครงข้อหมุนประกอบ



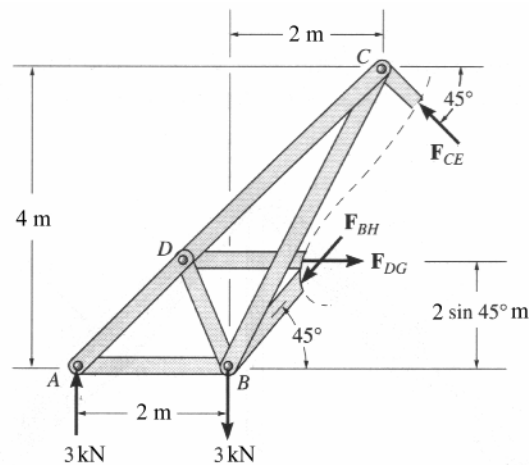
(a)

รูปที่ 3-19

2. ใช้ method of sections โดยตัดโครงข้อหมุนประกอบผ่านชิ้นส่วนที่เชื่อมต่อโครงข้อหมุนพื้นฐานทั้ง 3 ชิ้นส่วน แล้วใช้แผนภาพ free body diagram ของส่วนของโครงข้อหมุนที่ถูกตัด ในการหาค่าแรงในชิ้นส่วนทั้ง 3 นั้น

ในกรณีใช้ section $a-a$ ตัดโครงข้อหมุนประกอบ ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพ free body diagram ของส่วนของโครงข้อหมุนที่ถูกตัดได้ดังแสดง จากนั้น ใช้สมการสมดุล 3 สมการในการหาค่าแรง F_{CE} F_{BH} และ F_{DG} โดยที่

$$F_{CE} = F_{BH} = 2.675 \text{ kN (C)} \quad F_{DG} = 3.783 \text{ kN (T)}$$



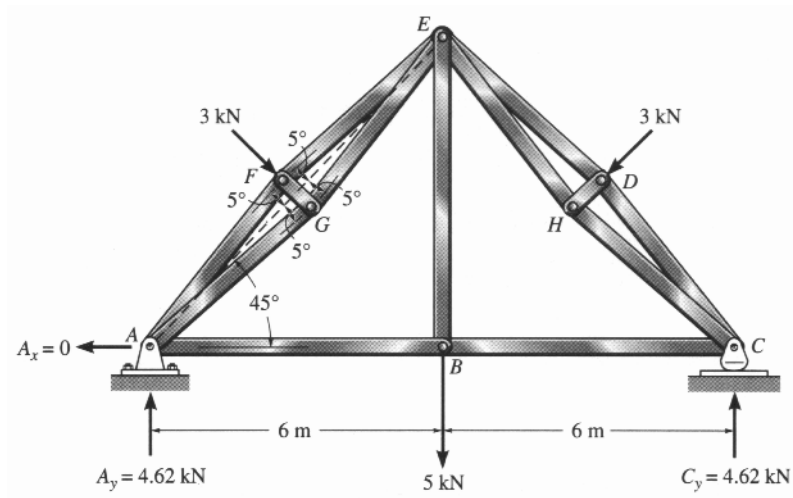
(b)

3. ทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนพื้นฐานทั้งสองโดยใช้วิธี method of joints และ method of sections ตามที่ได้กล่าวไปแล้ว

โครงข้อหมุนประกอบ แบบที่ 3:

ตัวอย่างที่ 3-4

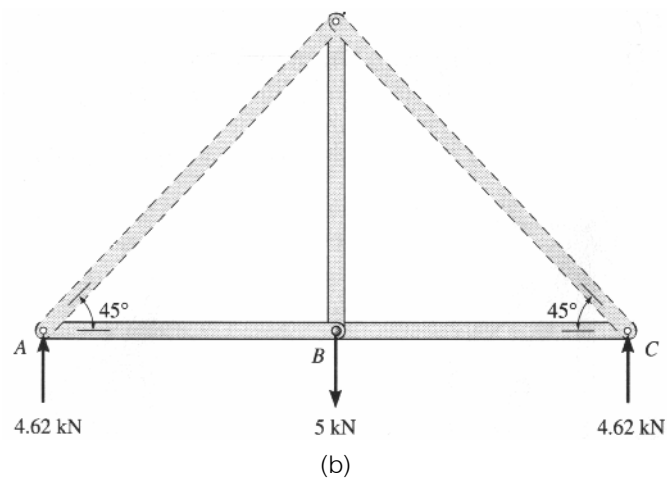
1. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของโครงข้อหมุนประกอบ



(a)

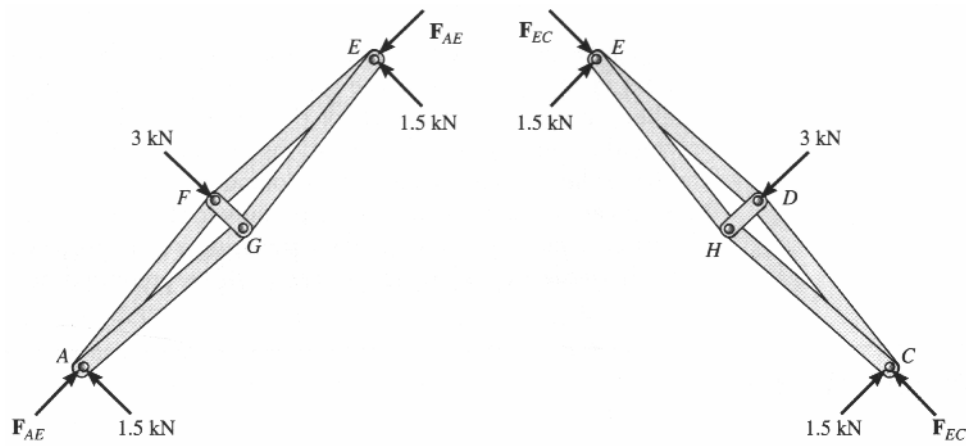
รูปที่ 3-20

2. เอา secondary simple trusses ออกจาก โครงข้อหมุนประกอบโดยแทน secondary simple trusses ด้วย "ชิ้นส่วนสมมุติ" ซึ่งทำให้โครงข้อหมุนประกอบนี้อยู่ในรูปของ main simple truss



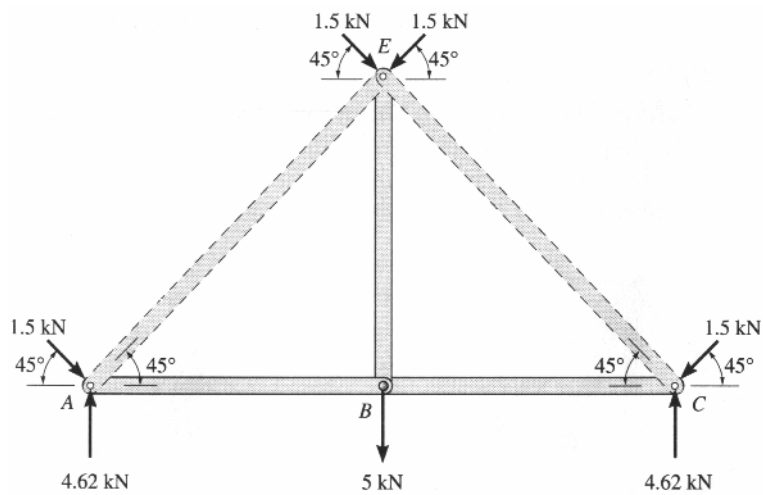
(b)

3. เขียนแผนภาพ free body diagram ของ secondary simple trusses ดังกล่าว และหาค่าแรงปฏิกิริยา



(c)

4. แรงปฏิกิริยาที่หามาได้กระทำต่อ main simple truss แล้ว วิเคราะห์หาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของ main simple truss

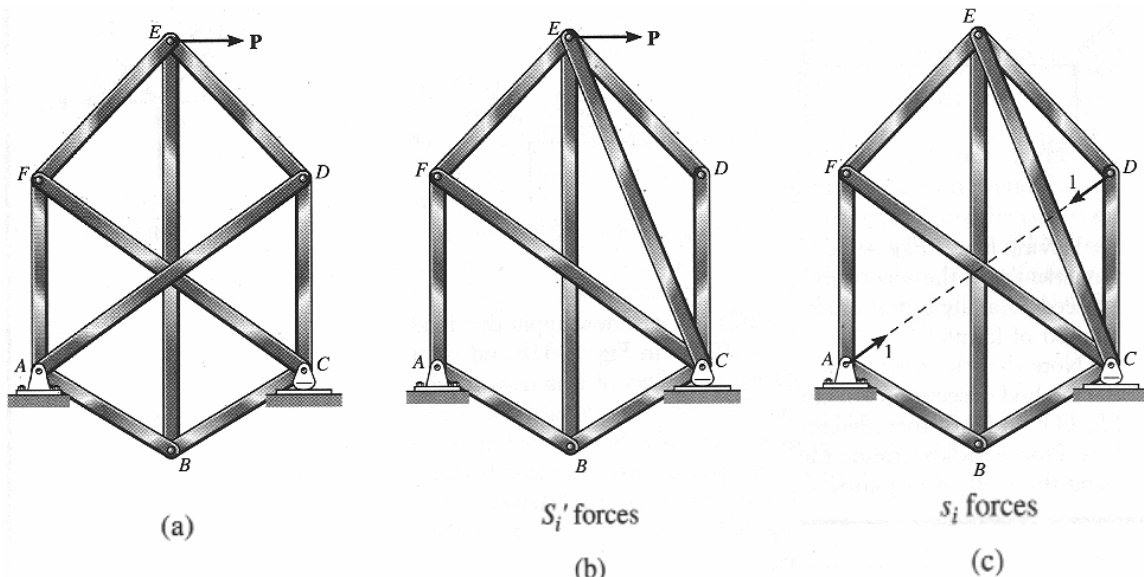


(d)

5. ใช้แรงที่หาได้ในข้อ 4 ในการวิเคราะห์หาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของ secondary simple trusses

3.7 โครงข่ายหมุนซับซ้อน (Complex Trusses)

โดยทั่วไปแล้ว การวิเคราะห์หาแรงในชิ้นส่วนของโครงข่ายหมุนซับซ้อนจะทำได้โดย method of joints โดยเราจะเขียนสมการความสมดุล 2 สมการต่อ 1 จุดต่อ ซึ่งถ้าเรามีจำนวนจุดต่อทั้งหมดเท่ากับ j แล้ว เราจะได้สมการความสมดุลทั้งหมด $2j$ จากนั้น เขียนสมการความสมดุลที่ได้ให้อยู่ในรูปของสมการหลายชั้น (simultaneous equations) สุดท้าย แก้สมการหลายชั้นดังกล่าวเพื่อหาแรงในชิ้นส่วนของโครงข่ายหมุนซับซ้อน อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าวิธีการนี้จะเป็วิธีการที่ตรงไปตรงมา แต่การตั้งสมการและการแก้สมการหลายชั้นจะมีความยุ่งยากมาก อีกวิธีการหนึ่งที่จะนำมาใช้ซึ่งเหมาะสำหรับโครงข่ายหมุนซับซ้อนที่มีขนาดเล็กและสามารถทำได้ด้วยมือได้คือ method of substitute members ซึ่งมีพื้นฐานมาจากหลักการ superposition และมีขั้นตอนดังที่จะกล่าวต่อไปนี้ (พิจารณารูปที่ 3-21 ประกอบ)



รูปที่ 3-21

1. หาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับต่างๆ ของโครงข่ายหมุน
2. ลดรูปของโครงข่ายหมุนให้อยู่ในรูปของโครงข่ายหมุนพื้นฐานที่มีเสถียรภาพ โดยการย้ายโหนดชิ้นส่วนของโครงข่ายหมุนให้มีแรงไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆ ไม่เกิน 2 ค่าเท่านั้น ยกตัวอย่างเช่น ในโครงข่ายหมุนซับซ้อน ตามรูปที่ 3-21a นั้น เราจะย้ายชิ้นส่วน AD ไปที่ EC ตามรูปที่ 3-21b เป็นต้น
3. หาค่าแรงในชิ้นส่วนต่างๆ ในโครงข่ายหมุนพื้นฐานที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 โดยใช้ method of joints ตามรูปที่ 3-21b กำหนดให้ค่าแรงในชิ้นส่วน i เนื่องจากแรงภายนอก P ที่จุดต่อ E มีค่าเท่ากับ S'_i
4. เอาแรงภายนอกที่กระทำต่อโครงข่ายหมุนพื้นฐานออก และให้แรง 1 หน่วยซึ่งมีทิศทางตรงกันข้ามแต่อยู่ในแนวเดียวกันกระทำที่จุดต่อทั้งสองของชิ้นส่วนที่ถูกย้ายโหนด แล้ววิเคราะห์หาแรงในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข่ายหมุนอีกครั้ง ตามรูปที่ 3-21c กำหนดให้ค่าแรงในชิ้นส่วน i ซึ่งเกิดจากแรง 1 หน่วยในทิศทางของชิ้นส่วนที่ถูกย้ายโหนด AD มีค่าเท่ากับ s_i
5. เนื่องจากในความเป็นจริงนั้น ค่าแรง 1 หน่วยดังกล่าวควรมีขนาดที่ไม่ทราบค่า x ซึ่งก่อให้เกิดแรงในชิ้นส่วน i มีขนาดเท่ากับ xs_i โดยใช้หลักการ superposition เมื่อเรารวมค่าของแรงในแต่ละชิ้นส่วนของโครงข่ายหมุนที่ได้มาจากขั้นตอนที่ 3 และ 4 เข้าด้วยกันแล้ว เราจะได้ว่า ค่าแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน i (S_i) มีค่าเท่ากับ

$$S_i = S'_i + xs_i$$

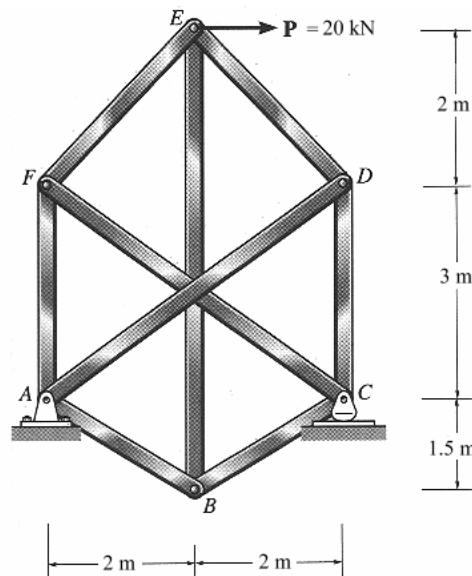
แต่เนื่องจากว่า ชิ้นส่วนที่เราได้จากการย้ายอิน เช่น ในกรณีของชิ้นส่วน EC ตามรูปที่ 3-21b ไม่ได้มีอยู่จริงในโครงข้อหมุนซับซ้อน ดังนั้น แรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนดังกล่าวหรือ S_{EC} จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$0 = S'_{EC} + xs_{EC}$$

ซึ่งจะทำให้เราสามารถหาค่าของ x ได้จาก $x = -S'_{EC} / s_{EC}$ และจากนั้น ค่าของแรงที่เกิดขึ้นจริงในชิ้นส่วนต่างๆ (S_i) ก็จะสามารถหาได้โดยการแทนค่าลงในสมการ $S_i = S'_i + xs_i$

ตัวอย่างที่ 3-5

จงวิเคราะห์ complex truss ดังที่แสดงในรูปที่ 3-22 ซึ่งถูกกระทำโดยแรง $P = 20$ kN



รูปที่ 3-22

ตารางที่ 3-1

Members	S'_i (kN)	s_i	xs_i	S_i
AB	25	-1	25	50
BC	25	-1	25	50
CD	0	-1.4	35	35
DE	0	-1.1314	28.283	28.283
EF	32.325	-0.97	24.25	56.57
AF	40	-1.2	30	70
BE	-30	1.2	-30	-60
CF	-28.571	0.857	-21.425	-50
CE	7.693	0.3077	-7.693	0

1. ทำการวิเคราะห์ complex truss ตามขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ 4 และจากรูปที่ 3-21b และ 3-21c ดังได้กล่าวถึงไปแล้ว ซึ่งเราจะหาค่าแรงในแนวแกนในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน S'_i และ s_i ได้ดังที่แสดงใน column ที่ 2 และ 3 ของตารางที่ 3-1
2. หาค่าของ unknown x ได้จากสมการ $S_{EC} = S'_{EC} + xs_{EC} = 0$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$x = -\frac{S'_{EC}}{s_{EC}} = -\frac{7.693}{0.3077}$$

$$x = -25.0 \text{ kN} = S_{AD}$$

3. คำนวณหาค่า xs_i ดังที่แสดงใน column ที่ 4 ของตารางที่ 3-1
4. แทนค่าต่างๆ ที่คำนวณได้ลงในสมการ $S_i = S'_i + xs_i$ เพื่อหาค่าของแรงที่เกิดขึ้นในส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน ดังที่แสดงใน column ที่ 5

บทที่ 4

แรงและโมเมนต์ภายในองค์อาคารของโครงสร้าง

4.1 แรงภายใน (Internal Load)

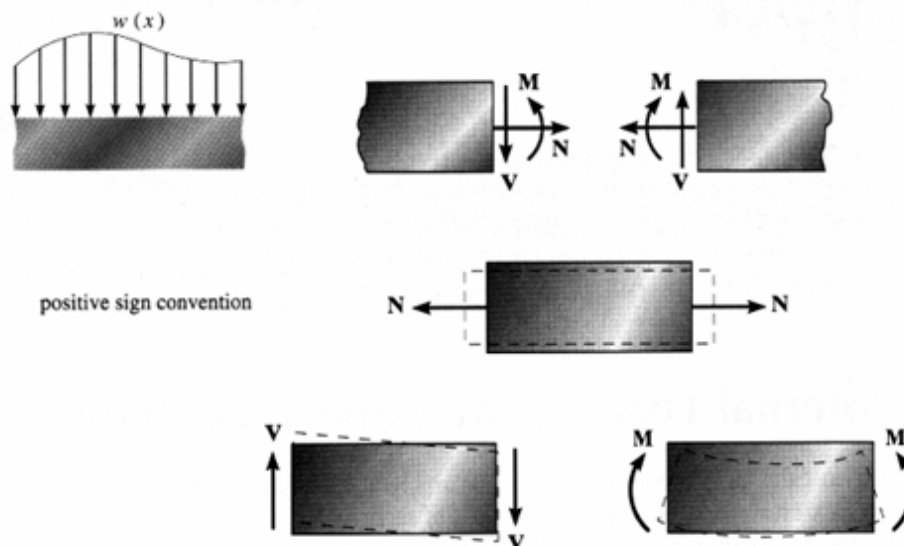
แรงภายใน (internal load) เป็นแรงหรือโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดใดหน้าตัดหนึ่งของโครงสร้าง ภายใต้การกระทำของแรงหรือน้ำหนักบรรทุกภายนอกที่กระทำอยู่บนโครงสร้างนั้น ซึ่งเราจะหาได้โดยใช้วิธี method of sections โดยทั่วไปแล้ว แรงภายในโครงสร้างที่อยู่ในระนาบเดียว (coplanar structure) จะประกอบด้วยแรงตั้งฉาก N (normal force) แรงเฉือน V (shear force) และโมเมนต์ดัด M (bending moment) แรงภายในเหล่านี้เป็นผลลัพธ์ที่เกิดจากความต้านทานของโครงสร้างต่อแรงกระทำ ซึ่งอยู่ในรูปของการกระจายของหน่วยแรง (stress distribution) บนหน้าตัดของโครงสร้างที่จุดตัดนั้น ในทางกลับกัน ถ้าเราทราบค่าแรงและโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดและถ้าเราสมมุติการกระจายของหน่วยแรงให้สอดคล้องกับการกระทำของแรงภายนอกแล้ว เราจะสามารถหาค่าของหน่วยแรงนั้นได้

โดยทั่วไปแล้ว ขั้นตอนในการหาแรงภายในจะประกอบไปด้วย 3 ขั้นตอนหลักคือ

1. หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ (support reactions)
2. เขียนแผนภาพ free body diagram ของส่วนตัดองค์อาคาร
3. ใช้สมการความสมดุลหาแรงภายใน

Sign Convention

กำหนดให้ sign convention ของแรงตั้งฉาก แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ดังที่แสดงในรูปที่ 4-1 มีค่าเป็นบวก เรา จะเห็นว่า แรงตั้งฉากจะมีค่าเป็นบวก เมื่อแรงตั้งฉากนั้นเป็นแรงดึง แรงเฉือนจะมีค่าเป็นบวก เมื่อแรงเฉือนนั้นมีทิศทาง หมุนตามเข็มนาฬิกา และโมเมนต์ดัดจะมีค่าเป็นบวก เมื่อโมเมนต์ดัดทำให้องค์อาคารของโครงสร้างแอ่นตัวเป็นรูปกระเพาะ



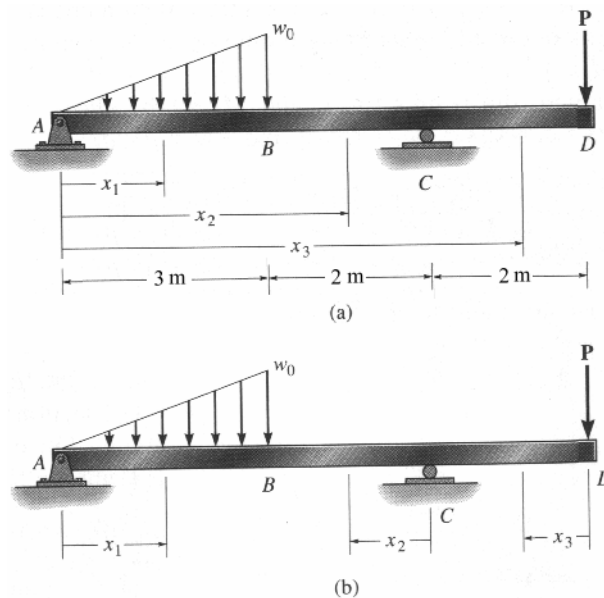
รูปที่ 4-1

4.2 ฟังก์ชันของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด (Shear and Moment Functions)

ในการออกแบบคาน เราจะต้องทราบการแปรเปลี่ยนของค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดซึ่งเป็นฟังก์ชันกับตำแหน่ง x ในแนวแกนของคานก่อน โดยเราจะหาได้โดยวิธี method of sections ทำการตัดคานที่ตำแหน่ง x ใดๆ ซึ่งวัดอ้างอิงจากปลายด้านใดด้านหนึ่งของคาน จากนั้น นำค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนมาออกแบบหน้าตัดของคาน

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อแรงและโมเมนต์ที่กระทำต่อคานเป็นแรงกระทำเป็นจุด (concentrated load) ดังเช่นที่จุด C และจุด D ในรูปที่ 4-2 หรือเมื่อค่าของแรงกระจาย (distributed load) มีการเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใด ดังเช่นที่จุด B

ในรูปที่ 4-2 แล้ว ฟังก์ชันของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดจะมีความไม่ต่อเนื่อง (discontinuity) ที่จุดนั้นๆ ในกรณีเช่นนี้ เราจะหาฟังก์ชันของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดจากแต่ละช่วงของคาน ซึ่งอยู่ระหว่างความไม่ต่อเนื่องของแรงและโมเมนต์ดังกล่าว ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2 จากรูป เราจะเห็นได้ว่า คานดังกล่าวควรถูกแบ่งออกได้เป็น 3 ช่วงคือ ช่วง AB มีพิกัด (coordinate) เป็น x_1 ช่วง BC มีพิกัดเป็น x_2 และช่วง CD มีพิกัดเป็น x_3 โดยที่พิกัดทั้งสามอาจจะมีจุดเริ่มต้นเดียวกันที่จุด A เพียงจุดเดียว ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2a หรืออาจจะมีจุดเริ่มต้นที่จุดที่ต่างกัน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-2b ก็ได้ ถ้าเราสังเกต เราจะเห็นได้ว่า ในกรณีนี้ถ้าเราใช้พิกัดแบบแรก เราจะหาฟังก์ชันของ V และ M ได้ง่ายกว่าในกรณีที่เรานำพิกัดแบบที่สอง



รูปที่ 4-2

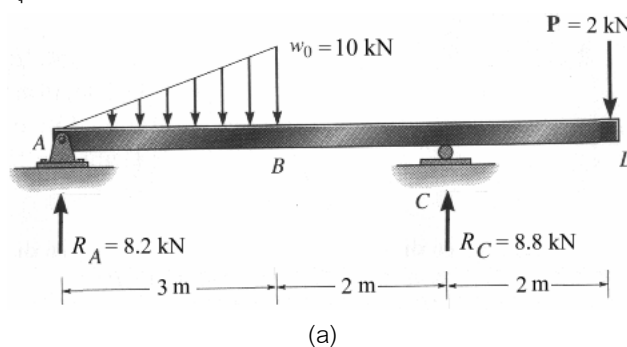
ตัวอย่างที่ 4-1

จงหาฟังก์ชันของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-3a กำหนดให้ $w_0 = 10 \text{ kN/m}$ และ

$$P = 2 \text{ kN}$$

เราจะหาฟังก์ชันของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของคานได้ดังต่อไปนี้

1. หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A และ C



รูปที่ 4-3

$$\uparrow + \sum M_C = 0;$$

$$R_A(5) + 2(2) - 0.5(3)10(2+3/3) = 0$$

$$R_A = 8.2 \text{ kN}$$

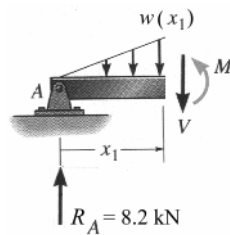
$$\uparrow + \sum F_y = 0;$$

$$R_A + R_C - 0.5(3)10 - 2 = 0$$

$$R_C = 8.8 \text{ kN}$$

2. เขียนแผนภาพ free body diagram ของส่วนตัดของคาน

$$0 \leq x_1 \leq 3 \text{ m};$$



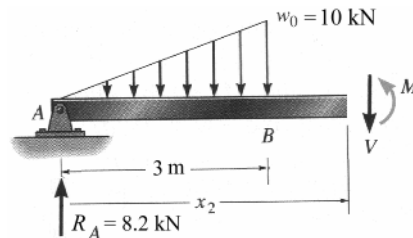
(b)

โดยการใช้สามเหลี่ยมคล้าย เราจะสามารถหาค่าของ $w(x_1)$ ได้ โดยที่ $w(x_1) = \frac{10}{3}x_1$ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$V(x_1) = 8.2 - 0.5(x_1)\frac{10}{3}x_1 = 8.2 - \frac{5}{3}x_1^2 \text{ kN}$$

$$M(x_1) = 8.2x_1 - 0.5(x_1)\frac{10}{3}x_1\left(\frac{x_1}{3}\right) = 8.2x_1 - \frac{5}{9}x_1^3 \text{ kN-m}$$

$$3 \text{ m} \leq x_2 \leq 5 \text{ m};$$

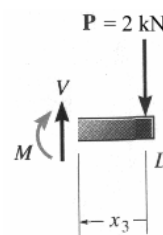


(c)

ระยะห่างระหว่างจุด B และรอยตัดมีค่าเท่ากับ $x_2 - 3 \text{ m}$

$$V(x_2) = 8.2 - 0.5(3)10 = -8.8 \text{ kN}$$

$$M(x_2) = 8.2x_2 - 0.5(3)10\left(\frac{3}{3} + (x_2 - 3)\right) = -6.8x_2 + 30 \text{ kN-m}$$



(d)

$$0 \leq x_3 \leq 2 \text{ m};$$

$$V(x_3) = 2 \text{ kN}$$

$$M(x_3) = 2x_3 \text{ kN-m}$$

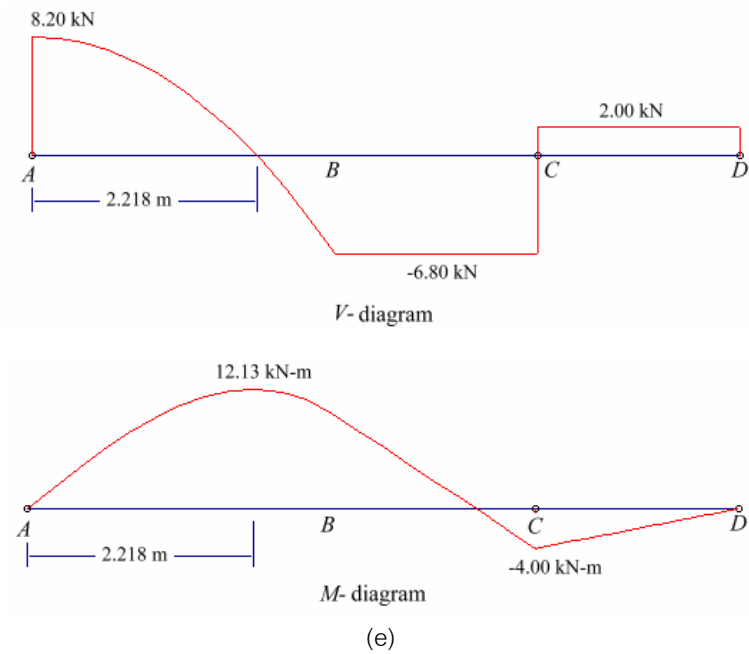
จากสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดที่หาได้ เราจะสามารถเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานได้ดังที่แสดงในรูป และตำแหน่งที่เกิดโมเมนต์ตัดสูงสุดและค่าโมเมนต์ตัดสูงสุดจะหาได้ดังนี้

จากสมการของ $V(x_1)$ เราจะสามารถหาระยะ x_1 ซึ่งทำให้ $V(x_1)$ จะมีค่าเป็นศูนย์จากการแทนค่า $V(x_1) = 0$ ลงในสมการของ $V(x_1)$ ดังนั้น

$$0 = 8.2 - \frac{5}{3}x_1^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2.218 \text{ m}$$

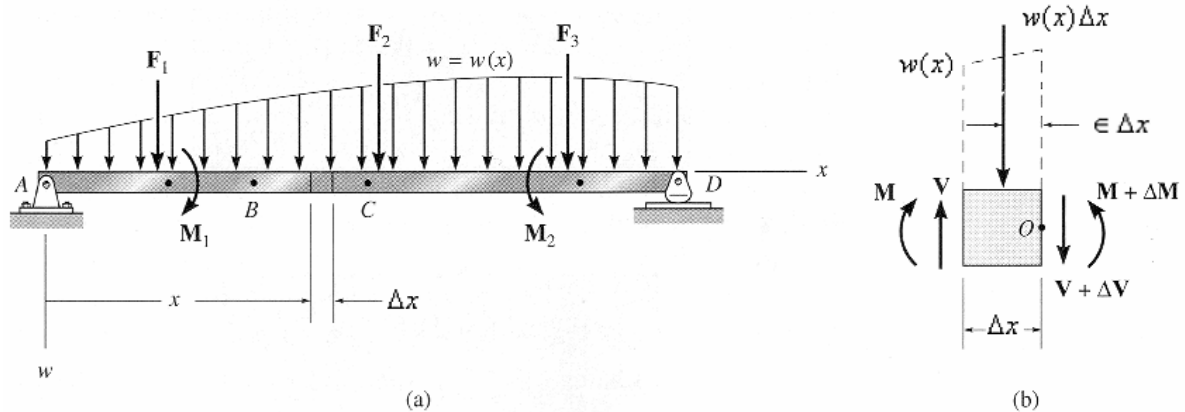
ดังนั้น ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในคานจะมีค่าเท่ากับ

$$M(x_1 = 2.218 \text{ m}) = 8.2(2.218) - \frac{5}{9}(2.218)^3 = 12.126 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



4.3 แผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ของคาน (Shear and Moment Diagrams for a Beam)

เมื่อเรานำค่าแรงเฉือน V และโมเมนต์ M ซึ่งเป็นฟังก์ชันของพิกัด x มาเขียนกราฟแล้ว กราฟที่ได้จะถูกเรียกว่า shear diagram และ moment diagram ตามลำดับ ในบางกรณีที่คานถูกกระทำโดยแรงต่างๆ ที่ค่อนข้างซับซ้อน อย่างเช่น ที่แสดงในรูปที่ 4-4 การเขียน shear diagram และ moment diagram จะมีความยุ่งยากและใช้เวลานาน ซึ่งจากการพิจารณาหาความสัมพันธ์ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะช่วยให้การเขียน shear diagram และ moment diagram ง่ายขึ้น



รูปที่ 4-4

ส่วนของคานที่ถูกกระทำโดยแรงกระจาย (Regions for Distributed Loads)

พิจารณาคาน AD ดังที่แสดงในรูปที่ 4-4a และแผนภาพ free body diagram ของส่วนของคานที่มีความยาวน้อยมาก Δx ซึ่งตัดออกมาที่ระยะ x และ $x + \Delta x$ จากจุดรองรับ A ดังที่แสดงในรูปที่ 4-4b กำหนดให้ทิศทางของแรงและแรงคู่ควบ (couple) มีค่าเป็นบวก แรงลัพธ์ที่เกิดจากแรงกระจาย $w(x)$ จะมีค่าเท่ากับ $w(x) \Delta x$ และกระทำที่ระยะ $\epsilon \Delta x$ จากจุด O เมื่อ $0 < \epsilon < 1$

โดยใช้สมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_y &= 0; & V - w(x) \Delta x - (V + \Delta V) &= 0 \\ & & \Delta V &= -w(x) \Delta x \\ \downarrow \sum M_o &= 0; & -V \Delta x - M + w(x) \Delta x [\epsilon \Delta x] + (M + \Delta M) &= 0 \\ & & \Delta M &= V \Delta x - w(x) \epsilon \Delta x^2 \end{aligned}$$

เมื่อหารสมการทั้งสองด้วย Δx และใส่ limit โดยให้ $\Delta x \rightarrow 0$ แล้ว เราจะได้ว่า

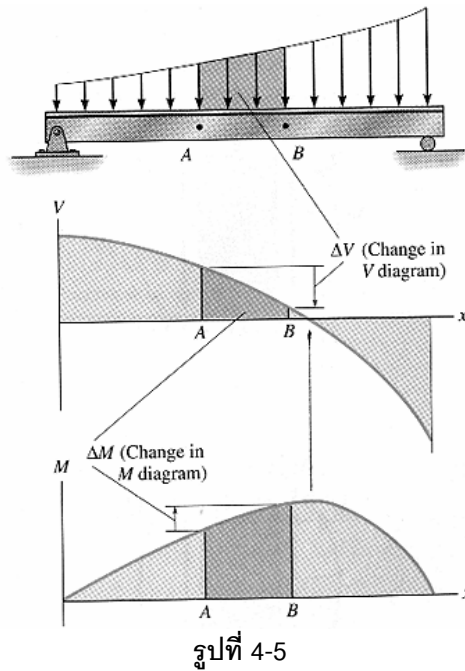
$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \quad (4-1)$$

(ความชันของ shear diagram ที่จุดใดๆ = ค่าลบของแรงกระจายที่จุดนั้น)

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (4-2)$$

(ความชันของ moment diagram ที่จุดใดๆ = ค่าแรงเฉือนที่จุดนั้น)

จากสมการที่ 4-1 ถึง 4-2 เราจะเห็นว่า สมการของแรงเฉือน $V(x)$ จะมีกำลังของตัวแปร x มากกว่าสมการของแรงกระจาย $w(x)$ หนึ่งค่า และสมการของโมเมนต์ $M(x)$ จะมีกำลังของตัวแปร x มากกว่าสมการของแรงเฉือน $V(x)$ หนึ่งค่า และจากสมการที่ 4-2 เราจะเห็นว่าเมื่อ $V = 0$ แล้ว $dM/dx = 0$ ซึ่งหมายความว่า จุดที่มีแรงเฉือนเท่ากับศูนย์จะเป็นจุดที่ค่าของโมเมนต์มีค่าสูงสุด เมื่อ shear diagram เปลี่ยนค่าจากบวกเป็นลบที่จุดนั้น และจะเป็นจุดที่โมเมนต์มีค่าต่ำสุดเมื่อ shear diagram เปลี่ยนค่าจากลบเป็นบวกที่จุดนั้น



รูปที่ 4-5

ถ้าเราเขียนสมการที่ 4-1 และ 4-2 ให้อยู่ในรูป $dV = -w(x) dx$ และ $dM = V dx$ ซึ่งแทนพื้นที่ภายใต้แรงกระจายและได้ shear diagram ตามลำดับ แล้วทำการอินทิเกรต (integration) สมการทั้งสอง เราจะได้ว่า

$$\Delta V = - \int w(x) dx \quad (4-3)$$

(การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน = ค่าลบของพื้นที่ภายใต้แรงกระจาย)

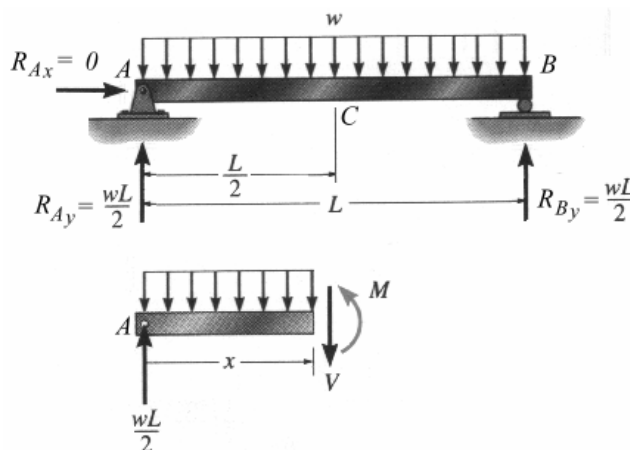
$$\Delta M = \int V(x) dx \quad (4-4)$$

(การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ = พื้นที่ภายใต้ shear diagram)

ซึ่งความหมายของสมการที่ 4-3 และ 4-4 จะเห็นได้ชัดเจนขึ้นเมื่อพิจารณารูปที่ 4-5

ตัวอย่างที่ 4-2

จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของคาน ACB ซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกทุกกระจายสม่ำเสมอ (Uniformly distributed load) w ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6a



(a)

รูปที่ 4-6

จากรูป คานมีความสมมาตรของแรงกระทำและรูปร่างรอบจุดกึ่งกลางคาน C ดังนั้น เมื่อเราใช้สมการความสมดุลบน free body diagram ของคาน เราจะหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับได้ โดยที่

$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{wL}{2} \quad \text{และ} \quad R_{Ax} = 0$$

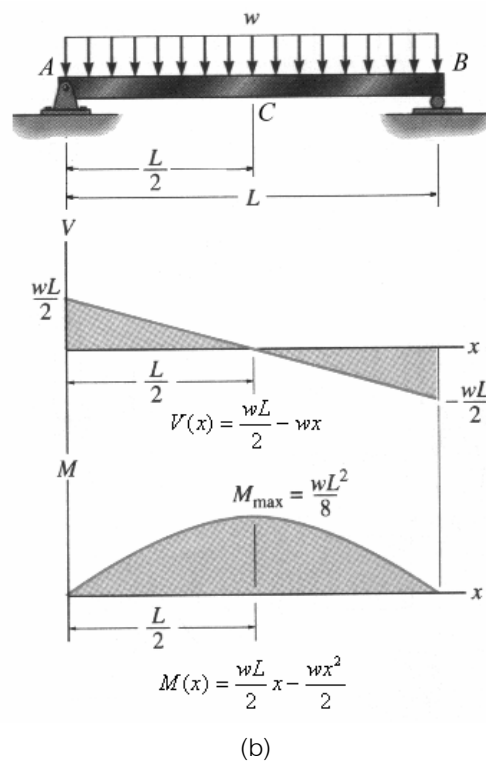
จากนั้น ทำการตัดคานที่ระยะ x จากจุดรองรับ A แล้ว เขียน free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-6a และเราจะหา function ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดภายในที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดดังกล่าวได้ดังนี้

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y &= 0; & -V(x) - wx + \frac{wL}{2} &= 0 \\ V(x) &= \frac{wL}{2} - wx \\ \downarrow + \sum M &= 0; & M(x) + wx \frac{x}{2} - \frac{wL}{2} x &= 0 \\ M(x) &= \frac{wL}{2} x - \frac{wx^2}{2} \end{aligned}$$

จากสมการของแรงเฉือน $V(x)$ และโมเมนต์ดัด $M(x)$ ที่หามาได้ เราจะเห็นได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{wL}{2} - wx \right) = -w \\ \frac{dM(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{wL}{2} x - \frac{wx^2}{2} \right) = \frac{wL}{2} - wx = V(x) \end{aligned}$$

ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่ (4-1) และ (4-2) และเมื่อนำสมการของแรงเฉือน $V(x)$ และโมเมนต์ดัด $M(x)$ มาเขียน shear diagram และ moment diagram เราจะได้แผนภาพดังที่แสดงในรูปที่ 4-6b



จากแผนภาพ เราจะเห็นได้ว่า แรงเฉือนมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ระยะ $x = L/2$ โดยที่ shear diagram เปลี่ยนค่าจากบวกเป็นลบที่จุดดังกล่าว ซึ่งจุดนี้สอดคล้องกับจุดที่ค่าโมเมนต์มีค่ามากที่สุด นอกจากนั้นแล้ว จาก shear diagram การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนระหว่างจุด A ไปยังจุด C มีค่าเท่ากับ

$$\Delta V_{C-A} = 0 - \frac{wL}{2} = -\frac{wL}{2}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าลบของพื้นที่ภายใต้แรงกระจายในช่วง จุด A ถึงจุด C ดังที่แสดงในสมการที่ (4-3)

$$\Delta V_{C-A} = -\int_0^{L/2} w dx = -wx \Big|_0^{L/2} = -\left(\frac{wL}{2} - 0\right) = -\frac{wL}{2}$$

และจาก moment diagram การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ระหว่างจุด A ไปยังจุด C มีค่าเท่ากับ

$$\Delta M_{C-A} = \frac{wL^2}{8} - 0 = \frac{wL^2}{8}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าของพื้นที่ภายใต้ shear diagram ในช่วง จุด A ถึงจุด C ดังที่แสดงในสมการที่ (4-4) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\Delta M_{C-A} = \int_0^{L/2} \left(\frac{wL}{2} - wx\right) dx = \left[\frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right]_0^{L/2} = \frac{wL^2}{8} - 0 = \frac{wL^2}{8}$$

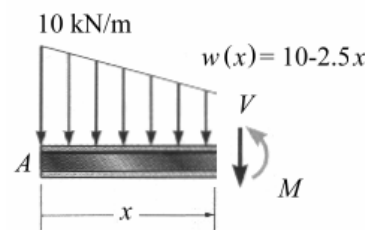
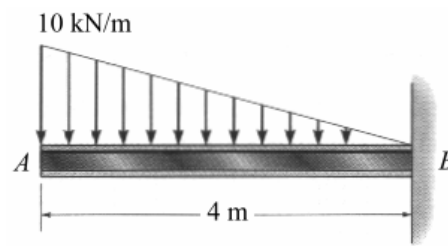
ตัวอย่างที่ 4-3

จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานยื่น ซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกแบบกระจายเชิงเส้น (linearly distributed load) ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7a

จากรูป สมการของน้ำหนักบรรทุกที่ระยะ x หรือ $w(x)$ จะหามาได้โดยใช้สามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{10 \text{ kN}}{4 \text{ m}} = \frac{w(x)}{4-x}$$

$$w(x) = 10 - 2.5x$$



(a)

รูปที่ 4-7

จาก free body diagram ของส่วนตัดของคานที่ระยะ x เราจะหาสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดได้ดังนี้

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -V(x) - \frac{1}{2}[10 - (10 - 2.5x)]x - (10 - 2.5x)x = 0$$

$$V(x) = \frac{5}{4}x^2 - 10x \text{ kN}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0; \quad M(x) + \frac{1}{2}[10 - (10 - 2.5x)]x\left(\frac{2}{3}x\right) + (10 - 2.5x)x\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M(x) = \frac{5}{12}x^3 - 5x^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

เราสามารถตรวจสอบความถูกต้องของสมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ตัดที่ได้ โดยใช้สมการที่ (4-1) และ (4-2)

$$V(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{5}{12}x^3 - 5x^2\right] = \frac{5}{4}x^2 - 10x$$

$$w(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{5}{4}x^2 - 10x\right] = -(2.5x - 10) = 10 - 2.5x$$

และเราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-7b

จาก shear diagram การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนระหว่างจุด A ไปยังจุด B

$$\Delta V_{C-A} = 20 \text{ kN}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าลบของพื้นที่ภายใต้แรงกระจายในช่วงจุด A ถึงจุด B ดังที่แสดงในสมการที่ (4-3)

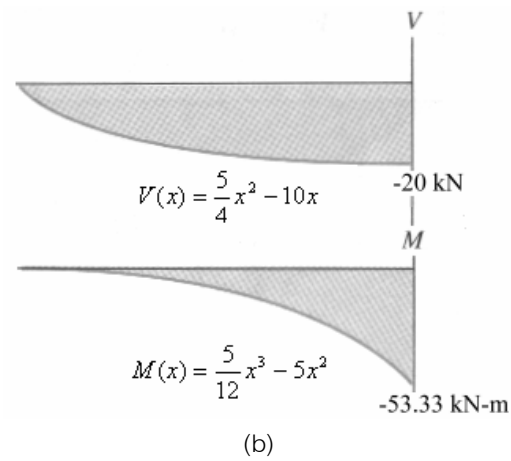
$$\Delta V_{C-A} = -\int_0^L w dx = -\int_0^4 (10 - 2.5x) dx = -(10x - 1.25x^2)\Big|_0^4 = -20 \text{ kN}$$

จาก moment diagram การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ระหว่างจุด A ไปยังจุด B

$$\Delta M_{C-A} = -53.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

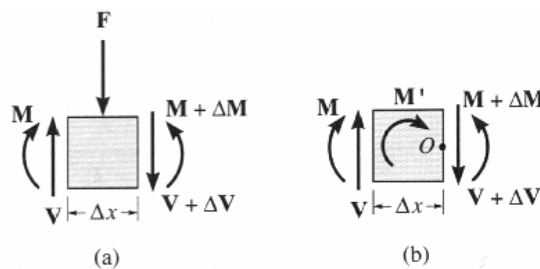
ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าของพื้นที่ภายใต้ shear diagram ในช่วง จุด A ถึงจุด C ดังที่แสดงในสมการที่ (4-4) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\Delta M_{C-A} = \int_0^L \left(\frac{5}{4}x^2 - 10x \right) dx = \left[\frac{5}{12}x^3 - 5x^2 \right]_0^4 = -53.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



ส่วนของคานที่ถูกกระทำโดยแรงเป็นจุดและแรงคู่ควบ (Regions of Concentrated Force and Couple)

สมการของแรงเฉือนและโมเมนต์ตามที่ได้กล่าวไปแล้วนั้น จะไม่สามารถใช้ได้ตรงจุดที่แรงเป็นจุดและแรงคู่ควบกระทำ เนื่องจากว่าสมการดังกล่าวไม่ได้รวมถึงการเปลี่ยนแปลงอย่างไม่ต่อเนื่องของค่าของแรงเฉือนและแรงคู่ควบที่จุดที่แรงดังกล่าวกระทำ



รูปที่ 4-8

พิจารณาแผนภาพ free body diagram ของส่วนของคานที่มีขนาดความยาวน้อยมาก Δx ซึ่งตัดออกมาตรงจุดที่แรงเป็นจุดและแรงคู่ควบกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8a โดยใช้สมการความสมดุลของแรง เราจะได้การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนอยู่ในรูป

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V - F - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = -F \quad (4-5)$$

จากสมการที่ 4-5 เราจะตีความหมายได้ว่า เมื่อแรงเป็นจุด F มีทิศทางพุ่งเข้าหาคาน (+) แล้ว ค่า ΔV จะมีค่าเป็นลบ (-) และ shear diagram จะมีค่าลดลงเท่ากับค่า F นั้น

โดยใช้สมการความสมดุลของโมเมนต์รอบจุด O บน free body diagram ของส่วนของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-8b เราจะได้การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์อยู่ในรูป

$$+\circlearrowleft \sum M_o = 0; \quad M + \Delta M - M' - V \Delta x - M = 0$$

ถ้า $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta M = M'$ (4-6)

จากสมการที่ 4-6 เราจะตีความหมายได้ว่า เมื่อแรงคู่ควบ M' มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาแล้ว ค่า ΔM จะมีค่าเป็นบวก และ moment diagram จะมีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับค่า M' นั้น

ตัวอย่างที่ 4-4

จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของคาน ABC ซึ่งถูกกระทำโดยแรง P ดังที่แสดงในรูปที่ 4-9

จาก free body diagram ของคาน เราจะหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A และ C ได้เป็น

$$R_A = \frac{3P}{4} \quad \text{และ} \quad R_C = \frac{P}{4}$$

จากนั้น เราเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 4-9 โดยถ้าเรากำหนดให้ระยะ x มีจุดเริ่มต้นที่จุดรองรับ A แล้ว เราจะได้ว่า

เมื่อ $0 \leq x \leq L/4$;

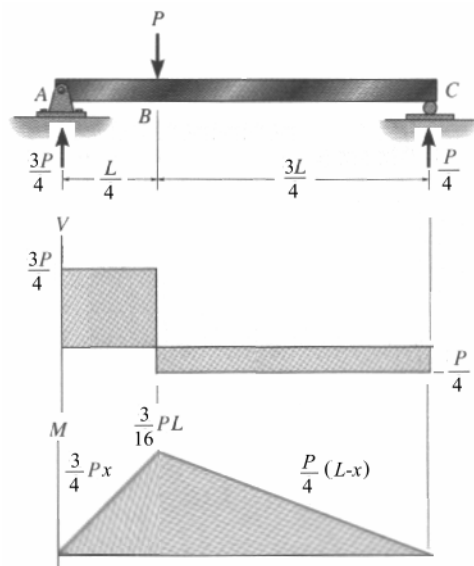
$$V(x) = \frac{3P}{4}$$

$$M(x) = \frac{3P}{4}x$$

เมื่อ $L/4 \leq x \leq L$;

$$V(x) = -\frac{P}{4}$$

$$M(x) = \frac{P}{4}(L-x)$$



(a)

รูปที่ 4-9

จาก shear diagram เราจะเห็นว่า ที่จุดที่แรง P (ซึ่งมีทิศทางพุ่งลง) กระทำ (จุด B) ค่าของการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนจะมีค่าลดลงเท่ากับค่าแรงกระทำ P นั้น นอกจากนั้นแล้ว เราจะเห็นได้ว่า เนื่องจากไม่มีแรงกระจาย w กระทำต่อคานในช่วง AB และ BC ดังนั้น shear diagram ในช่วงดังกล่าวจึงมีค่าคงที่ ซึ่งสอดคล้องกับสมการที่ (4-2)

$$\text{หรือ } \frac{dV}{dx} = 0$$

จาก moment diagram เราจะเห็นว่า ในช่วง AB ค่า slope ของ moment diagram มีค่าเป็นบวกและมีค่าเท่ากับ

$$\frac{3P}{16} \bigg/ \frac{L}{4} = \frac{3}{4}$$

ซึ่งสอดคล้องกับค่าที่เราหาได้จากการใช้สมการที่ (4-2)

$$\frac{dM}{dx} = \frac{3}{4}$$

นอกจากนั้นแล้ว ค่าของการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์จากจุด A ไปยังจุด B จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{3}{16} PL - 0 = \frac{3}{16} PL$$

ซึ่งสอดคล้องกับค่าที่เราหาได้จากสมการที่ 4-4

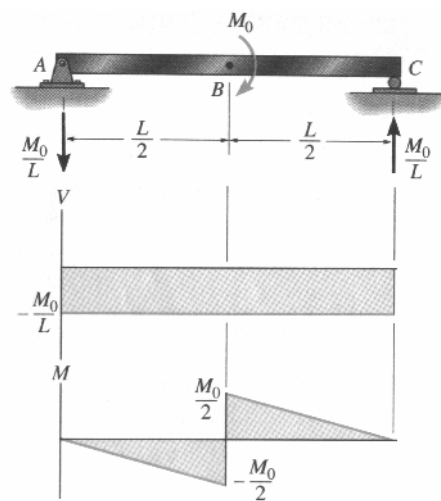
$$\Delta M_{B-A} = \int_0^{L/4} \frac{3P}{4} dx = \frac{3P}{4} x \bigg|_0^{L/4} = \frac{3}{16} PL$$

ตัวอย่างที่ 4-5

จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของคาน ABC ซึ่งถูกกระทำโดยโมเมนต์ M_0 ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาที่จุดกึ่งกลางของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-10

เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานในกรณีนี้ได้ตามวิธีการที่ได้กล่าวมาแล้ว และได้แสดงไว้ในรูปที่ 4-10 จาก shear diagram และ moment diagram ดังกล่าว เราจะสังเกตเห็นได้ว่า

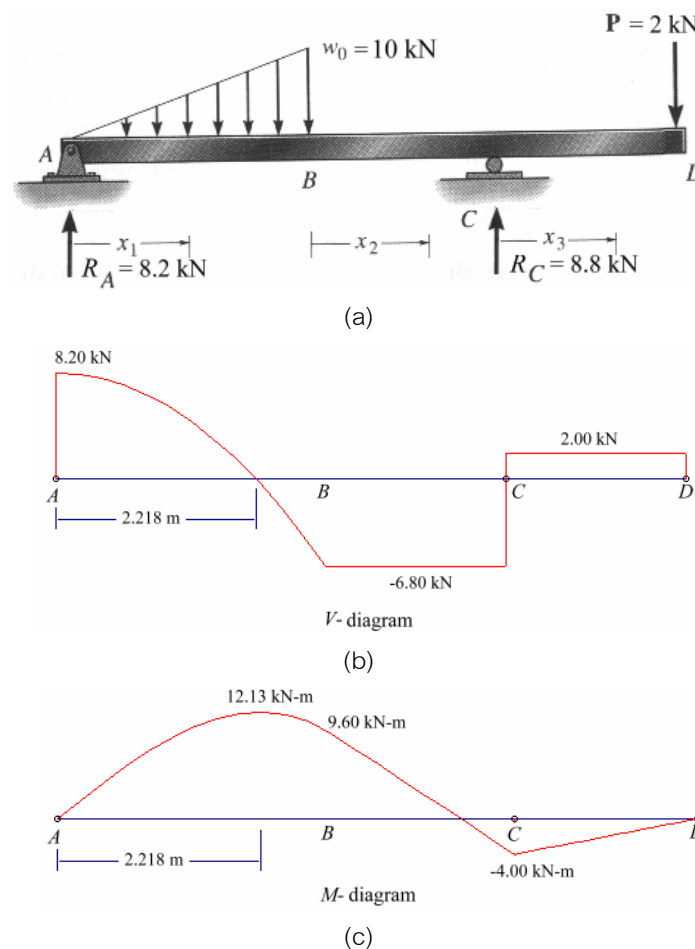
1. เนื่องจากคานถูกกระทำโดยโมเมนต์เท่านั้น ดังนั้น จากสมการที่ 4-1 shear diagram ของคานจะมีค่าคงที่ตลอดความยาวคาน
2. จาก moment diagram เราจะเห็นว่า ที่จุดที่โมเมนต์ M_0 ซึ่งมีทิศทางตามเข็มนาฬิกา ค่าของการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนจะมีค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับค่าโมเมนต์ M_0 นั้น
3. เนื่องจากค่าของแรงเฉือนมีค่าเป็นลบตลอดความยาวคาน ดังนั้น slope ของ moment diagram ก็จะมีค่าเป็นลบ



รูปที่ 4-10

ตัวอย่างที่ 4-6

จงเขียนแผนภาพ shear diagram และ moment diagram ของคานโดยการพิจารณาหาความสัมพันธ์ของแรงกระทำ แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด



รูปที่ 4-11

เริ่มต้น เราจะหาค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับทั้งสองของคานโดยใช้แผนภาพ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-11a

1. เนื่องจากแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A มีค่าเท่ากับ 8.20 kN และที่ทิศทางพุ่งขึ้น ดังนั้น ค่าแรงเฉือนที่จุดนี้จะมีค่าเท่ากับ $+8.20 \text{ kN}$ และเนื่องจากจุดรองรับ A เป็นหมุด (pin) ค่าโมเมนต์ที่จุดนี้จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังที่แสดงในแผนภาพ shear diagram และ moment diagram

2. ในช่วง AB ของคาน สมการของแรงกระทำอยู่ในรูป $w(x_1) = \frac{10}{3}x_1$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงและมีค่าเป็นบวก ดังนั้น จากสมการที่ 4-1 $\frac{dV(x_1)}{dx} = -w(x_1)$ เราจะได้ว่า ค่าความชันของ shear diagram ในช่วงนี้จะต้องมีค่าเป็นลบและสมการของแรงเฉือน $V(x_1)$ จะอยู่ในรูปของสมการ polynomial กำลังสอง ซึ่งจะเป็นเส้นโค้งคว่ำลง โดยที่ค่าแรงเฉือนที่ระยะ x_1 จากจุด A จะหาได้จากสมการที่ 4-3 โดยที่

$$\Delta V = V(x_1) - 8.20 = -\int_0^{x_1} \frac{10}{3}x_1 dx_1 = -\frac{5}{3}x_1^2$$

$$V(x_1) = 8.20 - \frac{5}{3}x_1^2$$

เมื่อ $x_1 = 3 \text{ m}$ แล้ว $V(x_1 = 3 \text{ m}) = 8.20 - \frac{5}{3}(3)^2 = -6.80 \text{ kN}$ จากนั้น เราจะเขียน shear diagram ของคานในช่วง AB ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 4-11b

เนื่องจากสมการของแรงเฉือนในช่วง AB ของคานที่วิเคราะห์ได้อยู่ในรูปของสมการ polynomial กำลังสอง และมีค่าลดลงจาก 8.20 kN ที่จุด A เป็น -6.80 kN ที่จุด B ดังนั้น จากสมการที่ 4-2 $\frac{dM(x_1)}{dx} = V(x_1)$ เราจะได้ว่า ค่าความชันของ moment diagram ในช่วงนี้จะต้องมีค่าลดลงจากจุด A ไปยังจุด B และสมการของโมเมนต์ $M(x_1)$ จะอยู่ในรูปของสมการ polynomial กำลังสาม ซึ่งจะเป็นเส้นโค้งคว่ำลง โดยที่ค่าโมเมนต์ที่ระยะ x_1 จากจุด A จะหาได้จากสมการที่ 4-4 โดยที่

$$\Delta M = M(x_1) - 0 = \int_0^{x_1} [8.2 - \frac{5}{3}x_1^2] dx_1 = 8.2x_1 - \frac{5}{9}x_1^3$$

$$M(x_1) = 8.2x_1 - \frac{5}{9}x_1^3$$

เมื่อ $x_1 = 3 \text{ m}$ แล้ว $M(x_1 = 3 \text{ m}) = 8.2(3) - \frac{5}{9}(3)^3 = 9.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$ จากนั้น เราจะเขียน moment diagram ของคานในช่วง AB ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 4-11c

ตำแหน่ง x_1 ที่เกิดค่าโมเมนต์สูงสุดจะหาได้จากสมการ $\frac{dM(x_1)}{dx} = V(x_1) = 0$ ดังนั้น x_1 ที่เกิดค่าโมเมนต์สูงสุดจะค่าเท่ากับ $8.2 - \frac{5}{3}x_1^2 = 0$ และ $x_1 = 2.218 \text{ m}$ ดังนั้น ค่าสูงสุดของโมเมนต์ตัดที่เกิดขึ้นในคานจะมีค่าเท่ากับ

$$M(x_1 = 2.218 \text{ m}) = 8.2(2.218) - \frac{5}{9}(2.218)^3 = 12.126 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3. ในช่วง BC ของคาน สมการของแรงกระทำอยู่ในรูป $w(x_2) = 0$ ดังนั้น จากสมการที่ 4-1 $\frac{dV(x_2)}{dx} = 0$ เราจะได้ว่า ค่าความชันของ shear diagram ในช่วงนี้จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ และสมการของแรงเฉือน $V(x_2)$ จะอยู่ในรูปของค่าคงที่ ซึ่งจะเป็ตรงในแนวนอน โดยที่ค่าแรงเฉือนที่ระยะ x_2 จากจุด B จะหาได้จากสมการที่ 4-3 โดยที่

$$\Delta V = V(x_1) + 6.80 = -\int_0^{x_2} (0) dx_1 = 0$$

$$V(x_1) = -6.80 \text{ kN}$$

จากนั้น เราจะเขียน shear diagram ของคานในช่วง BC ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 4-11b

เนื่องจากแรงเฉือนในช่วง BC มีค่าคงที่เท่ากับ -6.80 kN ดังนั้น จากสมการที่ 4-2 $\frac{dM(x_2)}{dx} = -6.80$ เราจะได้ว่า ค่าของ moment diagram ในช่วงนี้จะต้องมีค่าลดลงอย่างสม่ำเสมอโดยมีค่า slope เท่ากับ -6.80 จากจุด B ไปยังจุด C และสมการของโมเมนต์ $M(x_2)$ จะอยู่ในรูปของสมการเส้นตรง โดยที่ค่าโมเมนต์ที่ระยะ x_2 จากจุด B จะหาได้จากสมการที่ 4-4 โดยที่

$$\Delta M = M(x_2) - 9.60 = \int_0^{x_2} [-6.80] dx_2 = -6.80x_2$$

$$M(x_2) = 9.60 - 6.80x_2$$

เมื่อ $x_2 = 2 \text{ m}$ แล้ว $M(x_2 = 2 \text{ m}) = 9.60 - 6.80(2) = -4.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$ จากนั้น เราจะเขียน moment diagram ของคานในช่วง BC ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 4-11c

4. เนื่องจากแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ C มีค่าเท่ากับ 8.80 kN และที่ทิศทางพุ่งขึ้น ดังนั้น ค่าแรงเฉือนที่จุดนี้จะมีค่าเท่ากับ $-6.80 + 8.80 = +2.20 \text{ kN}$ ดังที่แสดงในแผนภาพ shear diagram ในรูปที่ 4-11b

5. ในช่วง CD ของคาน สมการของแรงกระทำอยู่ในรูป $w(x_3) = 0$ ดังนั้น จากสมการที่ 4-1 $\frac{dV(x_3)}{dx} = 0$ เราจะได้ว่า ค่าความชันของ shear diagram ในช่วงนี้จะต้องมีค่าเป็นศูนย์ และสมการของแรงเฉือน $V(x_2)$ จะอยู่ในรูปของค่าคงที่ ซึ่งจะตรงในแนวนอน โดยที่ค่าแรงเฉือนที่ระยะ x_3 จากจุด C จะหาได้จากสมการที่ 4-3 โดยที่

$$\Delta V = V(x_1) - 2.0 = -\int_0^{x_1} (0) dx_1 = 0$$

$$V(x_1) = +2.0 \text{ kN}$$

เนื่องจากที่จุด D ของคานมีแรง $P = 2.0 \text{ kN}$ ซึ่งมีทิศทางพุ่งลงกระทำและจะทำให้เกิดแรงเฉือนมีค่าเป็นลบ ดังนั้น ค่าแรงเฉือนที่จุดนี้จะมีค่าเท่ากับ $2.0 - 2.0 = 0 \text{ kN}$ จากนั้น เราจะเขียน shear diagram ของคานในช่วง CD ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 4-11b

เนื่องจากแรงเฉือนในช่วง CD มีค่าคงที่เท่ากับ 2.0 kN ดังนั้น จากสมการที่ 4-2 $\frac{dM(x_2)}{dx} = 2.0$ เราจะได้ว่า ค่าของ moment diagram ในช่วงนี้จะต้องมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอโดยมีค่า slope เท่ากับ 2.0 จากจุด C ไปยังจุด D และสมการของโมเมนต์ $M(x_3)$ จะอยู่ในรูปของสมการเส้นตรง โดยที่ค่าโมเมนต์ที่ระยะ x_3 จากจุด C จะหาได้จากสมการที่ 4-4 โดยที่

$$\Delta M = M(x_3) - (-4.0) = \int_0^{x_3} [2.0] dx_2 = 2.0x_2$$

$$M(x_2) = -4.0 + 2.0x_2$$

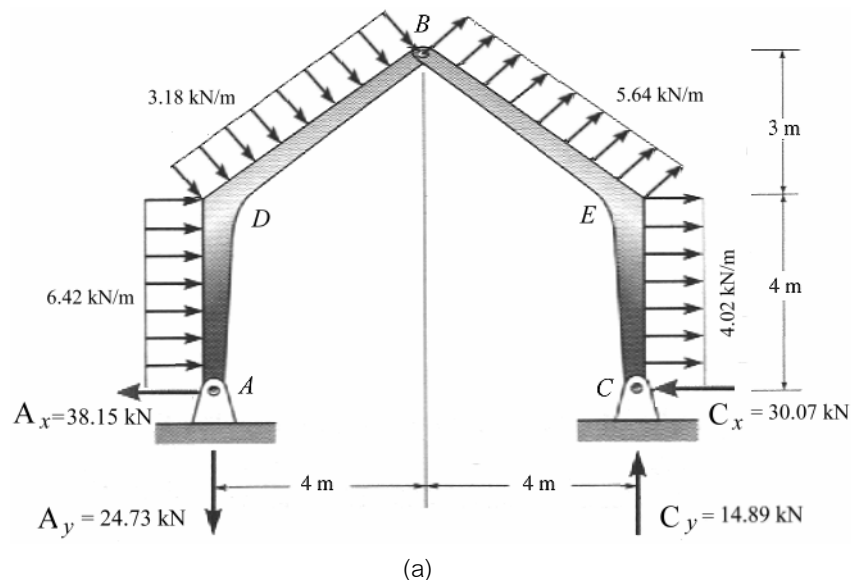
เมื่อ $x_3 = 2 \text{ m}$ แล้ว $M(x_3 = 2 \text{ m}) = -4.0 + 2.0(2) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$ จากนั้น เราจะเขียน moment diagram ของคานในช่วง CD ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 4-11c

4.4 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ของโครงข้อแข็ง (Shear and Moment Diagrams for a Frame)

การเขียน shear diagram และ moment diagram ของโครงข้อแข็งมีลักษณะเช่นเดียวกับการเขียน shear diagram และ moment diagram ของคาน โดยเริ่มต้นเราจะหาค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของโครงข้อแข็ง จากนั้นใช้ method of sections หาสมการของแรงในแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์ที่เกิดขึ้นในโครงข้อแข็ง แล้วเขียน shear diagram และ moment diagram

ตัวอย่างที่ 4-7

จงเขียน shear diagram และ moment diagram ของ Gable frame ดังที่แสดงในรูปที่ 4-12a

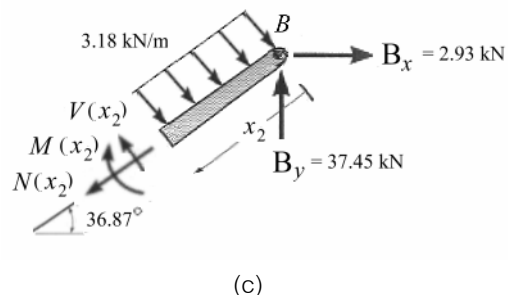
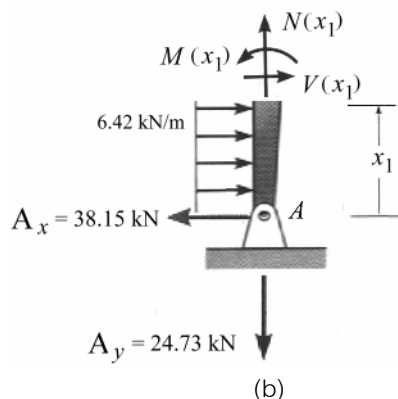


รูปที่ 4-12

เราได้หาแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A และ C ไปแล้วในบทที่ 2 ดังที่แสดงในรูปที่ 4-12a

พิจารณา free body diagram ของส่วน AD ของ Gable frame ดังที่แสดงในรูปที่ 4-12b เราจะหาสมการของแรงในแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์ตัดของส่วนดังกล่าวของโครงข้อแข็งได้ดังต่อไปนี้

$$0 \leq x_1 \leq 4 \text{ m}$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$N(x_1) = 24.73 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$V(x_1) + 6.42 x_1 - 38.15 = 0$$

$$V(x_1) = 38.15 - 6.42 x_1 \text{ kN}$$

$$\downarrow + \sum M_o = 0; \quad M(x_1) + 6.42(x_1) \frac{x_1}{2} - 38.15(x_1) = 0$$

$$M(x_1) = 38.15(x_1) - 3.21 x_1^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

เมื่อ $x_1 = 4.0 \text{ m}$ เราจะได้ว่า

$$N(x_1 = 4 \text{ m}) = 24.73 \text{ kN}$$

$$V(x_1 = 4 \text{ m}) = 38.15 - 6.42(4) = 12.47 \text{ kN}$$

$$M(x_1 = 4 \text{ m}) = 38.15(4) - 3.21(16) = 101.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

พิจารณา free body diagram ของส่วน BD ของ Gable frame ดังที่แสดงในรูปที่ 4-12c

$$0 \leq x_2 \leq 5 \text{ m}$$

$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad -N(x_2) + 2.93 \cos 36.87^\circ + 37.45 \sin 36.87^\circ = 0$$

$$N(x_2) = 24.81 \text{ kN}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0; \quad V(x_2) - 3.18 x_2 + 37.45 \cos 36.87^\circ - 2.93 \sin 36.87^\circ = 0$$

$$V(x_2) = -28.20 + 3.18 x_2 \text{ kN}$$

$$\uparrow + \sum M_o = 0; \quad M(x_2) + 3.18(x_2) \frac{x_2}{2} + 2.93 x_2 \sin 36.87^\circ - 37.45 x_2 \cos 36.87^\circ = 0$$

$$M(x_1) = 28.20(x_2) - 1.59 x_2^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

เมื่อ $x_2 = 5.0 \text{ m}$ เราจะได้ว่า

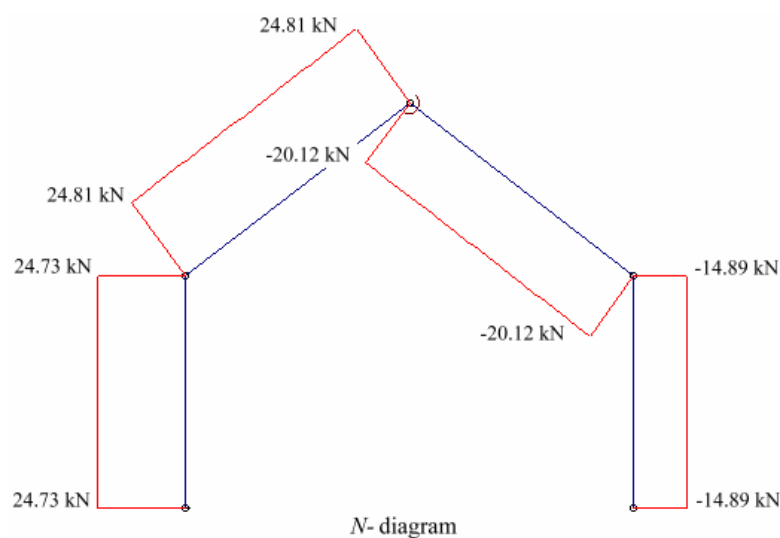
$$N(x_2 = 5 \text{ m}) = 24.81 \text{ kN}$$

$$V(x_2 = 5 \text{ m}) = -28.20 + 3.18(5) = -12.30 \text{ kN}$$

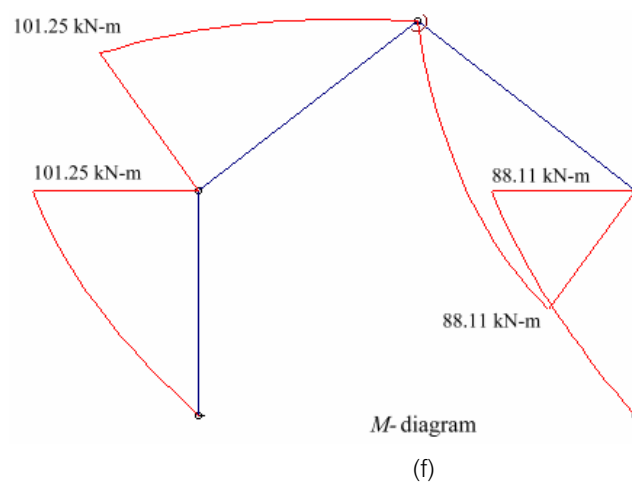
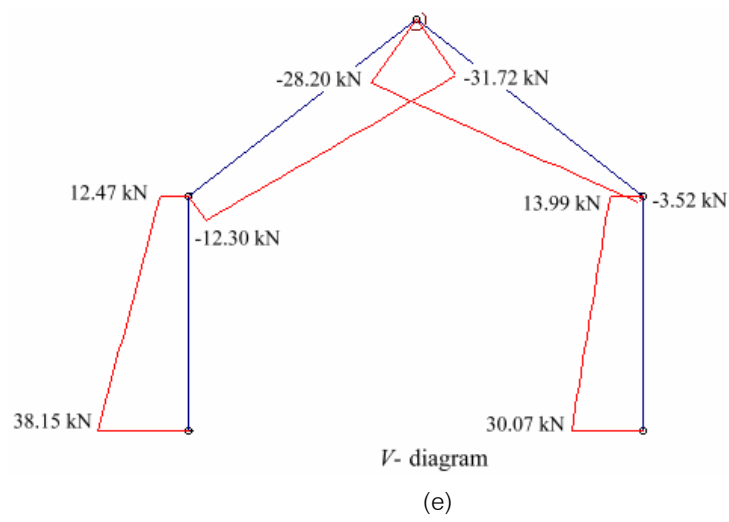
$$M(x_2 = 5 \text{ m}) = 28.20(5) - 1.59(25) = 101.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

เราควรสังเกตด้วยว่า เราจะตรวจสอบความถูกต้องของสมการที่คำนวณได้โดยการใช้สมการความสมดุลของแรงและโมเมนต์ที่จุดต่อ D ยกตัวอย่างเช่น ในกรณีนี้เราจะเห็นว่าค่าโมเมนต์ที่คำนวณได้ $M(x_2 = 5 \text{ m})$ ของส่วน BD มีค่าเท่ากับค่าโมเมนต์ $M(x_1 = 4 \text{ m})$ ของส่วน AD เป็นต้น

ในทำนองเดียวกัน เราจะสามารถหาสมการของแรงในแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดของโครงสร้างในส่วน BEC ได้ และสุดท้ายนำสมการที่ได้มาเขียนแผนภาพของแรงในแนวแกน (normal force diagram) แผนภาพของแรงเฉือน (shear diagram) และแผนภาพของโมเมนต์ดัด (moment diagram) ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 4-12d-f



(d)



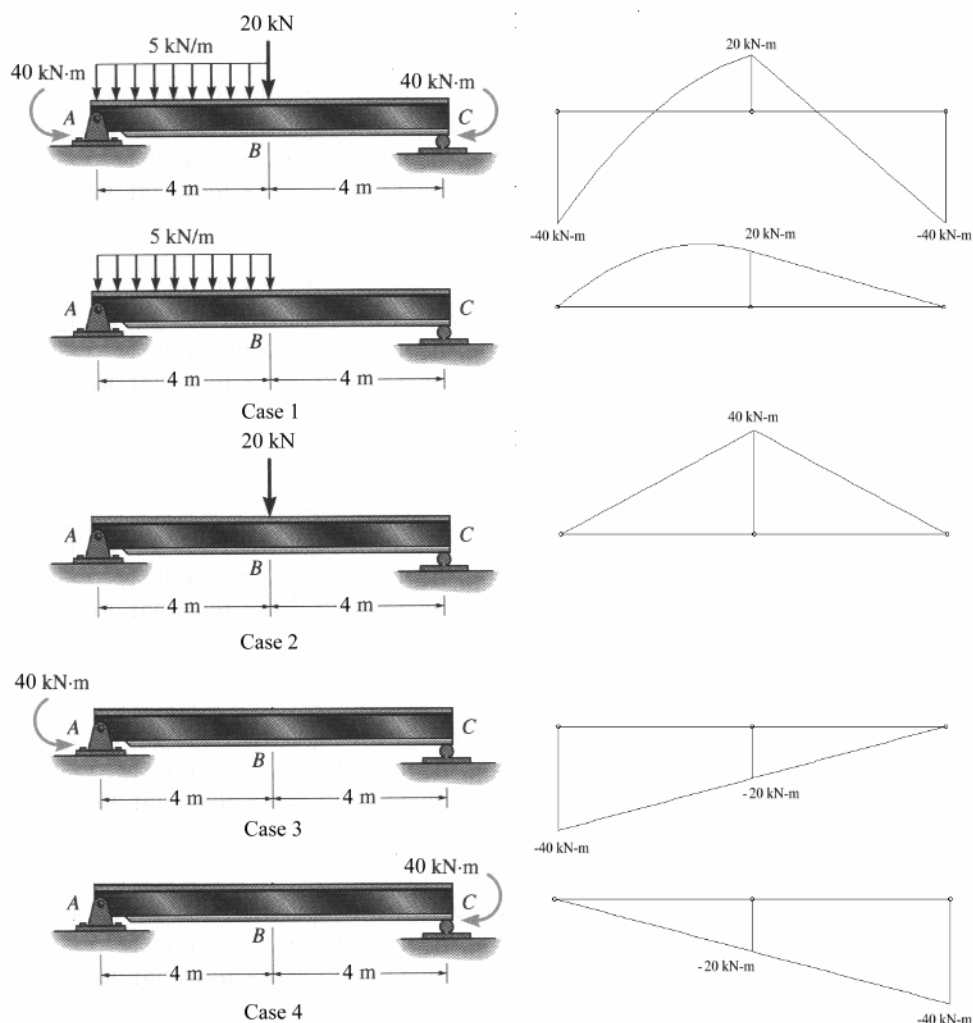
4.5 การเขียนแผนภาพโมเมนต์โดยวิธี superposition (Moment Diagrams by the Method of Superposition)

ในการวิเคราะห์และออกแบบคานหรือโครงข้อแข็ง เรามักจะพบว่า คานหรือโครงข้อแข็งมักจะถูกกระทำโดยแรงและโมเมนต์หลายค่าพร้อมๆ กัน ซึ่งจะทำให้การเขียน moment diagram ของคานหรือโครงข้อแข็งดังกล่าวมีความยุ่งยากมาก ในทางปฏิบัติแล้ว เราจะใช้วิธี superposition ซึ่งมีพื้นฐานมาจากหลักการ superposition มาช่วยเขียน moment diagram โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ทำการแยกโครงสร้างซึ่งถูกกระทำโดยแรงและโมเมนต์หลายค่าพร้อมๆ กัน ออกเป็นโครงสร้างซึ่งถูกกระทำโดยแรงและโมเมนต์แต่ละแรงตามความเหมาะสม
2. ทำการเขียนแผนภาพ moment diagram ของโครงสร้างที่ละกรณี
3. นำแผนภาพ moment diagram ทั้งหมดมารวมกันทางพีชคณิต (Algebra)

ตัวอย่างที่ 4-8

จงเขียน moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 4-13 โดยวิธี superposition



รูปที่ 4-13

จากหลักการ superposition เราจะแบ่งคานดังกล่าวออกได้เป็น 4 กรณี ดังที่แสดงในรูปที่ 4-13

Case 1: แรงกระจายสม่ำเสมอ 5 kN/m ในช่วง AB ของคาน

Case 2: แรงกระทำเป็นจุด 20 kN ที่จุด B

Case 3: โมเมนต์ $40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ที่จุดรองรับ A

Case 4: โมเมนต์ $40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ที่จุดรองรับ C

เมื่อเราทำการวิเคราะห์และเขียน moment diagram ของคานในแต่ละกรณีของแรงกระทำแล้ว เราจะนำ moment diagram ดังกล่าวมารวมกัน ยกตัวอย่างเช่น ค่าของโมเมนต์ลัพธ์ที่จุด B จะมีค่าเท่ากับ

$$20 + 40 - 20 - 20 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

สุดท้าย ผลลัพธ์ที่ได้จะถูกนำมาเขียน moment diagram ของคานเนื่องจากแรงกระทำทั้งหมดกระทำพร้อมๆ กัน ดังที่แสดงในรูป

โดยทั่วไปแล้ว แผนภาพของ moment diagram ของแรงและโมเมนต์ในรูปแบบต่างๆ จะถูกรวบรวมไว้ในมาตรฐานการออกแบบ เช่น Structural Steel Designer's Handbook เป็นต้น

บทที่ 5

Cables และ Arches

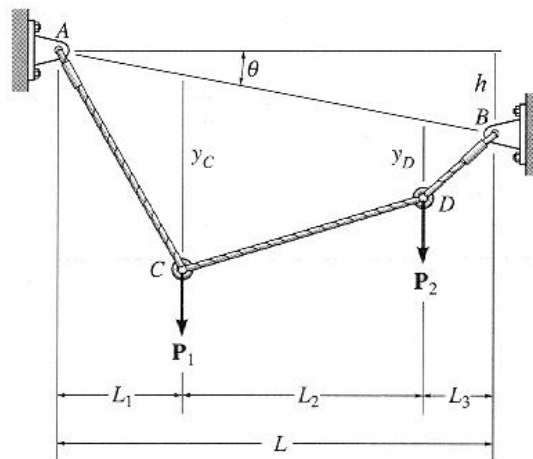
5.1 Cables

ในบทนี้ เราจะศึกษาถึงหลักการพื้นฐานที่จะใช้ในการวิเคราะห์เคเบิล (cable) ซึ่งถูกกระทำโดยแรงเป็นจุด (concentrated load) และแรงแผ่กระจาย (distributed load) ตัวอย่างของเคเบิลที่รองรับแรงเป็นจุดคือ cable ที่ใช้ในการรองรับหลังคาแขวน (suspension roof) และสะพานแขวน (suspension bridges) เป็นต้น และตัวอย่างของเคเบิลที่รองรับแรงแผ่กระจายคือ สายไฟฟ้าซึ่งถูกกระทำโดยน้ำหนักตัวเอง และเคเบิลที่ใช้ในการรองรับสะพานแขวนที่มีระยะห่างระหว่าง hangers ที่ชิดกันมากและสม่ำเสมอ เป็นต้น

เนื่องจากเคเบิลเป็นโครงสร้างที่ดัดไปมาได้ง่าย (flexible) ดังนั้น ในการวิเคราะห์เคเบิล เราจะสมมติให้เคเบิลเป็นโครงสร้างที่ไม่สามารถรับแรงเฉือน (shear force) และโมเมนต์ดัด (bending moment) ได้ ดังนั้น แรงภายในเคเบิลจะเป็นแรงดึง (tension forces) ที่มีทิศทางสัมผัส (tangent) กับเคเบิลที่จุดต่างๆ ตลอดความยาวของเคเบิลเท่านั้น นอกจากนี้ เราจะสมมติให้เคเบิลไม่มีการยืดตัวภายใต้แรงกระทำ ดังนั้น ความยาวของเคเบิลก่อนถูกกระทำโดยแรงและหลังจากที่เอาแรงกระทำออกจะมีค่าเท่ากัน

5.2 เคเบิลที่ถูกกระทำโดยแรงเป็นจุด (Cable Subjected to Concentrated Loads)

ในการวิเคราะห์เคเบิลที่รองรับแรงกระทำเป็นจุด เราจะไม่พิจารณาน้ำหนักของเคเบิล ซึ่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงกระทำเป็นจุด



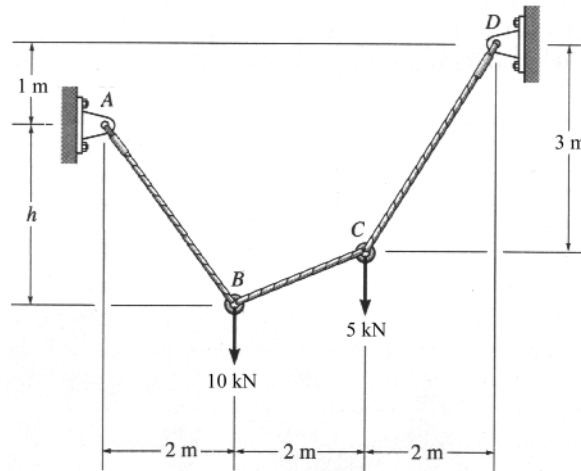
รูปที่ 5-1

การวิเคราะห์เคเบิลที่ถูกกระทำโดยแรงเป็นจุดโดยวิธี joint method

ภายใต้แรงกระทำเป็นจุด เคเบิลจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจากลักษณะตักท้องข้าง (sag) เป็นส่วนของเส้นตรง ดังที่แสดงตามรูปที่ 5-1 และแรงดึงที่เกิดขึ้นภายในส่วนของเคเบิลจะมีค่าคงที่ตลอดส่วนนั้นของเคเบิล จากรูปที่ 5-1 กำหนดให้ θ เป็นมุมที่คอร์ด (chord) ของเคเบิล AB ทำกับแนวนอน และ L เป็นความยาวของ span ของเคเบิล ถ้าเราทราบความยาว L_1 , L_2 , และ L_3 และค่าของแรงกระทำเป็นจุด P_1 และ P_2 แล้ว เราจะมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 9 ตัวแปร ในการวิเคราะห์เคเบิลดังกล่าว ซึ่งประกอบด้วยค่าแรงดึง 3 แรงในส่วน of เคเบิล AC, CD, และ DB, แรงปฏิกิริยา 4 แรงที่จุดรองรับ A และ B, และค่าของระยะตักท้องข้าง y_C และ y_D แต่เนื่องจากเราจะเขียนสมการความสมดุลที่จุด A, B, C, และ D ได้เพียงแค่ 8 สมการเท่านั้น ดังนั้น เราจำเป็นต้องทราบค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงทางเรขาคณิต (geometry) ของเคเบิลอีก 1 ค่า โดยปกติแล้ว เราจะทราบค่าของระยะตักท้องข้าง y_C หรือ y_D ค่าใดค่าหนึ่ง ซึ่งจะทำให้เราหาแรงดึง แรงปฏิกิริยา และระยะตักท้องข้างที่เหลือได้ สุดท้าย เราจะหาความยาวของเคเบิลได้

ตัวอย่างที่ 5-1

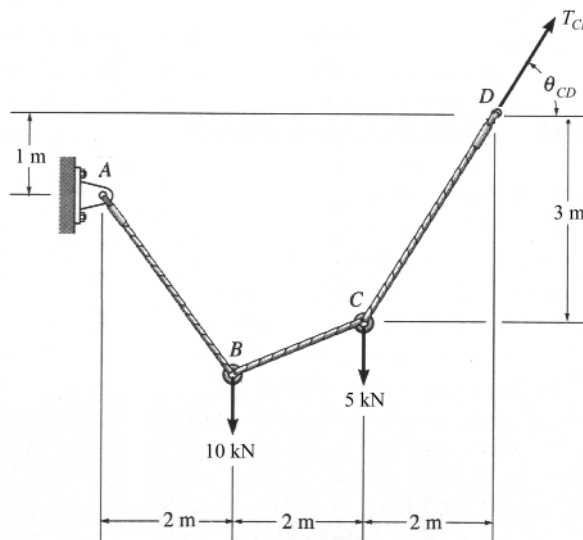
จงทำการวิเคราะห์หาแรงที่เกิดขึ้นใน cable ซึ่งมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 5-2a พร้อมทั้งหาค่าของระยะ h



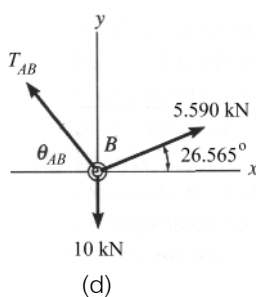
(a)

รูปที่ 5-2

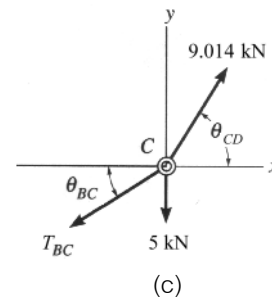
จากรูป ในการวิเคราะห์ cable นี้ เราจะมีตัว unknown ทั้งสิ้น 8 ค่า ประกอบด้วยแรงปฏิกิริยา A_x A_y D_x และ D_y แรงใน cable T_{AB} T_{BC} และ T_{CD} และระยะ h ซึ่งเราจะหาได้โดยใช้สมการความสมดุล $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ ที่จุด A B C และ D รวม 8 สมการ นอกจากนั้นแล้ว เรายังสามารถหาตัว unknown ดังกล่าวได้ด้วยวิธีที่จะแสดงต่อไปนี้



(b)



(d)



(c)

พิจารณา free body diagram ของ cable ดังที่แสดงในรูปที่ 5-2b โดยที่ความยาวของส่วน CD ของ cable มีค่าเท่ากับ $\sqrt{13}$ m ดังนั้น $\sin\theta_{CD} = 3/\sqrt{13}$ และ $\cos\theta_{CD} = 2/\sqrt{13}$

$$+\uparrow \sum M_A = 0; \quad T_{CD}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)6 - T_{CD}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)1 - 10(2) - 5(4) = 0$$

$$T_{CD} = 9.014 \text{ kN}$$

จาก free body diagram ของจุดรองรับ D เราจะได้ว่า

$$D_x = 9.014(2/\sqrt{13}) = 5 \text{ kN}$$

$$D_y = 9.014(3/\sqrt{13}) = 7.5 \text{ kN}$$

พิจารณา free body diagram ของจุด C ดังที่แสดงในรูปที่ 5-2c เพื่อหา T_{BC} และ θ_{BC}

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 9.014(2/\sqrt{13}) - T_{BC} \cos\theta_{BC} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 9.014(3/\sqrt{13}) - T_{BC} \sin\theta_{BC} - 5.0 = 0$$

$$\theta_{BC} = 26.565^\circ$$

$$T_{BC} = 5.590 \text{ kN}$$

พิจารณา free body diagram ของจุด D ดังที่แสดงในรูปที่ 5-2d เพื่อหา T_{AB} และ θ_{AB}

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 5.590(\cos 26.565^\circ) - T_{AB} \cos\theta_{AB} = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 5.590(\sin 26.565^\circ) + T_{AB} \sin\theta_{AB} - 10.0 = 0$$

$$\theta_{AB} = 56.31^\circ$$

$$T_{AB} = 9.014 \text{ kN}$$

เนื่องจาก $T_{AB} = T_{CD}$ ดังนั้น $A_x = D_x$ และ $A_y = D_y$

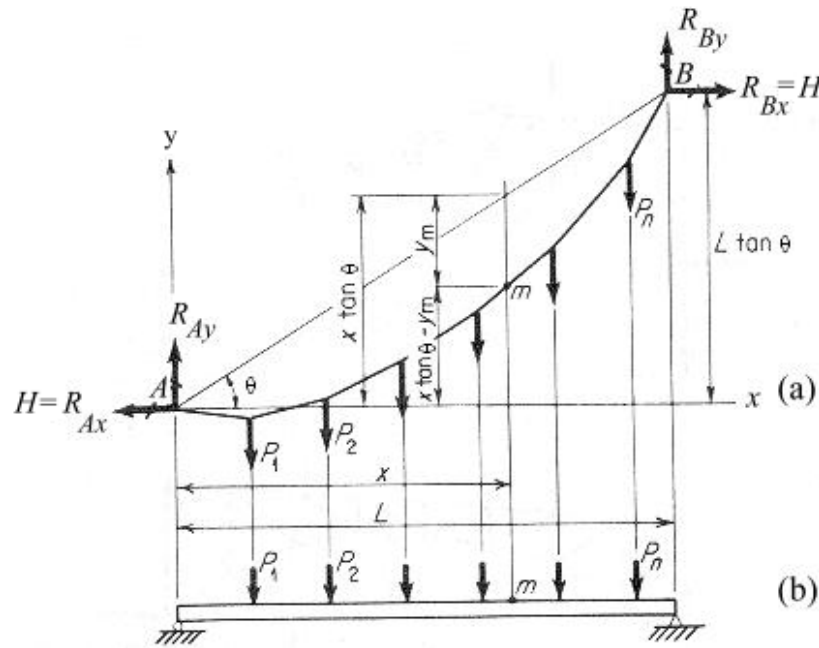
ระยะ h หาได้จากความสัมพันธ์ $\tan\theta_{AB} = h/2$ ดังนั้น

$$h = 3.0 \text{ m}$$

และความยาวของ cable จะมีค่าเท่ากับ

$$L = (2)\frac{2}{\cos 56.31^\circ} + \frac{2}{\cos 26.565^\circ} = 9.447 \text{ m}$$

การวิเคราะห์เคเบิลที่ถูกกระทำโดยแรงเป็นจุดโดยใช้ทฤษฎีเคเบิล (Cable Theorem)



รูปที่ 5-3

พิจารณาเคเบิล ซึ่งถูกกระทำโดยชุดของแรงกระทำเป็นจุด $P_1, P_2, \dots, P_n$ ดังที่แสดงในรูป 5-3 เนื่องจากแรงกระทำเป็นแรงในแนวตั้ง ดังนั้น แรงดึงในแนวนอนในเคเบิลจะมีค่าคงที่ตลอดความยาวของเคเบิล และจะมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยาในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ กำหนดให้

H = แรงปฏิกิริยาในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A และ B

$\sum M_B$ = ผลรวมของโมเมนต์เนื่องจากชุดของแรงกระทำเป็นจุด $P_1, P_2, \dots, P_n$

$\sum M_m$ = ผลรวมของโมเมนต์รอบจุด m เนื่องจากแรงกระทำเป็นจุด $P_1, P_2, \dots$ ซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายมือของจุด m

เมื่อทำการรวมโมเมนต์ของแรงกระทำเป็นจุด $P_1, P_2, \dots, P_n$ รอบจุด B เราจะได้ว่า

$$H(L \tan \theta) + R_{Ay}L - \sum M_B = 0 \quad (a)$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_{Ay} จะมีค่าเท่ากับ $\frac{\sum M_B}{L} - H \tan \theta$ กำหนดให้จุด m เป็นจุดใดๆ บนเคเบิลที่ระยะ x จากจุดรองรับ A จากนั้น ทำการรวมโมเมนต์ของแรงกระทำเป็นจุด $P_1, P_2, \dots$ ซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายมือของจุด m รอบจุด m เราจะได้ว่า

$$H(x \tan \theta - y_m) + R_{Ay}x - \sum M_m = 0 \quad (b)$$

และเมื่อแทนค่า R_{Ay} ลงในสมการ (b) เราจะได้

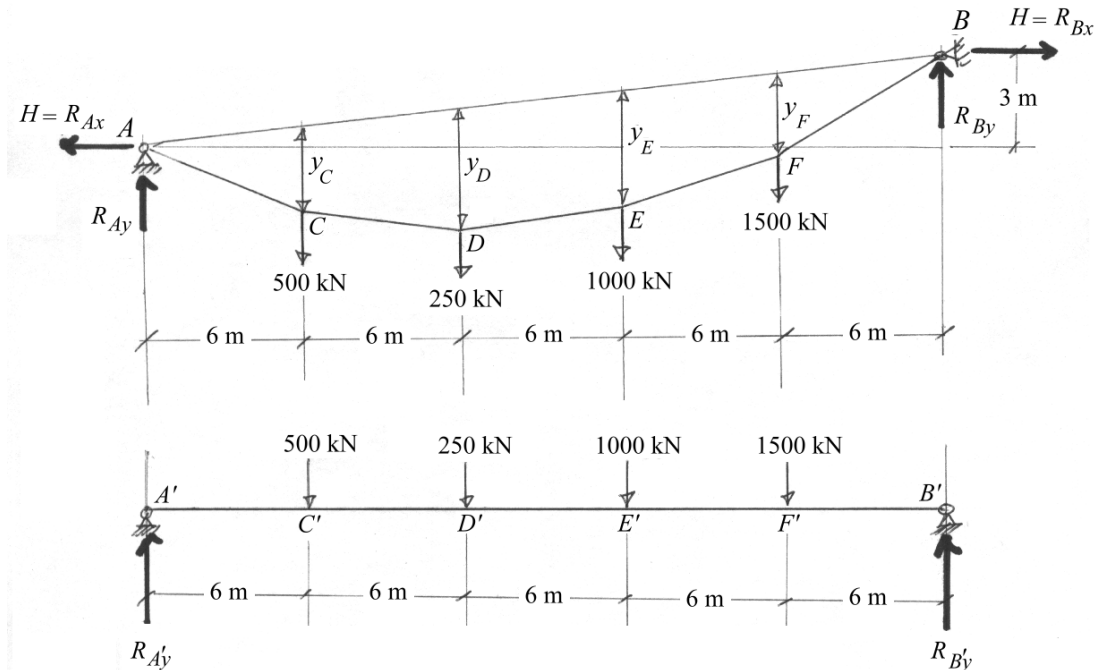
$$H(y_m) = \frac{x}{L} \sum M_B - \sum M_m \quad (c)$$

จากรูป เราจะเห็นได้ว่า y_m เป็นระยะที่วัดจากจุด m บนเคเบิลไปยังคอร์ด AB และจากสมการ เราจะเห็นได้ว่า เทอมทางด้านซ้ายมือมีค่าเท่ากับโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นที่จุด m บนคานที่แสดงในรูปที่ 5-3b ซึ่งเป็นคานช่วงเดียวแบบรองรับธรรมดา (simply supported beam) ที่มีความยาวเท่ากับ ความยาวของ span ของเคเบิล และจุด m บนคานมีระยะ x จากจุดรองรับที่อยู่ทางด้านซ้ายมือ เมื่อเราทราบค่าของแรงปฏิกิริยาในแนวนอน H แล้ว เราจะหาแรงดึงในเคเบิล และ แรงปฏิกิริยาที่เหลือได้โดยใช้สมการความสมดุล

ทฤษฎีเคเบิลนี้เหมาะที่จะใช้ในการวิเคราะห์ cable ที่ถูกกระทำโดยแรงกระทำเป็นจุดจำนวนมาก
ตัวอย่างที่ 5-2

จงทำการวิเคราะห์ cable ซึ่งถูกกระทำโดยแรงต่างๆ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-4 กำหนดให้ $y_{\max} = 1.5 \text{ m}$ จงหา

1. แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A และ B
2. ระยะ sag y_C , y_D , y_E , และ y_F
3. แรงที่เกิดขึ้นในส่วนต่างๆ ของ cable



(a)

รูปที่ 5-4

แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A และ B

จากทฤษฎี cable เราจะ หาแรงปฏิกิริยา R_{Ay} และ R_{By} ที่จุดรองรับของ cable ได้โดยใช้สมการความสมดุลบนคาน simple beam ดังที่แสดงในรูปที่ 5-4a โดยที่ $R_{Ay} = R_{A'y}$ และ $R_{By} = R_{B'y}$

$$+\uparrow \sum M_{A'} = 0; \quad R_{B'y}(30) = 500(6) + 250(12) + 1000(18) + 1500(24)$$

$$R_{B'y} = 2000 \text{ kN}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad R_{A'y} = 500 + 250 + 1000 + 1500 - 2000 = 1250 \text{ kN}$$

จากนั้น เราจะหาแรงปฏิกิริยา $R_{Ax} = R_{Bx} = H$ ที่จุดรองรับของ cable ได้จากสมการของทฤษฎี cable

$$H(y_m) = \frac{x}{L} \sum M_B - \sum M_m$$

เนื่องจากแรงปฏิกิริยาในแนวนอน H มีค่าคงที่ตลอดความยาวของ cable ดังนั้น $y_{\max}$ จะเกิดขึ้นที่จุดที่ค่าโมเมนต์บนคาน simple beam มีค่าสูงสุด โดยใช้สมการความสมดุลของโมเมนต์บน free body diagram ของส่วนของคาน $A'C'$, $A'D'$, $A'E'$ และ $A'F'$ ที่จุด C' , D' , E' และ F' ตามลำดับ เราจะหาค่าโมเมนต์ที่จุดดังกล่าวได้เป็น

$$M_{C'} = 1250(6) = 7500 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{D'} = 1250(12) - 500(6) = 12000 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{E'} = 1250(18) - 500(12) - 250(6) = 15000 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{F'} = 2000(6) = 12000 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

ดังนั้น $M_{\max}$ เกิดขึ้นที่จุด E' และจากสมการของทฤษฎี cable

$$H(1.5) = 15000$$

$$H = 10000 \text{ kN}$$

ระยะ sag y_C , y_D , y_E , และ y_F

ค่าระยะ sag ที่จุดต่างๆ จะหาได้จากสมการของทฤษฎี cable ในรูป

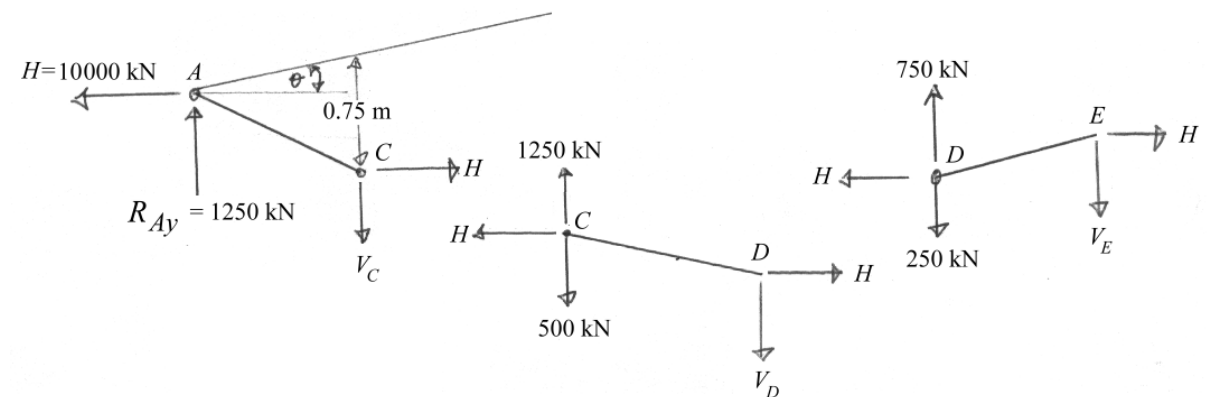
$$y_C = \frac{M_{C'}}{H} = \frac{7500}{10000} = 0.75 \text{ m}$$

$$y_D = \frac{M_{D'}}{H} = \frac{12000}{10000} = 1.2 \text{ m}$$

$$y_E = y_{\max} = 1.5 \text{ m}$$

$$y_{F'} = \frac{M_{F'}}{H} = \frac{12000}{10000} = 1.2 \text{ m}$$

แรงที่เกิดขึ้นในส่วนต่างๆ ของ cable

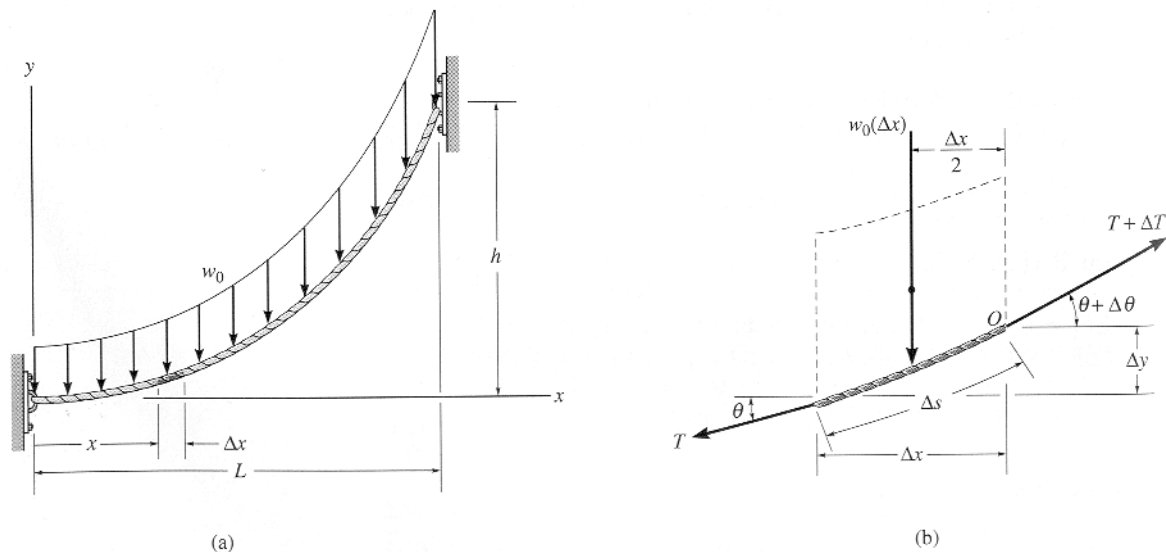


(b)

จาก free body diagram ของส่วนต่างๆ ของ cable ดังที่แสดงในรูปที่ 5-4b เราจะหา แรงที่เกิดขึ้นในส่วนนั้นๆ ของ cable ได้ดังที่แสดงในตาราง

ส่วนของ cable	องค์ประกอบของแรงในแนว นอน H_i (kN)	องค์ประกอบของแรงในแนวตั้ง V_i (kN)	แรงลัพธ์ T_i (kN)
AC	10000	1250	$\sqrt{10000^2 + 1250^2}$ = 10077.8
CD	10000	1250-500 = 750	10028.1
DE	10000	750-250 = 500	10012.5
EF	10000	500-1000 = -500	10012.5
FB	10000	-500-1500 = -2000	10198.0

5.3 Cable ที่ถูกกระทำโดยแรงกระจายสม่ำเสมอ (Cable Subjected to Uniform Distributed Loads)



รูปที่ 5-5

ในการวิเคราะห์เคเบิลที่ถูกกระทำโดยแรงที่มีทิศทางลงในแนวดิ่งและมีการกระจายสม่ำเสมอในแนวนอนนั้น เรา จะเริ่มจากการหารูปร่างของเคเบิลภายใต้การกระทำของแรง พิจารณาเคเบิล ตามรูปที่ 5-5a ซึ่งมีจุดเริ่มต้น (origin) ของ แกนอ้างอิง $x-y$ อยู่ที่ปลายด้านต่ำสุดของเคเบิล และให้ค่าความชันของเคเบิลที่จุดนี้มีค่าเท่ากับศูนย์ การที่เรากำหนด ให้จุดเริ่มต้นของแกนอ้างอิง $x-y$ ให้มีลักษณะเช่นนี้นั้น เพื่อประโยชน์ในการวิเคราะห์ cable ได้ง่ายขึ้น ซึ่งจะเห็นได้ใน ตัวอย่างภายหลัง

รูปที่ 5-5b เป็นแผนภาพ free body diagram ของชิ้นส่วนของเคเบิลที่ระยะ x จากจุดเริ่มต้น ซึ่งมีความยาว Δs ที่น้อยมาก เนื่องจากค่าของแรงดิ่งที่เกิดขึ้นเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องทั้งขนาดและทิศทางตามความยาวของเคเบิล ดังนั้น เราจะให้ ΔT แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของแรงดิ่งบนแผนภาพ free body diagram ตามรูป แรงลัพธ์ของแรง กระจายจะมีค่าเท่ากับ $w_0 \Delta x$ กระทำที่ระยะ $\Delta x/2$ จากจุด O โดยการใช้สมการความสมดุล เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_x &= 0; & -T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta \theta) &= 0 \\ +\uparrow \sum F_y &= 0; & -T \sin \theta - w_0 \Delta x + (T + \Delta T) \sin(\theta + \Delta \theta) &= 0 \\ \curvearrowright \sum M_o &= 0; & w_0 \Delta x (\Delta x/2) - T \cos \theta (\Delta y) + T \sin \theta (\Delta x) &= 0 \end{aligned}$$

เมื่อเราหารสมการทั้งสามนี้ด้วย Δx และให้ limit $\Delta x \rightarrow 0$ แล้ว $\Delta y \rightarrow 0$ และ $\Delta \theta \rightarrow 0$ และเนื่องจาก $\Delta \theta$ มี ค่าน้อยมาก จากวิชา trigonometry

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \text{ดังนั้น} \quad \cos(\theta + \Delta \theta) \cong \cos \theta$$

$$\text{และ} \quad \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad \text{ดังนั้น} \quad \sin(\theta + \Delta \theta) \cong \sin \theta$$

เราจะได้ว่า

$$\frac{d(T \cos \theta)}{dx} = 0 \quad (5-1)$$

$$\frac{d(T \sin \theta)}{dx} = w_0 \quad (5-2)$$

$$\text{และ} \quad \frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (5-3)$$

ทำการอินทิเกรตสมการที่ 5-1 และใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ที่ว่า ที่ $x = 0$, $\theta = 0^\circ$ และ $T = F_H$ ดังนั้น

$$T \cos \theta = F_H \quad (5-4)$$

สมการที่ 5-4 หมายความว่า องค์ประกอบของแรงในแนวแกนนอนที่จุดใดๆ บนเคเบิลมีค่าคงที่ จากนั้น ทำการอินทิเกรตสมการที่ 5-2 และใช้ boundary condition ที่ว่า ที่ $x = 0$, $\theta = 0^\circ$ และ $T \sin \theta = 0$ ดังนั้น

$$T \sin \theta = w_o x \quad (5-5)$$

หารสมการที่ 5-5 ด้วยสมการที่ 5-4 และแทนค่าลงในสมการที่ 5-3 เราจะได้ ค่าความชันที่จุดใดๆ บนเคเบิลมีค่าเท่ากับ

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_o x}{F_H} \quad (5-6)$$

ทำการอินทิเกรตสมการที่ 5-6 และใช้ boundary condition ที่ว่า ที่ $x = 0$, $y = 0$ เราจะได้ความสัมพันธ์ของระยะ y กับระยะ x ในรูป

$$y = \frac{w_o}{2F_H} x^2 \quad (5-7)$$

สมการนี้เป็นสมการพาราโบลา (parabola) ซึ่งแสดงว่าเคเบิลภายใต้แรงกระจายสม่ำเสมอจะมีรูปร่างเป็นพาราโบลา และค่าคงที่ของแรงในแนวนอน F_H จะหาได้โดยใช้ boundary condition ที่ว่า ที่ $x = L$, $y = h$ ดังนั้น

$$F_H = \frac{w_o L^2}{2h} \quad (5-8)$$

สุดท้าย แทนค่า F_H ในสมการที่ 5-8 ลงในสมการที่ 5-7 เราจะได้

$$y = \frac{h}{L^2} x^2 \quad (5-9)$$

จากสมการที่ 5-4 เราจะได้ว่า $T = F_H / \cos \theta$ ดังนั้น แรงดึงจะมีค่ามากที่สุด เมื่อ $\cos \theta$ มีค่าน้อยที่สุด หรือเมื่อ θ มีค่าเข้าใกล้ 90° ในกรณีนี้จะเกิดขึ้นที่ $x = L$ ดังนั้น จากสมการที่ 5-4 และ 5-5 เราจะได้

$$T_{\max} = \sqrt{F_H^2 + (w_o L)^2} \quad (5-10)$$

และเมื่อแทนค่า F_H ในสมการที่ 5-8 ลงในสมการที่ 5-10 เราจะได้

$$T_{\max} = w_o L \sqrt{1 + (L / 2h)^2} \quad (5-11)$$

เราควรที่จะทราบด้วยว่า เมื่อเคเบิลถูกกระทำโดยน้ำหนักของตัวเอง ซึ่งมีการกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวของเคเบิล (ซึ่งแตกต่างจากกรณีที่ผ่านมา) เคเบิลจะมีรูปร่างแบบ catenary (รูปทรงที่อยู่ระหว่างรูปทรงพาราโบลาและครึ่งวงกลม) อย่างไรก็ตาม เมื่ออัตราส่วนของระยะตกท้องข้างต่อความยาวของ span มีค่าน้อยแล้ว รูปทรงแบบ catenary จะมีลักษณะที่คล้ายกับรูปทรงพาราโบลา

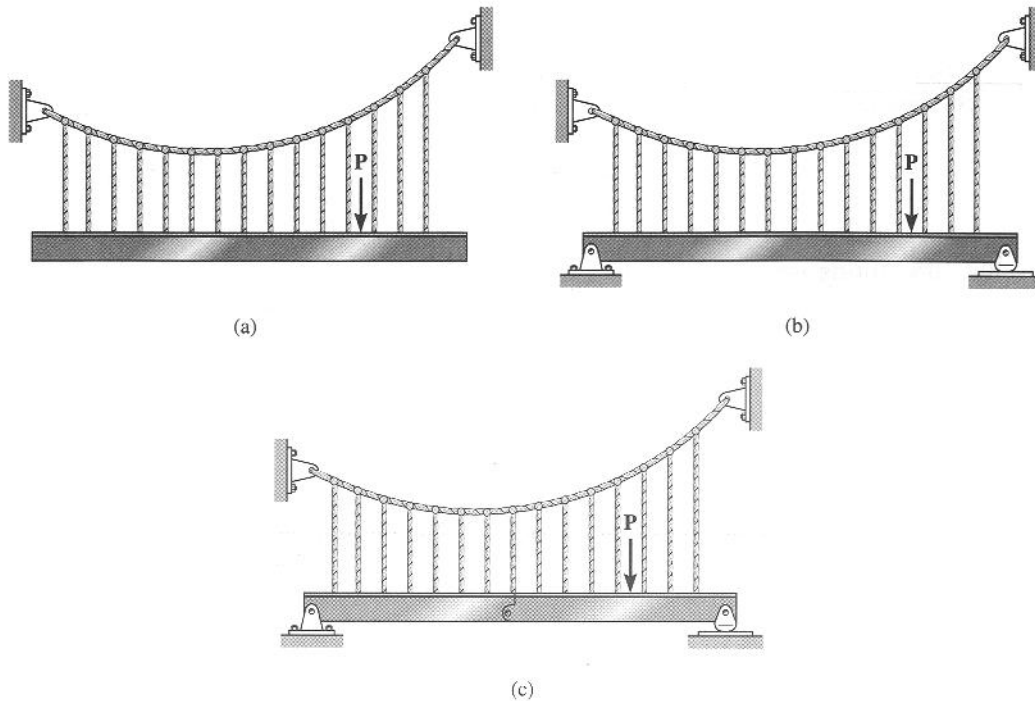
พิจารณาสະพานแขวน ตามรูปที่ 5-6a เราจะได้เห็นว่า คานขนาดใหญ่ (girder) ของสะพานจะต้องมีความแข็งแรงมากๆ เพื่อที่แรงที่เคลื่อนที่ได้ P (moving loads) จะได้กระจายลงบน hangers ทุกอันอย่างเท่าเทียมกัน เมื่อแรง P นี้เคลื่อนที่ไปตามตำแหน่งต่างๆ บน girder ในกรณีที่ girder ถูกรองรับโดย simple support ตามรูปที่ 5-6b แล้ว สะพานแขวนนี้จะเป็นโครงสร้าง statically indeterminate ที่มีดีกรีของอินดีเทอร์มิเนตเท่ากับ 1 (statically indeterminate to the first degree) แต่ถ้า girder ดังกล่าวมีหมุด (internal hinge) อยู่ระหว่างที่รองรับ ดังที่แสดงตามรูปที่ 5-6c แล้ว สะพานแขวนดังกล่าวจะเป็นโครงสร้าง statically determinate

เราสามารถหาความสัมพันธ์ของแรงที่เคลื่อนที่ได้ P กับแรงแผ่กระจายสม่ำเสมอ w ที่เกิดขึ้นบนคานของสะพานแขวนในรูปที่ 5-6c ได้โดยใช้สมการความสมดุล พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 5-7 เมื่อเราใช้สมการของโมเมนต์

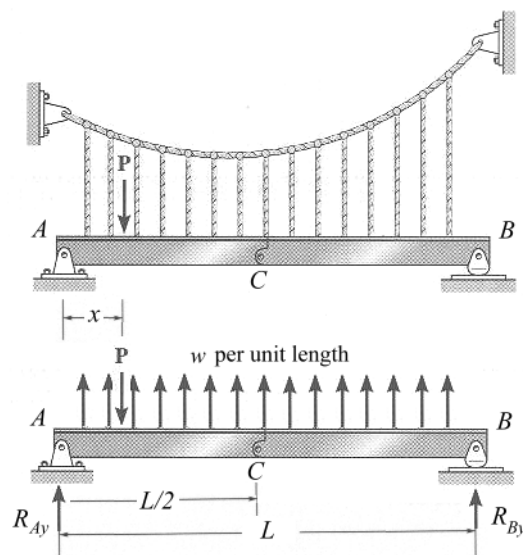
รอบจุด C ของส่วน BC เราจะได้ $R_{By} = -wL/4$ จากนั้น ใช้สมมูลของแรงในแนวดิ่ง เราจะได้ $R_{Ay} = P - 3wL/4$ และเมื่อเราใช้สมมูลของโมเมนต์รอบจุด B เราจะได้ว่า

$$w = \frac{4Px}{L^2} \quad 0 \leq x \leq L/2$$

จากนั้น เราจะทำการวิเคราะห์เคเบิลของสะพานแขวนได้โดยใช้วิธีการที่ได้ศึกษาไปแล้ว



รูปที่ 5-6



รูปที่ 5-7

ตัวอย่างที่ 5-3

กำหนดให้สะพานแขวนถูกกระทำโดยแรง P ดังที่แสดงในรูปที่ 5-8a และให้หน่วยแรงดิ่งที่ยอมให้ของ cable $T_{allow} = 500 \text{ kN}$ จงหา

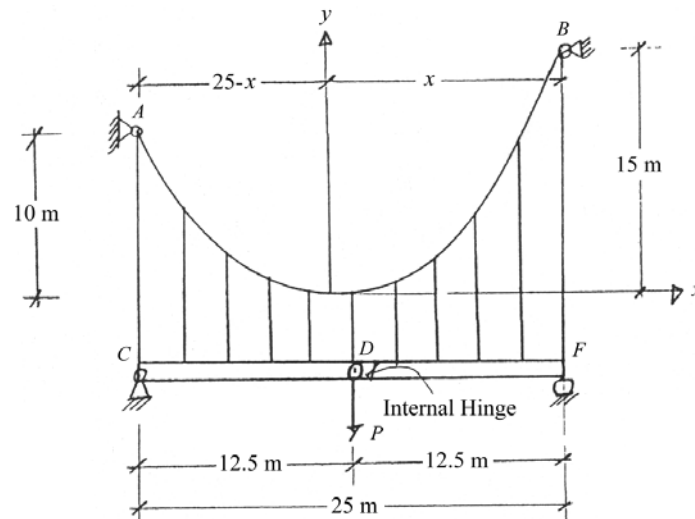
1. ค่าสูงสุดของแรง $P (P_{max})$ ที่กระทำอยู่บน girder ของสะพานแขวน สมมติให้ girder มีความแข็งแรงมาก และสามารถรองรับแรง P_{max} ได้

2. ค่าสูงสุดของมุมที่ cable กระทำกับแนวนอน $\theta_{\max}$

หา $P_{\max}$

หน่วยแรงกระจายสม่ำเสมอที่กระทำต่อ cable เนื่องจากแรง P กระทำต่อ girder ของสะพานแขวน จะหาได้จาก

$$w = \frac{4P(12.5)}{25^2} = \frac{P}{12.5} \text{ kN/m}$$



(a)

รูปที่ 5-8

กำหนดให้ของจุดเริ่มต้นของแกนอ้างอิง $x - y$ อยู่ที่ยอดต่ำสุดของ cable ที่มี slope เป็นศูนย์ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-8a ซึ่งเราจะได้สมการของ cable อยู่ในรูป $y = \frac{w_o}{2F_H} x^2$ ดังนั้น

$$y = \frac{P}{25F_H} x^2$$

โดยการแทนค่า coordinate ที่จุดรองรับ A และ B ของ cable ลงในสมการดังกล่าว เราจะหาระยะ x ของจุดเริ่มต้นของแกนอ้างอิง $x - y$ ได้

ที่จุดรองรับ A;
$$10 = \frac{P}{25F_H} (25 - x)^2$$

ที่จุดรองรับ B;
$$15 = \frac{P}{25F_H} x^2$$

หลังจากแก้สมการแล้ว เราจะได้
$$x = 13.76 \text{ m}$$

แทนค่า coordinate ที่จุดรองรับ B (13.76, 15) ลงในสมการของ cable แล้ว เราจะหาค่าของแรง F_H ได้ โดยที่

$$F_H = \frac{P}{25} \frac{x^2}{y} = \frac{P}{25} \frac{13.76^2}{15} = 0.505P$$

เนื่องจาก $T_{\max}$ จะเกิดขึ้นที่จุดรองรับ B เนื่องจากที่จุดนี้มีค่ามุม $\theta_{\max}$ ดังนั้น จากสมการ

$$T_{\max} = \sqrt{F_H^2 + wx^2} \text{ เราจะได้ว่า}$$

$$500^2 = (0.505P_{\max})^2 + \left(\frac{13.76P_{\max}}{12.5}\right)^2$$

$$P_{\max} = 412.8 \text{ kN}$$

ค่าสูงสุดของมุมที่ cable กระทำกับแนวนอน $\theta_{\max}$

มุม $\theta_{\max}$ จะหาได้จากสมการ $T_{\max} \cos \theta_{\max} = F_H$ ดังนั้น

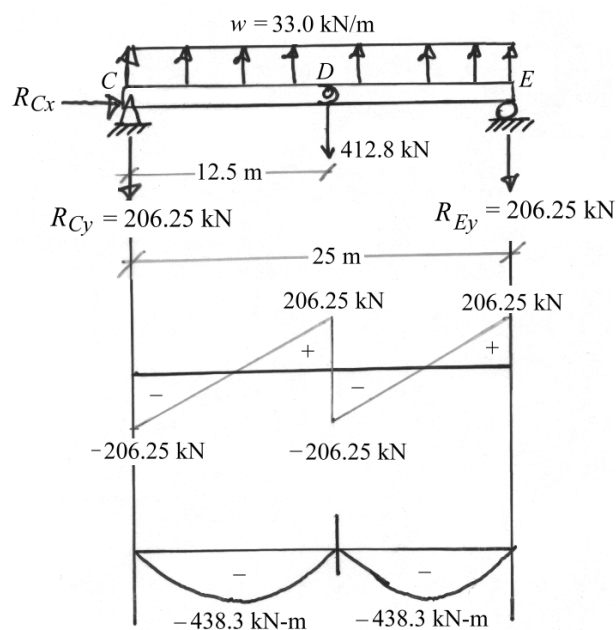
$$\theta_{\max} = \cos^{-1} \left(\frac{F_H}{T_{\max}} \right) = \cos^{-1} \frac{0.505(412.8)}{500} = 65.4^\circ$$

ถ้ากำหนดให้ ระยะระหว่าง hanger มีค่าเท่ากับ 1.25 m แล้ว เราจะหาแรงที่เกิดขึ้นใน hanger ได้จากผลคูณของแรง w กับระยะระหว่าง hanger

$$w = \frac{P}{12.5} = \frac{412.8}{12.5} = 33.0 \text{ kN/m}$$

$$F_h = 33.0(1.25) = 41.25 \text{ kN}$$

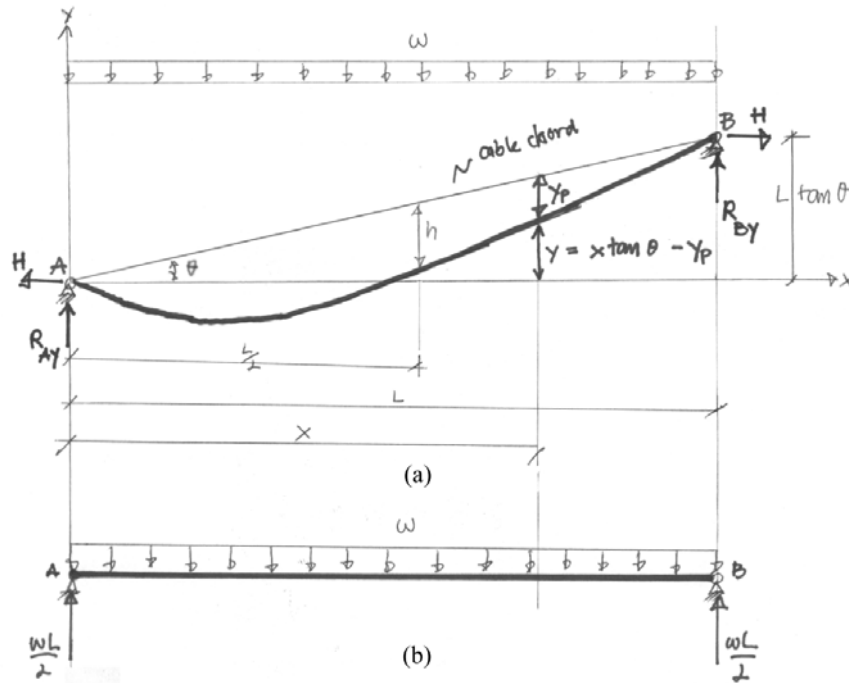
สุดท้าย เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของ girder ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 5-8b



(b)

การวิเคราะห์เคเบิลที่ถูกกระทำโดยแรงกระจายสม่ำเสมอในแนวนอนโดยใช้ทฤษฎีเคเบิล หรือ Cable Theorem

พิจารณาเคเบิล ดังที่แสดงในรูปที่ 5-9a ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกระจายสม่ำเสมอในแนวนอน กำหนดให้จุดเริ่มต้นของแกนอ้างอิง $x-y$ อยู่ที่จุดรองรับ A เนื่องจากเคเบิลถูกตัดได้ง่ายและแรงกระทำเป็นแรงในแนวตั้งเท่านั้น ดังนั้นจากสมการความสมดุลในแนวนอน เราจะได้ว่า แรงดึงในแนวนอนในเคเบิล H จะมีค่าคงที่ตลอดความยาวของเคเบิล และจะมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยาในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ



รูปที่ 5-9

เมื่อทำการรวมโมเมนต์ของแรงกระจายสม่ำเสมอ w รอบจุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 5-9a เราจะได้ว่า

$$H(L \tan \theta) + R_{Ay}L - \frac{wL^2}{2} = 0 \quad (d)$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_{Ay} จะมีค่าเท่ากับ $\frac{wL}{2} - H \tan \theta$ กำหนดให้จุด p เป็นจุดใดๆ บนเคเบิลที่ระยะ x จากจุดรองรับ A จากนั้น ทำการรวมโมเมนต์ของส่วนของเคเบิล ซึ่งอยู่ทางด้านซ้ายมือของจุด p รอบจุด p เราจะได้

$$H(x \tan \theta - y_p) + R_{Ay}x - \frac{wx^2}{2} = 0 \quad (e)$$

และเมื่อแทนค่า R_{Ay} ลงในสมการ (e) เราจะได้

$$Hy_p = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} \quad (f)$$

โดยที่ y_p เป็นระยะที่วัดจากเคเบิลถึงคอर्डของเคเบิลหรือระยะตกท้องช้าง (sag) ดังที่แสดงในรูปที่ 5-9a จากสมการ (f) เราจะเห็นได้ว่า เทอมทางด้านซ้ายมือมีค่าเท่ากับโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นที่จุด p บนคาน simply supported beam ดังที่แสดงในรูปที่ 5-9b ซึ่งมีความยาวเท่ากับความยาวของ span ของเคเบิลและถูกกระทำโดยแรงแผ่กระจายสม่ำเสมอในแนวนอน w

เมื่อเราทราบค่า y_p ที่ระยะ x ใดๆ เช่น $y_p = h$ ที่ระยะ $x = L/2$ ดังที่แสดงในรูปที่ 5-9a เป็นต้น แล้ว เราจะหาค่าของแรงปฏิกิริยาในแนวนอน H ได้จากสมการ (f)

$$H(h) = \frac{wL^2}{4} - \frac{wL^2}{8} \Rightarrow H = \frac{wL^2}{8h} \quad (g)$$

จากนั้น แทนค่า H กลับไปที่สมการ (f) เราจะได้

$$y_p = \frac{4hx}{L^2}(L-x) \quad (h)$$

และเนื่องจาก $y = x \tan \theta - y_p$ ดังนั้น สมการรูปร่างของเคเบิลภายใต้แรงแผ่กระจายสม่ำเสมอในแนวนอน w ในกรณีนี้คือ

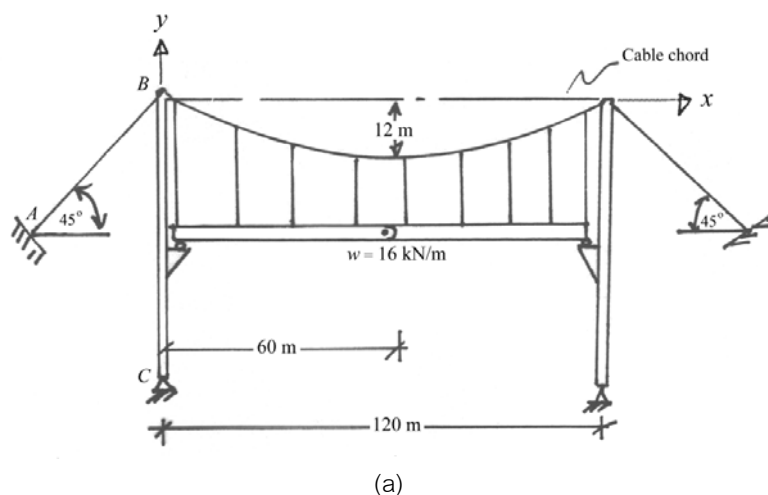
$$y = x \tan \theta - \frac{4hx}{L^2}(L-x) \quad (i)$$

สุดท้าย เราสามารถที่จะหาแรงดึงที่เกิดขึ้นในเคเบิลที่ระยะ x ใดๆ ได้ โดยใช้สมการความสมดุล

ตัวอย่างที่ 5-4

กำหนดให้สะพานแขวนมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 5-10a จงคำนวณหา

1. แรงดึงสูงสุดใน cable
2. แรงดึงที่เกิดขึ้นใน anchorage ของ cable
3. ความยาวของ cable



รูปที่ 5-10

แรงดึงสูงสุดใน cable

ในการใช้ทฤษฎี cable ในการวิเคราะห์นี้ เราจะให้แกนอ้างอิง $x-y$ มีจุดเริ่มต้นที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 5-10a จากสมการของ cable โดยที่ $y_p = 12$ m ที่ระยะ $x = L/2$ ดังนั้น แรงปฏิกิริยาในแนวนอน H จะหาได้จาก

$$H = \frac{wL^2}{8h} = \frac{16(120)^2}{8(12)} = 2400 \text{ kN}$$

จากสมการรูปร่างของเคเบิลภายใต้แรงแผ่กระจายสม่ำเสมอในแนวนอน $y = x \tan \theta - \frac{4hx}{L^2}(L-x)$ เมื่อ cable chord ทำมุมกับแกน x เท่ากับ 0° ดังนั้น สมการรูปร่างของเคเบิล

$$y = \frac{1}{300}(x^2 - 120x)$$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{x - 60}{150}$$

จากรูปร่างของ cable ค่า $\theta_{\max}$ ของ cable เกิดขึ้นที่ $x = 0$ และ $x = 120$ m ดังนั้น ที่ $x = 120$ m เราจะได้

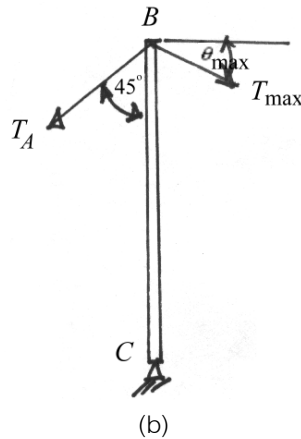
$$\theta_{\max} = 21.8^\circ$$

และ

$$T_{\max} = \frac{H}{\cos \theta_{\max}} = \frac{2400}{\cos 21.8^\circ} = 2585 \text{ kN}$$

แรงดึงที่เกิดขึ้นใน anchorage ของ cable

จาก free body diagram ของโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 5-10b



$$\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$T_{\max} \cos \theta_{\max} - T_A \sin 45^\circ = 0$$

$$T_A = \frac{H}{\sin 45^\circ} = 3394 \text{ kN}$$

และแรงกดอัดที่เกิดขึ้นในเสา BC เนื่องจากแรงใน cable มีค่าเท่ากับ

$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$F_{BC} - 3394 \cos 45^\circ - 2585 \sin 21.8^\circ = 3360 \text{ kN}$$

ความยาวของ cable

เราทราบมาแล้วว่า $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx} \right]^2}$ ดังนั้น ความยาวของ cable

$$s = \int_0^L \sqrt{1 + \left[\frac{x-60}{150} \right]^2} dx$$

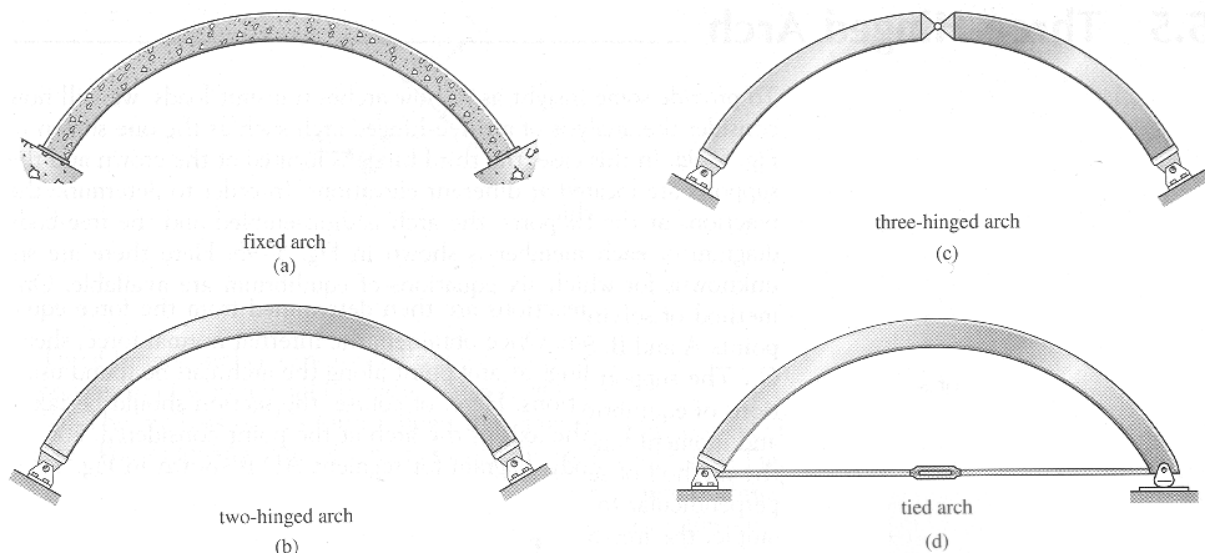
โดยใช้ 2 เทอมแรกของ Binomial expansion ของเทอม $\sqrt{1 + \left[\frac{x}{150} - \frac{2}{5} \right]^2}$ เราจะได้ว่า

$$s = \int_0^{120} \left[1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} (1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{150} - \frac{2}{5} \right)^2 \right] dx$$

$$s = 120 + \int_0^{120} \left[\frac{x}{150} - \frac{2}{5} \right]^2 dx = 120 + \frac{32}{5} = \frac{632}{5} \text{ m}$$

5.4 โค้งตั้ง (Arch)

เนื่องจาก arch เป็นโครงสร้างที่กลับด้านกับเคเบิล ดังนั้น arch จึงเป็นโครงสร้างที่รับแรงกระทำภายนอกโดยการพัฒนาแรงอัด (compressive forces) ขึ้นภายในโครงสร้าง แต่เนื่องจาก arch มีความแกร่ง ดังนั้น ในบางกรณี arch จะต้านทานแรงภายนอกโดยการพัฒนาแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดร่วมกับแรงอัดด้วย ในลักษณะเช่นเดียวกับเคเบิล ถ้า arch มีรูปร่างพาราโบลา (parabola) และถูกกระทำโดยแรงในแนวตั้งลงที่มีการกระจายสม่ำเสมอในแนวนอนแล้ว arch จะต้านแรงภายนอกโดยเกิดแรงอัดขึ้นในตัว arch เท่านั้น



รูปที่ 5-11

รูปที่ 5-11 แสดงประเภทต่างๆ ของ arch ซึ่งถูกเรียกตามลักษณะการรองรับ

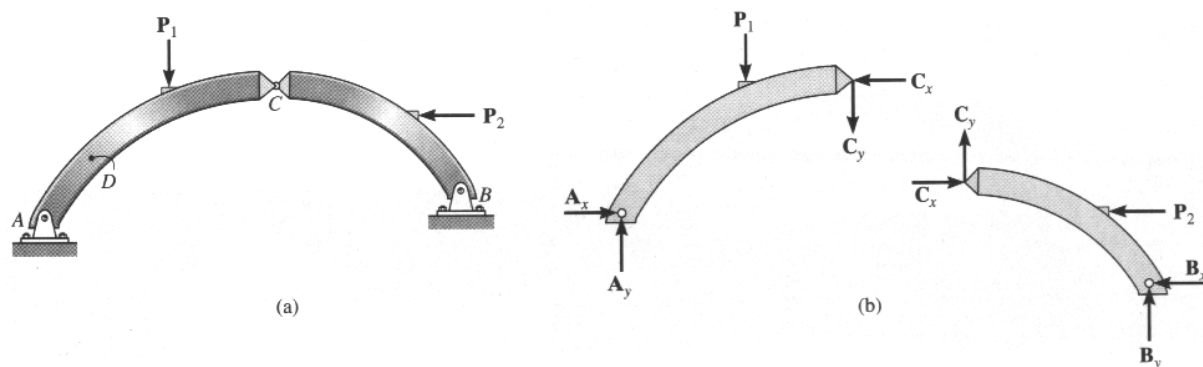
Fixed arch ตามรูปที่ 5-11a มักจะถูกสร้างขึ้นโดยใช้คอนกรีตเสริมเหล็ก (reinforced concrete) และใช้ปริมาณวัสดุน้อยกว่า arch ชนิดอื่นๆ แต่ arch ชนิดนี้ต้องการฐานรากที่แกร่งมาก เพื่อที่ฐานรากจะสามารถรับโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับนั้นได้ ดังนั้น arch ชนิดนี้จึงเป็นโครงสร้างแบบ indeterminate ที่มีแรงที่ไม่ทราบค่า 3 แรง และเนื่องจากฐานรากของ arch นี้มีความแกร่งสูง ดังนั้น ในการออกแบบเราจะต้องคำนึงถึงหน่วยแรง (stress) อื่นๆ ที่อาจจะเกิดขึ้นอีกด้วย เช่น หน่วยแรงที่เกิดจากการทรุดตัวของฐานรากที่ไม่เท่ากัน (differential settlement) หรือการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ เป็นต้น

Two-hinged arch ตามรูปที่ 5-11b มักจะถูกสร้างขึ้นโดยใช้เหล็กหรือไม้และเป็นโครงสร้างแบบ indeterminate ที่มีแรงที่ไม่ทราบค่า 1 แรง ในการออกแบบ arch ชนิดนี้เราไม่ต้องพิจารณาการทรุดตัวของฐานรากที่ไม่เท่ากัน แต่เราจะต้องพิจารณาถึงผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ เนื่องจากที่รองรับของ arch ไม่สามารถเคลื่อนที่ได้เมื่ออุณหภูมิเปลี่ยนแปลง เราสามารถทำให้ two-hinged-arch นี้เปลี่ยนเป็นโครงสร้างแบบ determinate ได้โดยการเปลี่ยนที่รองรับอันใดอันหนึ่งให้เป็นที่รองรับ roller แต่การทำเช่นนี้จะทำให้ arch สูญเสียความสามารถในการรับโมเมนต์ดัด และ arch นี้จะมีพฤติกรรมในลักษณะเช่นเดียวกับคานโค้ง (curved beam) อย่างไรก็ตาม เราสามารถที่จะทำให้พฤติกรรมของ arch นี้กลับคืนมาได้โดยการใส่ tie rod ระหว่างจุดรองรับทั้งสองของ arch ดังที่แสดงตามรูปที่ 5-11d

Three-hinged arch ตามรูปที่ 5-11c มักจะถูกสร้างขึ้นโดยใช้เหล็กหรือไม้เช่นเดียวกับ two-hinged arch และเป็นโครงสร้างแบบ determinate ดังนั้น arch ชนิดนี้จะไม่มีปัญหาเกี่ยวกับการทรุดตัวของฐานรากที่ไม่เท่ากันและการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

5.5 Three-Hinged Arch

พิจารณา three-hinged arch ตามรูปที่ 5-12a ในการหาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของ arch นี้ เราจะแยก arch ออกเป็น 2 ส่วนที่ hinge ที่จุด C แล้วเขียนแผนภาพ free body diagram ของแต่ละส่วนของ arch ดังที่แสดงตามรูปที่ 5-12b ซึ่งเราจะมีแรงที่ไม่ทราบค่าทั้งหมด $3+3 = 6$ แรง และแรงเหล่านี้จะสามารถหามาได้จากสมการความสมดุล 6 สมการ โดยเริ่มต้นเราจะใช้สมการสมดุลของโมเมนต์ที่จุด A และจุด B เพื่อหาค่าของแรง C_x และ C_y จากนั้น เราจะใช้สมการความสมดุลของแรงในการหาแรงปฏิกิริยาอีก 4 แรงที่จุดรองรับ A และ B สุดท้าย เราจะใช้ method of sections หาค่าแรงตั้งฉาก (normal force) แรงเฉือน (shear force) และโมเมนต์ดัด (bending moment) ที่เกิดขึ้นภายใน arch



รูปที่ 5-12

ตัวอย่างที่ 5-5

กำหนดให้สะพานแห่งหนึ่งมีโครงสร้างหลักเป็น three-hinged arch และมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 5-13a จงหาแรงภายในที่เกิดขึ้นที่จุด D ซึ่งมีระยะ x จากที่มีจุดเริ่มต้นของ coordinate $x-y$ โดยที่สมการแสดงรูปร่างของ arch อยู่ในรูปของสมการ parabola $y = -\frac{12.5}{25^2}x^2$ และสมมติให้แรงถ่ายจากพื้นของสะพานลงสู่ arch อย่างสม่ำเสมอ

เริ่มต้น เนื่องจากเราต้องการหาแรงภายในที่เกิดขึ้นที่จุด D ซึ่งอยู่ในส่วน BC ของ arch ดังนั้น เราจะต้องหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ C โดยการใช้ free body diagram ของ arch ดังที่แสดงในรูปที่ 5-13a เราจะหาแรงปฏิกิริยา C_y ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \downarrow + \sum M_A = 0; & \quad C_y(50) - 10(50)25 = 0 \\ & \quad C_y = 250 \text{ kN} \end{aligned}$$

จากนั้น แรงปฏิกิริยา C_x , B_x และ B_y จะหาได้โดยการใช้ free body diagram ของส่วน BC ของ arch ดังที่แสดงในรูปที่ 5-13b

$$\begin{aligned} \uparrow + \sum M_B = 0; & \quad C_x(12.5) + 10(25)12.5 - 250(25) = 0 \\ & \quad C_x = 250 \text{ kN} \\ \rightarrow \sum F_x = 0; & \quad B_x = 250 \text{ kN} \\ + \uparrow \sum F_y = 0; & \quad B_y + 250 - 10(25) = 0 \\ & \quad B_y = 0 \end{aligned}$$

จาก free body diagram ของส่วน BC ของ arch ดังที่แสดงในรูปที่ 5-13c เราจะหาสมการของแรงภายในที่เกิดขึ้นที่จุด D ซึ่งมีระยะ x จากที่มีจุดเริ่มต้นของ coordinate $x-y$ ได้

$$\begin{aligned} \downarrow + \sum M_D = 0; & \quad M_D + 10x\left(\frac{x}{2}\right) - 250\left(\frac{x^2}{50}\right) = 0 \\ & \quad M_D = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0;$$

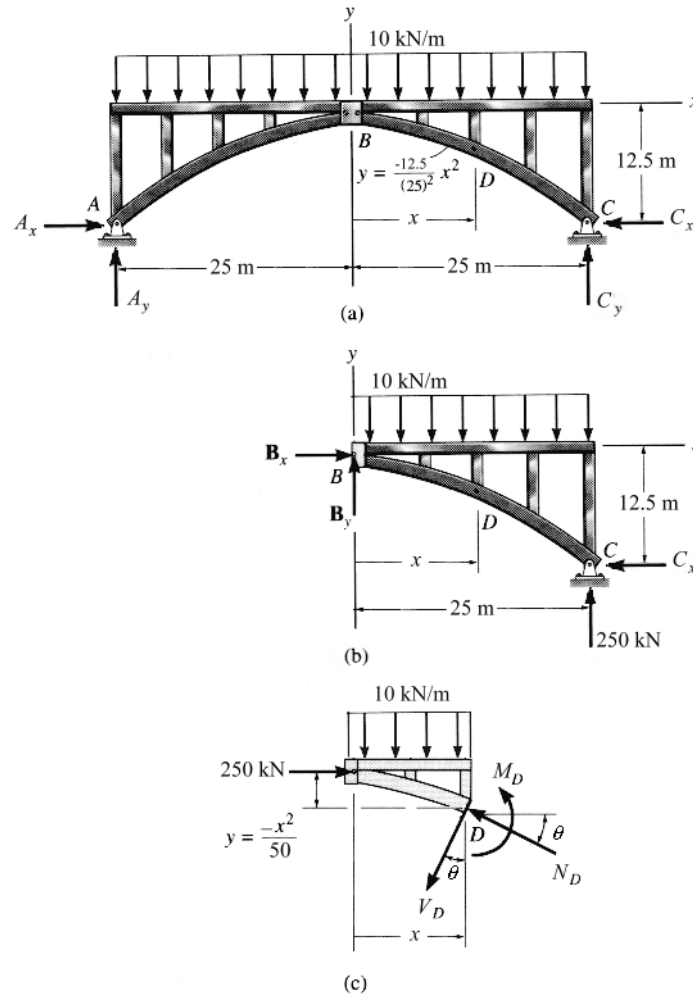
$$250 - V_D \sin \theta - N_D \cos \theta = 0$$

$$V_D \sin \theta + N_D \cos \theta = 250$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0;$$

$$-10x - V_D \cos \theta + N_D \sin \theta = 0$$

$$-V_D \cos \theta + N_D \sin \theta = 10x$$



รูปที่ 5-13

ทำการแก้สมการสองชั้นเพื่อหา V_D และ N_D ในรูปของ matrix เราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_D \\ N_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 250 \\ 10x \end{Bmatrix}$$

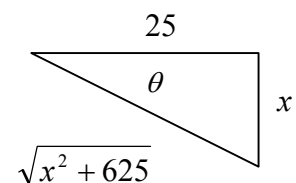
$$\begin{Bmatrix} V_D \\ N_D \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 250 \\ 10x \end{Bmatrix}$$

$$V_D = 250 \sin \theta - 10x \cos \theta$$

$$N_D = 250 \cos \theta + 10x \sin \theta$$

โดยที่มุม θ จะหาได้จากสมการ $\tan \theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{25}$ ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 625}}$$



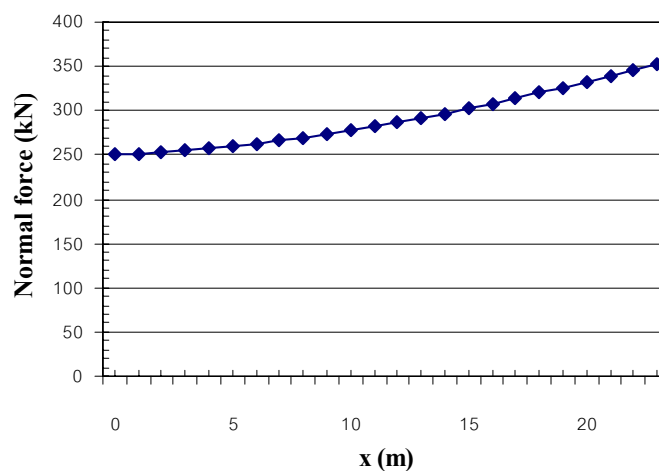
$$\cos \theta = \frac{25}{\sqrt{x^2 + 625}}$$

แทนค่า $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ ลงในสมการของ V_D และ N_D เราจะได้

$$V_D = \frac{250x - 10x(25)}{\sqrt{x^2 + 625}} = 0$$

$$N_D = \frac{250(25) + 10x(x)}{\sqrt{x^2 + 625}} = \frac{6250 + 10x^2}{\sqrt{x^2 + 625}}$$

เราจะเห็นได้ว่า แรงภายในที่เกิดขึ้นใน arch รูปทรง parabola ที่หน้าตัดใดๆ เนื่องจากการกระทำของแรงที่มีการกระจายอย่างสม่ำเสมอจะมีเพียงแค่แรงในแนวแกนของ arch เท่านั้น ในกรณีที่ arch มีรูปทรงอื่นๆ เช่น ทรงกลม เป็นต้น แล้ว ค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดภายในที่เกิดขึ้นจะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ แรงในแนวแกนนี้มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 250 kN ที่จุด B ไปเป็น 353.6 kN ที่จุด C ดังที่แสดงในรูปที่ 5-13d



(d)

ในกรณีที่สะพานแห่งนี้ถูกสร้างด้วย girder แล้ว ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดที่เกิดขึ้นที่กึ่งกลาง girder จะมีค่าเท่ากับ

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} = \frac{10(50)^2}{8} = 3125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

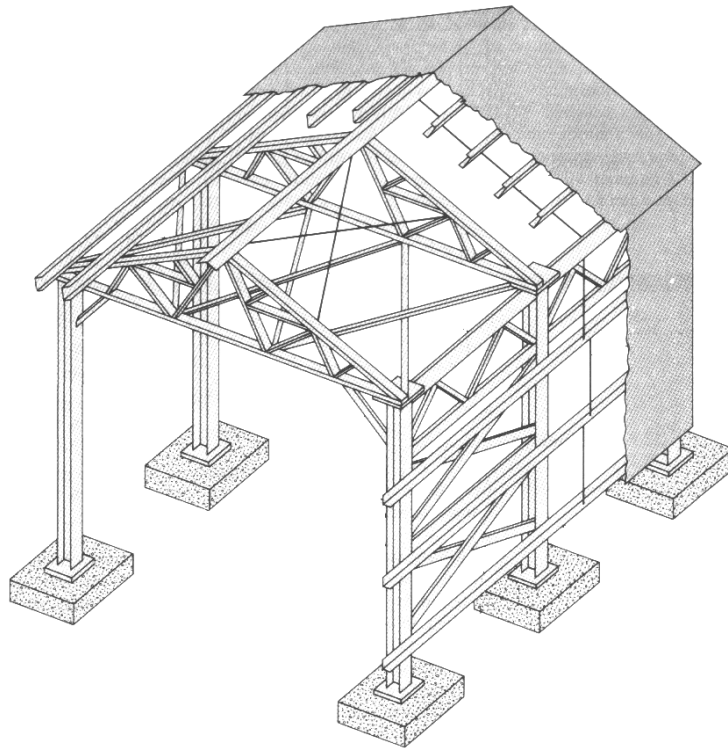
และเมื่อเรานำค่าแรงในแนวแกนมาออกแบบ arch และนำค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดมาออกแบบ girder แล้ว เราจะเห็นได้ว่า โครงสร้างของสะพานที่ทำด้วย arch จะมีน้ำหนักเบากว่าโครงสร้างของสะพานที่ทำด้วย girder มาก เนื่องจากโครงสร้างที่รับแรงในแนวแกนมักจะมีประสิทธิภาพสูงกว่าโครงสร้างที่รับโมเมนต์ดัด

บทที่ 6

อินฟลูเอนซ์ไลน์ของโครงสร้าง Statically Determinate

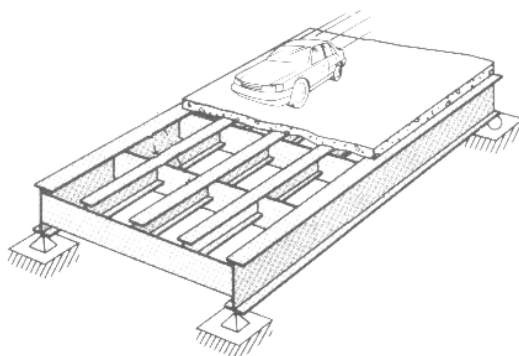
6.1 อินฟลูเอนซ์ไลน์ (Influence Lines)

ในบทต่างๆ ที่ผ่านมา เราได้ศึกษาวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างหรือองค์อาคารของโครงสร้างได้แก่ โครงข้อหมุนคาน และโครงข้อแข็ง ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 6-1 ที่ถูกกระทำโดยแรงหรือน้ำหนักบรรทุกที่อยู่กับที่ (fixed load) ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้คือ แรงในแนวแกน shear diagram และ moment diagram จากนั้น เราจะนำค่าที่สูงสุดของแรงและโมเมนต์ที่ได้ไปใช้ในการออกแบบองค์อาคารของโครงสร้างดังกล่าว

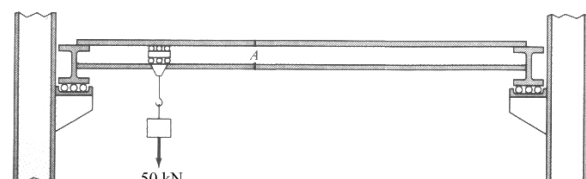


รูปที่ 6-1

ในบทนี้ เราจะได้ศึกษาวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งโครงสร้างจะถูกกระทำโดยแรงที่เคลื่อนที่ได้ (moving load) ยกตัวอย่างเช่น โครงสร้างของสะพานที่ถูกกระทำโดยน้ำหนักของรถยนต์ขณะที่กำลังเคลื่อนที่ไปบนสะพาน และคานซึ่งรองรับเครนที่กำลังเคลื่อนที่ไปตามความยาวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-2 เป็นต้น



(a)



(b)

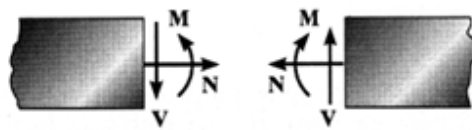
รูปที่ 6-2

พิจารณาคานซึ่งรองรับแบริดจ์ที่แสดงในรูปที่ 6-2b ในขณะที่น้ำหนักบรรทุก 50 kN เคลื่อนที่ไปบนคานนั้น ค่าของแรงเฉือนและโมเมนต์ภายในที่จุดใดจุดหนึ่งของคาน เช่น ที่รอยเชื่อมที่จุด A เป็นต้น จะเกิดการเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกนั้น ซึ่งการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนและโมเมนต์ที่จุดดังกล่าวจะหาได้โดยการเขียนอินฟลูเอนซ์ไลน์ (influence line) ของแรงเฉือนและโมเมนต์ โดยทั่วไป เราจะสามารถเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ได้ 2 วิธีคือการเขียนตารางและการเขียนสมการ

การเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์โดยการเขียนตาราง

การเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์โดยการเขียนตารางมีขั้นตอนการทำดังต่อไปนี้

1. วางแรงกระทำขนาด 1 หน่วยที่ตำแหน่ง x_1 บนโครงสร้าง
2. หาค่าแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ที่จุดที่เราสนใจ โดยใช้สมการความสมดุลและ sign convention ที่เป็นบวก ซึ่งกล่าวไปแล้วในบทที่ 4 และได้แสดงไว้ในรูปที่ 6-3 (เราอาจไม่จำเป็นต้องหาค่าเหล่านั้นทั้งหมด ขึ้นอยู่กับว่าเราสนใจค่าอะไร)



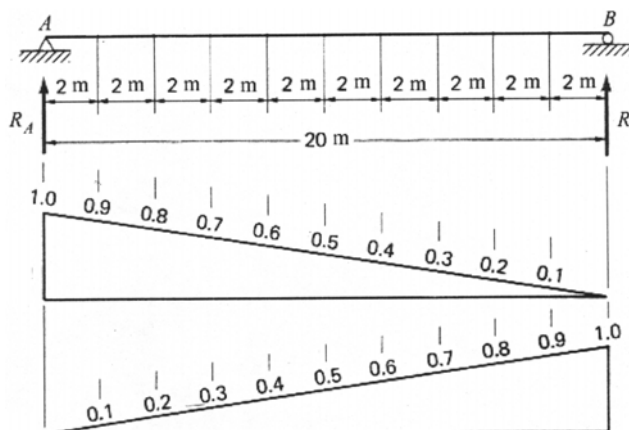
รูปที่ 6-3

3. จดค่าตำแหน่ง x_1 ค่าแรงปฏิกิริยา ค่าแรงเฉือน และค่าโมเมนต์ดัดที่ได้ลงในตาราง
4. ให้แรง 1 หน่วยเปลี่ยนตำแหน่งไปที่ x_2 แล้วทำการวิเคราะห์และจดข้อมูลเหมือนที่กล่าวมาแล้ว ทำเช่นนี้จนได้จำนวนจุดที่พอเพียงแล้วนำข้อมูลเหล่านั้นไปเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ โดยให้แกนนอนแสดงตำแหน่งของ x และแกนตั้งแสดงทิศทางของค่าแรงปฏิกิริยา หรือค่าแรงเฉือน หรือค่าโมเมนต์ดัด

หลังจากที่เขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ (influence line diagram) แล้ว เราจะบอกได้ว่า เราควรที่จะวางน้ำหนักบรรทุก 50 kN ไว้ที่ตำแหน่งใดบนคาน เพื่อที่จะทำให้เกิดค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ภายในที่จุด A มากที่สุด จากนั้นเราจะหาค่าของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดสูงสุดที่จุดนั้นได้โดยการคูณค่าพิสัยของแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดกับค่าของน้ำหนักบรรทุก 50 kN และนำค่าที่ได้ไปออกแบบรอยเชื่อมดังกล่าว

ตัวอย่างที่ 6-1

พิจารณาคานดังที่แสดงในรูปที่ 6-4 จงเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และของแรงปฏิกิริยา R_B โดยการเขียนตาราง



รูปที่ 6-4

เริ่มต้นเราจะให้แรง 1 หน่วยอยู่ที่จุด A โดยใช้สมมูลของโมเมนต์รอบจุด B มีค่าเท่ากับศูนย์ บน free body diagram ของคาน เราจะได้

$$R_A = 1$$

จากนั้น เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ 2 m ไปทางขวามือแล้ว โดยใช้สมมูลของโมเมนต์รอบจุด B มีค่าเท่ากับศูนย์ ศูนย์ บน free body diagram ของคาน เราจะได้

$$R_A = 18/20 = 0.9$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ 4 m ไปทางขวามือแล้ว

$$R_A = 16/20 = 0.8$$

ทำการวิเคราะห์คานในลักษณะเช่นนี้ เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ที่ตำแหน่งอื่นๆ ถัดไปทุกๆ 2 m เราจะหาค่าของแรงปฏิกิริยา R_A ได้ดังที่แสดงในตารางที่ 6-1 เมื่อนำค่าของแรงปฏิกิริยา R_A มาเขียนกราฟเทียบกับตำแหน่งของแรง 1 หน่วย เราจะได้แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A ดังที่แสดงในรูปที่ 6-4

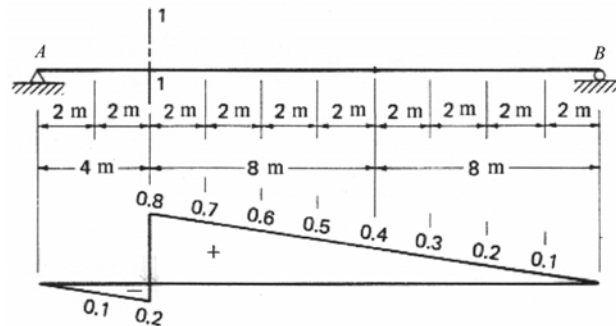
ตารางที่ 6-1

ตำแหน่ง x ของแรง 1 หน่วย	R_A	R_B	V_{1-1}	M_{1-1}
0	1.0	0	0	0
2	0.9	0.1	-0.1	1.6
4	0.8	0.2	-0.2/0.8	3.2
6	0.7	0.3	0.7	2.8
8	0.6	0.4	0.6	2.4
10	0.5	0.5	0.5	2.0
12	0.4	0.6	0.4	1.6
14	0.3	0.7	0.3	1.2
16	0.2	0.8	0.2	0.8
18	0.1	0.9	0.1	0.4
20	0	1.0	0	0

เนื่องจากผลรวมของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_B มีค่าเท่ากับแรง 1 หน่วย ดังนั้น เราจะหาค่าของแรงปฏิกิริยา R_B ได้โดยที่ $R_B = 1 - R_A$ ดังที่แสดงในตารางที่ 6-1 และแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_B จะมีลักษณะตามที่ได้แสดงในรูปที่ 6-4

ตัวอย่างที่ 6-2

พิจารณาคานดังที่แสดงในรูปที่ 6-5 จงเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนที่จุดตัด 1-1 โดยการเขียนตาราง



รูปที่ 6-5

เริ่มต้น เราจะให้แรง 1 หน่วยกระทำที่จุด A ซึ่งเราจะได้ว่า ไม่มีแรงเฉือนเกิดขึ้นบนหน้าตัด 1-1 เนื่องจากแรง 1 หน่วยมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยา R_A จากนั้น ให้แรง 1 หน่วยอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ 2 m ไปทางขวามือ ซึ่งเราจะได้ $R_A = 0.9$ และ $R_B = 0.1$ โดยการตัดคานที่หน้าตัด 1-1 แล้วเขียน free body diagram ของส่วน $A-1$ หรือ $1-B$ ถ้าเราพิจารณา free body diagram ของส่วน $A-1$ และใช้สมการสมดุลของแรงในแนวดิ่ง เราจะได้

$$V_{1-1} = R_A - 1 = 0.9 - 1 = -0.1$$

ถ้าเราพิจารณา free body diagram ของส่วน $1-B$ เราจะได้

$$V_{1-1} = -R_B = -0.1$$

ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า การใช้ free body diagram ของส่วน $1-B$ หาค่าของแรงเฉือนได้ง่ายกว่าการใช้ free body diagram ของส่วน $A-1$

เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ 4 m ไปทางขวามือ และอยู่ทางด้านซ้ายของหน้าตัด 1-1 เล็กน้อย แล้ว โดยใช้ free body diagram ของส่วน $1-B$ เราจะได้ว่า

$$V_{1-1} = -R_B = -0.2$$

เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ 4 m ไปทางขวามือ และอยู่ทางด้านขวาของหน้าตัด 1-1 เล็กน้อย แล้ว โดยใช้ free body diagram ของส่วน $A-1$ เราจะได้

$$V_{1-1} = R_A = 0.8$$

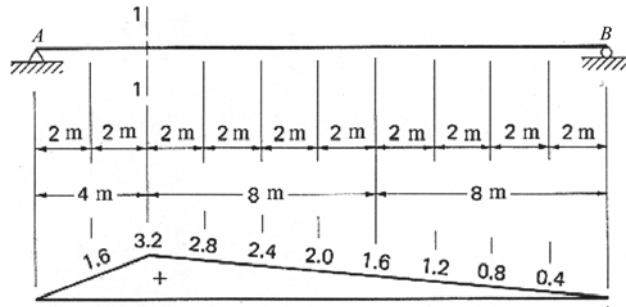
เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ 6 m ไปทางขวามือแล้ว โดยใช้ free body diagram ของส่วน $A-1$ เราจะได้

$$V_{1-1} = R_A = 0.7$$

ทำการวิเคราะห์ในลักษณะเช่นนี้ที่ตำแหน่งอื่นๆ ของแรง 1 หน่วย เราจะหาค่าของแรงเฉือน V_{1-1} ดังที่แสดงในตารางที่ 6-1 เมื่อนำค่าของแรงเฉือน V_{1-1} มาเขียนกราฟเทียบกับตำแหน่งของแรง 1 หน่วย เราจะได้แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_{1-1} ดังที่แสดงในรูปที่ 6-5

ตัวอย่างที่ 6-3

พิจารณาคานดังที่แสดงในรูปที่ 6-6 จงเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ตัด M_{1-1} โดยการเขียนตาราง



รูปที่ 6-6

โดยใช้ free body diagram ที่ใช้ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_{1-1} เราจะเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ตัด M_{1-1} ได้โดยง่าย

เริ่มต้นเราจะให้แรง 1 หน่วยอยู่ที่จุด A ซึ่งเราจะได้ว่า ไม่มีโมเมนต์ตัดเกิดขึ้นบนหน้าตัด 1-1 เนื่องจากแรง 1 หน่วยมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยา R_A และผลรวมของโมเมนต์ที่เกิดจากแรงทั้งสองจะหักล้างกันหมด จากนั้น ให้แรง 1 หน่วยอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ 2 m ไปทางขวามือ ถ้าเราพิจารณา free body diagram ของส่วน 1-B ซึ่งจะทำให้เราหาค่าของ M_{1-1} ได้ง่ายกว่าการใช้ free body diagram ของส่วน A-1 เราจะได้ว่า

$$M_{1-1} = R_B(2 \times 8) = 0.1 \times 16 = 1.6$$

เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ 4 m ไปทางขวามือแล้ว โดยใช้ free body diagram ของส่วน A-1 และ 1-B จะให้ค่า M_{1-1} ที่เท่ากันคือ

$$M_{1-1} = R_A(2 \times 2) = 0.8 \times 4 = 3.2$$

$$M_{1-1} = R_B(2 \times 8) = 0.2 \times 16 = 3.2$$

เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ห่างจากจุด A เป็นระยะ 6 m ไปทางขวามือแล้ว โดยใช้ free body diagram ของส่วน A-1 เราจะได้

$$M_{1-1} = R_A(2 \times 2) = 0.7(4) = 2.8$$

ทำการวิเคราะห์ในลักษณะเช่นนี้ที่ตำแหน่งอื่นๆ ของแรง 1 หน่วย เราจะหาค่าของแรงเฉือน M_{1-1} ดังที่แสดงในตารางที่ 6-1 เมื่อนำค่าของแรงเฉือน M_{1-1} มาเขียนกราฟเทียบกับตำแหน่งของแรง 1 หน่วย เราจะได้แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน M_{1-1} ดังที่แสดงในรูปที่ 6-6

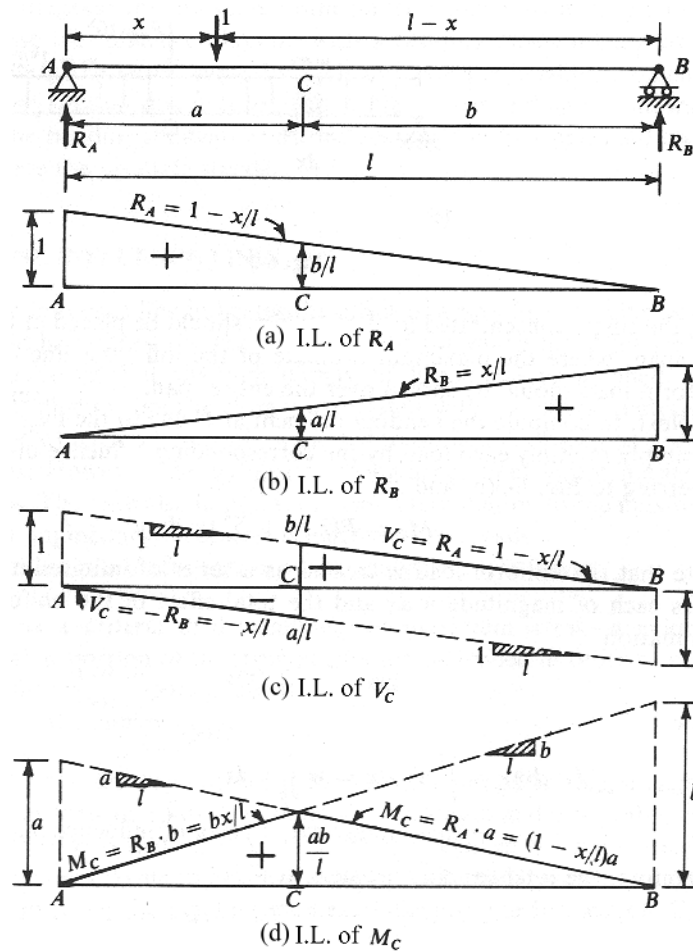
การเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์โดยการเขียนสมการ

การเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์โดยการเขียนสมการมีขั้นตอนการทำดังต่อไปนี้

1. วางแรงกระทำเป็นจุดขนาด 1 หน่วยที่ตำแหน่งตัวแปร x ใดๆ บนโครงสร้าง
2. หาค่าของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดที่จุดที่เราสนใจให้เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x
3. นำฟังก์ชันของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ไปเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์

ตัวอย่างที่ 6-4

จงเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_B แรงเฉือน V_C และโมเมนต์ดัด M_C ของคานช่วงเดียวแบบรองรับธรรมดา (simple beam) ดังที่แสดงในรูปที่ 6-7 โดยการเขียนสมการ



รูปที่ 6-7

1. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_B

จากรูป โดยใช้สมมูลของโมเมนต์รอบจุด B มีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะได้แรงปฏิกิริยา R_A อยู่ในรูป

$$R_A = \frac{1(l-x)}{l} = 1 - \frac{x}{l}$$

และแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 6.7a จากนั้น เมื่อเราใช้สมมูลของโมเมนต์รอบจุด B มีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะได้แรงปฏิกิริยา R_B อยู่ในรูป

$$R_B = \frac{1(x)}{l} = \frac{x}{l}$$

และแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_B จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 6-7b

2. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_C และโมเมนต์ดัด M_C

จากที่ได้กล่าวไปแล้วในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์โดยการเขียนตารางว่า ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดนั้น ถ้าแรง 1 หน่วยอยู่บนช่วงใดช่วงหนึ่งของคาน ดังเช่นอยู่ในช่วง AC ของรูปที่ 6-7 เป็นต้น เราจะนำ free body diagram ของอีกส่วนหนึ่งของคานที่เหลือ ดังเช่นช่วง CB ในกรณีของคานดังที่แสดงในรูปที่ 6-5 มาพิจารณาหาค่าของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่จุด C

เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่บนช่วง AC จาก free body diagram ของช่วง CB และผลรวมของแรงในแนวดิ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะได้ว่า

$$V_C = -R_B$$

หรือพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_C เมื่อแรง 1 หน่วยวางอยู่ในช่วง AC จะมีค่าเท่ากับค่าลบของพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_B และจะมีค่าต่ำสุดที่ $-a/l$ และเมื่อให้ผลรวมของโมเมนต์รอบจุด C มีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะได้ว่า

$$M_C = R_B(b)$$

หรือพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด M_C เมื่อแรง 1 หน่วยวางอยู่ในช่วง AC จะมีค่าเท่ากับพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_B คูณกับความยาว b และมีค่าสูงสุดเท่ากับ ab/l

เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่บนช่วง CB จาก free body diagram ของช่วง AC เราจะได้ว่า

$$V_C = R_A$$

หรือพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_C เมื่อแรง 1 หน่วยวางอยู่ในช่วง CB จะมีค่าเท่ากับค่าพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และจะมีค่าสูงสุดที่ b/l และ

$$M_C = R_A(a)$$

หรือพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด M_C เมื่อแรง 1 หน่วยวางอยู่ในช่วง CB จะมีค่าเท่ากับพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A คูณกับความยาว a และมีค่าสูงสุดเท่ากับ ab/l

เราควรสังเกตไว้ด้วยว่า เมื่อเราให้ระยะ $a = 4\text{ m}$ ระยะ $b = 16\text{ m}$ และความยาวของคาน $L = 20\text{ m}$ แล้วเราจะคำนวณหาค่าของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_B แรงเฉือน V_{1-1} และโมเมนต์ดัด M_{1-1} ที่ตำแหน่ง x ต่างๆ โดยใช้สมการที่เราหามาได้ ดังที่แสดงในตารางที่ 6-1

6.2 อินฟลูเอนซ์ไลน์ของคาน (Influence Lines for Beams)

อินฟลูเอนซ์ไลน์ของคานเนื่องจากแรงกระทำเป็นจุด (Concentrated Force)

ในการหาอินฟลูเอนซ์ไลน์ของคาน เราให้แรงหรือน้ำหนักบรรทุกทุก 1 หน่วย (unit load) กระทำต่อคาน ดังนั้น

“ ถ้าคานถูกกระทำโดยแรงขนาด F ที่ตำแหน่งเดียวกับที่แรง 1 หน่วยกระทำแล้ว ค่าของแรงปฏิกิริยา หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรง F ที่จุดที่เราสนใจนั้นจะมีค่าเท่ากับผลคูณของพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์กับขนาดของแรง F นั้น”

พิจารณาคาน AB ตามรูปที่ 6-7 ซึ่งมีแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยาที่จุด A (R_A) ดังที่แสดงตามรูปที่ 6-7a เมื่อแรง F หน่วยกระทำอยู่ที่ระยะ x จากจุด A แล้ว แรงปฏิกิริยา R_A จะมีค่าเท่ากับ

$$F(1 - \frac{x}{L})$$

ซึ่งจะสามารถตรวจสอบได้โดยการใช้สมการความสมดุลของผลรวมของโมเมนต์รอบจุด B ของคานมีค่าเท่ากับศูนย์

อินฟลูเอนซ์ไลน์ของคานเนื่องจากแรงกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอ (Uniform Load)

พิจารณาคานส่วนที่ถูกกระทำโดยแรงแผ่กระจายสม่ำเสมอ w (uniformly distributed load) ตามรูปที่ 6-8a เราจะเห็นได้ว่า ค่าแรงลัพธ์ของแรง w ที่กระทำอยู่บนส่วนของคาน dx จะมีค่าเท่ากับ $dF = w dx$ และถ้าแรงลัพธ์นี้วางอยู่ที่ตำแหน่ง x ซึ่งมีพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ดัดเท่ากับ y ตามรูปที่ 6-8b แล้ว ค่าของแรงปฏิกิริยา หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ดัดจะมีค่าเท่ากับ

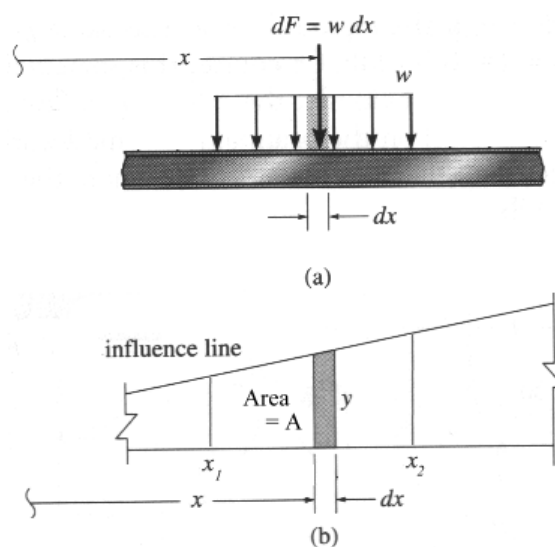
$$dF(y) = (w dx)(y)$$

ดังนั้น ผลรวมของแรงลัพธ์ dF จาก x_1 ถึง x_2 มีค่าเท่ากับ

$$\int_{x_1}^{x_2} w y dx = w \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

โดยที่ $\int_{x_1}^{x_2} y dx$ เป็นพื้นที่ใต้แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ ตามที่แสดงในรูปที่ 6-8b ดังนั้น เราจะสรุปได้ว่า

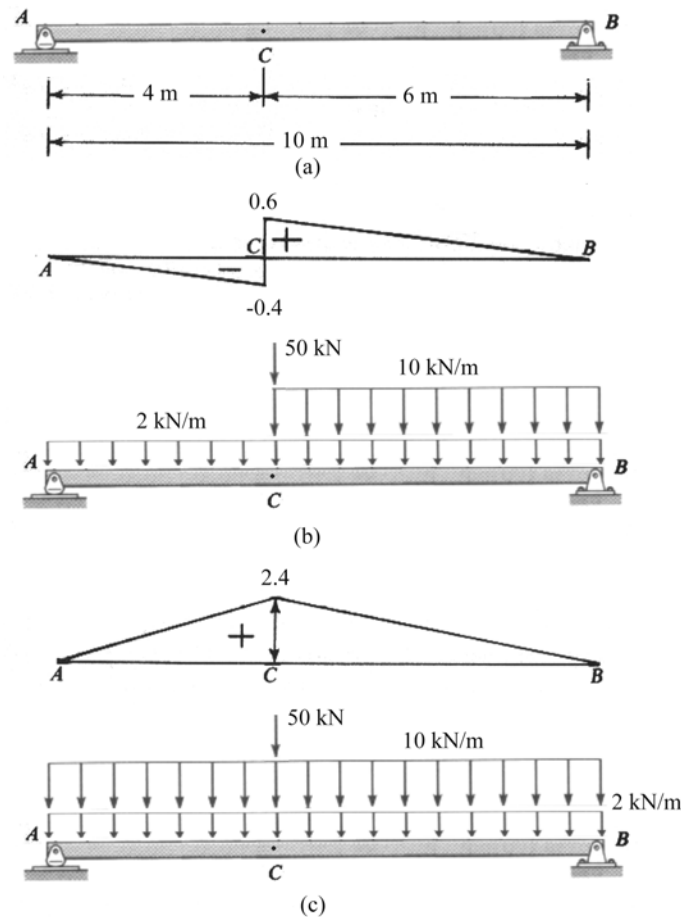
“ค่าของแรงปฏิกิริยา หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรงกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอจะมีค่าเท่ากับผลคูณของพื้นที่ใต้แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์กับค่าของแรงกระทำแผ่กระจายสม่ำเสมอ w ”



รูปที่ 6-8

ตัวอย่างที่ 6-5

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-9 จงหาค่าสูงสุดของแรงเฉือนบวกและโมเมนต์ดัดบวกที่จุด C เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกทุกจุดเป็นจุด (Concentrated live load) ขนาด 50 kN และน้ำหนักบรรทุกทุกจุดที่มีการกระจายสม่ำเสมอ (Uniformly distributed live load) ขนาด 10 kN/m กำหนดให้คานมีน้ำหนักเท่ากับ 2 kN/m



รูปที่ 6-9

เริ่มต้นเราจะต้องเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่จุด C ซึ่งในกรณีนี้ จากรูปที่ 6-7 เราจะหาพิกัดของแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่จุด C ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 6-9b และ 6-9c โดยพิกัดของแรงเฉือนทางด้านซ้ายมือของจุด C มีค่าเท่ากับ

$$-\frac{a}{L} = -\frac{4}{10} = -0.4$$

พิกัดของแรงเฉือนทางด้านขวามือของจุด C มีค่าเท่ากับ

$$\frac{b}{L} = \frac{6}{10} = 0.6$$

และพิกัดของโมเมนต์ดัดที่จุด C มีค่าเท่ากับ

$$\frac{ab}{L} = \frac{4(6)}{10} = 2.4$$

จากนั้น เราจะพิจารณาการวางน้ำหนักบรรทุกทุกจุดเป็นจุด น้ำหนักของคาน และน้ำหนักบรรทุกทุกจุดที่มีการกระจายสม่ำเสมอ ลงบนคานดังกล่าว โดยที่น้ำหนักของคานจะต้องถูกรวบรวมตลอดแนวความยาวของคาน แต่น้ำหนักบรรทุกทุกจุดจะต้องวางเพื่อให้เกิดค่าสูงสุดของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่จุด C จากหลักการที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น เราจะเห็นได้ว่า

1. น้ำหนักบรรทุกทุกจุดจะเป็นจุดจะต้องวางที่ตำแหน่งที่พิกัดของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดมีค่าสูงสุด
2. น้ำหนักบรรทุกทุกจุดที่มีการกระจายสม่ำเสมอจะต้องวางในส่วนของแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนที่มีค่าเป็นบวกหรือส่วน CB ดังที่แสดงในรูปที่ 6-9b และจะต้องวางตลอดแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด ดังที่แสดงในรูปที่ 6-9c

สุดท้าย เราจะหาค่าสูงสุดของแรงเฉือนบวกและโมเมนต์บวกที่จุด C ได้เท่ากับ

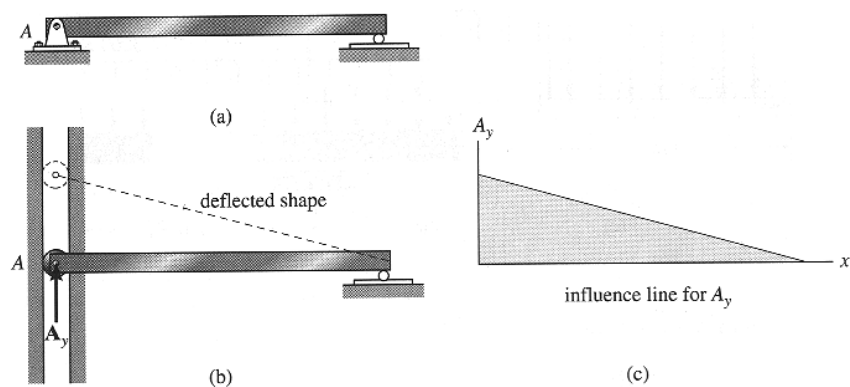
$$\begin{aligned}(V_C)_{\max} &= 50\text{kN}(0.6) + (10\text{kN} + 2\text{kN})0.5(6\text{m})0.6 - 2\text{kN}(0.5)4\text{m}(0.4) \\ &= 50\text{ kN} \\ (M_C)_{\max} &= 50\text{kN}(2.4) + (10\text{kN} + 2\text{kN})0.5(10\text{m})2.4 = 264\text{ kN} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

6.3 Qualitative Influence Lines

Heinrich Müller - Breslau ศาสตราจารย์ชาวเยอรมันได้พัฒนาเทคนิคที่ใช้ในการเขียนรูปร่างของอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่ง่ายและรวดเร็วขึ้นมาและถูกเรียกว่าหลักการ Müller - Breslau ซึ่งกล่าวว่า

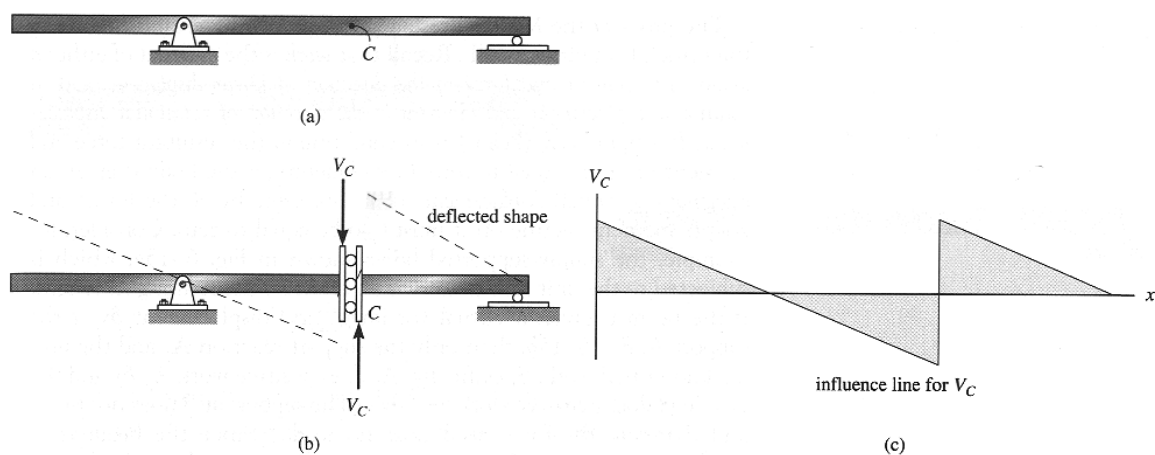
“รูปร่างของแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา (หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ดัด) ที่จุดใดๆ บนคานจะมีรูปร่างเหมือนกับรูปร่างการโก่งตัวของคาน เมื่อคานนั้นถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา (หรือแรงเฉือน หรือโมเมนต์ดัด) ที่จุดนั้น โดยที่หน้าตัดของคานที่จุดนั้นจะต้องไม่มีความต้านทานต่อแรงปฏิกิริยา (หรือต่อแรงเฉือน หรือต่อโมเมนต์ดัด) ที่กระทำอยู่”

พิจารณาคานตามรูปที่ 6-10a ถ้าเราต้องการหารูปร่างของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยาที่จุด A (A_y) แล้วจุดรองรับหมุด (pin) ที่จุด A จะถูกเปลี่ยนเป็น roller guide ดังที่แสดงในรูปที่ 6-10b ซึ่ง roller guide นี้จะยอมให้ปลายของคานที่จุด A เคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในแนวตั้ง แต่จะป้องกันไม่ยอมให้ปลายคานเคลื่อนที่ในแนวนอน เมื่อคานตามรูปที่ 6-10b ถูกกระทำโดยแรงปฏิกิริยา A_y แล้ว คานก็จะเกิดการเคลื่อนที่ดังที่แสดงโดยเส้นประ ซึ่งจะเป็รูปร่างของแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา A_y ดังที่แสดงตามรูปที่ 6-10c



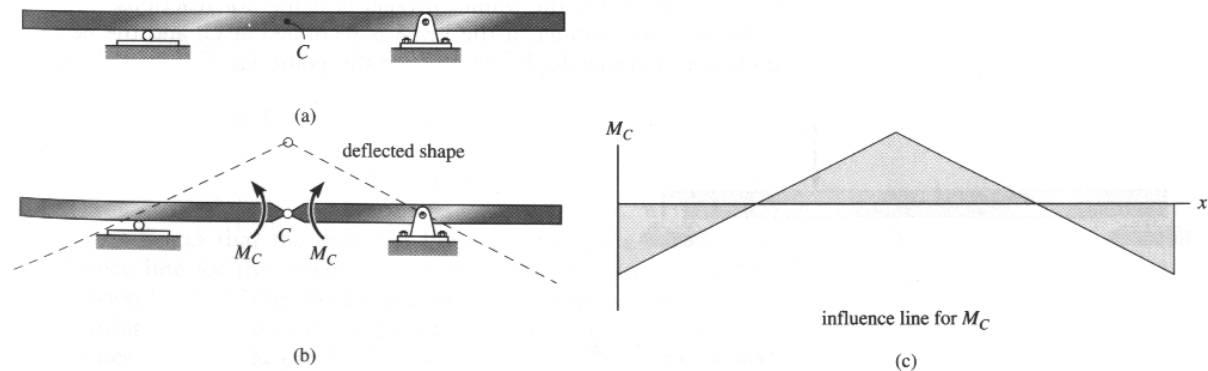
รูปที่ 6-10

ถ้าเราต้องการหารูปร่างของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนที่จุด C (V_C) ของคานตามรูปที่ 6-11a แล้ว จุด C ของคานจะถูกเปลี่ยนเป็น roller guide ดังที่แสดงในรูปที่ 6-11b โดยที่ roller guide นี้จะต้านทานเฉพาะโมเมนต์ดัดและแรงในแนวแกนเท่านั้น แต่จะไม่ต้านทานต่อแรงเฉือน เมื่อแรงเฉือน V_C ซึ่งมีค่าเป็นบวกกระทำต่อคานแล้ว คานจะเกิดการเคลื่อนที่ดังที่แสดงโดยเส้นประ ซึ่งจะเป็รูปร่างของแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนที่จุด C ของคาน ดังที่แสดงตามรูปที่ 6-11c



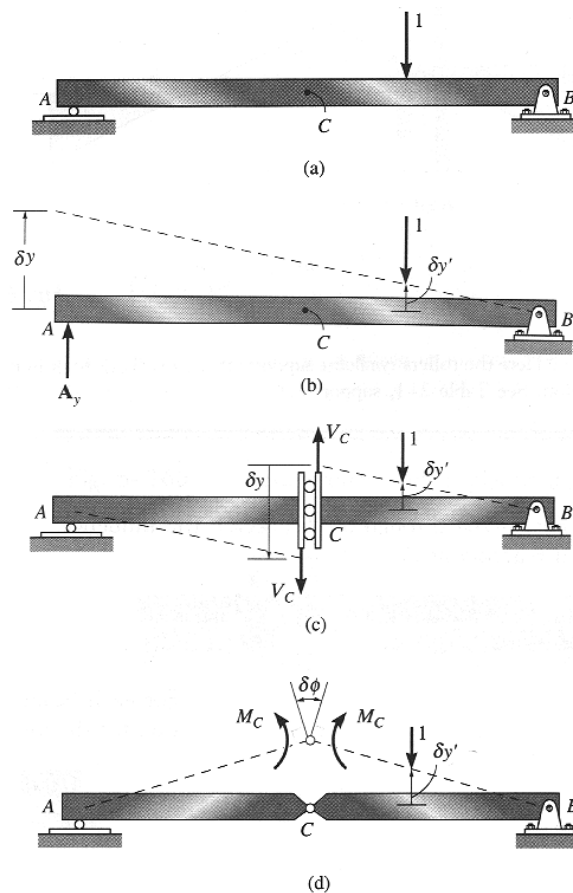
รูปที่ 6-11

ถ้าเราต้องการหารูปร่างของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัดที่จุด C (M_C) ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 6-12a แล้ว จุด C ของคานจะถูกเปลี่ยนให้เป็น internal hinge ดังที่แสดงในรูปที่ 6-12b เมื่อให้โมเมนต์ดัด M_C ที่มีค่าเป็นบวกกระทำต่อคานแล้ว คานจะเกิดการเคลื่อนที่ดังที่แสดงโดยเส้นประ ซึ่งจะเป็กรูปร่างของแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัดที่จุด C ของคาน ดังที่แสดงตามรูปที่ 6-12c



รูปที่ 6-12

เราสามารถที่จะพิสูจน์หลักการ Müller - Breslau ได้โดยใช้หลักการ virtual work (principle of virtual work) โดยที่เราทราบมาแล้วว่างาน (work) เป็นผลคูณของการเคลื่อนที่เชิงเส้นตรง (linear displacement) กับแรงในทิศทางของการเคลื่อนที่นั้น หรือเป็นผลคูณของการหมุน (rotation) กับค่าของโมเมนต์ในทิศทางของการหมุนนั้น และเมื่อวัตถุแข็ง (rigid body) อยู่ในสมดุลแล้ว แรงและโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำอยู่บนวัตถุนั้นจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น ถ้าเราให้วัตถุซึ่งอยู่ในสมดุลมีการเคลื่อนที่หรือการหมุนที่ไม่ได้เกิดขึ้นจริง (virtual displacement) แล้ว งานที่เกิดขึ้นจากแรงและโมเมนต์ที่กระทำอยู่บนวัตถุนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ด้วย



รูปที่ 6-13

เพื่อที่จะพิสูจน์หลักการ Müller - Breslau ในกรณีของแรงปฏิกิริยา ให้เราพิจารณาคาน ซึ่งถูกกระทำโดยแรง 1 หน่วย ดังที่แสดงในรูปที่ 6-13a ถ้าเราให้คานนั้นมี virtual displacement ขนาด δ_y เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A โดยที่ปลายคานที่จุดรองรับ B ไม่มีการเคลื่อนที่ แต่มีเฉพาะการหมุนเท่านั้น ตามรูปที่ 6-13b แล้ว virtual work ในกรณีนี้จะเกิดจากแรงเพียง 2 แรงคือ แรงปฏิกิริยาที่จุด A (A_y) และแรงกระทำ 1 หน่วย โดยที่ A_y จะทำให้เกิด virtual work ที่มีค่าเป็นบวกและมีขนาด δ_y และแรง 1 หน่วยจะก่อให้เกิด virtual work ที่มีค่าเป็นลบและมีขนาด $-1(\delta'_y)$ เนื่องจากคานอยู่ในสมดุล เราจะได้ว่า

$$\delta_y A_y - 1(\delta'_y) = 0$$

ถ้าเราให้ $\delta_y = 1$ แล้ว $A_y = \delta'_y$ ซึ่งหมายความว่า ค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุด A มีค่าเท่ากับค่า virtual displacement ที่ตำแหน่งที่แรง 1 หน่วยกระทำ ดังนั้น อินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยาที่จุด A จะเป็นไปตามเส้นประในรูปที่ 6-13b

ในลักษณะเดียวกัน เพื่อที่จะพิสูจน์หลักการ Müller - Breslau ในกรณีของแรงเฉือนที่จุด C เราจะให้คานดังกล่าวถูกตัดที่จุด C และให้จุด C เปลี่ยนเป็น roller guide เมื่อเราให้จุด C มี virtual displacement ขนาด δ_y ตามรูปที่ 6-13c โดยที่ส่วน AC และ BC อยู่ในแนวที่ขนานกันแล้ว virtual work จะเกิดจากแรงเฉือนภายใน V_C และแรง 1 หน่วยเท่านั้น และเนื่องจากคานอยู่ในสมดุล เราจะได้ว่า

$$\delta_y V_C - 1(\delta'_y) = 0$$

ถ้าเราให้ $\delta_y = 1$ แล้ว $V_C = \delta'_y$ ดังนั้น อินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนที่จุด C จะเป็นไปตามเส้นประในรูปที่ 6-13c

ในลักษณะเดียวกัน เพื่อที่จะพิสูจน์หลักการ Müller - Breslau ในกรณีของโมเมนต์ดัดที่จุด C เราจะให้จุด C ถูกเปลี่ยนเป็น internal hinge และให้จุด C นั้นมี virtual rotation ขนาด $\delta\phi$ ตามที่แสดงในรูปที่ 6-13d ดังนั้น virtual work จะเกิดจากโมเมนต์ภายใน M_C และแรง 1 หน่วยเท่านั้น เนื่องจากคานอยู่ในสมดุล เราจะได้ว่า

$$\delta\phi M_C - 1(\delta'_y) = 0$$

ถ้าเราให้ $\delta\phi = 1$ แล้ว $M_C = \delta'_y$ ดังนั้น อินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัดที่จุด C จะเป็นไปตามเส้นประในรูปที่ 6-13d

ตัวอย่างที่ 6-6

จงใช้หลักการ Müller - Breslau ช่วยในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A แรงเฉือน V_D โมเมนต์ดัด M_D แรงเฉือน V_E และโมเมนต์ดัด M_E ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 8-14a

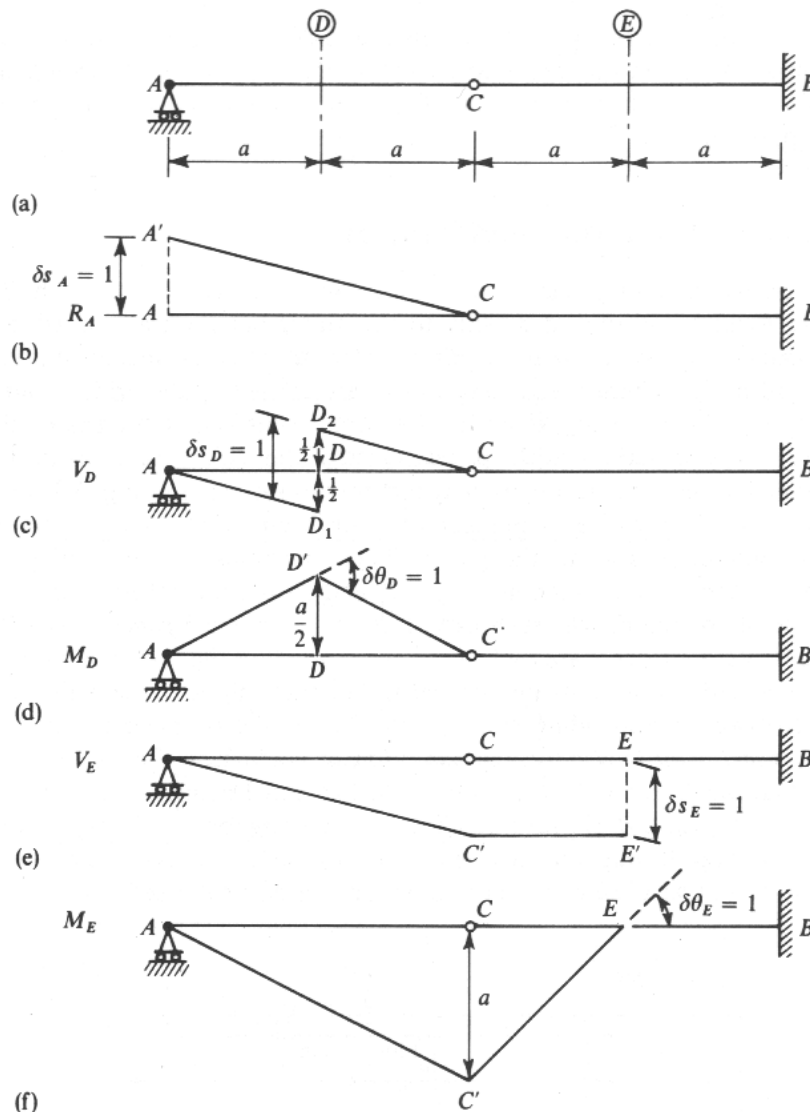
ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A เราจะเอาจุดรองรับ A ออกและเคลื่อนปลาย A ในแนวตั้งเป็นระยะ 1 หน่วย ดังนั้น เราจะได้คาน ACB เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอยู่ในรูปของคาน A'CB ดังที่แสดงในรูปที่ 8-14b ซึ่งเป็นแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A โดยที่ส่วน CB ซึ่งมีลักษณะเป็นคานยื่นจะไม่เกิดการเคลื่อนที่เนื่องจากจุด C เป็น hinge และจุด B ถูกยึดแน่น

ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_D เราจะทำการตัดคานที่จุด D แล้วให้ปลาย (จุด D_1) ของส่วนทางด้านซ้ายมือ (ส่วน AD_1) มีการเคลื่อนที่สัมผัสกับปลาย (จุด D_2) ของส่วนทางด้านขวามือ (ส่วน D_2C) เท่ากับหนึ่งหน่วยโดยที่ไม่มีการหมุนสัมพัทธ์เกิดขึ้น และคาน ACB เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอยู่ในรูปของคาน AD_1D_2CB ดังที่แสดงในรูปที่ 8-14c ซึ่งเป็นแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_D โดยที่ จากการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์โดยการเขียนสมการ เราจะได้ว่า พิกัด DD_1 มีค่าเท่ากับ

$$-\frac{a}{L} = -\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2}$$

และพิกัด DD_2 มีค่าเท่ากับ

$$\frac{b}{L} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$



รูปที่ 6-14

ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด M_D เราจะทำการตัดคานที่จุด D แล้วให้ส่วนของคานทั้งสองที่จุดตัดเกิดการหมุนสัมพัทธ์เกิดขึ้นหนึ่งหน่วย ดังนั้น เราจะได้คาน ACB เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างอยู่ในรูปของคาน $AD'CB$ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-14d ซึ่งเป็นแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด M_D โดยที่ จากการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์โดยการเขียนสมการ เราจะได้ว่า พิกัด DD' มีค่าเท่ากับ

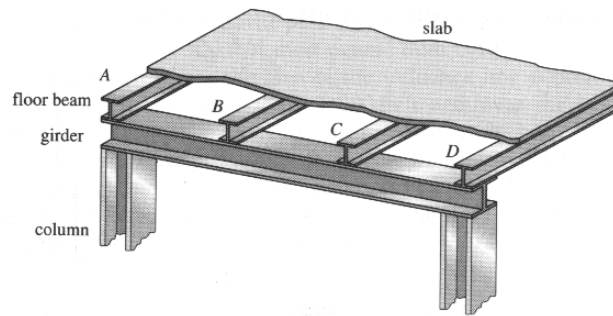
$$\frac{ab}{L} = \frac{a(a)}{2a} = \frac{a}{2}$$

ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_E เราจะทำการตัดคานที่จุด E แล้วให้ส่วนทางด้านซ้ายมือของคานเกิดการเคลื่อนที่ลงหนึ่งหน่วยเทียบกับส่วนทางด้านขวามือ โดยให้ส่วน $C'E'$ ยังคงขนานกับส่วน BE ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-14e ซึ่งเป็นแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด V_E

ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด M_E เราจะทำการตัดคานที่จุด E แล้วให้ส่วนทางด้านซ้ายมือของคานเกิดการหมุนสัมพัทธ์เทียบกับส่วนทางด้านขวามือ BE ของคานหนึ่งหน่วย โดยที่ส่วน BE จะยังคงอยู่ที่ตำแหน่งเดิมเนื่องจากปลาย B มีการรองรับแบบยึดแน่น และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของคาน ACB ไปอยู่ในรูปของคาน $AC'EB$ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-14f จะเป็นแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด M_E และเนื่องจากมุมสัมพัทธ์ $\delta\theta_E = 1$ ดังนั้น เมื่อระยะ CE มีค่าเท่ากับ a แล้ว พิกัด CC' จะมีค่าเท่ากับ a ด้วย

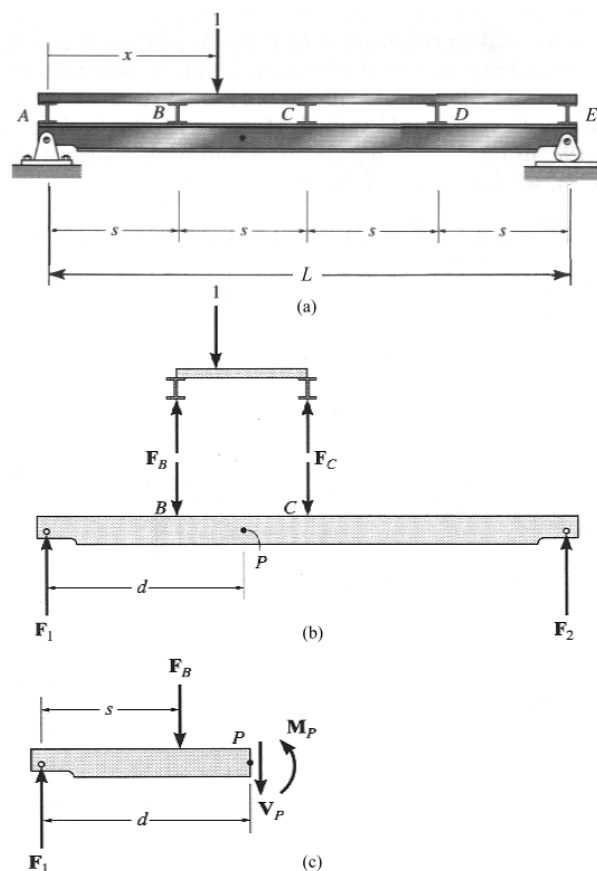
6.4 อินฟลูเอนซ์ไลน์ของ girder ที่รองรับพื้น (Influence Lines for Floor Girders)

ในกรณีที่องค์อาคารที่รองรับพื้นถูกจัดวางในลักษณะตามรูปที่ 6-15 นั้น แรงหรือน้ำหนักบรรทุกทุกที่กระทำอยู่บนพื้นจะถ่ายลงไปที่ตงหรือคานที่รองรับพื้น (floor beam) จากนั้น แรงที่กระทำอยู่บนคานที่รองรับพื้นก็จะถ่ายต่อไปที่ girder และสุดท้ายที่เสาซึ่งรองรับ girder ในการวิเคราะห์หาอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนและของโมเมนต์ดัดของ girder นี้ เราจะสมมุติให้พื้นเป็นพื้นทางเดียว (one-way slab) และวางอยู่บนคานที่รองรับพื้นแบบ simple support นอกจากนี้แล้ว เราจะให้ girder วางอยู่บนเสาแบบ simple support ด้วย ในลักษณะเช่นนี้ แรง 1 หน่วย (unit load) ที่กระทำบนพื้นจะถ่ายลงสู่ girder ที่จุดที่ girder เชื่อมต่ออยู่กับคานที่รองรับพื้นหรือ จุด A จุด B จุด C และจุด D โดยตรง



รูปที่ 6-15

พิจารณา girder ดังที่แสดงในรูปที่ 6-16a ในที่นี้ถ้าเราต้องการหาอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนและของโมเมนต์ดัดที่จุด P เราจะทำได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้



รูปที่ 6-16

1. เราจะวางแรง 1 หน่วยไว้บนพื้น (slab) ตามที่แสดงในรูปที่ 6-16b จากนั้น เราจะทำการวิเคราะห์หาแรงที่เกิดขึ้นบนคานที่รองรับพื้น สมมติให้มีค่าเป็น F_B และ F_C
2. ใช้ค่าแรง F_B และ F_C หาค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับของ girder ให้มีค่าเป็น F_1 และ F_2
3. ใช้ method of sections หาค่าของแรงเฉือนและของโมเมนต์ดัดที่จุด P ดังที่แสดงในรูปที่ 6-16c
4. ทำขั้นตอนที่ 1 ถึง 3 บนช่วงต่างๆ ของคาน
5. เมื่อได้จำนวนจุดที่พอเพียงแล้ว ใช้ข้อมูลที่ได้นำมาเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนและของโมเมนต์ดัดที่จุด P

เราควรที่จะทราบว่า ค่าของโมเมนต์ภายใน (internal moment) M_P จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุด P ยกตัวอย่างเช่น จากรูปที่ 6-16c เราจะได้ว่า

$$M_P = F_1(d) - F_B(d-s)$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของระยะ d จากปลายของ girder เป็นต้น แต่ค่าของแรงเฉือนภายใน (internal shear) V_P จะไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุด P หรือคงที่ตลอดระยะ BC โดยที่

$$V_P = (F_1 - F_B)$$

อีกวิธีการหนึ่งซึ่งมีความง่ายกว่าวิธีการแรก ที่มักจะถูกใช้ในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนและของโมเมนต์ดัดของ girder คือ การวางแรง 1 หน่วยที่ตำแหน่งของคานที่รองรับพื้นแล้ว ทำการวิเคราะห์ girder ตามที่ได้กล่าวมา จากนั้น ทำเช่นนี้จนครบทุกจุด แล้วนำข้อมูลต่างๆ ที่ได้นำมาเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ โดยการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างค่าเหล่านั้น

ตัวอย่างที่ 6-7

พิจารณา girder ดังที่แสดงในรูปที่ 6-17a จงทำการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_E แรงเฉือนในช่วง BC และ AB ของ girder และโมเมนต์ดัด M_B M_C และ M_P

โดยการวางแรง 1 หน่วยที่ตำแหน่งของคานที่รองรับพื้นที่ละคานแล้วทำการวิเคราะห์หาแรงและโมเมนต์ที่ต้องการหา เราจะสามารถเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_E แรงเฉือนในช่วง BC และ AB ของ girder และโมเมนต์ดัด M_B M_C และ M_P ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 6-17b ถึง 6-17h ตามลำดับ โดยเราจะสังเกตลักษณะพิเศษของแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของ girder ได้ดังต่อไปนี้

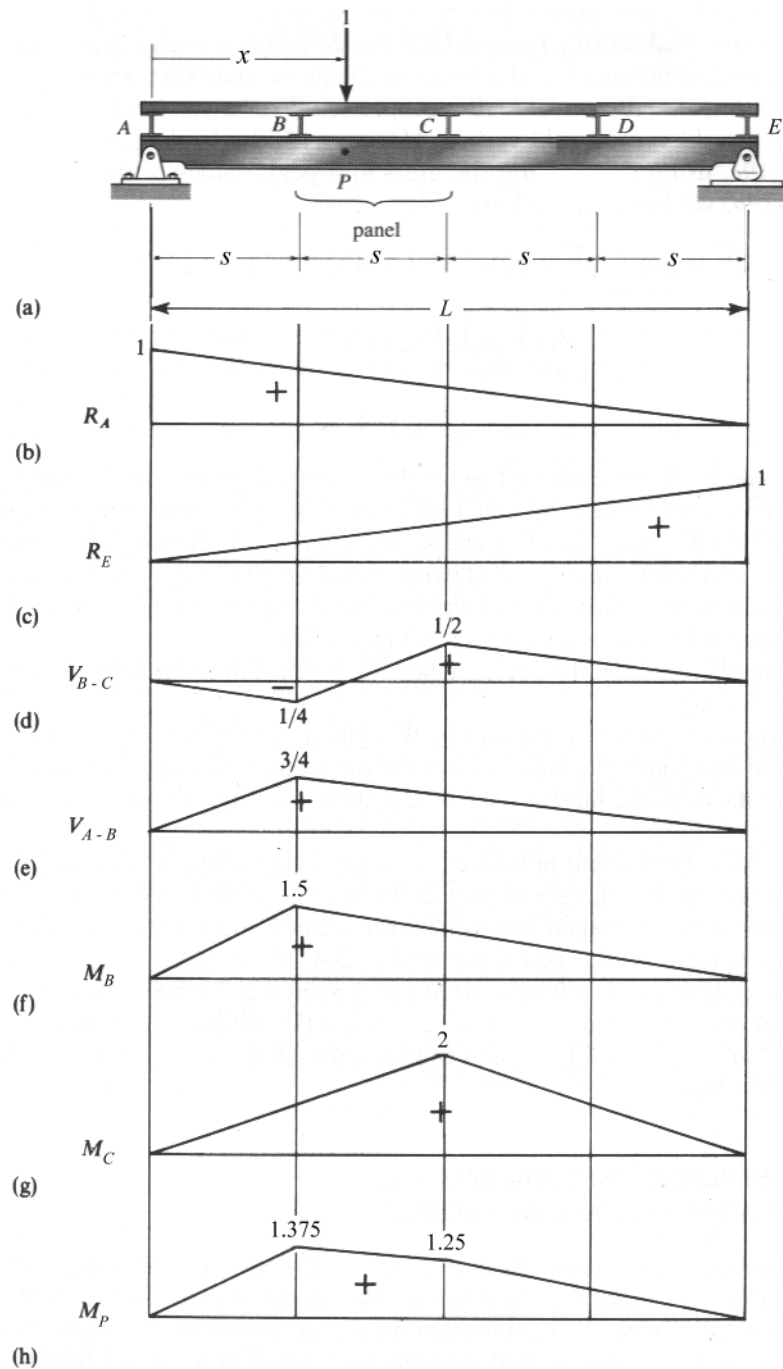
1. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_E ดังที่แสดงในรูปที่ 6-17b และ 6-17c มีลักษณะเช่นเดียวกันกับแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยาของคานช่วงเดียว ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในตอนต้นบท

2. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_{B-C} ดังที่แสดงในรูปที่ 6-17d จะหาได้จากแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_E โดยที่

- อินฟลูเอนซ์ไลน์ในช่วง $A-B$ จะมีค่าเท่ากับ $-R_E$
- อินฟลูเอนซ์ไลน์ในช่วง $C-E$ จะมีค่าเท่ากับ R_A
- อินฟลูเอนซ์ไลน์ในช่วง $B-C$ จะหาได้โดยการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่จุด B และจุด C

3. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_{A-B} ดังที่แสดงในรูปที่ 6-17e จะหาได้จากแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_E โดยที่

- อินฟลูเอนซ์ไลน์ในช่วง $B-E$ จะมีค่าเท่ากับ R_A
- อินฟลูเอนซ์ไลน์ในช่วง $A-B$ จะหาได้โดยการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่จุด A และจุด B



รูปที่ 6-17

4. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด M_B ดังที่แสดงในรูปที่ 6-17f จะหาได้โดยที่

- เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ที่จุด A แล้ว $M_B = 0$
- เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ในช่วง B-E แล้ว โมเมนต์ดัด M_B จะหาได้โดยการพิจารณาคานช่วง A-B โดยที่

$$M_B = sR_A$$

และถ้ากำหนดให้แรงหนึ่งหน่วยมีหน่วยเป็น kN และให้ $s = 2$ m แล้ว

$$M_B = (2)0.75 = 1.5 \text{ kN-m}$$

- ทำการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่หาได้

ในลักษณะเดียวกัน เราจะหาแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด M_C ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-17g

5. เราจะหาแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัดที่จุดที่อยู่ในช่วงใดๆ บนคาน เช่นจุด P ซึ่งอยู่ในช่วง $B-C$ และห่างจากจุด B เท่ากับ 0.5 m ได้ โดยที่

- เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ในช่วง $A-B$ แล้ว เราจะหาโมเมนต์ดัด M_P ได้โดยการพิจารณาคานช่วง $C-E$ ดังนี้

$$M_P = (2s + 1.5)R_E$$

ถ้าเรากำหนดให้แรง 1 หน่วยมีหน่วยเป็น kN และให้ $s = 2\text{ m}$ แล้ว

$$M_P = (2(2) + 1.5)R_E = 5.5R_E$$

ดังนั้น

$$M_P = 5.5(0) = 0\text{ kN} \cdot \text{m}$$

ที่จุด A

และ

$$M_P = 5.5(0.25) = 1.375\text{ kN} \cdot \text{m}$$

ที่จุด B

- แรง 1 หน่วยกระทำอยู่ในช่วง $C-E$ แล้ว โมเมนต์ดัด M_P จะหาได้โดยการพิจารณาคานช่วง $A-B$ โดยที่

$$M_P = (s + 0.5)R_A = (2.5)R_A$$

ดังนั้น ที่จุด B

$$M_P = 2.5(0.5) = 1.25\text{ kN} \cdot \text{m}$$

และที่จุด A

$$M_P = 0$$

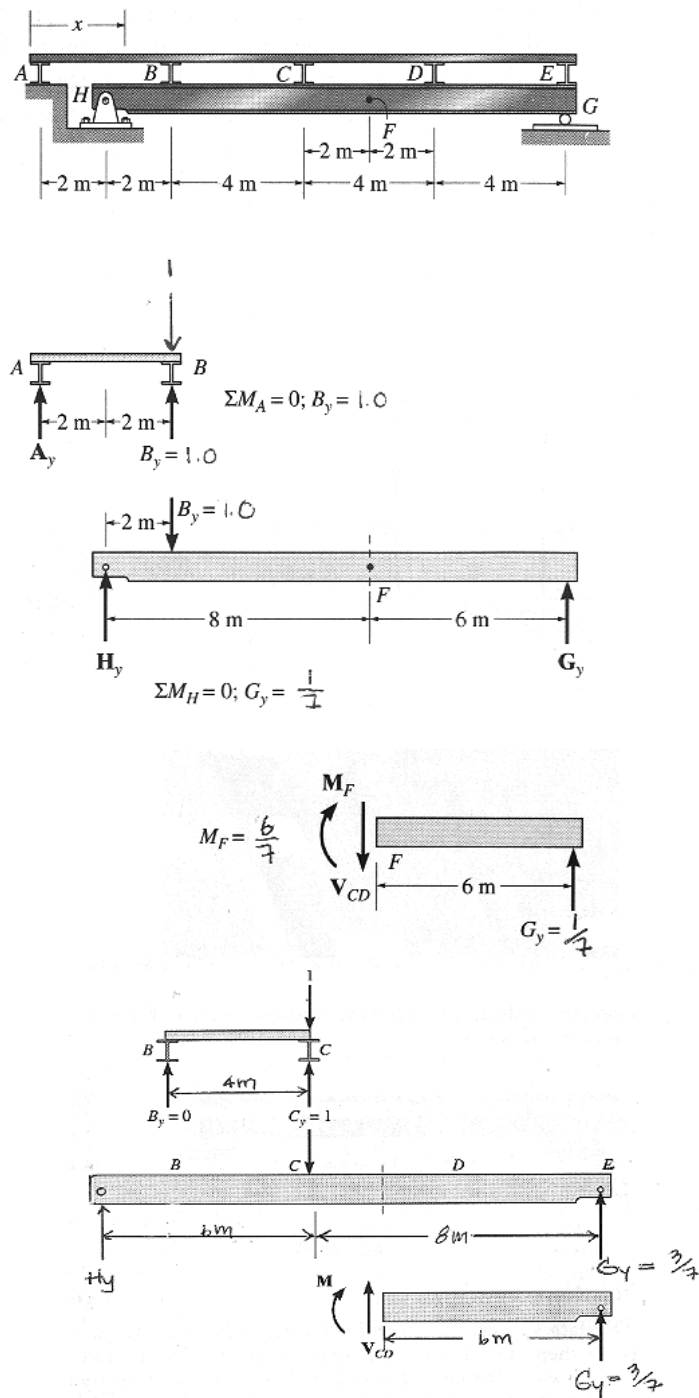
- ทำการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่หาได้

ตัวอย่างที่ 6-8

จงเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนในช่วง CD ของ girder และเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ดัด M_F ของ girder ดังที่แสดงในรูปที่ 6-18a

ขั้นตอนในการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือน V_{CD} และโมเมนต์ดัด M_F มีดังนี้

1. วางแรง 1 หน่วยที่ตำแหน่งของคันที่รองรับพื้น A ดังที่แสดงในรูปที่ 6-18a แล้วทำการวิเคราะห์ girder เพื่อหาค่าของแรงเฉือน V_{CD} และโมเมนต์ดัด M_F โดยวิธี statics ซึ่งเราจะได้ว่า แรงเฉือน V_{CD} และโมเมนต์ดัด M_F จะมีค่าเท่ากับศูนย์



(a)

รูปที่ 6-18

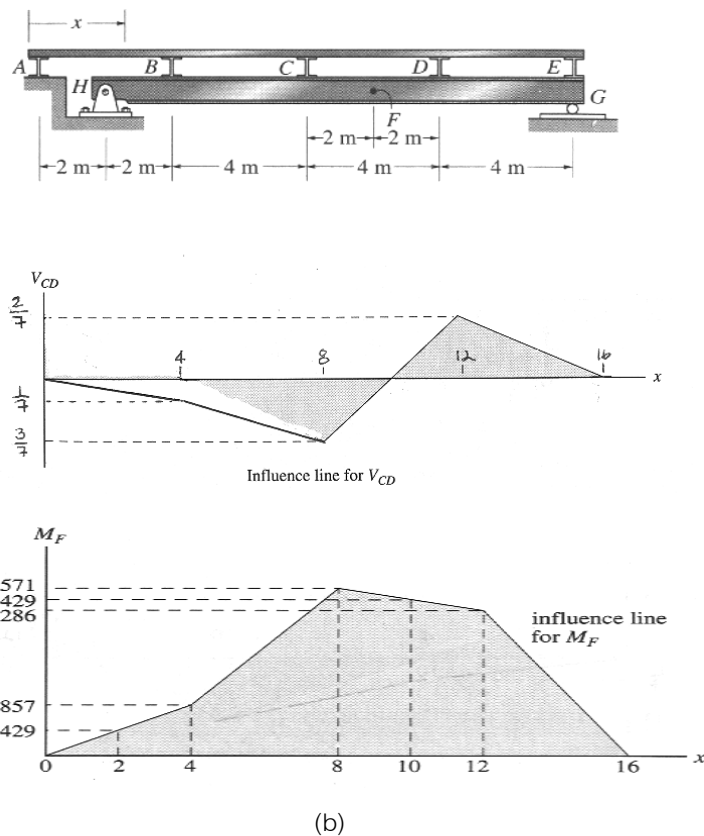
2. วางแรง 1 หน่วยที่ตำแหน่งของคานที่รองรับพื้นที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 6-18a ซึ่งจากแผนภาพ free body diagram ของส่วนของคาน FG เราจะได้ว่า จาก sign convention ที่เราใช้ในการวิเคราะห์คานโดยวิธี statics

$$V_{CD} = -G_y = -1/7 \text{ และ } M_F = 6G_y = 6/7$$

3. วางแรง 1 หน่วยที่ตำแหน่งของคานที่รองรับพื้นที่จุด C ดังที่แสดงในรูปที่ 6-18a ซึ่งจากแผนภาพ free body diagram ของส่วนของคาน FG เราจะได้ว่า จาก sign convention ที่เราใช้ในการวิเคราะห์คานโดยวิธี statics

$$V_{CD} = -G_y = -3/7 \text{ และ } M_F = 6G_y = 18/7$$

4. วางแรง 1 หน่วยที่ตำแหน่งของคานที่รองรับพื้นที่จุดอื่นๆ แล้วทำการวิเคราะห์คานโดยวิธี statics หาแรงเฉือน V_{CD} และโมเมนต์ดัด M_F
5. นำข้อมูลต่างๆ ที่ได้มาเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ โดยการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างค่าเหล่านั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 6-18b



6.5 อินฟลูเอนซ์ไลน์ของโครงข้อหมุน (Influence Lines for Trusses)

โครงข้อหมุนจะรองรับแรงหรือน้ำหนักบรรทุกทุกที่ถ่ายลงมาจากพื้นลงสู่คานชอย สุดท้ายที่จุดต่อของโครงข้อหมุน เนื่องจากแรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเป็นฟังก์ชันกับตำแหน่งของแรงกระทำที่จุดต่อของโครงข้อหมุน ดังนั้น อินฟลูเอนซ์ไลน์ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจะหาได้จากการให้แรง 1 หน่วย (unit load) กระทำที่จุดต่อของโครงข้อหมุน แล้วทำการหาแรงในชิ้นส่วนนั้นๆ ด้วยวิธี method of sections และ/หรือ method of joints จนครบทุกจุดต่อแล้ว เราจะเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ได้โดยการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างพิกัดที่ได้มาเหล่านั้น

ตัวอย่างที่ 6-8

พิจารณาโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-19a จงทำการเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_G แรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน AH และ BH แรงเฉือนในช่วง BI และแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน CI และ CD

โดยการวางแรง 1 หน่วยที่จุดต่อ (joint) ต่างๆ ของโครงข้อหมุนทีละครั้ง แล้วทำการวิเคราะห์หาแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนที่ต้องการหา เราจะสามารถเขียนแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_G แรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน AH และ BH แรงเฉือนในช่วง BI และแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน CI และ CD ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 6-19b ถึง 6-19g ตามลำดับ โดยเราจะสังเกตลักษณะพิเศษของแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโครงข้อหมุนได้ดังต่อไปนี้

1. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A และ R_G ดังที่แสดงในรูปที่ 6-19b มีลักษณะเช่นเดียวกันกับแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยาของคานช่วงเดียว

2. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงในชิ้นส่วน AH (F_{AH}) ดังที่แสดงในรูปที่ 6-19c จะหาได้โดย

- เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ที่จุด A แล้ว $F_{AH} = 0$
- เมื่อแรงขนาด 1 หน่วยอยู่ในช่วง $B-G$ แล้ว F_{AH} จะหาได้โดยการพิจารณาสมการสมดุลที่จุดรองรับ A ดังนั้น $F_{AH} = (-\sqrt{2})R_A$ (แรงกดอัด)

และเราจะเห็นได้ว่า แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรง F_{AH} ในช่วง $B-G$ จะแปรผันตรงกับอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา R_A

- อินฟลูเอนซ์ไลน์ในช่วง $A-B$ จะหาได้โดยการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่จุด A และจุด B

3. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงในชิ้นส่วน BH (F_{BH}) ดังที่แสดงในรูปที่ 6-19d จะหาได้โดยการพิจารณาโครงข้อหมุน ซึ่งเราจะได้ว่า F_{BH} จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อแรง 1 หน่วยกระทำอยู่ในช่วง $A-B$ และ $B-C$ เท่านั้น เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ที่จุด A และจุด C แล้ว $F_{BH} = 0$ และเมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ที่จุด B แล้ว $F_{BH} = 1$ จากนั้น อินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรง F_{BH} จะหาได้โดยการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่จุด A จุด B และจุด C

4. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงในแนวตั้งที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วน DI (V_{DI}) ดังที่แสดงในรูปที่ 6-19e จะหาได้โดยที่

- เมื่อแรง 1 หน่วยอยู่ในช่วง $A-C$ ของโครงข้อหมุนแล้ว เราจะพิจารณาแผนภาพ free body diagram ของโครงข้อหมุนในช่วง $D-G$ และเราจะได้ว่า

$$V_{DI} = -R_G$$

ซึ่งค่าพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์จะมีค่าเท่ากับ 0 ที่จุด A และเท่ากับ $-1/3$ ที่จุด C

- เมื่อแรงขนาด 1 หน่วยอยู่ในช่วง $D-G$ แล้ว เราจะพิจารณาแผนภาพ free body diagram ของโครงข้อหมุนในช่วง $A-C$ และเราจะได้ว่า

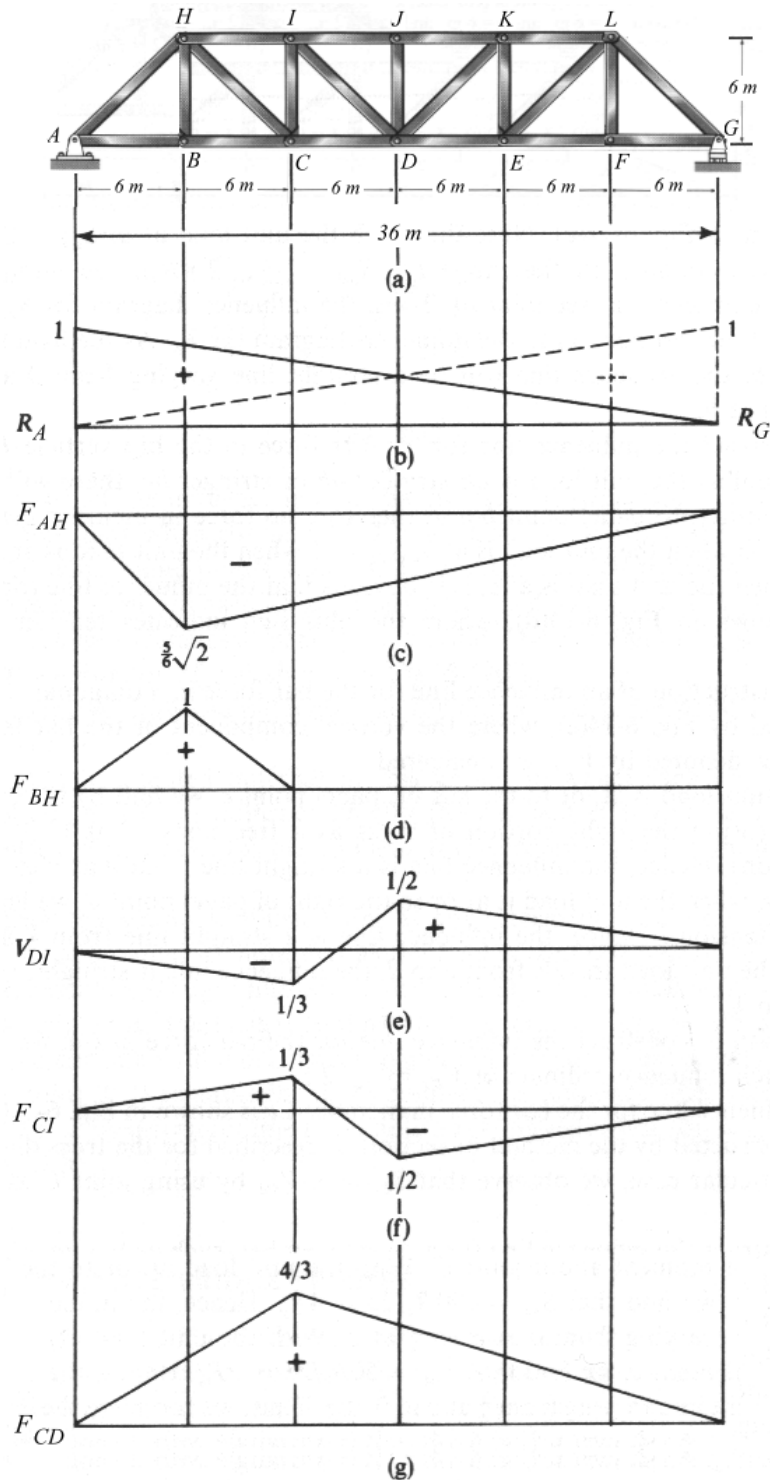
$$V_{DI} = R_A$$

ซึ่งค่าพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์จะมีค่าเท่ากับ $1/2$ ที่จุด D และเท่ากับ 0 ที่จุด G

- อินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรง F_{BH} จะหาได้โดยการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่จุดต่างๆ ที่หามาได้

นอกจากนั้นแล้ว เราจะหาแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงในชิ้นส่วน DI (F_{DI}) ได้จากการความสัมพันธ์

$$F_{DI} = \sqrt{2} V_{DI}$$



รูปที่ 6-19

5. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงในชิ้นส่วน CI (F_{CI}) ดังที่แสดงในรูปที่ 6-19f จะหาได้โดยพิจารณาสมดุลของแรงที่จุดต่อ I และเราจะได้ว่า $F_{CI} = -V_{DI}$

6. แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงในคอร์ดบนและคอร์ดล่างของโครงข้อหมุน เช่นแรงในชิ้นส่วน CD (F_{CD}) ดังที่แสดงในรูปที่ 6-19g เป็นต้น จะหาได้โดยใช้ method of sections

- เมื่อแรงขนาด 1 หน่วยอยู่ในช่วง $A-C$ แล้ว ให้เราพิจารณาสมมูลของโมเมนต์รอบจุดต่อ C ของช่วง $D-G$ ของโครงข้อหมุน และเราจะได้ว่า

$$F_{CD} = (4 \times 6)R_G / 6 = 4R_G$$

ซึ่งค่าพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์จะมีค่าเท่ากับ 0 ที่จุด A และเท่ากับ $4/3$ ที่จุด C

- เมื่อแรงขนาด 1 หน่วยอยู่ในช่วง $C-G$ แล้ว ให้เราพิจารณาสมมูลของโมเมนต์รอบจุดต่อ C ของช่วง $A-C$ ของโครงข้อหมุน และเราจะได้ว่า

$$F_{CD} = (2 \times 6)R_A / 6 = 2R_A$$

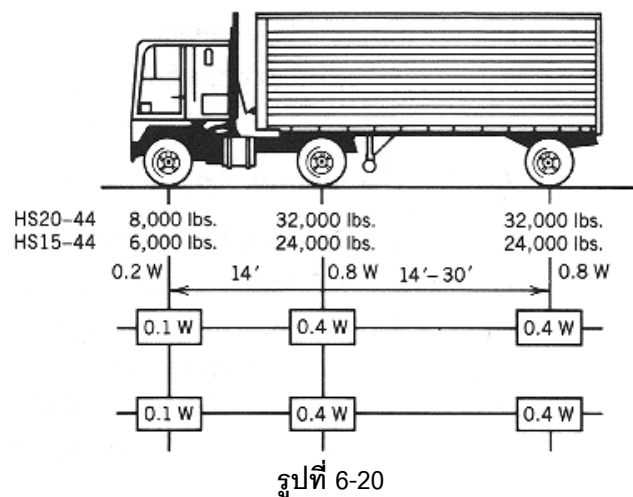
ซึ่งค่าพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์จะมีค่าเท่ากับ $4/3$ ที่จุด C และเท่ากับ 0 ที่จุด G

- ทำการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่หามาได้

6.6 น้ำหนักบรรทุกจรที่กระทำต่อสะพาน (Live Loads for Bridges)

น้ำหนักบรรทุกจรที่กระทำต่อสะพานบนทางหลวง

น้ำหนักบรรทุกจร (live load) ที่กระทำต่อสะพานจะเป็นน้ำหนักของยานพาหนะที่วิ่งผ่านสะพาน และจะมีค่าวิกฤติ (critical load) เมื่อรถบรรทุกหลายๆ คันวิ่งเรียงกันไปบนสะพานและอยู่ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง ค่าน้ำหนักและระยะระหว่างล้อของรถบรรทุกได้ถูกกำหนดไว้ในข้อกำหนดของกรมทางหลวงและ American Association of State and Highway Transportation Officials (AASHTO) ดังที่แสดงเป็นตัวอย่างในรูปที่ 6-20 โดยทั่วไปแล้ว ค่าน้ำหนักและระยะระหว่างล้อของรถบรรทุกที่จะเลือกใช้นั้นจะขึ้นอยู่กับชนิดของสะพาน สถานที่ตั้งของสะพาน และชนิดของการจราจร



แรงกระแทก (Impact Loads)

นอกจากน้ำหนักบรรทุกจรของรถแล้ว สะพานยังถูกกระทำโดยแรงกระแทกซึ่งเกิดจากการกระแทกของรถเนื่องจากความไม่ราบเรียบของสะพานด้วย AASHTO ได้กำหนดสูตรในการคำนวณค่าของแรงกระแทก ซึ่งมีค่าเป็นเปอร์เซ็นต์ที่น้ำหนักบรรทุกจรรวมจะมีค่าเพิ่มขึ้นจากแรงกระแทกนั้น และถูกเรียกว่า impact fraction, I โดยที่

$$I = \frac{15}{L + 38} \leq 0.3$$

เมื่อ L เป็นความยาวของ span ของสะพานที่ถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกจร มีหน่วยเป็นเมตร

6.7 ค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ดัดที่จุดใดจุดหนึ่งเนื่องจากกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกแบบเป็นจุด (Maximum Influence at a Point Due to a Series of Concentrated Loads)

หลังจากที่เราได้แผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงปฏิกิริยา หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ดัดที่จุดๆ หนึ่งบนโครงสร้างแล้ว ค่าสูงสุดของแรงและโมเมนต์เนื่องจากแรงกระทำเป็นจุดจะหาได้จากการคูณค่าสูงสุดของพิคคของอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงและโมเมนต์ดังกล่าวด้วยขนาดของแรงกระทำนั้น โดยปกติแล้ว โครงสร้างเช่น สะพาน มักจะมีถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกของรถบรรทุก ซึ่งมีลักษณะเป็นกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกแบบเป็นจุด ในกรณีนี้ ค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ดัดที่จุดๆ หนึ่งบนโครงสร้างอาจจะหามาได้โดยใช้

1. วิธีการลองผิดลองถูก (trial-and-error)
2. วิธีการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันของแรงปฏิกิริยา หรือของแรงเฉือน หรือของโมเมนต์ดัดในขณะที่เป็นกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกแบบเป็นจุดนั้นเคลื่อนที่ไปตามจุดต่างๆ ของโครงสร้าง

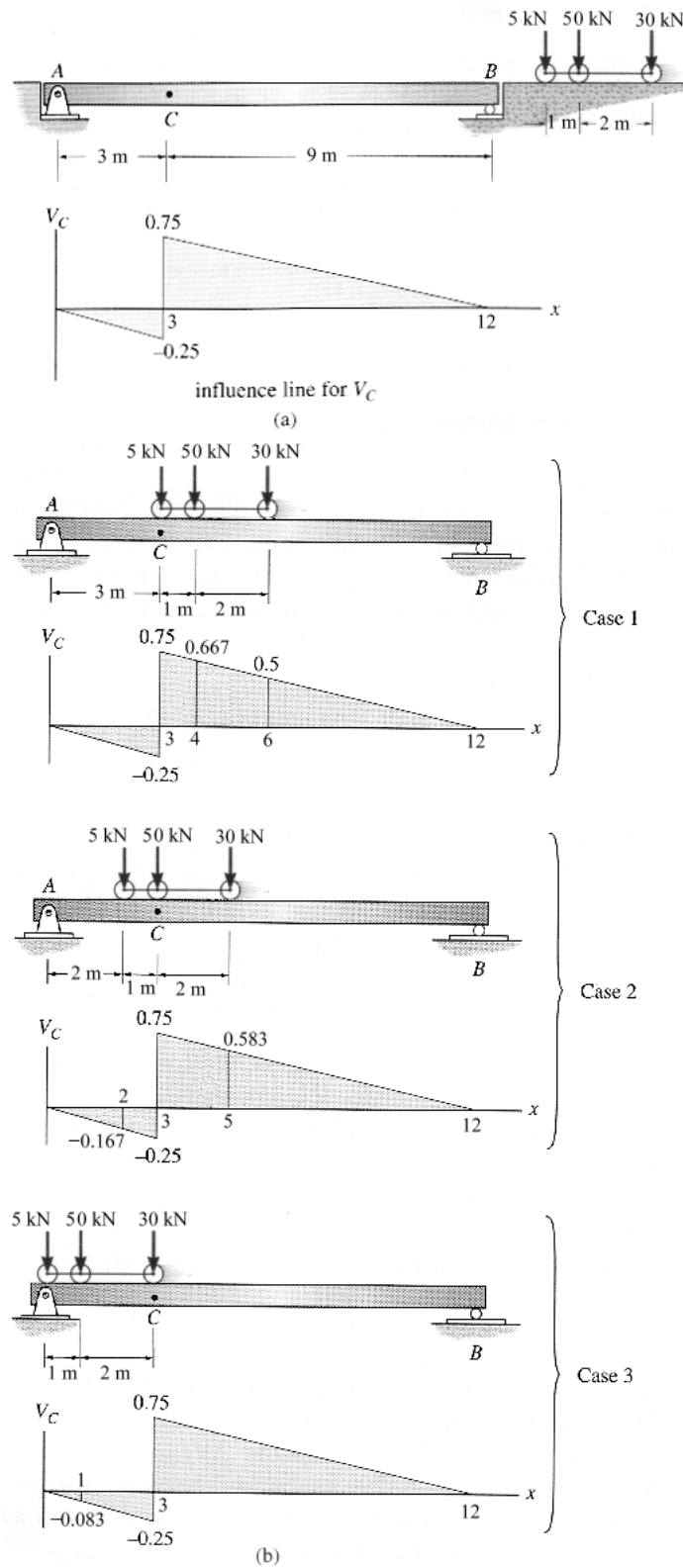
ค่าแรงเฉือนสูงสุด

พิจารณาคาน simply supported beam ซึ่งมีแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนที่จุด C ดังที่แสดงในรูปที่ 6-21a ในที่นี้เราต้องการที่จะหาค่าแรงเฉือนบวกสูงสุด (maximum positive shear) ที่จุด C ดังกล่าว เนื่องจากการกระทำของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกแบบเป็นจุด ซึ่งเคลื่อนที่จากจุดรองรับ B ไปยังจุดรองรับ A จากการพิจารณาอินฟลูเอนซ์ไลน์

ของแรงเฉือนที่จุด C เราจะได้ว่า ค่าแรงเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นเมื่อค่าใดค่าหนึ่งในกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกวางอยู่ทางด้านขวามือถัดจากจุด C ไปเล็กน้อย เนื่องจากจุดดังกล่าวเป็นจุดที่แรงเฉือนมีค่าบวกสูงสุด

วิธีการลองผิดลองถูก

โดยวิธีการลองผิดลองถูก เราจะแบ่งการพิจารณาวางกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกออกเป็น 3 กรณี ดังที่แสดงในรูปที่ 6-21b



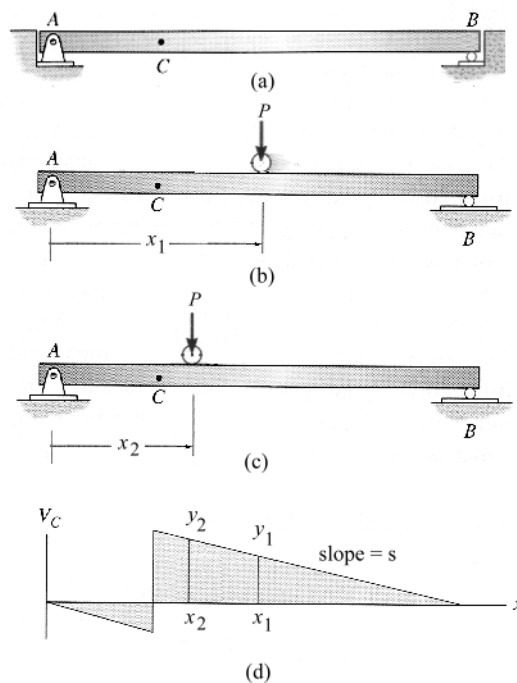
รูปที่ 6-21

$$\begin{aligned}\text{กรณีที่ 1:} \quad (V_C)_1 &= 5(0.75) + 50(0.667) + 30(0.5) &= 52.1 \text{ kN} \\ \text{กรณีที่ 2:} \quad (V_C)_2 &= 5(-0.167) + 50(0.75) + 30(0.583) &= 54.2 \text{ kN} \\ \text{กรณีที่ 3:} \quad (V_C)_3 &= 5(0) + 50(-0.083) + 50(0.75) &= 18.3 \text{ kN}\end{aligned}$$

เราจะเห็นได้ว่า กรณีที่ 2 ซึ่งเป็นกรณีที่แรง 50 kN วางอยู่ที่ระยะ 3 m ทางด้านซ้ายมือของจุดรองรับ A เป็นกรณีที่กลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดดังกล่าวให้ค่า V_C สูงสุด เราควรที่จะสังเกตด้วยว่า เราไม่จำเป็นต้องตรวจสอบการจัดกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดในกรณีที่ 3 เพราะโดยลักษณะการจัดวางแล้ว $(V_C)_3$ จะไม่มีค่ามากกว่า $(V_C)_2$

วิธีการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันของแรงเฉือน

ในกรณีที่กลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดมีความซับซ้อน ดังเช่นในกรณีของกลุ่มน้ำหนักล้อของรถไฟ เป็นต้น วิธีการลองผิดลองถูกจะมีความยุ่งยากมากและทำได้ช้า ซึ่งในกรณีเช่นนี้ เราจะหาค่าแรงเฉือนสูงสุดโดยการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันของแรงเฉือน ΔV ในขณะที่เป็นกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดเคลื่อนที่จากกรณีที่ 1 ไปกรณีที่ 2 และจากกรณีที่ 2 ไปกรณีที่ 3 เรื่อยๆ ไป ถ้าการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน ΔV มีค่าเป็นบวกแล้ว ตำแหน่งของกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดในกรณีที่กำลังพิจารณาอยู่นี้จะให้ค่าแรงเฉือนมากกว่าตำแหน่งของกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดในกรณีก่อนหน้านี้ และเราจะต้องตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน ΔV ไปจนกว่าจะได้ค่าของ ΔV ที่มีค่าเป็นลบ เมื่อได้ค่า ΔV ที่เป็นลบแล้ว เราจะได้ว่า ตำแหน่งสุดท้ายก่อนหน้านี้ที่ ΔV มีค่าเป็นบวกจะเป็นตำแหน่งที่เกิดค่าแรงเฉือนสูงสุด



รูปที่ 6-22

พิจารณาคาน ซึ่งมีแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ที่จุด C ดังที่แสดงรูปที่ 6-22a เมื่อน้ำหนักบรรทุกทุกจุด P เคลื่อนที่ผ่านอินฟลูเอนซ์ไลน์ในช่วงที่มีความต่อเนื่อง (continuity) จากตำแหน่ง x_1 ดังที่แสดงรูปที่ 6-22b ไปยังตำแหน่ง x_2 ดังที่แสดงรูปที่ 6-22c แล้ว ค่าการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน ΔV บนคานจะหาได้จากผลคูณของค่าของน้ำหนักบรรทุกทุกจุด P กับค่าการเปลี่ยนแปลงพิกัดของอินฟลูเอนซ์ไลน์ระหว่างจุด 2 จุดนั้น $(y_2 - y_1)$ ดังที่แสดงรูปที่ 6-22d

$$\Delta V = P(y_2 - y_1)$$

ถ้าให้ความชันของอินฟลูเอนซ์ไลน์มีค่าเป็น s แล้ว เราจะได้ว่า

$$(y_2 - y_1) = s(x_2 - x_1)$$

ดังนั้น ค่าการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน ΔV ในช่วงที่อินฟลูเอนซ์ไลน์มีความต่อเนื่องและมีความชัน s จะมีค่าเท่ากับ

$$\Delta V = P s (x_2 - x_1) \quad (6-1)$$

เมื่อน้ำหนักบรรทุกจุด P เคลื่อนที่ผ่านจุดที่อินฟลูเอนซ์ไลน์ไม่มีความต่อเนื่อง (discontinuity) หรือ “jump” ดังเช่นที่จุด C ในรูปที่ 6-22d แล้ว ค่าการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน ΔV ในช่วงนี้จะมีค่าเท่ากับ

$$\Delta V = P(y_2 - y_1) \quad (6-2)$$

พิจารณาตัวอย่างตามรูปที่ 6-21a เราจะได้ว่า ค่าความชันของอินฟลูเอนซ์ไลน์มีค่าเท่ากับ

$$s = \frac{0.75}{12 - 3} = \frac{1}{12}$$

และ jump ที่จุด C มีค่าเท่ากับ

$$-0.25 - 0.75 = -1.0$$

เมื่อกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกจุดเคลื่อนที่จากกรณีที่ 1 ไปยังกรณีที่ 2 ดังที่แสดงในรูปที่ 6-21b แล้ว เราจะเห็นว่า แรง 5 kN จะ jump down ที่จุด C เท่ากับ -1 จากนั้น แรง 5 kN ดังกล่าว แรง 50 kN และแรง 30 kN จะเลื่อนขึ้นตามความชัน s ของอินฟลูเอนซ์ไลน์ ดังนั้น ค่าการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน ΔV เนื่องจากการเคลื่อนที่ดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับ

$$\Delta V_{1-2} = 5(-1) + [5 + 50 + 30]\left(\frac{1}{12}\right)(1) = +2.1 \text{ kN}$$

เนื่องจาก ΔV_{1-2} มีค่าเป็นบวก ดังนั้น กรณีที่ 2 จะให้ค่า V_C มากกว่ากรณีที่ 1 (เราจะเห็นได้จากการคำนวณโดยวิธีลองผิดลองถูกว่า $\Delta V_{1-2} = (V_C)_2 - (V_C)_1 = +2.1 \text{ kN}$ เช่นกัน)

ในกรณีที่กลุ่มของน้ำหนักบรรทุกจุดเคลื่อนที่จากกรณีที่ 2 ไปยังกรณีที่ 3 เราจะเห็นว่า แรง 50 kN จะ jump down ที่จุด C เท่ากับ -1 จากนั้น แรง 50 kN ดังกล่าว แรง 5 kN และแรง 30 kN จะเลื่อนขึ้นตามความชัน s ของอินฟลูเอนซ์ไลน์ และเราจะได้ว่า

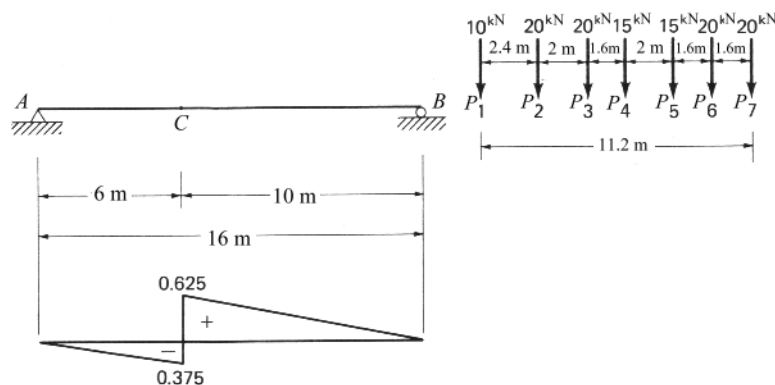
$$\Delta V_{2-3} = 50(-1) + [5 + 50 + 30]\left(\frac{1}{12}\right)(2) = -35.8 \text{ kN}$$

เนื่องจาก ΔV_{2-3} มีค่าเป็นลบ ดังนั้น กรณีที่ 2 จะเป็นตำแหน่งของกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกจุดที่ทำให้เกิดแรงเฉือนสูงสุดที่จุด

C

ตัวอย่างที่ 6-8

จงหาค่าแรงเฉือนบวกสูงสุดที่จุด C เนื่องจากกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกจุด P_1 ถึง P_7 ดังที่แสดงในรูปที่ 6-23



รูปที่ 6-23

เริ่มต้น เราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกจุด P_1 ถึง P_7 จากกรณีที่แรง P_1 อยู่ที่จุด C ไปยังกรณีที่แรง P_2 อยู่ที่จุด C โดยที่ค่าความชันของอินฟลูเอนซ์ไลน์มีค่าเท่ากับ

$$s = 0.625 / 10 = 0.0625$$

เราควรสังเกตด้วยว่า เมื่อแรง P_1 อยู่ที่จุด C แล้ว แรง P_7 ยังคงอยู่นอกคาน 1.2 m และเมื่อแรง P_2 เลื่อนมาอยู่ที่จุด C แล้ว แรง P_7 จะอยู่ห่างจากจุดรองรับ B เข้ามาในคาน 1.2 m ดังนั้น การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน $(\Delta V_C)_{1-2}$ มีค่าเท่ากับ

$$(\Delta V_C)_{1-2} = 10(-1) + [10 + 20 + 20 + 15 + 15 + 20](0.0625)2.4 + 20(0.0625)1.2 = 6.5 \text{ kN}$$

การเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนจากกรณีที่ 2 (แรง P_2 อยู่ที่จุด C) มายังกรณีที่ 3 (แรง P_3 อยู่ที่จุด C) หรือ $(\Delta V_C)_{2-3}$ มีค่าเท่ากับ

$$(\Delta V_C)_{2-3} = 20(-1) + [10 + 20 + 20 + 15 + 15 + 20 + 20](0.0625)2 = -5 \text{ kN}$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดจะเกิดเมื่อแรง P_2 วางอยู่ที่จุด C และมีค่าเท่ากับ

$$(V_C)_{\max} = -10(0.0625)(3.6) + [20(10) + 20(8) + 15(6.4) + 15(4.4) + 20(2.8) + 20(1.2)](0.0625)$$

$$(V_C)_{\max} = 35.375 \text{ kN}$$

ค่าโมเมนต์สูงสุด

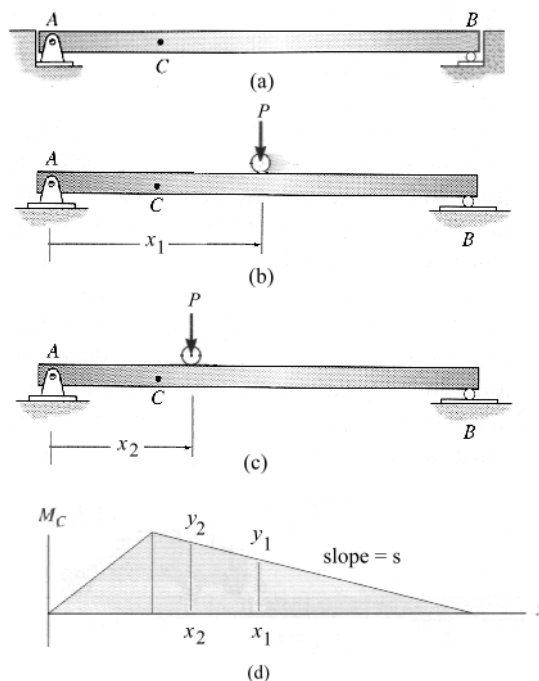
ในลักษณะเช่นเดียวกับในกรณีของแรงเฉือน เราสามารถหาตำแหน่งของกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดที่ก่อให้เกิดค่าโมเมนต์สูงสุดที่จุดใดจุดหนึ่งบนโครงสร้างได้โดยวิธีการลองผิดลองถูกหรือโดยวิธีการหาค่าการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันของโมเมนต์ ΔM

ในวิธีการหาค่าการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันของโมเมนต์ ΔM ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-24a นั้น ค่าการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ ΔM เนื่องจากการเคลื่อนที่ของกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุด P จากตำแหน่ง x_1 ดังที่แสดงในรูปที่ 6-24b ไปยังตำแหน่ง x_2 บนคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-24c จะหาได้จากผลคูณของค่าของแรงของกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุด P กับค่าการเปลี่ยนแปลงพิทัก ($y_2 - y_1$) ของอินฟลูเอนซ์ไลน์ระหว่างจุด 2 จุดนั้น ดังที่แสดงในรูปที่ 6-24d ถ้าให้ความชันของอินฟลูเอนซ์ไลน์มีค่าเป็น s แล้ว เราจะได้ว่า

$$(y_2 - y_1) = s(x_2 - x_1)$$

ดังนั้น ค่าการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ ΔM จะมีค่าเท่ากับ

$$\Delta M = P s (x_2 - x_1) \quad (6-3)$$



รูปที่ 6-24

พิจารณาคาน simply supported beam ที่ถูกกระทำโดยกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกและมีแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ที่จุด C บนคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-25a ในที่นี้ เราจะจัดเรียงกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดเพื่อค่าโมเมนต์สูงสุดได้เป็น 3 กรณี ดังที่แสดงในรูปที่ 6-25b

ในกรณีที่กลุ่มของน้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่จากกรณีที่ 1 ไปยังกรณีที่ 2 เราจะเห็นได้ว่า แรง 5 kN จะทำให้ค่าการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ ΔM_{1-2} มีค่าลดลง เนื่องจากค่าความชันของอินฟลูเอนซ์ไลน์ในช่วง AC มีค่าเป็นลบ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$s_{AC} = -\frac{2.25}{3} = -0.75$$

ในขณะเดียวกันแรง 50 kN และ 30 kN จะทำให้ค่าการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ ΔM_{1-2} มีค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจากค่าความชันของอินฟลูเอนซ์ไลน์ในช่วง BC มีค่าเป็นบวก ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$s_{BC} = +\frac{2.25}{9} = +0.25$$

ดังนั้น ค่าการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ ΔM_{1-2} มีค่าเท่ากับ

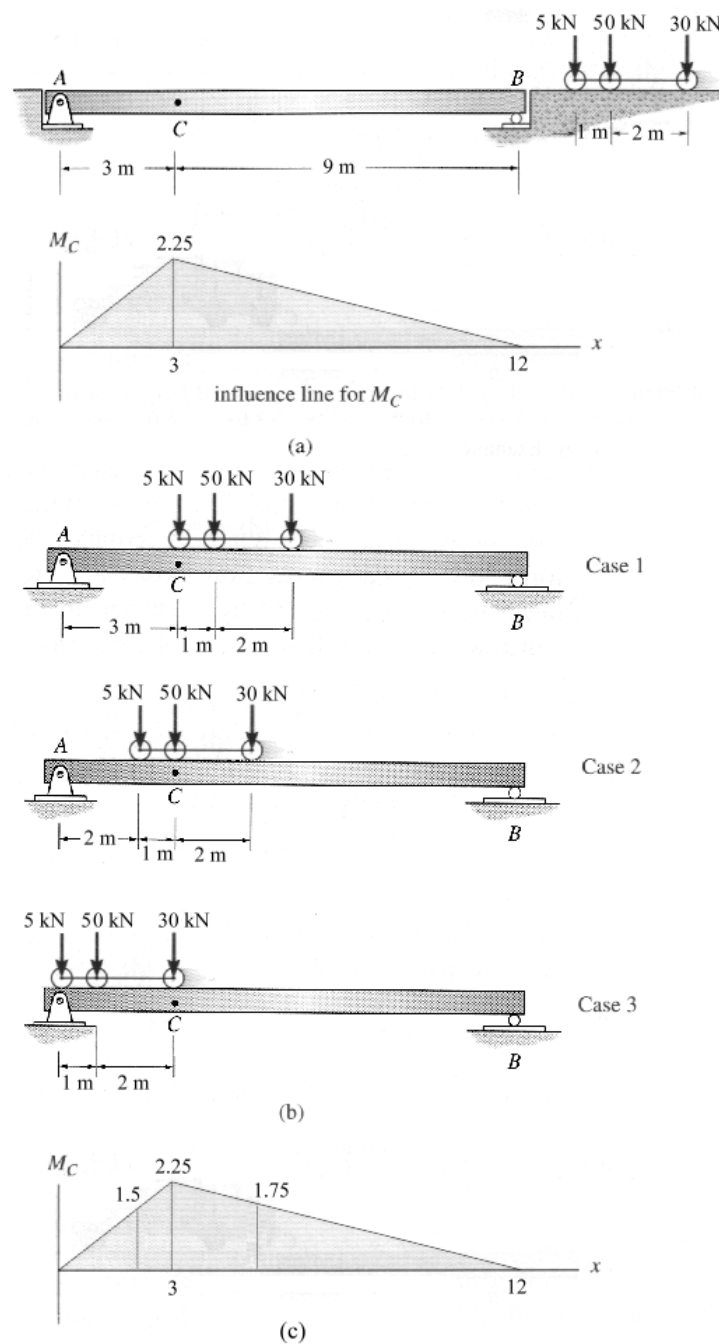
$$\Delta M_{1-2} = 5(-0.75)1 + [50 + 30](0.25)1 = 16.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

เนื่องจาก ΔM_{1-2} มีค่าเป็นบวก เราจะตรวจสอบในกรณีที่ 2 เลื่อนไปที่กรณีที่ 3 ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\Delta M_{2-3} = [5 + 50](-0.75)2 + 30(0.25)2 = -67.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

เนื่องจาก ΔM_{2-3} มีค่าเป็นลบ ดังนั้น กรณีที่ 2 จะเป็นตำแหน่งที่โดยกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจากรถก่อให้เกิดค่าโมเมนต์สูงสุดที่จุด C และรูปที่ 6-25c

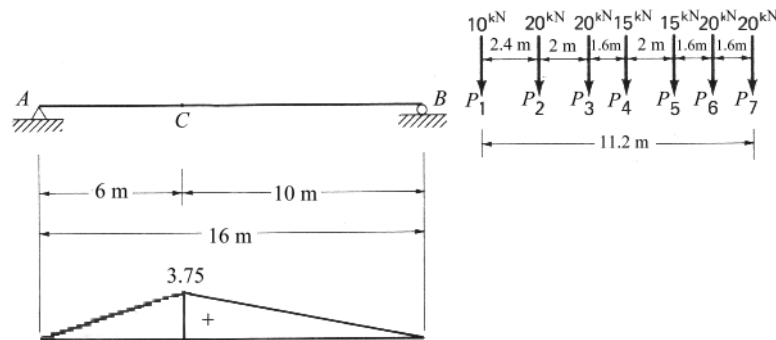
$$(M_C)_{\max} = 5(1.5) + 50(2.25) + 30(1.75) = 172.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



รูปที่ 6-25

ตัวอย่างที่ 6-9

จงหาค่าโมเมนต์บวกสูงสุดที่จุด C เนื่องจากกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกจร P_1 ถึง P_7 ดังที่แสดงในรูปที่ 6-26



รูปที่ 6-26

เริ่มต้น เราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกจร P_1 ถึง P_7 จากกรณีที่แรง P_1 อยู่ที่จุด C ไปยังกรณีที่แรง P_2 อยู่ที่จุด C โดยที่ค่าความชันของอินฟลูเอนซ์ไลน์มีค่าเท่ากับ

$$s_{AC} = -\frac{3.75}{6} = -0.625$$

$$s_{BC} = +\frac{3.75}{10} = +0.375$$

การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัด $(\Delta M_C)_{1-2}$ มีค่าเท่ากับ

$$(\Delta M_C)_{1-2} = 10(-0.625)2.4 + [20 + 20 + 15 + 15 + 20](0.375)2.4 + 20(0.375)1.2$$

$$(\Delta M_C)_{1-2} = 75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดจากกรณีที่ 2 (แรง P_2 อยู่ที่จุด C) มายังกรณีที่ 3 (แรง P_3 อยู่ที่จุด C) หรือ

$(\Delta M_C)_{2-3}$ มีค่าเท่ากับ

$$(\Delta M_C)_{2-3} = [10 + 20](-0.625)2 + [20 + 15 + 15 + 20 + 20](0.375)2$$

$$(\Delta M_C)_{2-3} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดจากกรณีที่ 3 (แรง P_3 อยู่ที่จุด C) มายังกรณีที่ 4 (แรง P_4 อยู่ที่จุด C) หรือ

$(\Delta M_C)_{3-4}$ มีค่าเท่ากับ

$$(\Delta M_C)_{3-4} = [10 + 20 + 20](-0.625)1.6 + [15 + 15 + 20 + 20](0.375)1.6$$

$$(\Delta M_C)_{3-4} = -8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

ดังนั้น โมเมนต์ดัดสูงสุดจะเกิดเมื่อแรง P_3 วางอยู่ที่จุด C และมีค่าเท่ากับ

$$(M_C)_{\max} = [10(1.6) + 20(4)]0.625 + [20(10) + 15(8.4) + 15(6.4) + 20(4.8) + 20(3.2)](0.375)$$

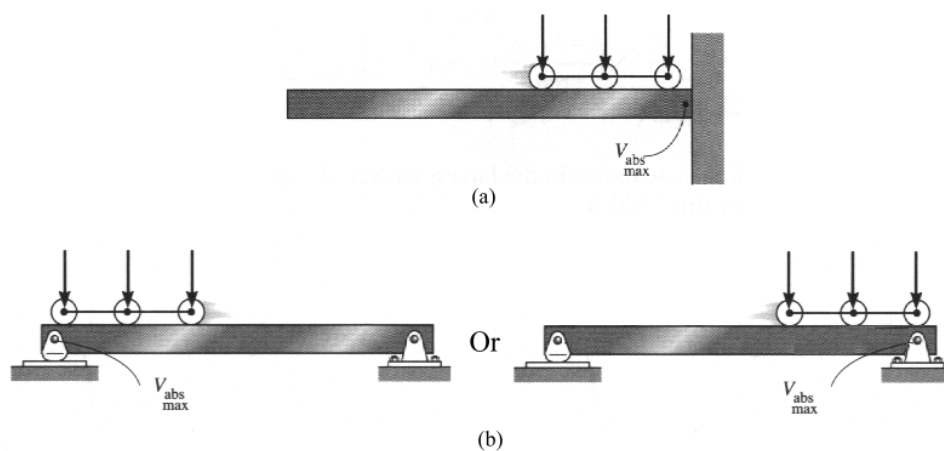
$$(M_C)_{\max} = 278.25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

6.8 ค่าสูงสุดที่แท้จริง (สัมบูรณ์) ของแรงเฉือนและของโมเมนต์ (Absolute Maximum Shear and Moment)

ค่าสูงสุดของแรงเฉือนและของโมเมนต์ ที่ได้กล่าวถึงไปแล้วนั้น อาจจะไม่เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ก็ได้ เนื่องจากค่าที่ได้เป็นค่าสูงสุดที่เกิดขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งที่เรากำลังพิจารณาอยู่นั้น แต่โดยทั่วไปแล้ว ในการออกแบบโครงสร้าง เราต้องการที่จะหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของแรงเฉือน (absolute maximum shear) และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์ (absolute maximum moment) ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อมีการจัดวางของกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนคานาอย่างเหมาะสม

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของแรงเฉือน

ในกรณีของคานายื่น (cantilever beam) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของแรงเฉือนเนื่องจากกลุ่มของน้ำหนักบรรทุกทุกจุดจะเกิดขึ้นที่จุดยึดแน่น (fixed support) และเมื่อเราพิจารณาแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนที่จุดดังกล่าว เราจะได้ว่า การจัดวางของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกทุกจุดที่จะก่อให้เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของแรงเฉือนจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 6-27a โดยจัดให้แรงอันแรกในกลุ่มน้ำหนักบรรทุกทุกจุดวางอยู่ตรงจุดยึดแน่นนั้น

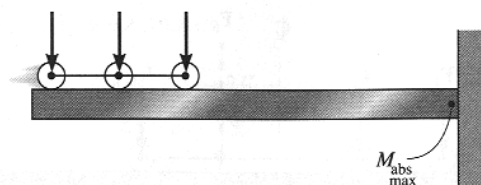


รูปที่ 6-27

ในกรณีของคานา simply supported beam ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของแรงเฉือนจะเกิดขึ้นที่จุดรองรับใดจุดหนึ่งของคานา และเมื่อเราพิจารณาแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของแรงเฉือนที่จุดรองรับของคานา เราจะได้ว่า การจัดวางของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกทุกจุดที่จะก่อให้เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของแรงเฉือนจะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 6-27b โดยการจัดให้แรงลัพธ์ของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกทุกจุดวางอยู่ใกล้กับจุดรองรับของคานาให้มากที่สุด

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์ของคานายื่นจะเกิดขึ้นที่จุดรองรับยึดแน่น ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดที่เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของแรงเฉือน และเมื่อเราพิจารณาแผนภาพอินฟลูเอนซ์ไลน์ของโมเมนต์ของคานา เราจะได้ว่า การจัดวางของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกทุกจุดที่จะก่อให้เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์จะมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 6-28 โดยการจัดให้แรงลัพธ์ของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกทุกจุดวางอยู่ใกล้กับปลายอิสระของคานาให้มากที่สุด



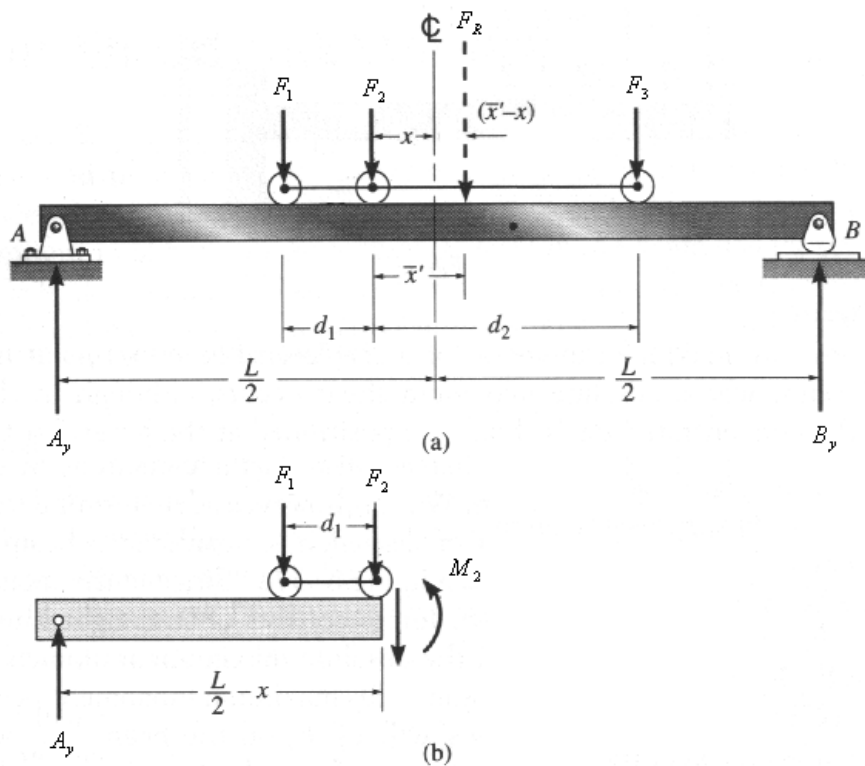
รูปที่ 6-28

ในกรณีของคานช่วงเดียวที่มีการรองรับธรรมดา นั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์และตำแหน่งของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์จะไม่สามารถหาได้โดยง่าย ดังนั้น เราจะต้องทำการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

พิจารณาคาน simply supported beam ที่ถูกกระทำโดยกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจร ดังที่แสดงในรูปที่ 6-29a เนื่องจาก moment diagram ของแรงกระทำเป็นจุดแต่ละแรงในกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจรมีลักษณะเป็นส่วนของเส้นตรงที่มีค่าสูงสุดตรงจุดที่แรงเหล่านั้นกระทำ ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์จะต้องเกิดขึ้นตรงจุดที่แรงใดแรงหนึ่งในกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจรกระทำ ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว แรงดังกล่าวจะเป็นแรงที่มีค่าสูงสุดในกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจร สมมติให้ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์เกิดขึ้นตรงจุดที่แรง F_2 กระทำ และกำหนดให้ตำแหน่งของแรงในกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจร F_1 F_2 และ F_3 ถูกกำหนดโดยระยะ x ที่วัดจากแรง F_2 ไปยังจุดกึ่งกลางของคาน ดังที่แสดงในรูป ซึ่งเราจะหาระยะ x ได้ดังนี้

1. หาค่าแรงลัพธ์ F_R ของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจร F_1 F_2 และ F_3
2. หาระยะ $\bar{x}'$ ที่วัดจากแรงลัพธ์ F_R ไปยังแรง F_2
3. พิจารณาโมเมนต์รอบจุด B เพื่อหาแรงปฏิกิริยา A_y ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-29a

$$\uparrow + \sum M_B = 0; \quad A_y = \frac{1}{L} (F_R) \left[\frac{L}{2} - (\bar{x}' - x) \right]$$



รูปที่ 6-29

4. โดยใช้ method of sections ตัดคานตรงจุดที่แรง F_2 กระทำแล้ว เขียนแผนภาพ free body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 6-29b เราจะหาโมเมนต์ M_2 ได้เป็น

$$\begin{aligned} M_2 &= A_y \left(\frac{L}{2} - x \right) - F_1 d_1 \\ &= \frac{1}{L} (F_R) \left[\frac{L}{2} - (\bar{x}' - x) \right] \left(\frac{L}{2} - x \right) - F_1 d_1 \\ &= \frac{F_R L}{4} - \frac{F_R \bar{x}'}{2} - \frac{F_R x^2}{L} + \frac{F_R x \bar{x}'}{L} - F_1 d_1 \end{aligned}$$

5. ระยะ x ที่จะทำให้เกิดค่าสูงสุดของโมเมนต์ M_2 จะหาได้จาก $\frac{dM_2}{dx} = 0$ ดังนั้น

$$\frac{dM_2}{dx} = -\frac{2F_R x}{L} + \frac{F_R \bar{x}'}{L} = 0$$

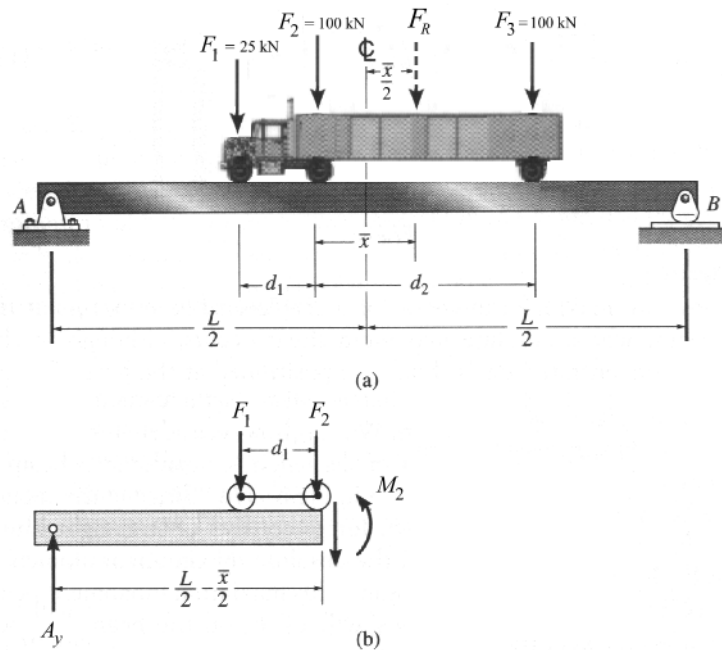
$$x = \frac{\bar{x}'}{2}$$

ดังนั้น เราจะสรุปได้ว่า

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์ในคาน simply supported beam มักจะเกิดขึ้นที่ใต้แรงที่มีค่าสูงสุดในกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจร โดยให้จุดกึ่งกลางระหว่างแรงสูงสุดและแรงลัพธ์ของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจรนั้นวางอยู่ที่จุดกึ่งกลางของคาน

ตัวอย่างที่ 6-10

พิจารณาคาน simply supported beam ซึ่งถูกกระทำโดยกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจรจากน้ำหนักของรถบรรทุก ดังที่แสดงในรูปที่ 6-30a กำหนดให้ ความยาวของ span ของคาน $L = 18 \text{ m}$ แรงในกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจร $F_1 = 25 \text{ kN}$ $F_2 = 100 \text{ kN}$ และ $F_3 = 100 \text{ kN}$ และระยะระหว่างแรงในกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจร $d_1 = 2 \text{ m}$ และ $d_2 = 6 \text{ m}$ จงหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์ที่เกิดขึ้นบนคาน



รูปที่ 6-30

1. หาค่าแรงลัพธ์ F_R ของกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจร F_1 F_2 และ F_3

$$F_R = 25 + 100 + 100 = 225 \text{ kN}$$

2. หาระยะ $\bar{x}$ ที่วัดจากแรงลัพธ์ F_R ไปยังแรงที่มีค่าสูงสุดในกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจรหรือ F_2 ได้จากผลรวมของโมเมนต์เนื่องจากแรงลัพธ์มีค่าเท่ากับผลรวมของโมเมนต์เนื่องจากแรงต่างๆ รอบแรง F_2

$$225\bar{x} = 100(0) + 100(6) - 25(2)$$

$$\bar{x} = 2.444 \text{ m}$$

3. ทำการวางกลุ่มน้ำหนักบรรทุกจรโดยให้จุดกึ่งกลางคานอยู่ที่ตำแหน่ง $\bar{x}/2$ ดังที่แสดงในรูปที่ 6-30a
4. คำนวณหาโมเมนต์ M_2 ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดของคานใต้แรง F_2 โดยใช้ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 6-30a

$$L/2 - \bar{x}/2 = 18/2 - 2.444/2 = 7.778 \text{ m}$$

$$\uparrow + \sum M_B = 0; \quad A_y(18) - 225(7.778) = 0$$

$$A_y = 97.225 \text{ kN}$$

โดยใช้ free body diagram บนส่วนของคานา ดังที่แสดงในรูปที่ 6-30b เราจะได้

$$\downarrow + \sum M_2 = 0; \quad M_2 + 25(2) - 97.225(7.778) = 0$$

$$M_2 = 706.22 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

5. ตรวจสอบค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดของคานาใต้แรง F_3 ในกรณีนี้ที่จุดกึ่งกลางของระยะระหว่างแรงลัพธ์ F_R และแรง F_3 อยู่กึ่งกลาง span ของคานา

ระยะระหว่างแรง F_R และแรง F_3 มีค่าเท่ากับ $6 - 2.444 = 3.556 \text{ m}$ ดังนั้น ระยะระหว่างจุดรองรับ A กับแรงลัพธ์ F_R มีค่าเท่ากับ $9 - 3.556/2 = 7.222 \text{ m}$

แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B หรือ B_y มีค่าเท่ากับ

$$\downarrow + \sum M_A = 0; \quad B_y(18) - 225(7.222) = 0$$

$$B_y = 90.275 \text{ kN}$$

โดยใช้ free body diagram บนส่วนของคานาระหว่างจุด B กับแรง F_3 เราจะได้ว่า

$$M_3 = 90.275(7.222) = 651.97 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

ดังนั้น $M_2 = 706.22 \text{ kN} \cdot \text{m}$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของโมเมนต์ที่เกิดขึ้นบนคานา

บทที่ 7

การโก่งตัวของโครงสร้าง

7.1 แผนภาพการโก่งตัวและเส้นโค้งอีลาสติก (Deflection Diagram and Elastic Curve)

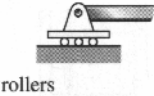
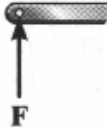
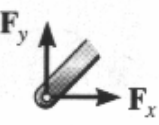
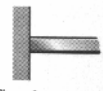
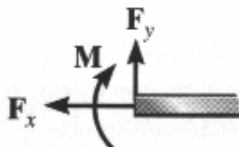
การโก่งตัวหรือการแอ่นตัว (deflection) ของโครงสร้างเกิดจากสาเหตุหลายประการเช่น แรง (forces) หรือน้ำหนักบรรทุก (loads) การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ และการทรุดตัวของฐานราก (settlement) เป็นต้น ในการออกแบบโครงสร้าง นอกจากเราจะต้องหาค่าของหน่วยแรง (stresses) ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างแล้ว เราจะต้องตรวจสอบว่าค่าการโก่งตัวของโครงสร้าง ซึ่งรวมถึงมุมหรือความลาดเอียง (slope) และระยะโก่งตัว (deflection) มีค่าเกินค่าที่กำหนดไว้ในมาตรฐานการออกแบบ (design code) หรือไม่ เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดการแตกร้าวและการสั่นขึ้นในโครงสร้าง นอกจากนั้นแล้ว การหาค่าการโก่งตัวยังเป็นพื้นฐานของการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ statically indeterminate ด้วย

ก่อนที่จะคำนวณหาการโก่งตัวของโครงสร้าง เราควรที่จะต้องเข้าใจถึงลักษณะการโก่งตัวของโครงสร้างก่อน โดยการเขียนแผนภาพการโก่งตัว (deflection diagram) ของโครงสร้าง เพื่อที่จะได้เห็นลักษณะการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงสร้างอย่างคร่าวๆ อีกทั้งเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของค่าการโก่งตัวที่คำนวณได้ แผนภาพการโก่งตัวนี้จะแสดงถึงเส้นโค้งอีลาสติก (elastic curve) ของจุดต่างๆ ที่ผ่านจุดศูนย์กลางของพื้นที่หน้าตัด (centroid) ของโครงสร้าง

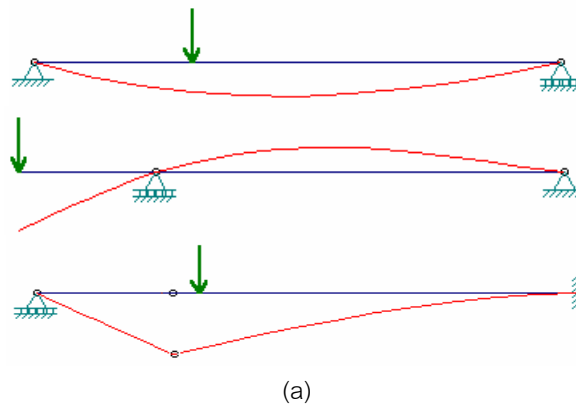
โดยทั่วไปแล้ว เราจะร่างเส้นโค้งอีลาสติกได้โดยการสังเกตจุดรองรับของโครงสร้างว่ามี การยึดรั้งโครงสร้างหรือมีการป้องกันไม่ให้เกิดมุมลาดเอียง θ และระยะการโก่งตัว Δ ที่จุดรองรับอย่างไร ดังที่แสดงในตารางที่ 7-1 โดยเราทราบมาแล้วว่า

1. จุดรองรับที่ต้านทานแรงกระทำ เช่น หมุด (pin support) และ roller support เป็นต้น จะป้องกันไม่ให้เกิดระยะการโก่งตัวในแนวที่จุดรองรับสามารถต้านแรงกระทำได้
2. จุดรองรับที่ต้านทานต่อโมเมนต์ เช่น จุดรองรับแบบยึดแน่น (fixed support) เป็นต้น จะป้องกันไม่ให้เกิดมุมลาดเอียงและระยะการโก่งตัวที่จุดรองรับ
3. ถ้าจุดต่อขององค์อาคารเป็นแบบยึดแน่น (fixed-connected joint) เช่น จุดต่อในโครงข้อแข็ง เป็นต้น แล้วเมื่อจุดต่อเกิดการหมุนไปเป็นมุม θ แล้ว องค์อาคารที่ถูกเชื่อมต่อกับจะมีมุมลาดเอียงเกิดขึ้นเท่ากับ θ ด้วย เนื่องจากจุดต่อดังกล่าวสามารถถ่ายโมเมนต์ตัดจากองค์อาคารหนึ่งไปยังอีกองค์อาคารหนึ่งได้
4. ถ้าจุดต่อขององค์อาคารเป็นหมุด (pin-connected joint) แล้ว มุมลาดเอียงที่เกิดขึ้นในองค์อาคารที่ถูกเชื่อมต่อจะมีค่าไม่เท่ากัน เนื่องจากหมุดไม่มีความสามารถในการต้านทานโมเมนต์ตัด

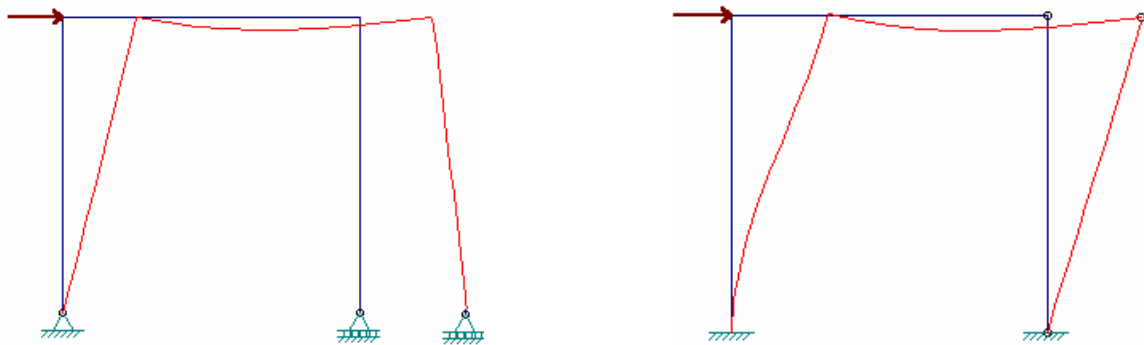
ตารางที่ 7-1

ประเภทของจุดรองรับ	แรงปฏิกิริยา	การยึดรั้งของจุดรองรับ
 rollers		$\Delta_y = 0$
 pin or hinge		$\Delta_x = 0$ $\Delta_y = 0$
 fixed support		$\Delta_x = 0$ $\Delta_y = 0$ $\theta = 0$

โดยใช้หลักการสังเกตดังกล่าว เราจะร่างเส้นโค้งอีลาสติกของคาน ซึ่งถูกกระทำดัดด้วยแรงภายนอกได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-1a และของโครงข้อแข็ง (frame) ได้ดังที่แสดงในรูปที่ 7-1b (ค่าของการโก่งตัวที่แสดงมีค่ามากกว่าความเป็นจริงมาก)



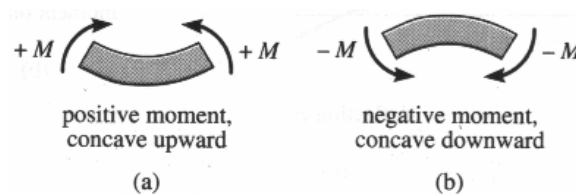
(a)



(b)

รูปที่ 7-1

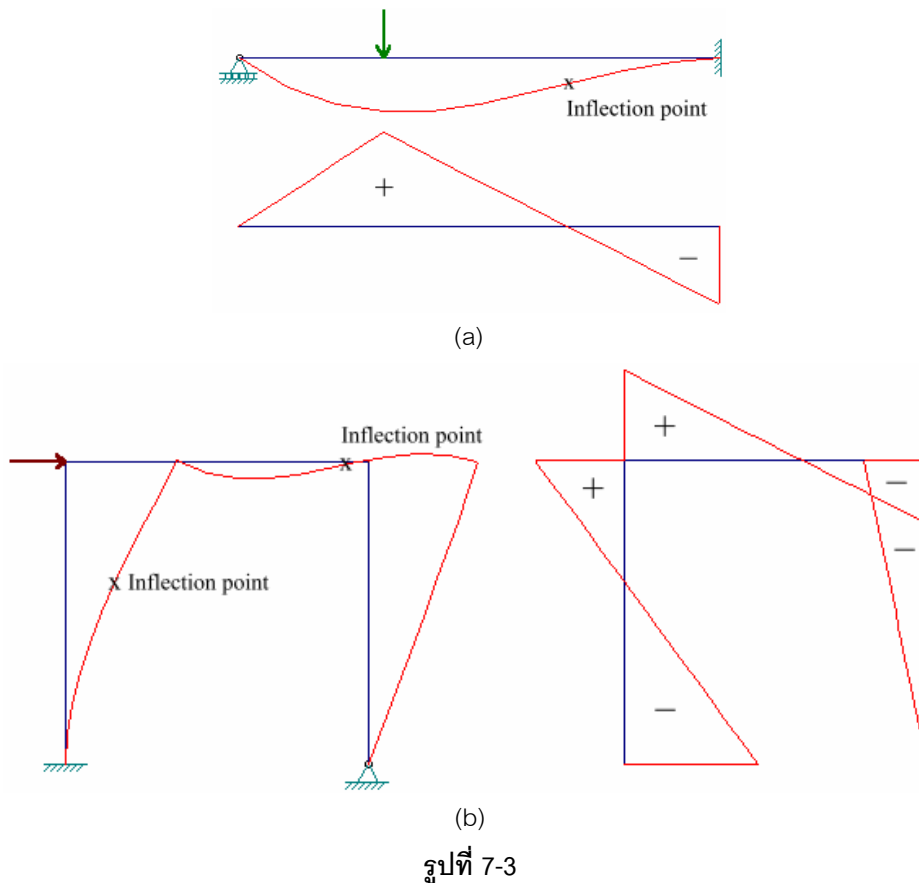
นอกจากนั้นแล้ว เราจะสามารถเขียนเส้นโค้งอีลาสติกได้โดยใช้ moment diagram ของโครงสร้างและ sign convention ของโมเมนต์ดัดที่เราใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 7-2 จากรูป โมเมนต์ดัดที่เป็นบวกจะทำให้คานเกิดการโค้งหงาย (concave upward) ดังที่แสดงในรูปที่ 7-2a และโมเมนต์ที่เป็นลบจะทำให้คานเกิดการโค้งคว่ำ (concave downward) ดังที่แสดงในรูปที่ 7-2b จุดเชื่อมต่อของโค้งคว่ำและโค้งหงายจะถูกเรียกว่า จุดดัดกลับ (inflection point) ซึ่งเป็นจุดที่โมเมนต์ดัดมีค่าเป็นศูนย์ รูปที่ 7-3a และ 7-3b เป็นตัวอย่างของการร่างเส้นโค้งอีลาสติกโดยใช้ moment diagram ของคานและโครงข้อแข็ง ตามลำดับ



(a)

(b)

รูปที่ 7-2



7.2 Elastic Beam Theory

พิจารณาคานยื่น (Cantilevered beam) ซึ่งมีจุดเริ่มต้นของระบบแกนตั้งฉาก $x-y$ ที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 7-4a กำหนดให้ คานถูกกระทำโดยแรงหรือน้ำหนักบรรทุกทุกในตั้งฉากกับแนวแกนของคานและอยู่ในระนาบเดียวกันกับระนาบที่หน้าตัดของคานมีความสมมาตร ดังนั้น ภายใต้แรงกระทำ คานจะเกิดการโก่งตัวในระนาบที่แรงกระทำ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-4b โดยที่ระนาบของหน้าตัดของคานไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและยังคงตั้งฉากกับแนวแกนของคานเหมือนก่อนเกิดการโก่งตัว ดังที่แสดงในรูปที่ 7-4d นอกจากนั้นแล้ว กำหนดให้ความยาวของคานมีค่ามากกว่าความลึกของคานมาก ดังนั้น เราจะพิจารณาเฉพาะการโก่งตัวที่เกิดขึ้นจากโมเมนต์เท่านั้น

ความโค้งของส่วนของคาน (Curvature of Differential Element)

จากรูปที่ 7-4b และ 7-4c ให้เราพิจารณาส่วนของคานที่มีความยาวน้อยมาก dx และอยู่ระหว่างจุด m_1 (ที่ระยะ x จากจุด A) และจุด m_2 (ที่ระยะ $x+dx$ จากจุด A) ภายใต้แรง P ความยาวของส่วนของคานดังกล่าวในแนวแกนสะเทิน (neutral axis) มีค่าเท่ากับ $ds = \rho d\theta$ ดังนั้น ความโค้งของส่วนของคาน dx จะมีค่าเท่ากับ

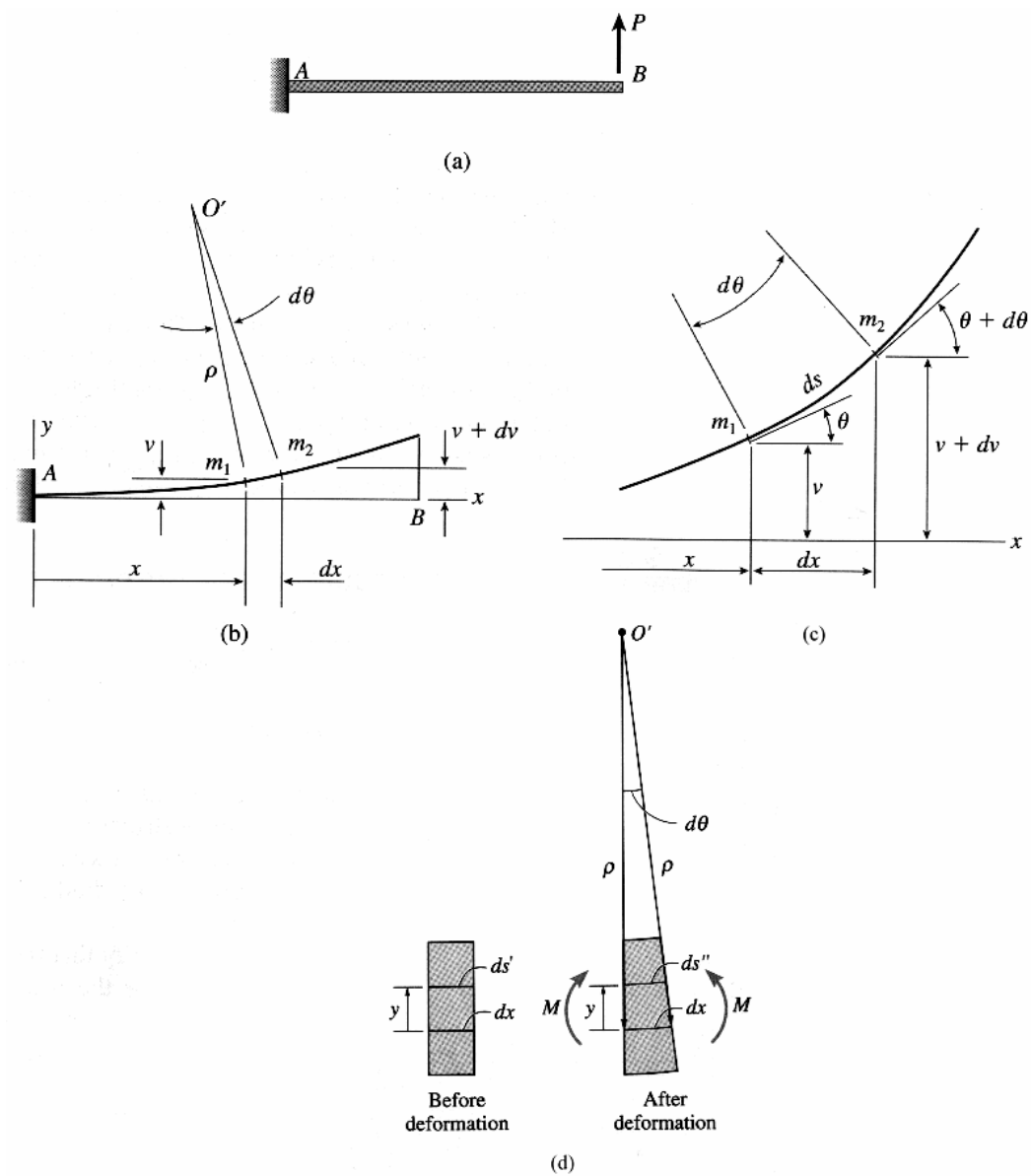
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (a)$$

และค่ามุมลาดเอียงของส่วนของคานดังกล่าว ที่แกนสะเทิน ระหว่างจุด m_1 และ m_2 จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{dv}{dx} = \tan \theta \text{ หรือ } \theta = \arctan \frac{dv}{dx} \quad (b)$$

จากวิชาแคลคูลัส (Calculus) เนื่องจาก θ และ s เป็นฟังก์ชันของ x ดังนั้น เราจะเขียนสมการของความโค้งได้ใหม่เป็น $\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$ และแทนค่าสมการ (b) ลงในสมการนี้ เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{dv}{dx} \right) \cdot \frac{dx}{ds} \quad (c)$$



รูปที่ 7-4

จากรูปที่ 7-5c เราจะได้ว่า

$$ds^2 = dx^2 + dv^2$$

ดังนั้น

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} \quad (d)$$

หารสมการ (d) ด้วย dx เราจะได้

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}$$

หรือ

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (e)$$

จากวิชาแคลคูลัส เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{dv}{dx} \right) = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]} \quad (f)$$

แทนสมการ (e) และสมการ (f) ลงในสมการ (c) เราจะได้ ความโค้งของส่วนของคานาอยู่ในรูป

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (7-1)$$

ความสัมพันธ์ของโมเมนต์และความโค้ง (Moment Curvature Relationships)

เราจะหาความสัมพันธ์ของโมเมนต์และความโค้งของส่วนของคานาได้โดยการพิจารณารูปที่ 7-5d ซึ่งเป็นรูปขยายของส่วนของคานาทั้งก่อนและหลังจากที่ถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัดภายใน M (internal moment)

ก่อนเกิดการการดัด: ความยาวของส่วนของคานาที่แกนสะเทินและที่ระยะ y จากแกนสะเทินจะมีค่าเท่ากันคือ

$$dx = ds'$$

หลังเกิดการดัด: ความยาวของส่วนของคานาที่แกนสะเทินจะยังคงมีความยาวเท่าเดิมคือ $dx = \rho d\theta$ (จากค่านิยามของแกนสะเทิน) แต่ความยาวของส่วนของคานาที่ระยะ y จากแกนสะเทินจะมีค่าเปลี่ยนจาก ds' เป็น ds'' โดยที่

$$ds'' = (\rho - y) d\theta$$

จากนิยามของความเครียดตึงจาก (normal strain) ที่เกิดขึ้นในแนวแกนของคานา เราจะได้ว่า

$$\varepsilon = \frac{ds'' - ds'}{ds'} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

หรือ

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\varepsilon}{y}$$

ถ้าคานาทำด้วยวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic) และเป็นเนื้อเดียวกัน (homogenous) และมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic แล้ว จาก Hooke's Law, $\sigma = E\varepsilon$ และจาก flexural formula, $\sigma = Mc/I$ เราจะได้ว่า ความเครียดตึงจากที่ตำแหน่ง y มีค่าเท่ากับ $\varepsilon = My/EI$ หรือ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (7-2)$$

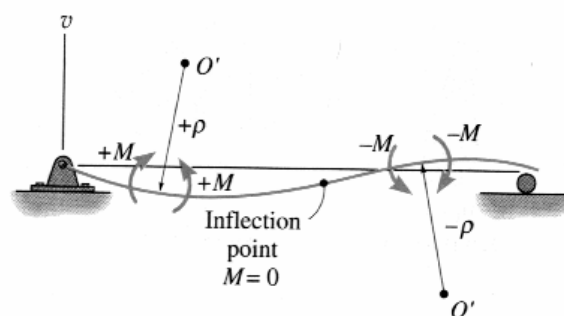
เมื่อ ρ เป็นรัศมีมีความโค้ง (radius of curvature) ของส่วนของคานา

M เป็นโมเมนต์ดัดภายใน ที่กระทำอยู่บนส่วนของคานา

E เป็นโมดูลัสความยืดหยุ่น (modulus of elasticity) ของวัสดุที่ใช้ทำคานา

I เป็น moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัดของคานารอบแกนสะเทิน

EI มักจะถูกเรียกว่า Flexural rigidity ซึ่งจะมีค่าเป็นบวกเสมอ และรัศมีมีความโค้ง ρ จะมีเครื่องหมายตามเครื่องหมายของโมเมนต์ M เมื่อ M มีค่าเป็นบวกแล้ว ρ ก็จะมีค่าเป็นบวกด้วย และเมื่อ M มีค่าเป็นลบแล้ว ρ ก็จะมีค่าเป็นลบด้วย ดังที่แสดงตามรูปที่ 7-5



รูปที่ 7-5

สมการอนุพันธ์ของเส้นโค้งของการโก่งตัว (Differential Equations of the Deflection Curve)

แทนค่าสมการที่ 7-1 ลงในสมการที่ 7-2 เราจะได้ สมการอนุพันธ์ของเส้นโค้งของการโก่งตัวอยู่ในรูป

$$\frac{M}{EI} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (7-3)$$

ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นตรงอันดับสอง (nonlinear second order differential equation) และถูกเรียกว่า **Elastica** ค่าการโก่งตัว v ที่หาได้จากสมการนี้จะเป็นค่าการโก่งตัวที่แท้จริงของเส้นโค้งอีลาสติก แต่หามาได้ยากมาก อย่างไรก็ตาม ค่าของการโก่งตัวของคานมักจะถูกกำหนดให้มีค่าน้อยมาก เช่น $L/360$ เมื่อ L เป็นความยาวของ span ของคาน เป็นต้น ซึ่งจะทำให้ค่ามุมลาดเอียง $\frac{dv}{dx}$ มีค่าน้อยกว่า 1 มาก ดังนั้น เทอม $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ ก็จะมีค่าประมาณศูนย์และจะไม่นำมาพิจารณาในการหาค่าการโก่งตัวของคาน ดังนั้น เราจะเขียนสมการที่ 7-3 ใหม่ได้เป็น

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (7-4)$$

และเราจะได้ว่า ความยาวของคานก่อนถูกกระทำโดยแรงจะมีค่าโดยประมาณเท่ากับ ความยาวของคานหลังถูกกระทำโดยแรงหรือ

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}\right) dx \approx dx$$

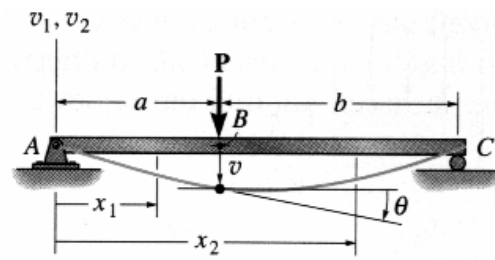
7.3 The Double Integration Method

หลังจากที่เราทำการวิเคราะห์คานและได้สมการโมเมนต์ดัด M ซึ่งเป็นฟังก์ชันของระยะ x บนคานแล้ว เราจะหาสมการมุมลาดเอียงและสมการการโก่งตัวได้จากการทำการอินทิเกรตสมการที่ 7-4 อย่างเป็นลำดับ (successive integration) ซึ่งในการอินทิเกรตแต่ละครั้งเราจะได้อัตราคงที่ของการอินทิเกรต (constant of integration) หนึ่งค่า และเราจะหาค่าคงที่เหล่านี้ได้จากการพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) และเงื่อนไขความต่อเนื่อง (continuity conditions) ของคาน

เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) เป็นค่าของมุมลาดเอียงและการโก่งตัวที่เราทราบค่าที่จุดต่างๆ บนคาน ยกตัวอย่างเช่น ถ้าคานถูกรองรับโดยหมุด (pin) และ roller ค่าการโก่งตัวของคานที่จุดรองรับดังกล่าวจะมีค่าเป็นศูนย์ และถ้าคานมีจุดรองรับยึดแน่น (fixed support) แล้ว ค่ามุมลาดเอียงและการโก่งตัวที่จุดนั้นจะมีค่าเป็นศูนย์ เป็นต้น

ถ้าคานถูกกระทำโดยแรงที่ไม่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ แล้ว เราจะหาสมการโมเมนต์ M ได้หลายสมการ เช่น คานตามรูปที่ 7-8 จะมีสมการโมเมนต์ 2 สมการคือ ในช่วง AB และในช่วง BC ดังที่แสดงโดยพิกัด x_1 และ x_2 ตามลำดับ เป็นต้น ในกรณีเช่นนี้ เราจะมีค่าคงที่ของการอินทิเกรตสี่ค่า (2 ค่าต่อ 1 ช่วง) และเราจะมีเงื่อนไขขอบเขตอยู่ 2 เงื่อนไขคือ ที่จุดรองรับ A และที่จุดรองรับ C ส่วนค่าคงที่ของการอินทิเกรตอีก 2 ค่าที่เหลือนั้น เราจะหาได้โดยใช้เงื่อนไขความต่อเนื่อง (continuity condition) ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่แสดงว่าเส้นโค้งอีลาสติกของคานที่จุดใดจุดหนึ่งบนคานมีความต่อเนื่อง ไม่ฉีกขาดออกจากกัน ในกรณีนี้ เราจะได้ว่า ค่าของมุมลาดเอียงและการโก่งตัวในช่วง AB ที่จุด B หรือ $x_1 = a$ จะมีค่าเท่ากับค่าของมุมลาดเอียงและการโก่งตัวในช่วง BC ที่จุด B หรือ $x_2 = a$ หรือถ้าเขียนเป็นสมการเราจะได้ว่า

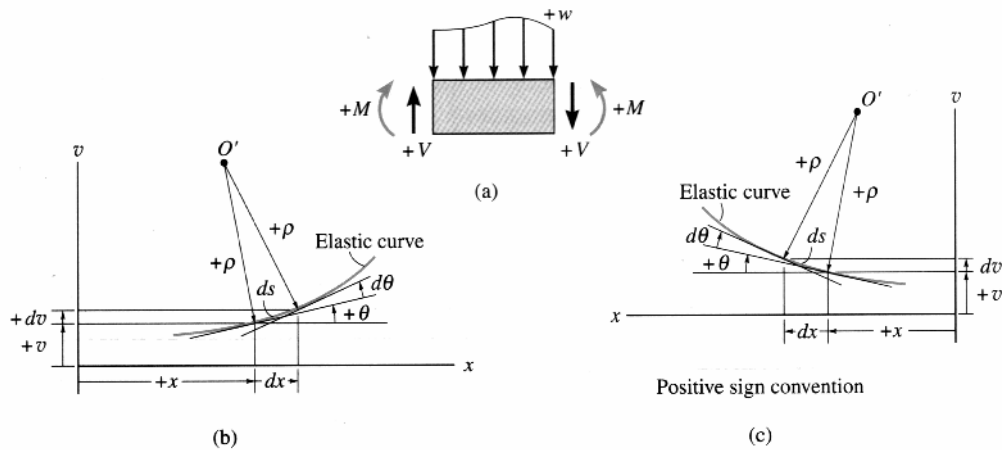
$$\theta_1(a) = \theta_2(a) \text{ และ } v_1(a) = v_2(a)$$



รูปที่ 7-6

Sign Convention

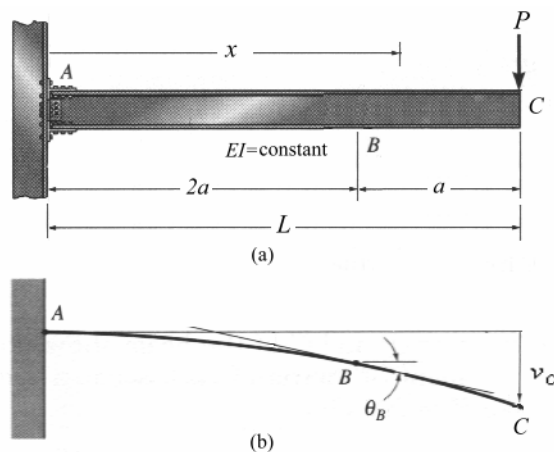
รูปที่ 7-7a แสดง sign convention ของแรงกระทำและแรงที่เกิดขึ้นภายในคานที่มีค่าเป็นบวก และรูปที่ 7-7b และ 7-7c แสดง sign convention ของมูเมนต์เฉียงและการโก่งตัวของคานเนื่องจากแรงกระทำที่มีค่าเป็นบวก ซึ่งในที่นี้เราจะให้การโก่งตัวมีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางพุ่งขึ้น และมูเมนต์เฉียงมีค่าเป็นบวก เมื่อหมุนทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ซึ่งการที่ sign convention ของมูเมนต์เฉียงและการโก่งตัวมีค่าเป็นบวกในทิศทางดังกล่าว นั้น เกิดจากการที่เมื่อ dx และ dv มีค่าเป็นบวกในทิศทางของแกน x และแกน v ตามลำดับแล้ว ค่ามุม $d\theta$ จะมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x ดังที่แสดงในรูป



รูปที่ 7-7

ตัวอย่างที่ 7-1

จงหาค่า slope ที่จุด B และค่าการโก่งตัวที่จุด C ของคานยื่น ซึ่งถูกกระทำโดยแรง P และมีค่า flexural rigidity EI คงที่ตลอดความยาวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-8a



รูปที่ 7-8

จากลักษณะของคานและการกระทำของแรง เราจะร่างรูปร่างการโก่งตัวของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-8b และเราจะพิจารณาคานเพียงช่วงคือ $0 \leq x \leq L$ กำหนดให้จุดเริ่มต้นของ coordinate x อยู่ที่จุด A ดังนั้น เราจะหาสมการของโมเมนต์ดัดได้เป็น

$$M(x) = Px - PL = -P(L - x)$$

จากสมการของ elastic beam เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2 v}{dx^2} &= Px - PL \\ EI \frac{dv}{dx} &= P \frac{x^2}{2} - PLx + C_1 \\ EI v &= P \frac{x^3}{6} - PL \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

ในการวิเคราะห์หาค่า slope และค่าการโก่งตัวของคานขึ้นนี้ เราต้องหาค่าคงที่ของการ integration 2 ค่าโดยใช้ boundary condition สองเงื่อนไขคือ $v = 0$ และ $\frac{dv}{dx} = 0$ ที่ $x = 0$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

ดังนั้น สมการของ slope ของคานจะอยู่ในรูป

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left(P \frac{x^2}{2} - PLx \right)$$

$$v = \frac{1}{EI} \left(P \frac{x^3}{6} - PL \frac{x^2}{2} \right)$$

ที่จุด B , $x = 2a$,

$$\theta = -2Pa(L - a)$$

ที่จุด C , $x = L$,

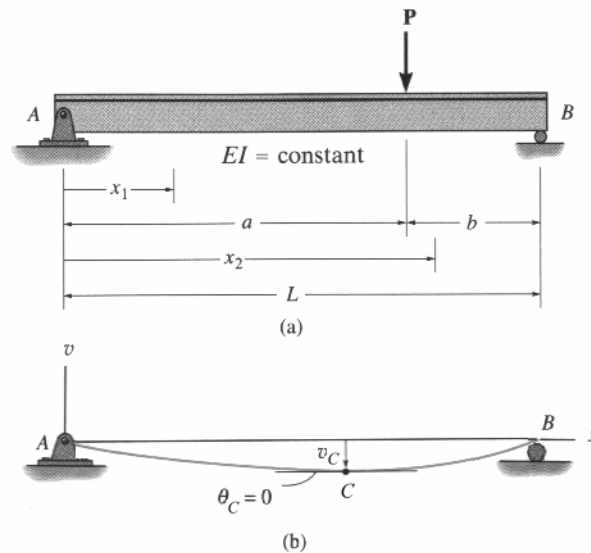
$$v_C = -\frac{PL^3}{3EI}$$

ขอให้เราสังเกตด้วยว่า ถ้าเรากำหนดจุดเริ่มต้นของ coordinate x ให้อยู่ที่จุด C เราก็จะสามารถหาค่า slope ที่จุด B และค่าการโก่งตัวที่จุด C ได้เช่นเดียวกับการกำหนด coordinate x ในลักษณะข้างต้น

ตัวอย่างที่ 7-2

กำหนดให้คาน simply supported beam ซึ่งถูกกระทำโดยแรง P ที่ระยะ a จากจุดรองรับ A และมีค่า flexural rigidity EI คงที่ตลอดความยาวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-9a จงหา

1. สมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานเนื่องจากแรง P
2. ค่า slope ที่จุดรองรับ A และ B
3. ค่าการโก่งตัวสูงสุด พร้อมตำแหน่งที่เกิด เมื่อ $a = 2b$



รูปที่ 7-9

สมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานเนื่องจากแรง P

จากลักษณะของคานและการกระทำของแรง เราจะร่างรูปการโก่งตัวของคานได้ดังที่แสดงในรูปที่ 7-9b และเราจะแบ่งการหาสมการของโมเมนต์ตัดออกเป็นสองช่วงโดยใช้ coordinate x_1 และ x_2 โดยที่

$$0 \leq x_1 \leq a; \quad M_1 = \frac{Pb}{L} x_1$$

$$a \leq x_2 \leq b; \quad M_2 = \frac{Pb}{L} x_2 - P(x_2 - a) = Pa(1 - \frac{x_2}{L})$$

จากสมการของ elastic beam เราจะได้ว่า เมื่อ $0 \leq x_1 \leq a$;

$$EI \frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = \frac{Pb}{L} x_1$$

$$EI \frac{dv_1}{dx_1} = \frac{Pb}{2L} x_1^2 + C_1$$

$$EI v_1 = \frac{Pb}{6L} x_1^3 + C_1 x_1 + C_2$$

จากสมการของ elastic beam เราจะได้ว่า เมื่อ $a \leq x_2 \leq b$;

$$EI \frac{dv_2^2}{dx^2} = Pa(1 - \frac{x_2}{L})$$

$$EI \frac{dv}{dx} = Pa(x_2 - \frac{x_2^2}{2L}) + C_3$$

$$EI v = Pa(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6L}) + C_3 x_2 + C_4$$

ในการวิเคราะห์หาสมการของ slope และสมการของการโก่งตัวของคานโดยวิธี double integration ของคานในที่นี้ เราจะเห็นได้ว่า เรามีค่าคงที่ของการ integration จากสมการของ elastic beam ทั้งสิ้น 4 ค่า ซึ่งสองค่าของค่าคงที่จะหาได้โดยใช้ boundary condition สองเงื่อนไขคือ

$$v_1 = 0 \text{ ที่ } x = 0;$$

$$C_2 = 0$$

$$v_2 = 0 \text{ ที่ } x = L;$$

$$0 = \frac{PaL^2}{3} + C_3L + C_4$$

และที่เหลืออีกสองค่าจะหาได้โดยใช้ continuity condition สองเงื่อนไขคือ

$$v_1 \text{ (ที่ } x_1 = a) = v_2 \text{ (ที่ } x_2 = a);$$

$$\frac{Pb}{6L}a^3 + C_1a = Pa\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{6L}\right) + C_3a + C_4$$

$$\frac{dv_1}{dx_1} \text{ (ที่ } x_1 = a) = \frac{dv_2}{dx_2} \text{ (ที่ } x_2 = a);$$

$$\frac{Pb}{2L}a^2 + C_1 = Pa\left(a - \frac{a^2}{2L}\right) + C_3$$

เมื่อทำการแก้สมการทั้งสาม เราจะได้

$$C_1 = -\frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2)$$

$$C_3 = -\frac{Pa}{6L}(2L^2 + a^2)$$

$$C_4 = \frac{Pa^3}{6}$$

เมื่อแทนค่าคงที่ของการ integration ทั้งสี่ค่ากลับลงในสมการของ slope และสมการของการโก่งตัว เราจะได้
เมื่อ $0 \leq x_1 \leq a$;

$$\theta_1 = \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2 - 3x_1^2)$$

$$v_1 = -\frac{Pbx_1}{6EIL}(L^2 - b^2 - x_1^2)$$

เมื่อ $a \leq x_2 \leq b$;

$$\theta_2 = \frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{Pa}{6EIL}(3x_2^2 + 2L^2 + a^2 - 6Lx_2)$$

$$v_2 = -\frac{Pa}{6EIL}(x_2^3 + (2L^2 + a^2)x_2 - 3Lx_2^2 - a^2L)$$

ค่า slope ที่จุดรองรับ A และ B

ที่จุดรองรับ A , $x_1 = 0$

$$\theta_1 = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2) = -\frac{Pb}{6EIL}(L + b)(L - b) = -\frac{Pab}{6EIL}(L + b)$$

ที่จุดรองรับ B , $x_2 = L$

$$\theta_2 = \frac{Pa}{6EIL}(L^2 - a^2) = \frac{Pa}{6EIL}(L + a)(L - a) = \frac{Pab}{6EIL}L + a$$

ค่าการโก่งตัวสูงสุด พร้อมตำแหน่งที่เกิด เมื่อ $a = 2b$

จากรูปร่างการโก่งตัวของคาน เมื่อ $a = 2b$ แล้ว เราจะเห็นได้ว่า ตำแหน่งที่เกิดค่าการโก่งตัวสูงสุดต้องอยู่ระหว่างจุดรองรับ A และจุดที่แรงกระทำ สมมติว่าเป็นจุด C ดังที่แสดงในรูปที่ 7-9b โดยที่จุดนี้จะเป็นจุดที่มีค่า slope เท่ากับศูนย์ ดังนั้น เราจะหาตำแหน่งของจุด C ได้จากสมการของ slope θ_1 และ $L = 3b$

$$(3b)^2 - b^2 - 3x_1^2 = 0$$

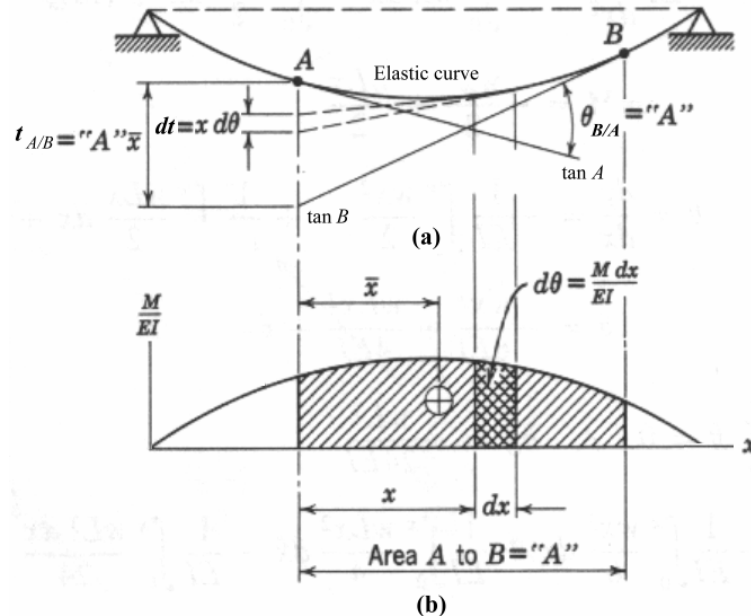
$$x_1 = 1.633b$$

และค่าการโก่งตัวสูงสุดที่จุด C จะหามาได้จากการแทนค่า $x_1 = 1.633b$ ลงในสมการของการโก่งตัว v_1

$$v_{\max} = -0.48385 \frac{Pb^3}{EI}$$

7.4 ทฤษฎี Moment-Area (Moment-Area Theorems)

ทฤษฎี moment-area เป็นเทคนิคกึ่งกราฟฟิค (semigraphic) ที่ใช้ในการหาค่ามุมลาดเอียง (slope) และระยะการโก่งตัว (deflection) ของคานเนื่องจากโมเมนต์ดัด (bending moment) วิธีการนี้ได้ถูกพัฒนาขึ้นมาโดย Otto Mohr และต่อมาโดย Charles E. Greene ในปี ค.ศ. 1872 ทฤษฎี moment-area มีอยู่ 2 ทฤษฎีบท โดยที่ทฤษฎีบทที่ 1 จะใช้ในการหาค่าการเปลี่ยนแปลงของมุมลาดเอียงระหว่างจุดสองจุดบนเส้นโค้งอีลาสติก และทฤษฎีบทที่ 2 จะใช้ในการหาระยะเคลื่อนที่หรือการเบี่ยงเบนของเส้นสัมผัสที่จุดๆ หนึ่งกับจุดอ้างอิงจุดหนึ่งบนเส้นโค้งอีลาสติก วิธี moment-area นี้เหมาะในการหาค่ามุมลาดเอียงและระยะโก่งตัวของคานที่ถูกกระทำโดยแรงเป็นจุด และในคานที่มีหน้าตัดที่เปลี่ยนแปลงเป็นช่วงๆ



รูปที่ 7-10

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-10a ซึ่งเราจะเขียน moment diagram ของคานนี้ได้โดยการใช้สมการความสมดุล เมื่อเราหาค่าของ moment diagram ด้วยค่าความแข็งเชิงดัด (flexural rigidity) EI ของคานแล้ว เราจะได้แผนภาพ M/EI หรือ M/EI diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 7-10b ในการที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 1 ของวิธี moment-area เราจะเขียนสมการที่ 7-4 หรือ

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{ใหม่ในรูป}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

โดยที่ $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right) = \frac{d\theta}{dx}$ และเมื่อเราจัดรูปสมการดังกล่าวอีกครั้ง เราจะได้

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

ซึ่งจากสมการ เราจะได้ว่า การเปลี่ยนแปลง $d\theta$ ของค่ามุมลาดเอียงของเส้นสัมผัสที่ปลายทั้งสองของส่วนของคาน dx มีค่าเท่ากับพื้นที่ที่มีสีทึบใต้แผนภาพ M/EI ถ้าเราทำการอินทิเกรตสมการนี้จากจุด A ถึงจุด B ดังที่แสดงตามรูปที่ 7-10b แล้ว เราจะได้ว่า

$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (7-5)$$

สมการนี้เป็นทฤษฎีบทที่ 1 ของทฤษฎี moment-area ซึ่งกล่าวได้ว่า

ค่าการเปลี่ยนแปลงมุลาดเอียงระหว่างจุด A และจุด B บนเส้นโค้งอีลาสติก มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้แผนภาพ M/EI ระหว่างจุด A และจุด B

โดยที่ $\theta_{B/A}$ เป็นมุลาดเอียงสัมพัทธ์ระหว่างเส้นสัมผัสที่จุด B เทียบกับเส้นสัมผัสที่จุด A โดยจะมีหน่วยเป็นเรเดียน (radian) และค่ามุลาดเอียงที่เปลี่ยนแปลงจากจุด A ถึงจุด B นี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อพื้นที่ใต้แผนภาพ M/EI มีค่าเป็นบวก และในทางกลับกัน จะมีค่าเป็นลบเมื่อพื้นที่ใต้แผนภาพ M/EI มีค่าเป็นลบ

ทฤษฎีบทที่ 2 ของทฤษฎี moment-area จะพิสูจน์ได้จากการพิจารณาการเบี่ยงเบนในแนวตั้งของจุดใดจุดหนึ่ง (จุด A) กับเส้นสัมผัสที่ลากมาจากจุดอีกจุดหนึ่ง (จุด B) บนเส้นโค้งอีลาสติก ดังที่แสดงในรูปที่ 7-10a โดยที่ค่าของระยะเคลื่อนที่ dt จะหาได้จากสมการเส้นโค้งวงกลม $dt = x d\theta$ จากนั้น เมื่อแทนค่า $d\theta = M/EI dx$ ลงในสมการ dt แล้ว ค่าระยะเคลื่อนที่ของจุด A เทียบกับเส้นสัมผัสที่จุด B จะมีค่าเท่ากับ

$$t_{A/B} = \int_A^B x \frac{M}{EI} dx \quad (7-6)$$

จากวิชาคณิตศาสตร์วิศวกรรม เราทราบมาแล้วว่า จุดศูนย์กลางของพื้นที่จะหาได้จากสมการ $\bar{x} \int dA = \int x dA$ และเนื่องจาก $\int M/EI dx$ เป็นพื้นที่ใต้แผนภาพ M/EI เราจะได้ว่า

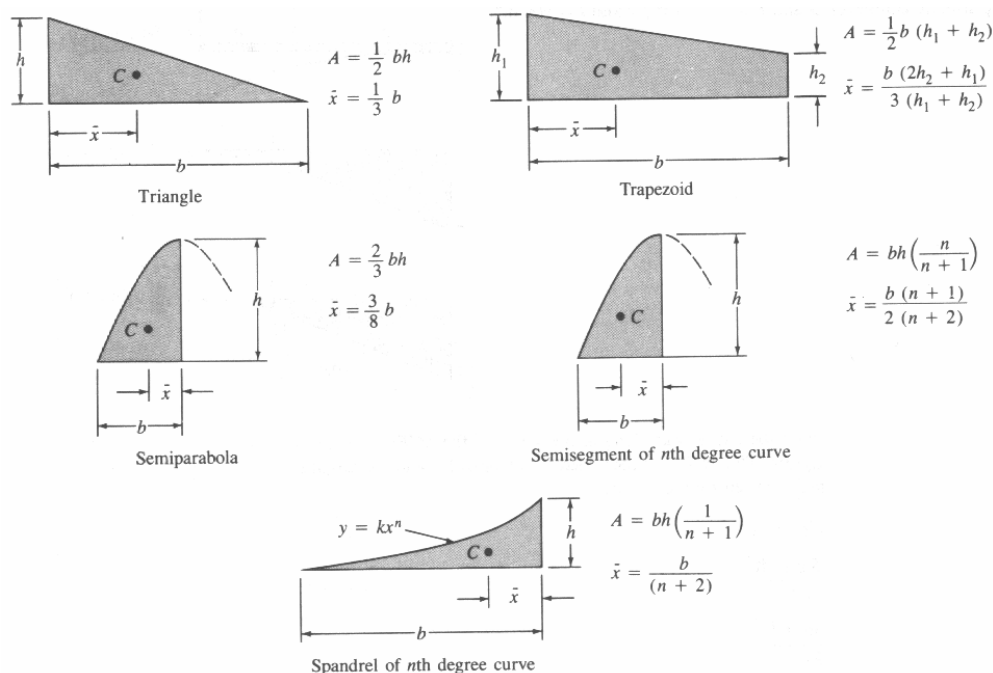
$$t_{A/B} = \bar{x} \int_A^B \frac{M}{EI} dx \quad (8-7)$$

เมื่อ $\bar{x}$ เป็นระยะจากจุด A ถึงจุดศูนย์กลางของพื้นที่ใต้แผนภาพ M/EI ระหว่างจุด A และจุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 7-10b ดังนั้น เราจะกล่าวทฤษฎีที่ 2 ของทฤษฎี moment-area ได้ว่า

ระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งบนเส้นโค้งอีลาสติก เมื่อวัดจากเส้นสัมผัสที่จุด B ถึงจุด A มีค่าเท่ากับโมเมนต์ของพื้นที่ใต้แผนภาพ M/EI ระหว่างจุด A และจุด B รอบจุด A

ซึ่งระยะเคลื่อนที่ในแนวตั้งดังกล่าวจะแทนได้ด้วย $t_{A/B}$ ถ้าค่าโมเมนต์ของพื้นที่ที่รอบจุด A ในรูปที่ 7-8b มีค่าเป็นบวกแล้ว เส้นสัมผัสที่จุด A จะอยู่เหนือเส้นสัมผัสที่จุด B และเมื่อค่าโมเมนต์ของพื้นที่ที่รอบจุด A มีค่าเป็นลบแล้ว เส้นสัมผัสที่จุด A จะอยู่ใต้เส้นสัมผัสที่จุด B

รูปที่ 7-11 แสดงคุณสมบัติของรูปทรงเรขาคณิตที่จะช่วยให้การวิเคราะห์คานาโดยวิธี moment-area ง่ายขึ้น

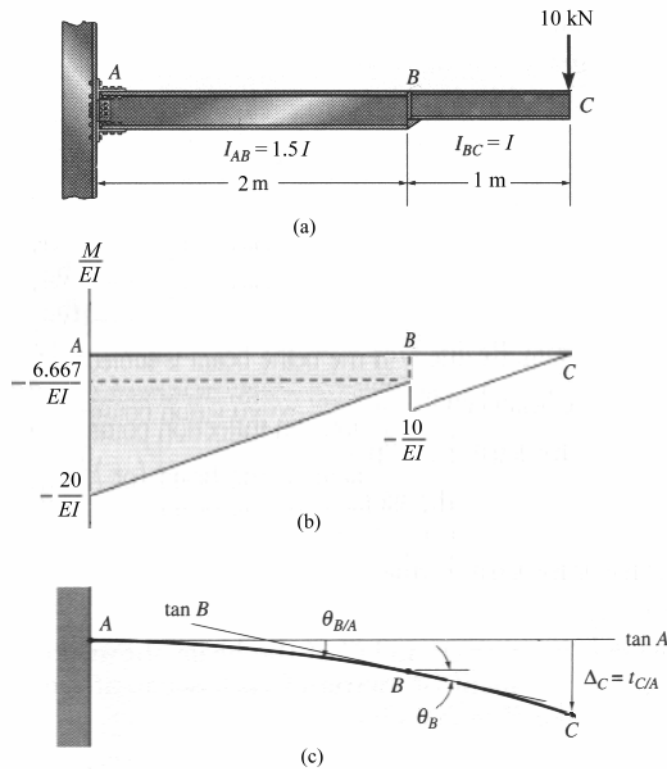


รูปที่ 7-11

ตัวอย่างที่ 7-3

กำหนดให้คานายื่นมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 7-12a ให้ $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 34.4(10^6) \text{ mm}^4$ (W200x36) จงหา

1. ค่า slope ที่จุด B
2. ค่าการโก่งตัวที่จุด C



รูปที่ 7-12

1. ทำการเขียน moment diagram ของคาน
2. เนื่องจากส่วนของคานในช่วง AB มีค่า moment of inertia เป็น 1.5 เท่าของ moment of inertia ของส่วนของคานในช่วง BC ดังนั้น เราจะเขียนแผนภาพ M/EI diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-12b
3. จากแผนภาพ moment diagram เราจะเขียนรูปร่างการโก่งตัวของคาน (elastic curve) เนื่องจากแรงกระทำได้ ตามที่แสดงในรูปที่ 7-12c เนื่องจากจุดรองรับที่จุด A เป็นจุดรองรับแบบยึดแน่น ดังนั้น เส้นสัมผัสของ elastic curve ที่จุด A จึงอยู่ในแนวนอน ซึ่งเราจะใช้เส้นสัมผัสนี้เป็นเส้นอ้างอิงในการหาค่า slope และค่าการโก่งตัวของคาน
4. ค่า slope ของ elastic curve ที่จุด B จะหาได้จากการหามุมสัมผัสของเส้นสัมผัสที่จุด B เทียบกับเส้นสัมผัสที่จุด A หรือ $\theta_{B/A}$ ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 1 ของทฤษฎี moment-area มุมสัมผัสดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับพื้นที่ของ M/EI diagram ระหว่างจุด A และจุด B ดังนั้น

$$\theta_{B/A} = \theta_B = -\frac{6.667}{EI}(2) + \frac{1}{2}\left[-\frac{13.333}{EI}\right](2)$$

$$\theta_B = -\frac{26.667 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

แทนค่า $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 6.84(10^6) \text{ mm}^4$ ลงใน θ_B เราจะได้ว่า

$$\theta_B = -\frac{26.667 \text{ kN.m}^2}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][34.4(10^{-6}) \text{ m}^4]} = -3.88(10^{-3}) \text{ rad}$$

5. ค่าการโก่งตัวของ elastic curve ที่จุด C จะหาได้จากการหาระยะการเคลื่อนที่ในแนวตั้งของจุด C เทียบกับเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด A มาอยู่ในแนวเดียวกันกับจุด C หรือ $t_{C/A}$ จากทฤษฎีบทที่ 2 ของทฤษฎี Moment-Area ระยะการเคลื่อนที่ดังกล่าวจะมีค่าเท่ากับโมเมนต์ของพื้นที่ของ M/EI diagram ระหว่างจุด A และจุด C รอบจุด C ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$t_{C/A} = \Delta_C = \left[-\frac{6.667}{EI}(2)\right](2) + \frac{1}{2}\left[-\frac{13.333}{EI}\right](2)\left(1 + \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\left[-\frac{10}{EI}\right](1)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Delta_C = -\frac{60.944 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

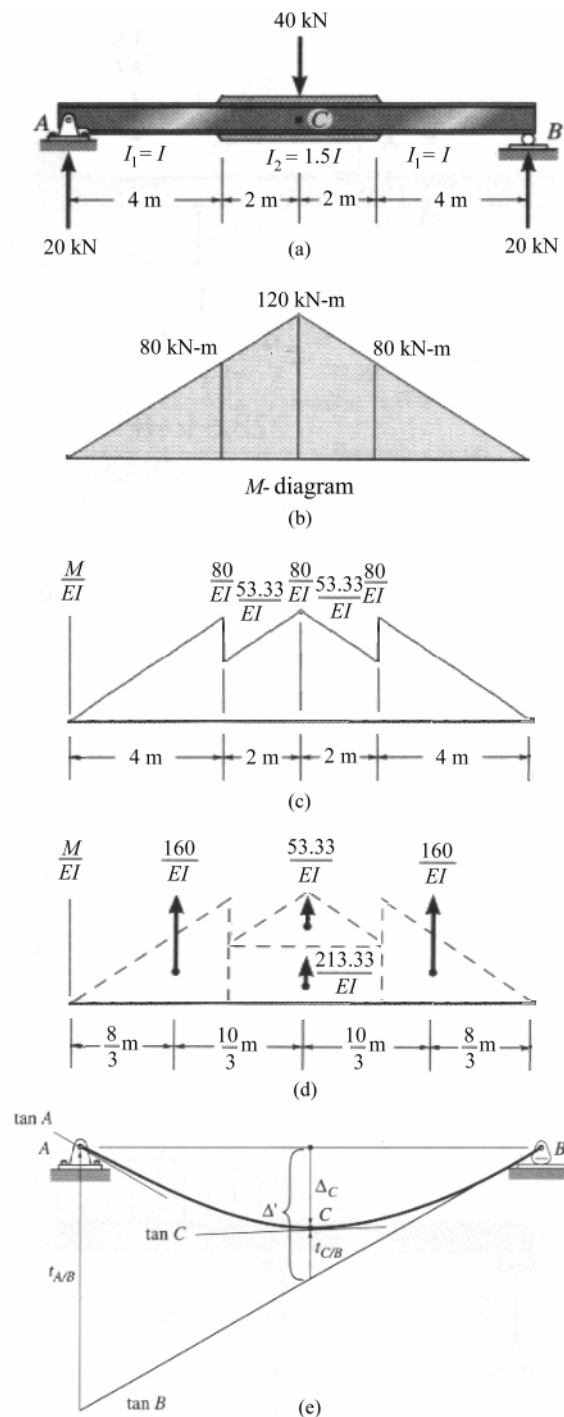
แทนค่า $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 6.84(10^6) \text{ mm}^4$ ลงใน Δ_C เราจะได้ว่า

$$\Delta_C = -\frac{60.944 \text{ kN.m}^2}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][34.4(10^{-6}) \text{ m}^4]} = -0.0089 \text{ m} = -8.9 \text{ mm}$$

เราควรสังเกตด้วยว่า ค่าการโก่งตัวของคานมีค่าน้อยมาก โดยมีอัตราส่วนของความยาวคานต่อ Δ_C มีค่าเป็น 337 ซึ่งแสดงว่าคานจะมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic

ตัวอย่างที่ 7-4

กำหนดให้คานเหล็ก W360x64 ($E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 179(10^6) \text{ mm}^4$) ถูกเสริมความแข็งแรงโดยแผ่นเหล็กที่ช่วงกลางคานและถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกทุกคงที่เป็นจุดขนาด 40 kN ดังที่แสดงในรูปที่ 7-13a จงหาค่าการโก่งตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นที่จุด C ในคาน



รูปที่ 7-13

จากรูป เราจะหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B ของคานได้โดยใช้สมการความสมดุลบน free body diagram ของคาน เนื่องจากคานและแรงกระทำมีความสมมาตรรอบจุด C ที่กึ่งกลางของคาน ดังนั้น

$$R_A = R_B = 20 \text{ kN}$$

จากนั้น เราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ของคานดังกล่าวได้ดังแสดงในรูปที่ 7-13b

ในกรณีนี้ ค่า moment of inertia ของช่วงที่มีการเสริมแผ่นเหล็ก $I_2 = 1.5I_1 = 1.5I$ ดังนั้น ค่า M/EI ในช่วงกลางคานจึงมีค่าลดลง 50% และ M/EI diagram ของคานจึงมีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 7-13c นอกจากนั้นแล้ว เราควรสังเกตด้วยว่า คานนี้มีความสมมาตรทั้งในแง่ของรูปร่างและแรงกระทำ ซึ่งจะทำให้รูปร่างการโก่งตัวของคานมีความสมมาตรที่จุดกึ่งกลางคาน ค่าการโก่งตัวสูงสุดของคานจะอยู่ที่จุด C และ slope ที่จุดนี้จะมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งทำให้เราทราบว่า เส้นสัมผัสที่จุดนี้ $\tan C$ จะอยู่ในแนวนอน โดยใช้สามเหลี่ยมคล้ายในรูปที่ 7-13e เราจะได้ว่า

$$\Delta' = \frac{t_{A/B}}{2}$$

ดังนั้น

$$\Delta_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B}$$

จากทฤษฎีบทที่ 2 ของทฤษฎี moment-area เราจะหาค่าระยะการเคลื่อนที่ $t_{A/B}$ และ $t_{C/B}$ ได้ดังนี้

$$t_{A/B} = \frac{160}{EI} \left(\frac{8}{3} + \frac{28}{3} \right) + \left[\frac{53.33}{EI} + \frac{213.33}{EI} \right] (6) = \frac{3520}{EI}$$

$$t_{C/B} = \frac{53.33}{2EI} \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{213.33}{2EI} (1) + \frac{160}{EI} \left(\frac{10}{3} \right) = \frac{657.78}{EI}$$

ดังนั้น

$$\Delta_C = \frac{3520}{2EI} - \frac{657.78}{EI} = \frac{1102.22}{EI}$$

แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้

$$\Delta_{\max} = -\frac{1102.2 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = -0.0308 \text{ m} = -30.8 \text{ mm}$$

ค่าการโก่งตัวสูงสุดเมื่อเทียบกับ span ของคาน $\frac{L}{\Delta} = \frac{12000}{30.8} = 389.6 > 360$ ซึ่งมีค่าน้อยมาก ดังนั้น คาน

ดังกล่าวยังคงมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic

ในกรณีที่ไม่มีเสริมเหล็กให้กับคาน เราจะพบว่าค่าการโก่งตัวสูงสุดของคานจะมีค่าเท่ากับ 40.2 mm และ

$\frac{L}{\Delta} = \frac{12000}{40.2} = 298.5 < 360$ ซึ่งในกรณีที่คานรับน้ำหนักบรรทุกทุกคงที่ เราจะต้องเพิ่มขนาดของคานให้เหมาะสม ทาง

หนึ่งที่เราทำได้ก็คือ การเพิ่มแผ่นเหล็กในช่วงกลางคานดังที่เราพิจารณาไปแล้ว

7.5 วิธี Conjugate-Beam

วิธี conjugate-beam เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ใช้ในการหาค่ามุมลาดเอียง (slope) และระยะโก่งตัว (deflection) ของคานา ซึ่งถูกเสนอโดย Otto Mohr ในปี ค.ศ. 1860 และมีลักษณะที่คล้ายคลึงกับวิธี moment-area แต่เนื่องจากวิธีนี้ขึ้นอยู่กับหลักการสถิตยศาสตร์ (static) เพียงอย่างเดียว โดยไม่เกี่ยวข้องกับการเขียนเส้นโค้งอีลาสติก ดังนั้น วิธีการนี้จึงง่ายกว่าและได้รับความนิยมมากกว่าวิธี double integration และวิธี moment-area

วิธี conjugate-beam มีพื้นฐานมาจากความคล้ายคลึงกันของสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือน โมเมนต์ดัด และแรงกระทำ w ในรูป

$$\frac{dV}{dx} = -w \text{ และ } \frac{d}{dx} \left[\frac{dM}{dx} \right] = \frac{d^2 M}{dx^2} = -w$$

กับสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุมลาดเอียง ระยะโก่งตัว และเทอม Elastic weight M / EI ในรูป

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \text{ และ } \frac{d}{dx} \left[\frac{dv}{dx} \right] = \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

เมื่อเราทำการ integration สมการดังกล่าว เราจะได้ว่า

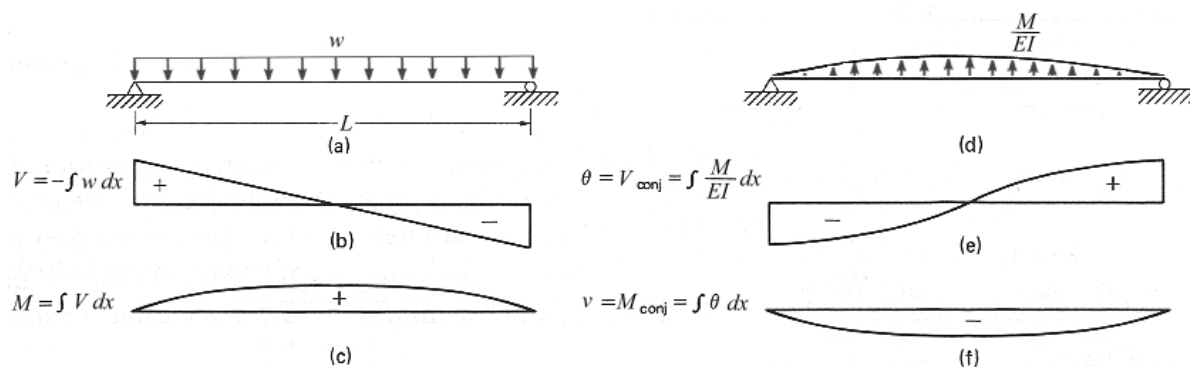
$$V = \int (-w) dx$$

$$\theta = \int \frac{M}{EI} dx$$

และ

$$M = \int \left[\int (-w) dx \right] dx$$

$$v = \int \left[\int \frac{M}{EI} dx \right] dx$$



รูปที่ 7-14

จากการพิจารณารูปที่ 7-14a เทียบกับรูปที่ 7-14d เราจะเห็นว่า

แรงภายนอก (w)

เทียบได้กับ

$-M / EI$

จากการพิจารณารูปที่ 7-14b เทียบกับรูปที่ 7-14e เราจะเห็นว่า

แรงเฉือน (V)

เทียบได้กับ

มุมลาดเอียง (θ)

จากการพิจารณารูปที่ 7-14c เทียบกับรูปที่ 7-14f เราจะเห็นว่า

โมเมนต์ดัด (M)

เทียบได้กับ

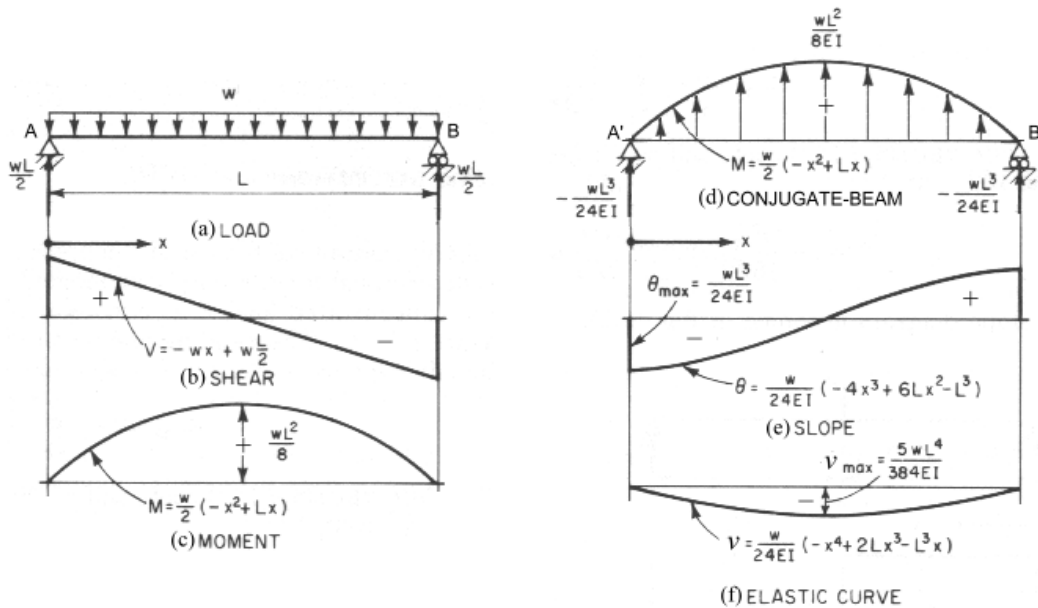
ระยะโก่งตัว (v)

ดังนั้น เมื่อเรากำหนดให้คานาหนึ่งมีคานาเสมือน (conjugate beam) ซึ่งถูกกระทำโดย elastic weight M / EI แล้ว เราจะได้กล่าวทฤษฎีของวิธี conjugate-beam ได้ว่า

ทฤษฎีบทที่ 1: ค่าของมุลาดเอียงที่จุดใดจุดหนึ่งบนคานจริง (Real beam) จะมีค่าเท่ากับค่าของแรงเฉือนที่จุดนั้นบนคานเสมือน

ทฤษฎีบทที่ 2: ค่าการโก่งตัวที่จุดใดจุดหนึ่งบนคานจริงจะมีค่าเท่ากับค่าของโมเมนต์ที่จุดนั้นบนคานเสมือน

เพื่อให้เห็นภาพได้ชัดเจนขึ้น ให้เราพิจารณาคาน simply supported beam ซึ่งถูกกระทำโดยแรงกระจายสม่ำเสมอ w และมีความยาว L ดังที่แสดงในรูปที่ 7-15a โดยใช้สมการความสมดุล เราจะหาแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A และ B ของคานได้เท่ากับ $\frac{wL}{2}$



รูปที่ 7-15

เมื่อเราใช้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือน โมเมนต์ดัด และแรงกระทำ w เราจะหาสมการของแรงเฉือนที่ระยะ x จากจุดรองรับได้ โดยที่ค่าการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือน ΔV ระหว่างจุดรองรับ A กับจุดใดๆ ที่มีระยะ x จากจุด A จะหาได้จาก

$$\Delta V = V(x) - V(x=0) = -\int_0^x w \, dx$$

จาก sign convention ของแรงเฉือน เราจะได้ว่า ที่ $x=0$ แรงเฉือนมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ ซึ่งเป็น boundary condition ของการ integration ดังกล่าว ดังนั้น

$$V(x) = \frac{wL}{2} - wx$$

ค่าการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ ΔM ระหว่างจุดรองรับ A กับจุดใดๆ ที่มีระยะ x จากจุด A จะหาได้จาก

$$\Delta M = M(x) - M(x=0) = \int_0^x V \, dx$$

เนื่องจากจุดรองรับ A เป็นหมุด (pin) ดังนั้น $M(x=0) = 0$ ซึ่งเป็น boundary condition ของการ integration ดังกล่าว ดังนั้น

$$M(x) = \int_0^x \left(\frac{wL}{2} - wx \right) dx = \frac{w}{2} (Lx - x^2)$$

ซึ่งเราจะเขียนแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของคานได้ดังแสดงในรูปที่ 7-11b และ 7-11c

จากวิธีการ double integration เราจะหาสมการและแผนภาพของ slope และ deflection ของคานาได้ดังที่แสดงในรูปที่ 7-11e และ 7-11f ซึ่งเราจะใช้ผลลัพธ์ที่ได้นี้ ทำการเปรียบเทียบกับวิธี conjugate-beam ได้ดังนี้

โดยวิธี conjugate-beam เราทราบมาแล้วว่า แรง w ที่กระทำต่อคานาจริงเทียบได้กับ elastic weight $-M/EI$ ที่กระทำต่อ conjugate beam ดังนั้น เมื่อเราหารค่าโมเมนต์ M ของ moment diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 7-11c ด้วยค่า flexural rigidity EI ของคานา แล้วทำการกลับเครื่องหมายของค่าดังกล่าวให้ตรงกันข้ามกับแรง w เราจะได้ elastic weight ที่กระทำต่อ conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ 7-11d

จากนั้น เมื่อเราใช้ความสัมพันธ์ระหว่างมุมลาดเอียงและทอม elastic weight M/EI เราจะได้ว่า ค่าการเปลี่ยนแปลงของมุม $\Delta\theta$ ระหว่างจุดรองรับ A' กับจุดใดๆ ที่มีระยะ x จากจุด A' จะหาได้จาก

$$\Delta\theta = \theta(x) - \theta(x=0) = \int_0^x \frac{w}{2EI} (Lx - x^2) dx$$

$$\theta(x) = \frac{w}{24EI} (6Lx^2 - 4x^3) + \theta(x=0)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสมการของ $\theta(x)$ ที่ได้นี้กับสมการของ $\theta(x)$ จากวิธีการ double integration เราจะเห็นได้ว่า

$$\theta(x=0) = -\frac{wL^3}{24EI}$$

ซึ่งเป็น boundary condition ของการ integration ดังกล่าว และมีค่าเท่ากับค่าของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A' ของ conjugate beam

เมื่อเราใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการโก่งตัวและทอม elastic weight M/EI เราจะได้ว่า ค่าการเปลี่ยนแปลงของการโก่งตัว Δv ระหว่างจุดรองรับ A' กับจุดใดๆ ที่มีระยะ x จากจุด A' จะหาได้จาก

$$\Delta v = v(x) - v(x=0) = \int_0^x \frac{w}{24EI} (6Lx^2 - 4x^3 - L^3) dx$$

$$v(x) = \frac{w}{24EI} (2Lx^3 - x^4 - L^3x) + v(x=0)$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสมการของ $v(x)$ ที่ได้นี้กับสมการของ $v(x)$ จากวิธีการ double integration เราจะเห็นได้ว่า

$$v(x=0) = 0$$

ซึ่งเป็น boundary condition ของการ integration ดังกล่าว และมีค่าเท่ากับค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A' ของ conjugate beam เนื่องจากจุดรองรับ A' เป็นจุดรองรับแบบหมุน

จุดรองรับของคานาเสมือน (Conjugate-Beam Supports)

จากตัวอย่างดังกล่าว เราจะเห็นได้ว่า ค่า slope และค่าการโก่งตัวของคานาที่ได้มาจากทฤษฎี conjugate-beam นั้นเป็นผลลัพธ์ที่ได้มาจากการ integration สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือน V โมเมนต์ดัด M และแรงกระทำ w และสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุมลาดเอียง θ ระยะโก่งตัว v และทอม elastic weight M/EI

จากวิธี double integration เมื่อเราทำการอินทิเกรตสมการดังกล่าว เราจะได้ค่าคงที่ของการอินทิเกรต และเราจะหาค่าคงที่ที่ได้โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ผ่านมา ดังนั้น เราต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของคานาเสมือน โดยให้แรงเฉือนเสมือนและโมเมนต์เสมือนที่เกิดขึ้นบนคานาเสมือนมีค่าสอดคล้องกับค่ามุมลาดเอียงและระยะโก่งตัวที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับของคานาจริง ยกตัวอย่างเช่น จากตัวอย่างที่ผ่านมา นั้น เงื่อนไขขอบเขตที่เราใช้ประกอบด้วย

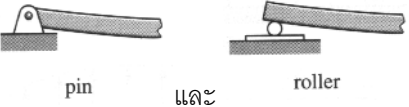
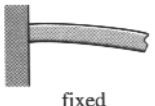
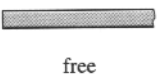
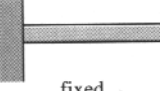
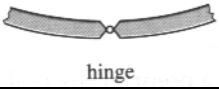
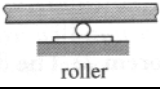
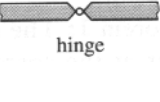
1. ค่ามุม $\theta(x=0) = -\frac{wL^3}{24EI}$ ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A ของคานาจริงมีค่าเท่ากับค่าแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A' ของ conjugate beam

2. ค่าการโก่งตัว $v(x=0) = 0$ ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A ของคานจริงมีค่าเท่ากับค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับ A' ของ conjugate beam

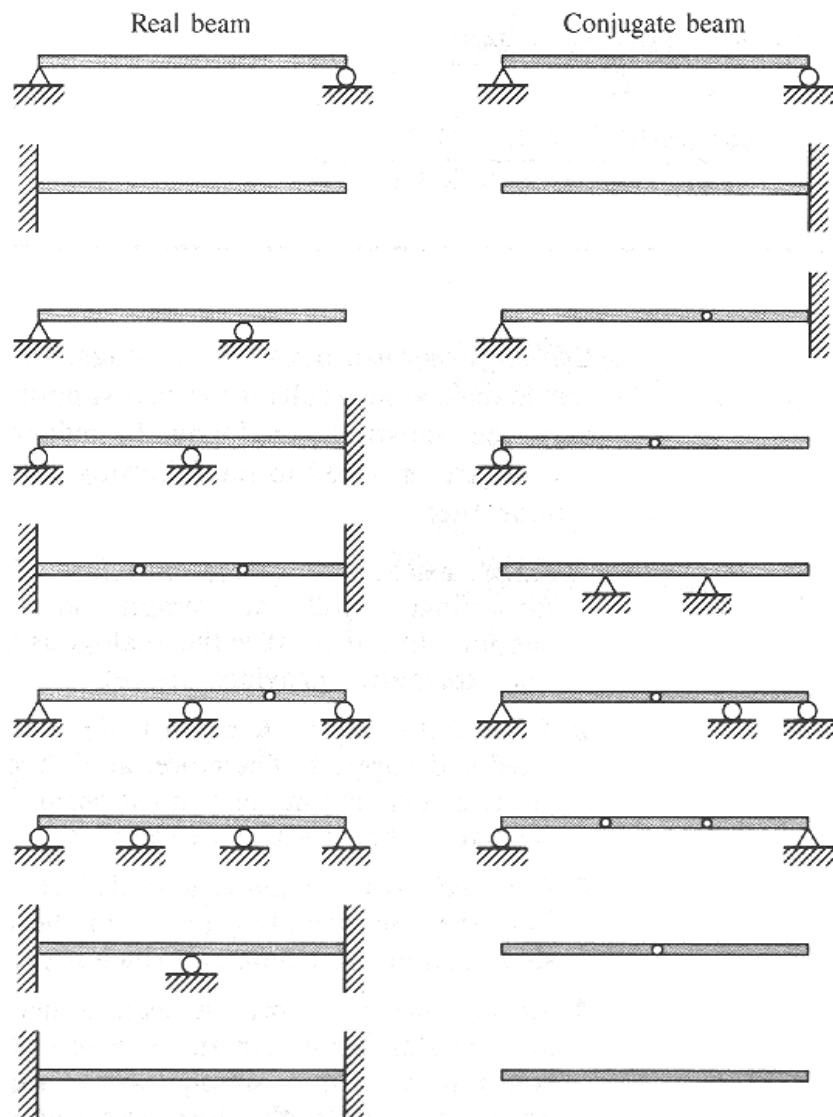
ซึ่งเราจะเห็นได้ว่า จุดรองรับแบบหมุดบนคานจริงสอดคล้องกับจุดรองรับแบบหมุดบนคานเสมือน

ตารางที่ 7-2 แสดงถึงเงื่อนไขขอบเขตของคานเสมือนที่มีค่าสอดคล้องกับที่รองรับของคานจริง ยกตัวอย่างเช่น เมื่อคานจริงมีจุดรองรับแบบยึดแน่นแล้ว ค่ามุลาดเอียงและระยะโก่งตัวที่จุดรองรับนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้น คานเสมือนจึงต้องมีเงื่อนไขขอบเขตแบบปลายอิสระ เนื่องจากที่ปลายนี้จะไม่มีความเค้นและโมเมนต์เกิดขึ้น เป็นต้น

ตารางที่ 7-2 เงื่อนไขขอบเขตของคานเสมือนที่มีค่าสอดคล้องกับที่รองรับของคานจริง

คานจริง (real beam)	คานเสมือน (conjugate beam)
Simple support: มุม $\neq 0$, การโก่งตัว $= 0$  pin และ roller	Simple support: แรงเค้น $\neq 0$, โมเมนต์ $= 0$  pin และ roller
Fixed end: มุม $= 0$, การโก่งตัว $= 0$  fixed	Free end: แรงเค้น $= 0$, โมเมนต์ $= 0$  free
Free end: มุม $\neq 0$, การโก่งตัว $\neq 0$  free	Fixed end: แรงเค้น $\neq 0$, โมเมนต์ $\neq 0$  fixed
Internal hinge: มุม $\neq 0$, การโก่งตัว $\neq 0$  hinge	Internal support: แรงเค้น $\neq 0$, โมเมนต์ $\neq 0$  roller
Internal support: มุม $\neq 0$, การโก่งตัว $= 0$  internal pin และ internal roller	Internal hinge: แรงเค้น $\neq 0$, โมเมนต์ $= 0$  hinge

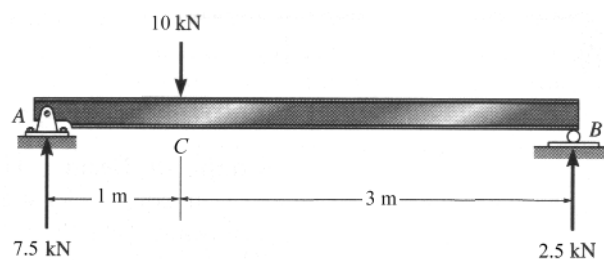
รูปที่ 7-16 แสดงตัวอย่างของคานเสมือนที่สอดคล้องกับคานจริงในรูปแบบต่างๆ เราควรที่จะทราบด้วยว่า ถ้าคานจริงแบบ statically indeterminate สอดคล้องกับคานเสมือนที่มีลักษณะขาดเสถียรภาพแล้ว ค่าของ M/EI จะก่อให้เกิดความสมดุลและเสถียรภาพในคานเสมือนนั้น ดังตัวอย่างของคานที่มีปลายยึดแน่นทั้งสองข้างในรูป ซึ่งคานเสมือนของคานนี้จะไม่มีการรองรับที่ปลายของคานดังที่แสดง



รูปที่ 7-16

ตัวอย่างที่ 7-5

พิจารณาคานเหล็ก W150x14 ซึ่งถูกกระทำโดยแรง 10 kN ดังที่แสดงในรูปที่ 7-17a จงหาค่าการโก่งตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นในคาน กำหนดให้ $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 6.84(10^6) \text{ mm}^4$



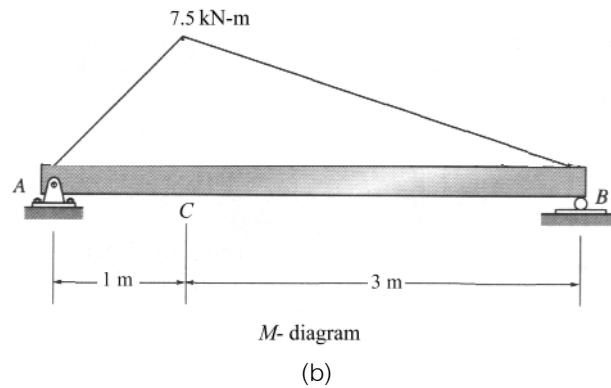
(a)

รูปที่ 7-17

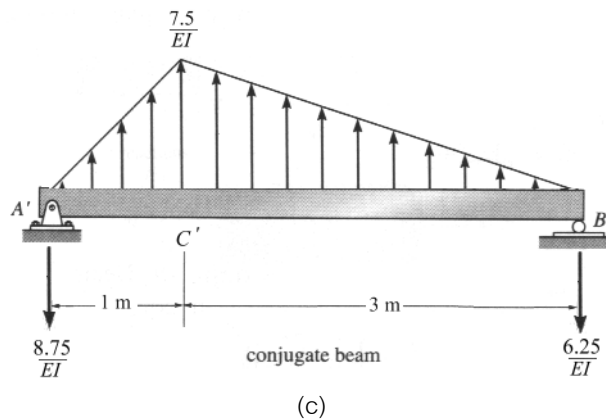
แรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B ของคานเหล็กเนื่องจากแรง 10 kN จะหาได้โดยใช้สมการความสมดุลของ free body diagram ของคาน โดยที่

$$R_A = 7.5 \text{ kN} \quad \text{และ} \quad R_B = 2.5 \text{ kN}$$

จากนั้น เราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ของคานดังกล่าวได้ดังแสดงในรูปที่ 7-17b



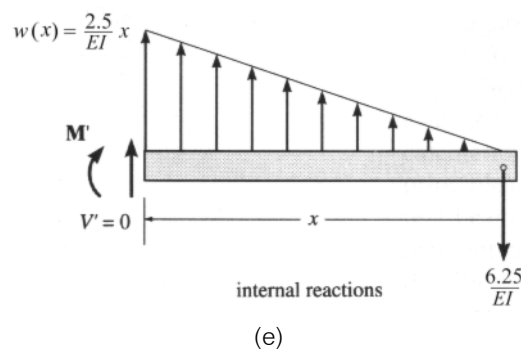
จากการพิจารณาเปลี่ยนจุดรองรับของคานหลักให้เป็นจุดรองรับของ conjugate beam และแปลงแผนภาพ moment diagram ให้เป็น elastic weight โดยการหารแผนภาพ moment diagram ด้วยค่า flexural rigidity EI ของคาน เราจะได้ conjugate beam มีลักษณะดังแสดงที่แสดงในรูปที่ 7-17c ค่าของ elastic weight M/EI มีทิศทางพุ่งขึ้นเพราะ moment diagram มีค่าเป็นบวก



จากนั้น เราจะสามารถหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A' และ B' ของ conjugate beam ได้โดยใช้สมการความสมดุล โดยที่

$$R_{A'} = \frac{8.75}{EI} \quad \text{และ} \quad R_{B'} = \frac{6.25}{EI}$$

ค่าการโก่งตัวสูงสุดของคานหลักจะเกิดขึ้นที่จุดซึ่งค่า slope ของรูปร่างการโก่งตัวของคานมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งจากหลักการของวิธี conjugate beam จุดดังกล่าวจะเป็นจุดเดียวกันที่ค่าแรงเฉือน (shear) ของ conjugate beam มีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย



สมมติให้จุดที่มีค่าการโก่งตัวสูงสุดอยู่ในช่วง CB ของคาน ดังนั้น ให้เราพิจารณา free body diagram ของ conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ 7-17e จากสามเหลี่ยมคล้าย เราจะหาค่าของ $w(x)$ ได้ในรูป

$$\frac{w(x)}{x} = \frac{7.5}{EI} \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$w(x) = \frac{2.5}{EI} x$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0;$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2.5x}{EI} \right) x - \frac{6.25}{EI} = 0$$

$$x = 2.236 \text{ m}$$

จากค่าของ x เราจะหาค่าของโมเมนต์ภายใน M' ของ conjugate beam ซึ่งสอดคล้องกับค่าการโก่งตัวสูงสุดของคาน ได้ดังนี้

$$\uparrow + \sum M = 0; \quad M' + \frac{6.25}{EI} (2.236) - \frac{1}{2} \left(\frac{2.5(2.236)}{EI} \right) 2.236 \left(\frac{1}{3} (2.236) \right) = 0$$

$$\Delta_{\max} = M' = -\frac{9.317 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

เครื่องหมายลบแสดงว่า การโก่งตัวมีทิศพุ่งลงจากตำแหน่งก่อนที่คานจะถูกกระทำโดยแรง 10 kN แทนค่าต่างๆ ลงในสมการโก่งตัวของคาน พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้

$$\Delta_{\max} = -\frac{9.317 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][6.84(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = -0.0068 \text{ m} = -6.8 \text{ mm}$$

ขอให้สังเกตด้วยว่า ค่าการโก่งตัวสูงสุดมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ span ของคาน ($\frac{L}{\Delta} = \frac{4000}{6.8} = 588.2$) ดังนั้น คานดังกล่าวยังคงมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic

ตัวอย่างที่ 7-6

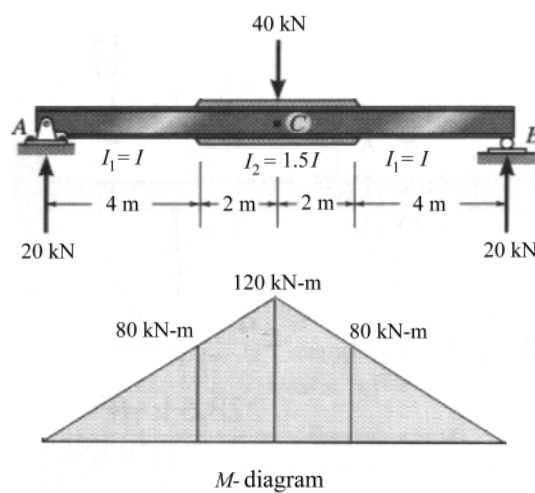
พิจารณาคานเหล็ก W360x64 ซึ่งถูกเสริมความแกร่งโดยแผ่นเหล็กที่ช่วงกลางคานและถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกคงที่เป็นจุด 40 kN ดังที่แสดงในรูปที่ 7-18a กำหนดให้ $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 179(10^6) \text{ mm}^4$

จงหาค่าการโก่งตัวสูงสุดที่เกิดขึ้นในคาน

จากรูปที่ 7-18b เราจะหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B ของคานเหล็กเนื่องจากแรง 40 kN ได้โดยใช้สมการความสมดุลบน free body diagram ของคาน เนื่องจากคานและแรงกระทำมีความสมมาตรรอบจุด C ที่กึ่งกลางของคาน ดังนั้น

$$R_A = R_B = 20 \text{ kN}$$

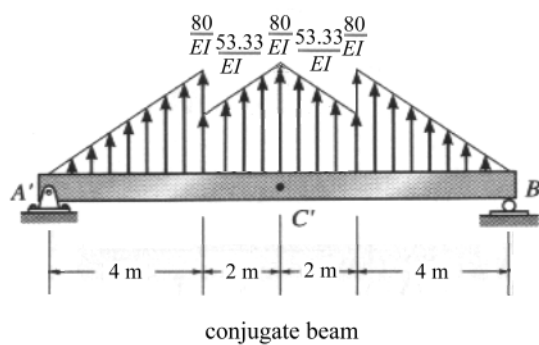
จากนั้น เราจะเขียนแผนภาพ moment diagram ของคานดังกล่าวได้ดังที่แสดงในรูปที่ 7-18b



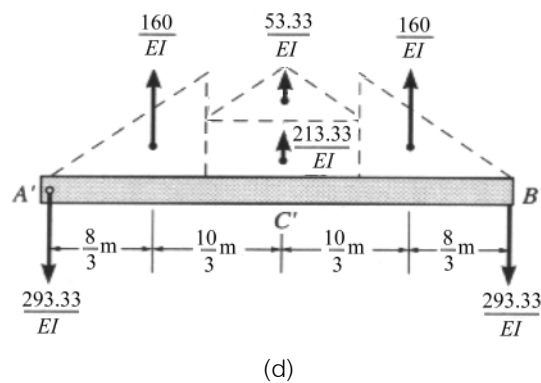
(a)

รูปที่ 7-18

จากการพิจารณาเปลี่ยนจตุรกรับของคานให้เป็นจตุรกรับของ conjugate beam และแปลงแผนภาพ moment diagram ให้เป็น elastic weight เราจะได้ conjugate beam มีลักษณะดังที่แสดงในรูปที่ 7-18c เราควรสังเกตว่า ในกรณีนี้ ค่า moment of inertia ของช่วงที่มีการเสริมแผ่นเหล็ก $I_2 = 1.5I_1 = 1.5I$ ดังนั้น ค่า elastic weight ในช่วงกลางคาน จึงมีค่าลดลง 50% นอกจากนั้นแล้ว จาก sign convention ค่าของ elastic weight M/EI มีทิศทางพุ่งขึ้นเพราะ moment diagram มีค่าเป็นบวก



(c)



จากนั้น เราจะหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A' และ B' ของ conjugate beam ได้โดยใช้สมการความสมดุลบน free body diagram ของ conjugate beam ในรูปที่ 7-18d เนื่องจาก conjugate beam และ elastic weight มีความสมมาตรที่กึ่งกลางของคานาที่จุด C' ดังนั้น

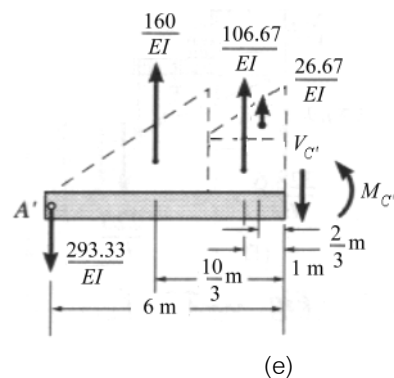
$$R'_A = R'_B = \frac{160}{EI} + \frac{53.33}{2EI} + \frac{213.33}{2EI} = \frac{299.33}{EI}$$

โมเมนต์ภายใน M' ที่จุดกึ่งกลางของ conjugate beam ซึ่งสอดคล้องกับจุดที่ค่าการโก่งตัวของคานาหลักมีค่าสูงสุดจะหาได้จาก free body diagram ของช่วง $A'C'$ ของ conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ 7-18e

$$\uparrow + \sum M_{A'} = 0; \quad M_{C'} + \frac{293.33}{EI}(6) - \frac{160}{EI}\left(\frac{10}{3}\right) - \frac{106.67}{EI}(1) - \frac{26.67}{EI}\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\Delta_{\max} = M_{C'} = -\frac{1102.2 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

จาก sign convention เครื่องหมายลบแสดงว่า การโก่งตัวที่จุด C มีทิศพุ่งลง



แทนค่าต่างๆ ลงในสมการ พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้

$$\Delta_{\max} = -\frac{1102.2 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = -0.0308 \text{ m} = -30.8 \text{ mm}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับที่เราหาได้ในตัวอย่างที่ 7-4 โดยวิธี moment-area

7.6 งานภายนอกและพลังงานความเครียด (External Work and Strain Energy)

วิธี moment-area และวิธี conjugate-beam มีความเหมาะสมในการวิเคราะห์หาค่ามุมลาดเอียง (slope) และระยะโก่งตัว (deflection) ของคานที่ถูกกระทำโดยแรงที่ไม่มีความซับซ้อน แต่วิธีพลังงาน (energy method) ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้มี ความเหมาะสมในกรณีที่แรงหรือน้ำหนักบรรทุกมีความซับซ้อนหรือโครงสร้างเป็นโครงข้อหมุน (truss) และโครงข้อแข็ง (frame) วิธีพลังงานนี้เป็นวิธีวิเคราะห์การโก่งตัวที่มีพื้นฐานมาจากหลักการอนุรักษ์พลังงาน (principle of conservation of energy) ซึ่งกล่าวว่า

งานภายนอก (external work) เนื่องจากแรงหรือน้ำหนักบรรทุก ซึ่งทำให้โครงสร้างมีการเปลี่ยนรูปร่าง, U_e , จะถูกเปลี่ยนเป็นงานภายในหรือพลังงานความเครียด (strain energy), U_i , สะสมอยู่ในโครงสร้างนั้น

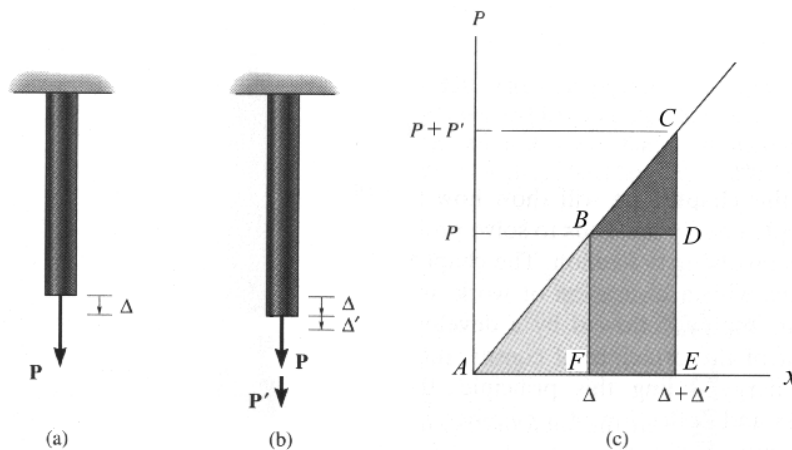
ถ้าโครงสร้างมีพฤติกรรมอยู่ในช่วงยืดหยุ่น (elastic limit) แล้ว เมื่อเอาแรงกระทำออก พลังงานความเครียดจะทำให้โครงสร้างคืนรูปกลับที่เดิม ดังนั้น เราจะเขียนสมการของกฎอนุรักษ์พลังงานได้ในรูป

$$U_e = U_i \quad (7-8)$$

งานภายนอกเนื่องจากแรงกระทำ (External Work – Force)

เมื่อแรงภายนอก F ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ไปเป็นระยะ dx ในทิศทางของแรงแล้ว งานภายนอก (external work) ที่เกิดจากแรงจะมีค่าเท่ากับ $dU_e = F dx$ และถ้าให้ระยะเคลื่อนที่ทั้งหมดมีค่าเป็น x แล้ว

$$U_e = \int_0^x F dx \quad (7-9)$$



รูปที่ 7-19

พิจารณาแท่งวัตถุซึ่งถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน ตามรูปที่ 7-19a เมื่อแรงดังกล่าวมีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ จากศูนย์จนถึง P แล้ว การยืดตัวที่ปลายของแท่งวัตถุก็จะมีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ จากศูนย์ถึง Δ ด้วย ยกตัวอย่างเช่น ในการทดสอบแรงดึงของแท่งเหล็กที่มีลักษณะตามที่แสดงในรูปที่ 7-19a โดยให้แท่งเหล็กมีพื้นที่หน้าตัด 13.5 mm และมีความยาว 0.5 m เราจะได้ข้อมูลในช่วงที่เหล็กมีพฤติกรรมแบบ linear elastic ดังที่แสดงในตารางที่ 7-3 เมื่อเรานำข้อมูลดังกล่าวมาเขียนกราฟ เราจะได้กราฟ ดังที่แสดงเป็นตัวอย่างในรูปที่ 7-19c โดยที่พิกัดของกราฟที่จุด B คือ $P = 6 \text{ kN}$ และ $\Delta = 0.105 \text{ mm}$ ดังนั้น จากสามเหลี่ยมคล้าย เราจะสามารถเขียนสมการของแรง F ใดๆ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่างศูนย์จนถึง P และเป็นฟังก์ชันกับระยะการยืดตัว x ของแท่งเหล็กได้ในรูป

$$F = (P / \Delta) x$$

เมื่อแทนสมการของแรง F ลงในสมการที่ 7-9 และทำการอินทิเกรตจาก 0 ถึง Δ แล้ว เราจะได้งานภายนอกเนื่องจากการกระทำของแรง P ซึ่งแท่งวัตถุเกิดการยืดตัว Δ จะอยู่ในรูปของสมการ

$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta \quad (7-10)$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยม ABF ได้กราฟแสดงความสัมพันธ์ของแรง P กับการยืดตัว x ดังที่แสดงในรูปที่ 7-19c

ตารางที่ 7-3 ตัวอย่างข้อมูลจากการทดสอบแรงดึงของแท่งเหล็ก

แรงในแนวแกน F (kN)	การยืดตัวที่ปลายของแท่งเหล็ก Δ (mm)
0	0
2	0.035
4	0.070
$P = 6$	$\Delta = 0.105$
$P' = 10$	$\Delta' = 0.175$

สมมติให้มีแรงในแนวแกนอีกแรงหนึ่งกระทำต่อแท่งวัตถุและมีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆ จากศูนย์จาก P ถึง $P + P'$ และทำให้แท่งวัตถุเกิดการยืดตัวเพิ่มขึ้นจาก Δ เป็น $\Delta + \Delta'$ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-19b จากตารางที่ 7-3 เราจะได้ว่า $P' = 10 - 6 = 4$ kN และ $\Delta' = 0.175 - 0.105 = 0.070$ mm ซึ่งเราจะเขียนกราฟได้ดังที่แสดงในรูปที่ 7-19c และเราจะเห็นได้ว่าการยืดตัวของแท่งวัตถุที่เพิ่มขึ้น Δ' จะทำให้เกิดงานขึ้น 2 ส่วนคือ

1. งานเนื่องจากแรง P เมื่อแท่งวัตถุเกิดการยืดตัว Δ' เนื่องจากแรง P' จะมีค่าเท่ากับ

$$U'_e = P \Delta' \quad (8-11)$$

ซึ่งคือพื้นที่ของสี่เหลี่ยม $BDEF$ ของกราฟ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-19c

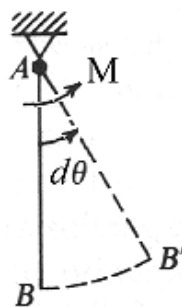
2. งานที่เกิดจากแรง P' เมื่อแท่งวัตถุเกิดการยืดตัวของแท่งวัตถุจาก Δ ถึง $\Delta + \Delta'$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$U''_e = \frac{1}{2} P \Delta'$$

ซึ่งคือพื้นที่สามเหลี่ยม BCD ของกราฟ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-19c

ดังนั้น งานภายนอกทั้งหมดที่เกิดจากแรง P ซึ่งทำให้เกิดการยืดตัวของแท่งวัตถุจากศูนย์ถึง Δ และแรง P' ซึ่งทำให้เกิดการยืดตัวของแท่งวัตถุจาก Δ ถึง Δ' มีค่าเท่ากับพื้นที่สามเหลี่ยม ACE

งานภายนอกเนื่องจากโมเมนต์ (External Work – Moment)



รูปที่ 7-20

ในลักษณะเช่นเดียวกับกรณีที่แท่งวัตถุถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน ถ้าแท่งวัตถุซึ่งถูกกระทำโดยโมเมนต์และโมเมนต์ดังกล่าวมีค่าเพิ่มขึ้นจากศูนย์ถึง M แล้ว ทำให้แท่งวัตถุเกิดการหมุนเพิ่มขึ้นจากศูนย์ถึง θ เรเดียน เราจะได้ว่างานภายนอกที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับ

$$dU_e = \left[\frac{M}{\theta} \phi \right] d\phi$$

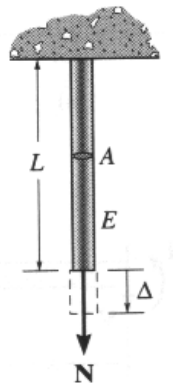
$$U_e = \int_0^{\theta} \frac{M}{\theta} \phi d\phi$$

$$U_e = \frac{1}{2} M \theta$$

ถ้ามีโมเมนต์อีกค่าหนึ่งมากระทำและทำให้แท่งวัตถุเกิดการหมุนเพิ่มขึ้นอีก θ' งานภายนอกเนื่องจากโมเมนต์ M เนื่องจากแท่งวัตถุเกิดการหมุนเพิ่มขึ้น θ' จะมีค่าเท่ากับ

$$U'_e = M \theta'$$

พลังงานความเครียดเนื่องจากแรงในแนวแกน (Strain Energy - Axial force)



รูปที่ 7-21

พิจารณาแท่งวัตถุยาว L พื้นที่หน้าตัด A และมีโมดูลัสความยืดหยุ่น (modulus of elasticity) E ดังที่แสดงในรูปที่ 7-21 เมื่อมีแรงในแนวแกนค่า N กระทำที่ปลายของแท่งวัตถุและปลายของแท่งวัตถุเกิดการยืดตัว Δ แล้ว แรง N จะทำให้เกิดงานภายนอกซึ่งจะถูกเก็บสะสมในเนื้อวัสดุในรูปของพลังงานความเครียด ถ้าให้แท่งวัตถุทำด้วยวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic) และเป็นเนื้อเดียวกัน (homogenous) และมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic แล้ว จาก Hooke's law $\sigma = E \epsilon$ เราจะได้ว่า ค่าการยืดตัว Δ เนื่องจากแรงในแนวแกน N มีค่าเท่ากับ

$$\frac{N}{A} = E \frac{\Delta}{L}$$

$$\Delta = \frac{NL}{AE} \quad (7-15)$$

แทนค่าสมการที่ 7-15 ลงในสมการที่ 7-10 เมื่อแรงในแนวแกน $P = N$ แล้ว เราจะได้พลังงานความเครียดมีค่าเท่ากับ

$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} \quad (7-16)$$

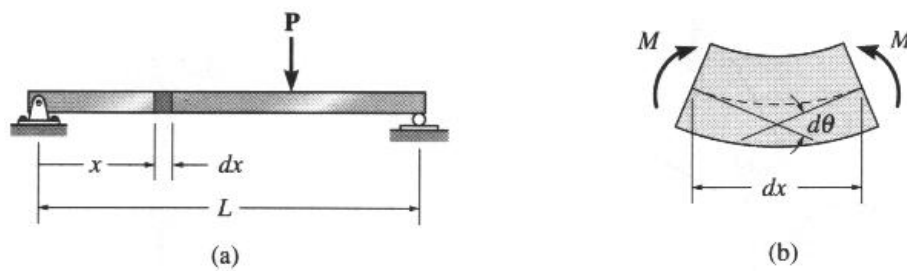
พลังงานความเครียดเนื่องจากโมเมนต์ดัด (Strain Energy – Bending Moment)

พิจารณาคานตามรูปที่ 7-22a ซึ่งถูกกระทำโดยแรง P และแรง P จะทำให้เกิดโมเมนต์ดัด M ที่ระยะ x จากจุดรองรับ A และจะทำให้เกิดมุมลาดเอียงบนส่วนของคาน dx มีค่าเท่ากับ $d\theta = (M / EI) dx$ (สมการที่ 7-1) ดังนั้น จากสมการที่ 7-13 เราจะได้ว่า พลังงานความเครียดที่ถูกเก็บสะสมอยู่ในส่วนของคาน dx มีค่าเท่ากับ

$$dU_i = \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (7-17)$$

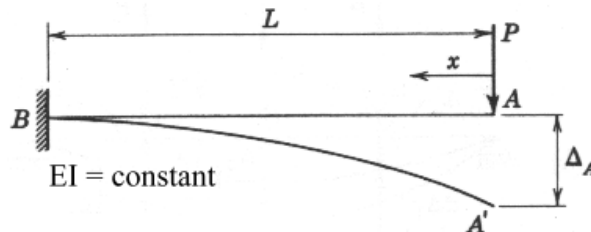
และค่าพลังงานความเครียดตลอดความยาวของคานจะมีค่าเท่ากับ

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (7-18)$$



รูปที่ 7-22

7.7 หลักการของงานและพลังงาน (Principle of Work and Energy)



รูปที่ 7-23

พิจารณาคานยื่น (Cantilevered beam) ดังที่แสดงในรูปที่ 7-23 ซึ่งเราต้องการหาระยะโก่งตัว Δ ที่จุด A ภายใต้การกระทำของแรง P จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน เรามีอยู่ว่า $U_e = U_i$ โดยที่จากสมการที่ 7-10 งานเนื่องจากแรงภายนอก $U_e = P\Delta / 2$ และโมเมนต์ที่ระยะ x จากจุด A มีค่าเท่ากับ $M = -Px$ ดังนั้น จากสมการที่ 7-18 เราจะหาพลังงานความเครียดได้จาก

$$U_i = \int_0^L \frac{(-Px)^2}{2EI} dx = \frac{1}{6} \frac{P^2 L^3}{EI}$$

และเนื่องจาก $U_e = U_i$ เราจะได้ว่า

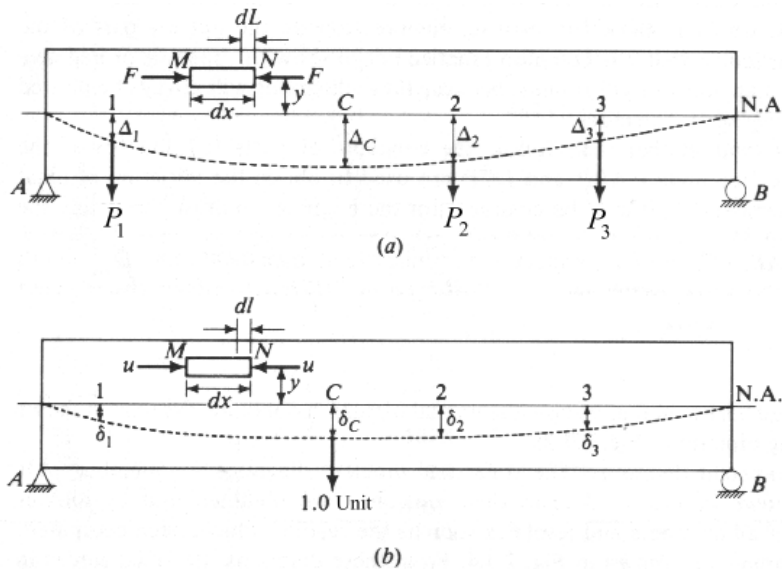
$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{1}{6} \frac{P^2 L^3}{EI}$$

$$\Delta = \frac{1}{3} \frac{PL^3}{EI}$$

เราจะเห็นได้ว่า เราสามารถที่จะหาระยะโก่งตัวของคานโดยใช้หลักการของงานและพลังงานได้โดยง่าย แต่วิธีการนี้มีข้อจำกัดคือจะใช้ได้กับโครงสร้างที่มีแรงกระทำเพียงแรงเดียวเท่านั้น ถ้าโครงสร้างมีแรงกระทำมากกว่า 1 แรงแล้ว เราจะมีระยะโก่งตัวไม่ทราบค่าที่จุดที่แรงกระทำหลายค่า และเราจะไม่สามารถแก้สมการของหลักการอนุรักษ์พลังงานได้ จากเหตุผลนี้ทำให้เกิดการพัฒนาวิธี virtual work และวิธี castigliano ขึ้นมา

7.8 หลักการงานเสมือน (Principle of Virtual Work)

หลักการ virtual work (principle of virtual work) ซึ่งถูกพัฒนาโดย John Bernoulli ในปี ค.ศ. 1717 มีพื้นฐานมาจากหลักการอนุรักษ์พลังงาน (principle of conservation of energy) และบางครั้งจะถูกเรียกว่าวิธี unit-load



รูปที่ 7-24

พิจารณาคานอีลาสติก ดังแสดงอยู่ในรูปที่ 7-24a สมมุติว่าเราต้องการหาค่าการโก่งตัว Δ ที่จุด C (Δ_C) เนื่องจากแรง “real loads” P_1 , P_2 และ P_3 ซึ่งมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ จากศูนย์

เมื่อแรง P_1 , P_2 และ P_3 กระทำต่อโครงสร้าง ดังที่แสดงในรูปที่ 7-24a โดยที่แรงชุดนี้จะทำให้เกิดแรงภายในขึ้นที่จุดต่างๆ ในโครงสร้าง เช่นที่ชิ้นส่วน MN มีแรงภายในเกิดขึ้นเท่ากับ F และเกิดการหดตัว dL นอกจากนั้นแล้ว แรง P_1 , P_2 และ P_3 จะทำให้เกิดการโก่งตัวที่จุดที่แรงกระทำดังที่แสดงในรูป ดังนั้น งานที่เกิดจากแรง P_1 , P_2 และ P_3 จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2 + \frac{1}{2} P_3 \Delta_3$$

และพลังงานที่สะสมอยู่ในโครงสร้างมีค่าเท่ากับ

$$\frac{1}{2} \sum F dL$$

จากหลักการงานและพลังงาน เราจะได้ว่า $\frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2 + \frac{1}{2} P_3 \Delta_3 = \frac{1}{2} \sum F dL$ (a)

เมื่อแรง “virtual loads” P' ขนาด 1 หน่วย กระทำที่จุด C ในทิศทางที่ต้องการหาค่าการโก่งตัว Δ_C โดยให้มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ จากศูนย์ ดังแสดงอยู่ในรูปที่ 7-24b กำหนดให้แรง 1 หน่วยนี้ทำให้เกิดแรงภายในขึ้นที่จุดต่างๆ ในโครงสร้าง เช่นที่ชิ้นส่วน MN มีแรงภายในเกิดขึ้นเท่ากับ u และเกิดการหดตัว dl นอกจากนั้นแล้ว แรง 1 หน่วยจะทำให้เกิดการโก่งตัวที่จุดที่แรงกระทำดังที่แสดงในรูป ซึ่งมีค่าน้อยมากๆ เมื่อเทียบกับค่าการโก่งตัวเนื่องจากแรง “real loads” P_1 , P_2 และ P_3

จากหลักการงานและพลังงาน เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{2} (1.0) \delta_C = \frac{1}{2} \sum u dl$$
 (b)

ดังนั้น ผลรวมของงานและพลังงานที่สะสมอยู่ในโครงสร้าง เนื่องจากการกระทำของแรง “real loads” P_1 , P_2 และ P_3 และแรง “virtual loads” P' ขนาด 1 หน่วย ที่กระทำแยกเป็นอิสระต่อกันจะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2 + \frac{1}{2} P_3 \Delta_3 + \frac{1}{2} (1.0) \delta_C = \frac{1}{2} \sum F dL + \frac{1}{2} \sum u dl \quad (d)$$

ในอีกกรณีหนึ่ง ถ้าเราให้แรง “virtual loads” P' ขนาด 1 หน่วยกระทำกับโครงสร้างก่อนแล้วให้ แรง “real loads” P_1 P_2 และ P_3 กระทำที่หลัง จากหลักการงานและพลังงาน เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{2} (1.0) \delta_C + \left[\frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2 + \frac{1}{2} P_3 \Delta_3 + (1.0) \Delta_C \right] = \frac{1}{2} \sum u dl + \left[\frac{1}{2} \sum F dL + \sum u dL \right] \quad (e)$$

เนื่องจากงานที่เกิดจากแรงภายนอกและงานที่สะสมอยู่ในโครงสร้างเป็นอิสระกับลำดับการกระทำของแรง คือจะต้องมีค่าเท่ากันเสมอไม่ว่าจะกระทำพร้อมกันหรือกระทำแยกกัน ดังนั้น เมื่อเราทำลบ (e) ด้วย (d) แล้ว เราจะได้ว่า

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{Virtual} \\ (1.0) \Delta_C = (\sum u) dL \\ \uparrow \text{Actual} \end{array} \quad (7-20)$$

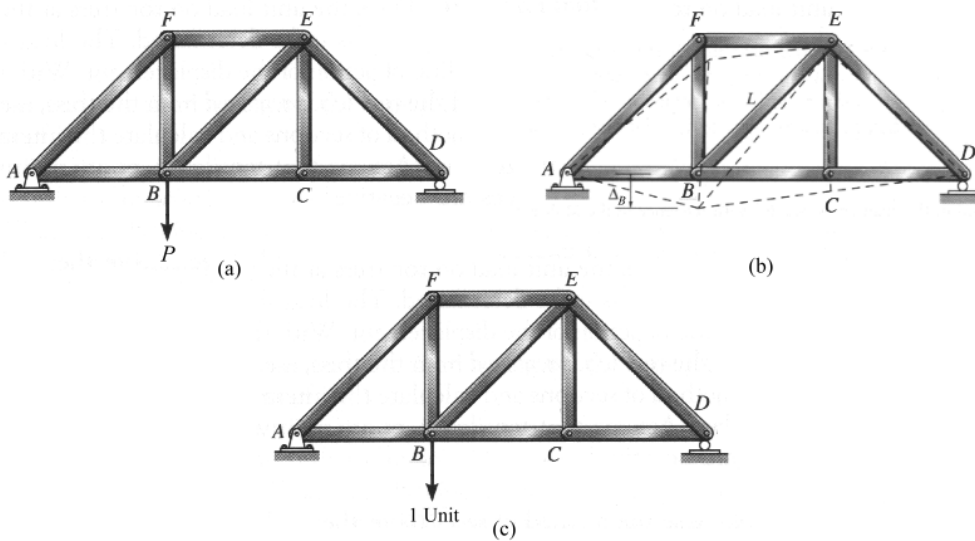
หรือ virtual work ภายนอกจะมีค่าเท่ากับ “virtual loads” P' ขนาด 1 หน่วย (กระทำที่จุด C ในทิศทางของการโก่งตัว Δ) คูณกับการโก่งตัว Δ และ virtual work ภายในจะมีค่าเท่ากับผลรวมของแรง virtual ภายใน u ในโครงสร้างคูณกับการยืดตัว dL ที่ส่วนนั้นๆ ของโครงสร้าง เนื่องจากแรง “real loads” P_1 P_2 และ P_3

ในลักษณะเดียวกัน ถ้าเราต้องการหาค่ามุมลาดเอียง (Slope) θ ของเส้นสัมผัสที่จุดใดจุดหนึ่งของโครงสร้าง เราจะให้ “virtual moment” M' ขนาด 1 หน่วยกระทำต่อโครงสร้างที่จุดนั้นในทิศทางที่เราต้องการหาค่ามุมลาดเอียง โดยที่ “virtual moment” นี้จะก่อให้เกิดแรง virtual ภายใน u_θ ที่ส่วนต่างๆ ของโครงสร้าง สมมติให้ “real loads” ก่อให้เกิดการยืดตัว dL ในโครงสร้าง ดังนั้น จากหลักการ virtual work เราจะได้ว่า

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{Virtual (1)} \\ (1) \theta = (\sum u_\theta) dL \\ \uparrow \text{Actual (2)} \end{array} \quad (7-21)$$

7.9 วิธี Virtual Work ในการหาค่าการแอ่นตัวของโครงข้อหมุน

วิธี Virtual Work ในการหาค่าการแอ่นตัวของโครงข้อหมุนเนื่องจากแรงกระทำภายนอก



รูปที่ 7-25

พิจารณาโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-25a ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างภายใต้การกระทำของแรง P ดังที่แสดงในรูปที่ 7-25b และชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนซึ่งมีความยาวเริ่มต้น L จะเกิดการเปลี่ยนแปลงความยาว dL โดยที่

$$dL = NL / AE$$

เมื่อ N เป็นแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนที่เกิดจากแรง P ดังนั้น จากหลักการ virtual work สมมติว่าเราต้องการหาค่าการแอ่นตัว Δ_B ที่จุด B เราจะทำการวิเคราะห์ได้ดังนี้

1. ทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนหาแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนเนื่องจากแรง P ดังที่แสดงในรูปที่ 7-25a กำหนดให้ แรงในแนวแกนที่หามาได้มีค่าเป็น N
2. ให้แรงขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด B ในทิศทางของการแอ่นตัว Δ ที่เราต้องการหา จากนั้นทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนหาแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนเนื่องจากแรงขนาด 1 หน่วย ดังที่แสดงในรูปที่ 7-25c กำหนดให้ แรงในแนวแกนที่หามาได้มีค่าเป็น n
3. จากสมการที่ 7-20 เราจะหาค่าการแอ่นตัวที่จุดต่อ B ของโครงข้อหมุนได้จาก

$$(1) \Delta_B = \sum \frac{nNL}{AE} \quad (7-22)$$

เมื่อ 1 = แรง virtual 1 หน่วย (virtual unit load) ที่กระทำที่จุดต่อที่เราต้องการหาค่าการโก่งตัว Δ ในทิศทางของ Δ

n = แรงในแนวแกนในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนที่เกิดจากแรง virtual 1 หน่วย

Δ_B = ค่าการโก่งตัวที่จุดต่อของโครงข้อหมุน

N = แรงในแนวแกนในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนเนื่องจากแรงกระทำจริง (real load)

L = ความยาวของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

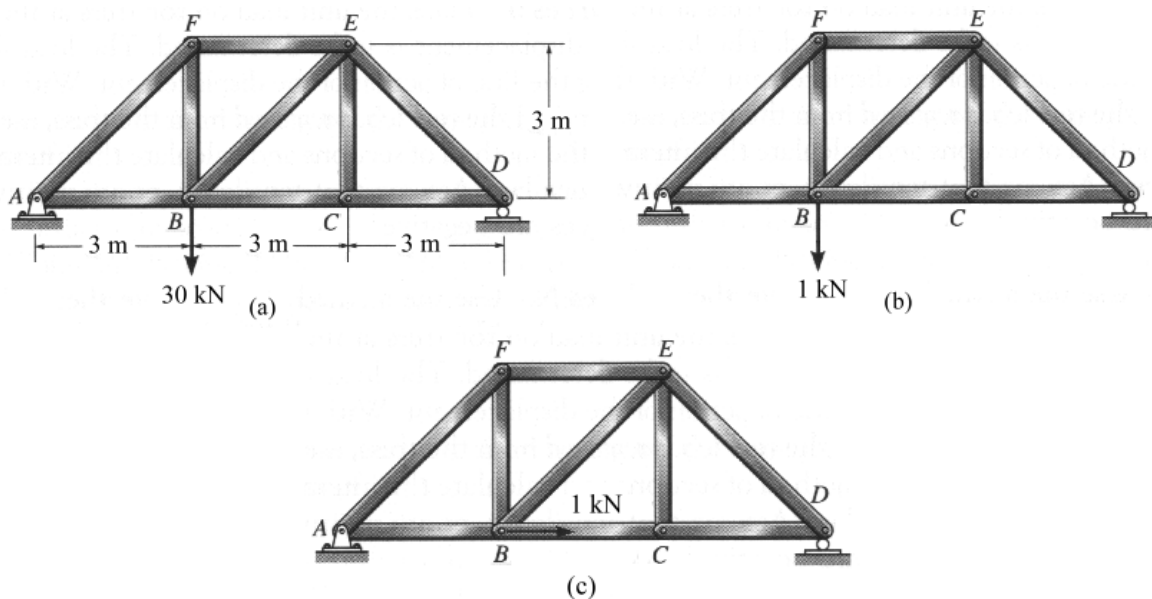
A = พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

E = โมดูลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity) ของวัสดุที่ใช้ทำโครงข้อหมุน

ตัวอย่างที่ 7-7

กำหนดให้โครงข้อหมุนเหล็กถูกกระทำโดยแรง $P = 30 \text{ kN}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-26 ถ้าพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน $A = 300 \text{ mm}^2$ และค่า modulus of elasticity ของเหล็ก $E = 200 \text{ GPa}$ จงหา

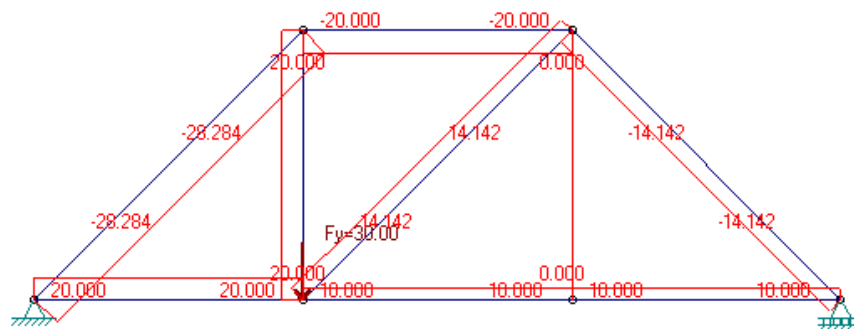
1. ค่าการแอ่นตัวในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B
2. ค่าการแอ่นตัวในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B



รูปที่ 7-26

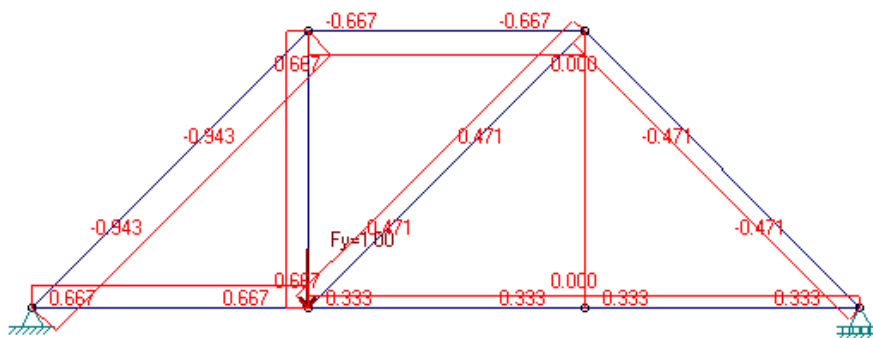
ค่าการแอ่นตัวในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B

1. วิเคราะห์โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-26a เพื่อหาแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเนื่องจากแรง $P = 30 \text{ kN}$ รูปที่ 7-26d แสดงผลลัพธ์ที่ได้



(d)

2. ให้ virtual unit load 1 kN ในทิศทางของการแอ่นตัว Δ_B กระทำที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 7-26b และทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนหาแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนเนื่องจากแรงดังกล่าว รูปที่ 7-26e แสดงผลลัพธ์ที่ได้



(e)

3. นำค่าแรงในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนที่หาได้ในข้อที่ 1 และ 2 มาเขียนลงในตารางดังที่แสดง

Member	$L \text{ (m)}$	$N \text{ (kN)}$	$n \text{ (kN)}$	$nNL \text{ (kN}^2 \cdot \text{m)}$
AB	3	20	0.667	40
BC	3	10	0.333	10
CD	3	10	0.333	10
DE	4.243	-14.142	-0.471	28.262
EF	3	-20	-0.667	40
AF	4.243	-28.284	-0.943	113.168
BF	3	20	0.667	40
BE	4.243	14.142	0.471	28.262
CE	3	0	0	0

$$\sum nNL = 309.692 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}$$

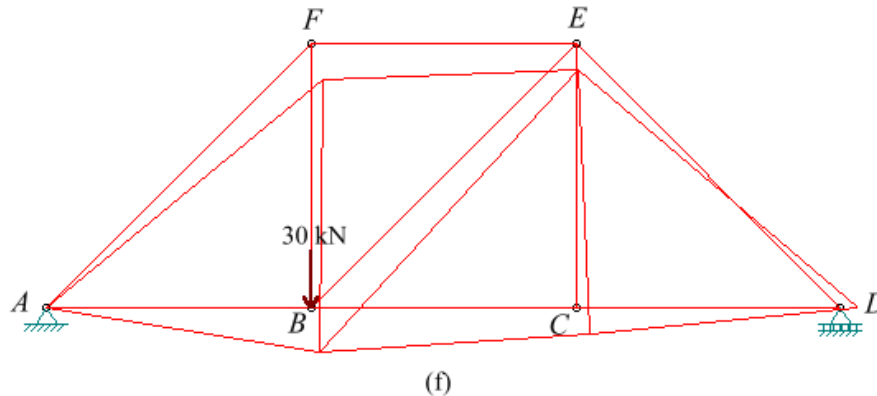
4. จากวิธี unit-load method ค่าการแอ่นตัวที่จุดต่อ B ของโครงข้อหมุนจะมีค่าเท่ากับ

$$(1) \Delta_{Bv} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{309.692}{AE}$$

$$(1 \text{ kN}) \Delta_{Bv} = \frac{309.692 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{300(10^{-6} \text{ m}^2)200(10^6 \text{ kN/m}^2)} = 5.2(10^{-3}) \text{ m} = 5.2 \text{ mm}$$

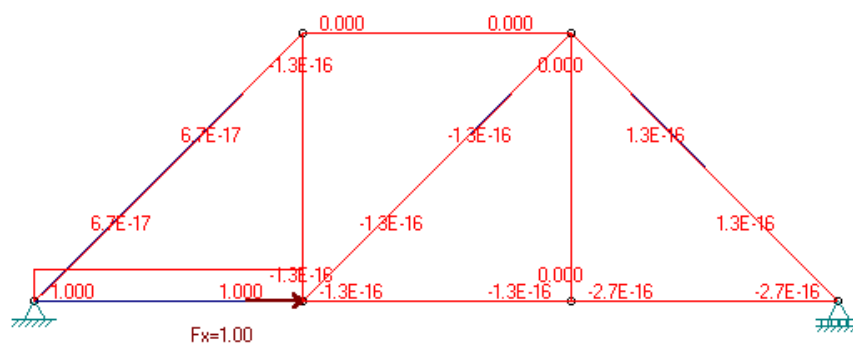
$$\Delta_{Bv} = 5.2(10^{-3}) \text{ m} = 5.2 \text{ mm}$$

เนื่องจาก Δ_{Bv} มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_{Bv} จะมีทิศทางเดียวกันกับ virtual unit load คือมีทิศพุ่งลง และรูปที่ 7-26f แสดงลักษณะการแอ่นตัวของโครงข้อหมุนเนื่องจาก แรง $P = 30 \text{ kN}$



ค่าการแอ่นตัวในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B

ในการหาค่าการแอ่นตัวในแนวนอนนี้ เราจะใช้ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์โครงข้อหมุนเนื่องจากแรง $P = 30 \text{ kN}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-26d รวมผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์โครงข้อหมุนเนื่องจาก virtual unit load 1 kN ในแนวนอนกระทำที่จุด B ไปทางซ้ายมือ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-26c และ 7-26g



จากผลการวิเคราะห์ เราจะเห็นได้ว่า มีเพียงแรง N_{AB} เท่านั้นที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น เราจะได้ว่า

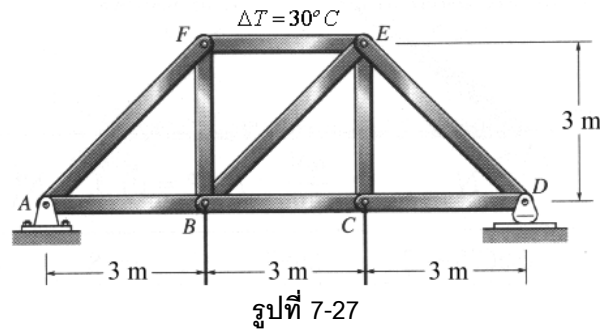
$$(1) \Delta_{Bh} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{(nNL)_{AB}}{AE}$$

$$(1 \text{ kN}) \Delta_{Bh} = \frac{(1 \text{ kN})(20 \text{ kN})(3 \text{ m})}{300(10^{-6} \text{ m}^2)200(10^6 \text{ kN/m}^2)}$$

$$\Delta_{Bh} = 1.0(10^{-3}) \text{ m} = 1.0 \text{ mm}$$

เนื่องจาก Δ_{Bh} มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_{Bh} จะมีทิศทางเดียวกันกับ virtual unit load คืออยู่ในแนวนอนมีทิศทางไปทางซ้ายมือ

วิธี Virtual Work ในการหาค่าการแอ่นตัวของโครงข้อหมุนเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ



เมื่ออุณหภูมิในชิ้นส่วนใดชิ้นหนึ่งของโครงข้อหมุนมีการเปลี่ยนแปลง ยกตัวอย่างเช่น ชิ้นส่วน FE ของโครงข้อหมุนในรูปที่ 7-27 มีอุณหภูมิเพิ่มสูงขึ้น $30^{\circ}C$ ดังนั้น ชิ้นส่วน FE จะมีความยาวเพิ่มขึ้นจากเดิม ซึ่งจะเป็นผลทำให้เกิดแรงกดอัดกระทำต่อจุดต่อ F และจุดต่อ E ของโครงข้อหมุน แรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากการยืดตัวนี้จะทำตัวเหมือนแรงภายนอกซึ่งจะทำให้เกิดแรงภายในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน และจะทำให้เกิดการแอ่นตัวของโครงข้อหมุนด้วย

เมื่อเราให้ α เป็นสัมประสิทธิ์การยืดตัวเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ (coefficient of thermal expansion) ของวัสดุที่ใช้ทำโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในตารางที่ 7-4 และ ΔT เป็นค่าของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปแล้ว จากการทดสอบในห้องปฏิบัติการ เราจะได้ว่า ความยาวที่เปลี่ยนแปลงไปของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิจะมีค่าเท่ากับ $\Delta L = \alpha L \Delta T$ ดังนั้น จากหลักการ virtual work เราจะหาค่าการแอ่นตัวของโครงข้อหมุนได้จาก

$$(1) \Delta = \sum n \alpha \Delta T L \quad (7-23)$$

เมื่อ 1 = แรงแบบ virtual หนึ่งหน่วย (virtual unit load) ที่กระทำอยู่ที่จุดต่อของโครงข้อหมุนที่ต้องการหาค่าการโก่งตัว Δ ในทิศทางของ Δ

n = แรงในแนวแกนในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนที่เกิดจากแรงแบบ virtual หนึ่งหน่วย

Δ = ค่าการโก่งตัวที่จุดต่อของโครงข้อหมุนเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ

α = เป็นสัมประสิทธิ์การยืดตัวเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัสดุ

ตารางที่ 7-4 สัมประสิทธิ์การยืดตัวเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัสดุ

ชนิดของวัสดุ	α ($10^{-6} / ^{\circ}C$)
เหล็ก (Steel)	12
เหล็กหล่อ (Cast iron)	12
เหล็กปลอดสนิม (Stainless steel)	17
คอนกรีต (Concrete)	11
อลูมิเนียม (Aluminum)	24

ΔT = ค่าของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป

L = ความยาวของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน

ตัวอย่างที่ 7-8

จากโครงข้อหมุนเหล็กในรูปที่ 7-27 ถ้า $\alpha = 12(10^{-6}) / ^{\circ}C$ จงหาค่าการแอ่นตัวในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B เนื่องจากชิ้นส่วน FE มีอุณหภูมิเพิ่มสูงขึ้น $30^{\circ}C$

1. ในกรณีนี้ เนื่องจากแรงภายนอกมีค่าเป็นศูนย์ เราไม่จำเป็นต้องวิเคราะห์โครงสร้างข้อหมุนเนื่องจากแรงภายนอก
2. ให้ virtual unit load 1 kN กระทำที่จุด B ในในแนวดิ่ง และทำการวิเคราะห์โครงสร้างข้อหมุนเพื่อหาแรง n_{FE} ซึ่งจากตารางในตัวอย่างที่ 7-6

$$n_{FE} = -0.667$$

3. ค่าการแอ่นตัวในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B เนื่องจากชิ้นส่วน FE มีอุณหภูมิเพิ่มสูงขึ้น $30^{\circ}C$ จะหาได้จาก

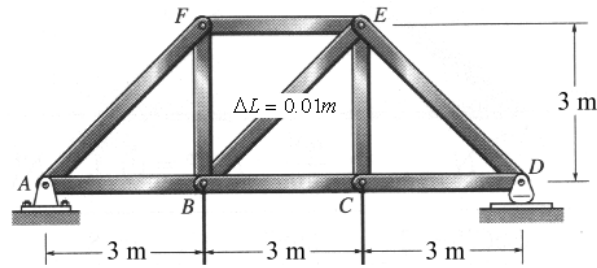
$$(1)\Delta_B = \sum n \alpha \Delta T L = (n \alpha \Delta T L)_{FE}$$

$$(1 \text{ kN})\Delta_B = (-0.667 \text{ kN})12(10^{-6} / ^{\circ}C)(30^{\circ}C)(3 \text{ m})$$

$$\Delta_B = -720(10^{-6}) \text{ m} = -0.72 \text{ mm}$$

เนื่องจาก Δ_B มีค่าเป็นลบ ดังนั้น Δ_B จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับ virtual unit load คือมีทิศทางพุ่งขึ้น

วิธี Virtual Work ในการหาค่าการแอ่นตัวของโครงข้อหมุนเนื่องจากความผิดพลาดในการก่อสร้าง



รูปที่ 7-28

ความผิดพลาดในการก่อสร้าง (fabrication errors) ของโครงข้อหมุนมักเกิดจากความผิดพลาดในการตัดหรือประกอบชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเข้าด้วยกัน ซึ่งจะทำให้ความยาวของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนหลังจากที่ก่อสร้างเสร็จแล้ว มีค่าไม่เท่ากับความยาวที่ได้ออกแบบไว้ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-28 เราจะเห็นได้ว่า ถ้าความยาวของชิ้นส่วน BF มีค่ายาวเกินกว่าที่ได้ออกแบบไว้มีค่าเป็น 0.01m ซึ่งมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวของชิ้นส่วน BF แล้ว ในการที่จะประกอบโครงข้อหมุนนี้ เราจำเป็นต้องทำให้ชิ้นส่วน BF เกิดการหดตัวเป็นระยะ 0.01m โดยการใส่แรงกดอัดให้กระทำต่อชิ้นส่วน BF เมื่อเราประกอบโครงข้อหมุนเสร็จและเอาแรงกดอัดออกแล้ว แรงดังกล่าวจะถ่ายกลับไปกระทำต่อโครงข้อหมุนที่จุดต่อ B และจุดต่อ F ซึ่งจะทำให้เกิดแรงภายในและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงข้อหมุนเกิดขึ้นในกรณีเช่นนี้ จากหลักการ virtual work เราจะหาค่าการแอ่นตัวที่จุดต่อใดจุดต่อหนึ่งของโครงข้อหมุนได้จาก

$$(1) \Delta = \sum n(\Delta L) \quad (7-24)$$

เมื่อ 1 = แรงแบบ virtual หนึ่งหน่วย (virtual unit load) ที่กระทำอยู่ที่จุดต่อของโครงข้อหมุนที่ต้องการหาค่าการแอ่นตัว Δ ในทิศทางของ Δ

n = แรงในแนวแกนในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนที่เกิดจากแรงแบบ virtual หนึ่งหน่วย

Δ = ค่าการแอ่นตัวที่จุดต่อของโครงข้อหมุนเนื่องจากความผิดพลาดในการก่อสร้าง

ΔL = ความยาวของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่เปลี่ยนแปลงไปจากความยาวที่ได้ออกแบบไว้

ตัวอย่างที่ 7-9

จากโครงข้อหมุนในรูปที่ 7-28 จงหาค่าการแอ่นตัวในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B เนื่องจากชิ้นส่วน BE มีค่ายาวเกินกว่าที่ได้ออกแบบไว้เท่ากับ 0.01m

- เนื่องจากแรงภายนอกมีค่าเป็นศูนย์ เราไม่จำเป็นต้องวิเคราะห์โครงข้อหมุนเนื่องจากแรงภายนอก
- ให้ virtual unit load 1 kN กระทำที่จุด B ในแนวดิ่ง และทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุนหาแรง n_{BE} ซึ่งจากรายงานในตัวอย่างที่ 7-6

$$n_{BE} = 0.471\text{ kN}$$

- ค่าการแอ่นตัวในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B เนื่องจากชิ้นส่วน BE มีค่ายาวเกินกว่าที่ได้ออกแบบไว้ 0.01m จะหาได้จาก

$$\begin{aligned} (1) \Delta_B &= \sum n \Delta L = (n \Delta L)_{BE} \\ (1\text{ kN}) \Delta_B &= (0.471\text{ kN})(0.01\text{ m}) \\ \Delta_B &= 4.7(10^{-3})\text{ m} = 4.7\text{ mm} \end{aligned}$$

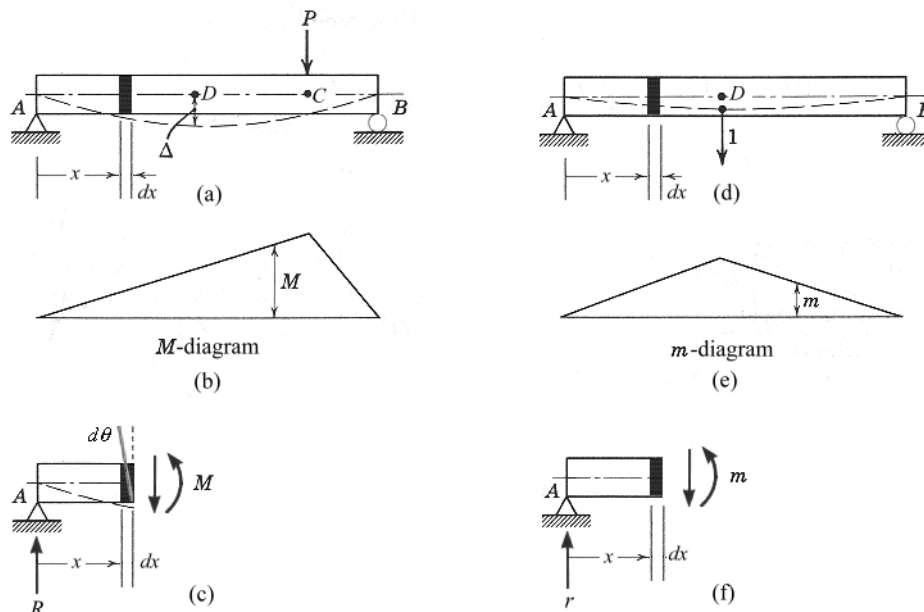
เนื่องจาก Δ_B มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_B จะมีทิศทางเดียวกันกับ virtual unit load คือมีทิศพุ่งลง

ในกรณีที่โครงข้อหมุนถูกกระทำโดยแรงภายนอก P การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ΔT และความผิดพลาดในการก่อสร้าง ΔL ในเวลาเดียวกัน ยกตัวอย่างเช่น การเกิดขึ้นพร้อมกันของเหตุการณ์ตามตัวอย่างที่ 7-7 ถึง 7-9 เป็นต้น เราจะ

หาค่าการแอ่นตัวลัพธ์ที่เกิดขึ้นที่จุดใดจุดหนึ่งได้โดยใช้หลักการ superposition ดังนั้น จาก ตัวอย่างที่ 7-7 ถึง 7-9 เราจะได้ค่าการแอ่นตัวลัพธ์ในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned}(\Delta_B)_{total} &= (\Delta_B)_P + (\Delta_B)_{\Delta L} + (\Delta_B)_{\Delta T} \\ &= +5.2 - 0.7 + 4.7 = 9.2 \text{ mm}\end{aligned}$$

7.10 วิธี Virtual Work ในการหาค่าการโก่งตัวของคานและโครงข้อแข็ง



รูปที่ 7-29

พิจารณาคานซึ่งถูกกระทำโดยแรง P และมีการโก่งตัวดังที่แสดงตามรูปที่ 7-29a เมื่อเราต้องการหาค่าระยะโก่งตัว Δ ที่จุด D เริ่มต้น เราให้ virtual unit load ที่มีทิศทางเดียวกับ Δ กระทำที่จุด D ดังที่แสดงตามรูปที่ 7-29d และหาค่าของ virtual moment m ดังที่แสดงตามรูปที่ 7-29e จากนั้น เราจะหาค่าของโมเมนต์ดัดภายใน M ที่เกิดจากแรง P ดังที่แสดงในรูปที่ 7-29b และจากรูปที่ 7-29c เราจะได้ว่า ภายในได้แรงกระทำ P หน้าตัดของส่วนของคาน dx ที่วัดจากปลาย A เป็นระยะ x จะถูกทำให้หมุนไป เนื่องจากการกระทำของโมเมนต์ดัดภายใน M เป็นมุม $d\theta$ จากสมการที่ 7-1 เราทราบมาแล้วว่า $d\theta = (M / EI) dx$ ดังนั้น

ค่า virtual work ภายในที่เกิดจาก virtual unit load เคลื่อนที่ในทิศทางของ Δ เป็นระยะ Δ มีค่าเท่ากับ

$$(1) \Delta$$

และค่า virtual work ภายในซึ่งเกิดจาก virtual moment m และการหมุนในทิศทางเดียวกับมุม $d\theta$ ของส่วนของคาน dx เป็นระยะ $d\theta$ มีค่าเท่ากับ

$$m d\theta = m (M / EI) dx$$

เมื่อเราทำการอินทิเกรต (integration) สมการ $m d\theta$ ตลอดความยาวของคาน L เราจะได้ ค่า virtual work ภายในทั้งหมด และเมื่อเราแทนค่าลงในจากสมการที่ 7-20 เราจะได้ว่า

$$(1) \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx \quad (7-25)$$

เมื่อ 1 = virtual unit load ที่กระทำอยู่บนคานหรือโครงข้อแข็งที่จุดที่ต้องการหาระยะโก่งตัว Δ ในทิศทางของ Δ

m = virtual moment ในคานหรือโครงข้อแข็งซึ่งเกิดจาก virtual unit load

Δ = ค่าระยะโก่งตัวที่ต้องการหา

M = โมเมนต์ซึ่งเกิดจากแรงกระทำจริง

L = ความยาวคานหรือองค์อาคารของโครงข้อแข็ง

I = moment of inertia รอบแกนสะเทินของคานหรือองค์อาคารของโครงข้อแข็ง

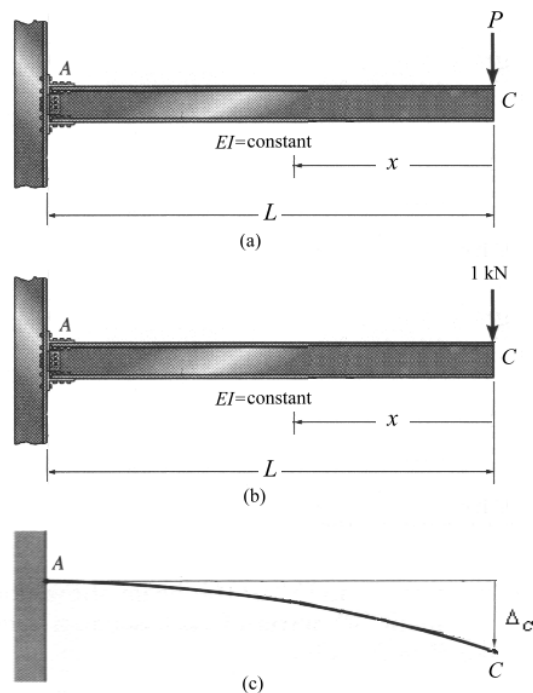
E = โมดูลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity) ของวัสดุที่ใช้ทำคานหรือโครงข้อแข็ง

ในลักษณะเดียวกัน สมมติว่าเราต้องการหาค่ามุมลาดเอียง (slope) θ ที่จุด D ของคานดังที่แสดงในรูปที่ 7-29a แล้ว เราจะให้ unit couple moment กระทำที่จุด D ซึ่งจะก่อให้เกิด virtual moment m_θ บนคาน ดังนั้น ค่า virtual work ภายในซึ่งเกิดจาก virtual moment m_θ และการหมุนในทิศทางเดียวกับมุม $d\theta$ ของส่วนของคาน dx เป็นระยะ $d\theta$ มีค่าเท่ากับ $m d\theta = m (M / EI) dx$ เมื่อเราทำการอินทิเกรต (integration) สมการ $m d\theta$ ตลอดความยาวของคาน L เราจะได้ ค่า virtual work ภายในทั้งหมด และเนื่องจาก virtual work ภายนอกที่เกิดจาก unit couple moment มีค่าเท่ากับ $(1)\theta$ เราจะได้ว่า

$$(1)\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx \quad (7-26)$$

ตัวอย่างที่ 8-10

กำหนดให้ cantilever beam ซึ่งมีค่า EI คงที่ตลอดความยาวคาน ถูกกระทำโดยแรง P ดังที่แสดงในรูปที่ 7-30a จงใช้วิธี unit-load method หาค่าการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด C



รูปที่ 7-30

1. กำหนด coordinate และหา function ของโมเมนต์ดัด M เนื่องจากแรง P ดังที่แสดงในรูปที่ 7-30a และโมเมนต์ดัด m เนื่องจาก virtual unit load 1 kN ที่จุด C ในทิศทางดังลง ดังที่แสดงในรูปที่ 7-30b

$$M(x) = -Px$$

$$m(x) = -x$$

2. หาค่าการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด C จากสมการที่ 7-25

$$(1 \text{ kN}) \Delta_C = \int_0^L \frac{(-x)(-Px)}{EI} dx$$

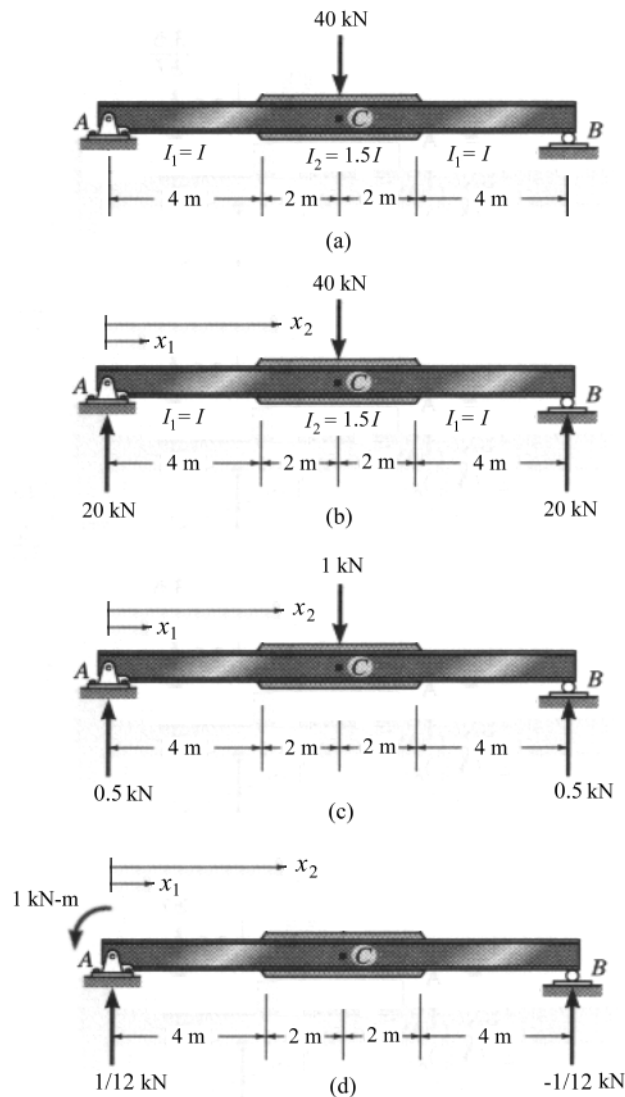
$$\Delta_C = \frac{PL^3}{3EI}$$

เนื่องจาก Δ_C มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_C จะมีทิศทางเดียวกันกับแรง 1 หน่วย คือมีทิศพุ่งลง ดังที่แสดงในรูปที่ 7-

ตัวอย่างที่ 7-11

คานเหล็ก W360x64 ซึ่งถูกเสริมความแกร่งโดยแผ่นเหล็กที่ช่วงกลางคานและถูกกระทำโดยแรง 40 kN ดังที่แสดงในรูปที่ 7-31a กำหนดให้ $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 179(10^6) \text{ mm}^4$ จงใช้วิธี unit-load method หา

1. ค่าการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด C
2. ค่าของ slope ที่จุดรองรับ A



รูปที่ 7-31

ค่าการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด C

1. จากรูปที่ 7-31a เนื่องจากคานและแรงกระทำมีความสมมาตรที่กึ่งกลางของคาน เราจะหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B ของคานได้เท่ากับ

$$R_A = R_B = 20 \text{ kN}$$

2. ทำการกำหนด coordinate และหา function ของโมเมนต์ดัด M เนื่องจากแรง 40 kN โมเมนต์ดัด m เนื่องจากแรง 1 kN ที่จุด C ในทิศทางดิ่งลง และโมเมนต์ดัด m_θ เนื่องจากโมเมนต์ดัด 1 kN-m ที่จุด A ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เนื่องจากคานและแรงกระทำมีความสมมาตรที่กึ่งกลางของคาน ดังนั้น เราจะกำหนด coordinate ได้เป็น 2 ส่วน คือ x_1 และ x_2 ดังที่แสดงในรูปที่ 7-31b และเราจะหา function ของโมเมนต์ดัด M m และ m_θ ได้โดยใช้ free body

diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-31b ถึง 7-31d ตามลำดับ ตารางข้างล่างแสดง functions ของโมเมนต์ดัดต่างๆ ที่หามาได้

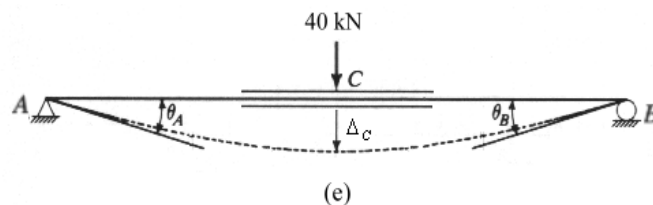
Coordinate	Range	I	M	m	m_θ
x_1	$0 \leq x_1 \leq 4$	I	$20x_1$	$0.5x_1$	$x_1/12 - 1$
x_2	$4 \leq x_2 \leq 6$	$1.5I$	$20x_2$	$0.5x_2$	$x_2/12 - 1$

3. จากสมการที่ 7-25 เราจะหาค่าการโก่งตัวในแนวตั้งที่จุด C ได้

$$(1 \text{ kN}) \Delta_C = 2 \int_0^4 \frac{(0.5x_1)(20x_1)}{EI} dx_1 + 2 \int_4^6 \frac{(0.5x_2)(20x_2)}{1.5EI} dx_2$$

$$\Delta_C = \frac{426.67}{EI} + \frac{675.56}{EI} = \frac{1102.2 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

เนื่องจาก Δ_C มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_C จะมีทิศทางเดียวกันกับ virtual unit load คือมีทิศพุ่งลง และรูปที่ 7-31e แสดงลักษณะการโก่งตัวของคาน



แทนค่าต่างๆ ลงในสมการของ Δ_C พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้

$$\Delta_C = \frac{1102.2 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = 0.0308 \text{ m} = 30.8 \text{ mm}$$

หาค่า slope ที่จุดรองรับ A

จากสมการที่ 7-26 และค่าโมเมนต์ดัด m_θ ที่หามาได้ในตาราง ดังนั้น

$$(1 \text{ kN-m}) \theta_A = 2 \int_0^4 \frac{(x_1/12 - 1)(20x_1)}{EI} dx_1 + 2 \int_4^6 \frac{(x_2/12 - 1)(20x_2)}{1.5EI} dx_2$$

$$\theta_A = \frac{2}{EI} \int_0^4 \left[\frac{5x_1^2}{3} - 20x_1 \right] dx_1 + \frac{2}{1.5EI} \int_4^6 \left[\frac{5x_2^2}{3} - 20x_2 \right] dx_2$$

$$\theta_A = -\frac{293.33 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

เนื่องจาก θ_A มีค่าเป็นลบ ดังนั้น θ_A จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของ virtual unit moment คือจะมีทิศหมุนตามเข็มนาฬิกาจากแนวแกนเริ่มต้น ดังที่แสดงในรูปที่ 7-30e

แทนค่าต่างๆ ลงในสมการของ θ_A พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้

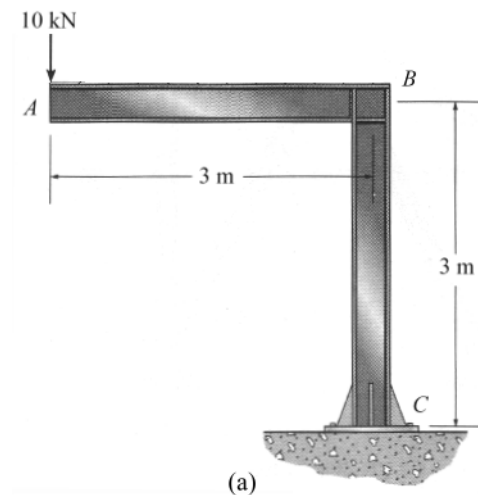
$$\theta_A = \frac{293.33 \text{ kN.m}^2}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = 0.0082 \text{ radian}$$

เราควรสังเกตด้วยว่า เนื่องจากคานและแรงกระทำมีความสมมาตรที่กึ่งกลางของคาน ดังนั้น $\theta_B = \theta_A$ และเราควรที่จะเขียน function ของโมเมนต์ดัด M และ m_θ โดยใช้ coordinate x จากจุดรองรับ B มาทางซ้ายมือ ซึ่งจะทำให้เราสามารถทำการ integration เพื่อหาค่าของ slope ที่จุดรองรับ A ได้ง่ายกว่า

ตัวอย่างที่ 7-12

พิจารณาโครงข้อแข็งเหล็ก W360x64 ซึ่งถูกกระทำโดยแรง 10 kN ที่ปลายอิสระ A ดังที่แสดงในรูปที่ 7-32a กำหนดให้ $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 179(10^6) \text{ mm}^4$ จงใช้วิธี unit-load method หา

1. ค่าการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด A
2. ค่าการโก่งตัวในแนวนอนที่จุด A
3. ค่าของ slope ที่จุด A



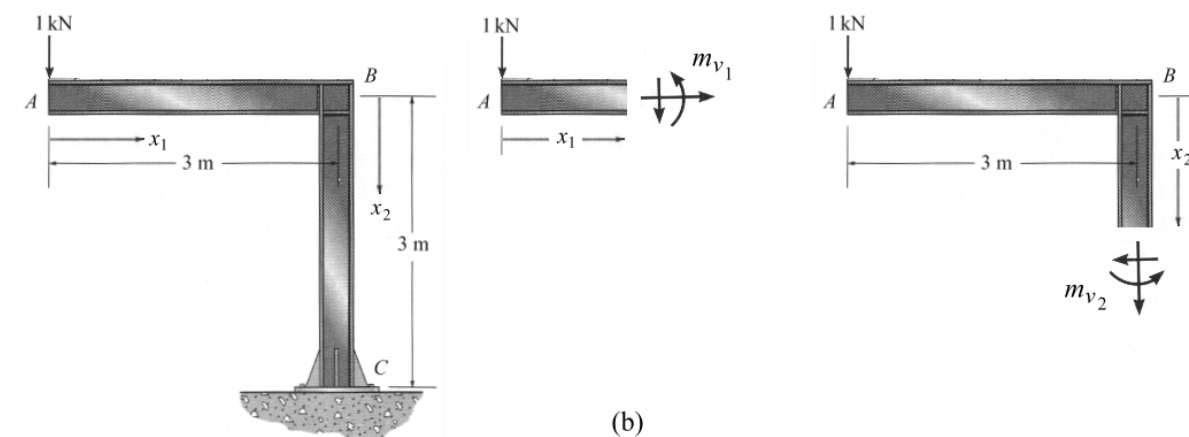
รูปที่ 7-32

หาค่าการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด A

โดยวิธี unit-load method เราจะให้ virtual unit load ในแนวดิ่งลง กระทำที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 7-32b ดังนั้น เราจะหา function ของโมเมนต์ดัด m_{v_1} และ m_{v_2} ได้โดยใช้ free body diagram ดังที่แสดง

$$m_{v_1} = -x_1$$

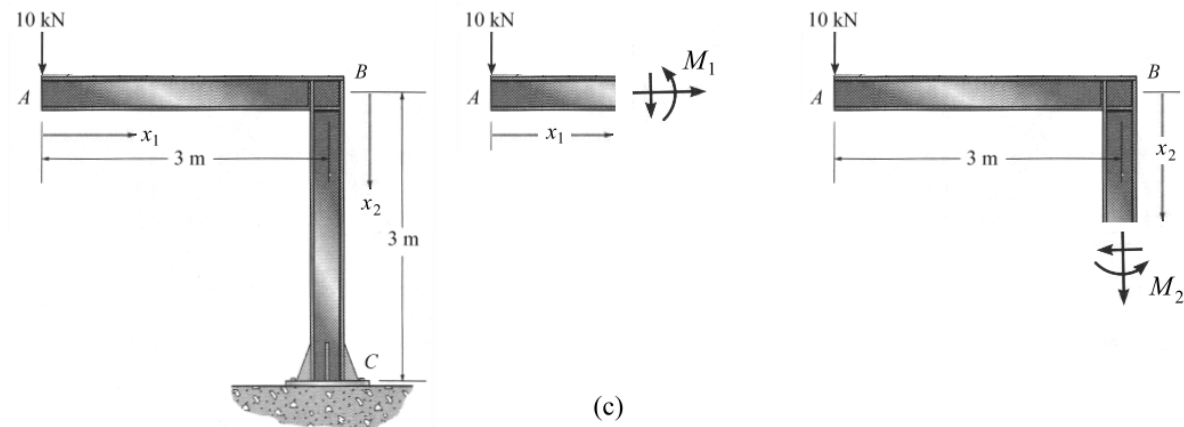
$$m_{v_2} = -3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



และเราจะหา function ของโมเมนต์ดัด M_1 และ M_2 ได้โดยใช้ free body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 7-32c โดยที่

$$M_1 = -10x_1$$

$$M_2 = -30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



(c)

จากสมการที่ 7-25 เราจะหาค่าการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด A ได้

$$(1 \text{ kN}) \Delta_{Av} = \int_0^3 \frac{(-x_1)(-10x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^3 \frac{(-3)(-30)}{EI} dx_2$$

$$\Delta_{Av} = \frac{90}{EI} + \frac{270}{EI} = \frac{360 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

เนื่องจาก Δ_{Av} มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_{Av} จะมีทิศทางเดียวกันกับ virtual unit load คือมีทิศพุ่งลง

แทนค่าต่างๆ ลงในสมการของ Δ_{Av} พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้

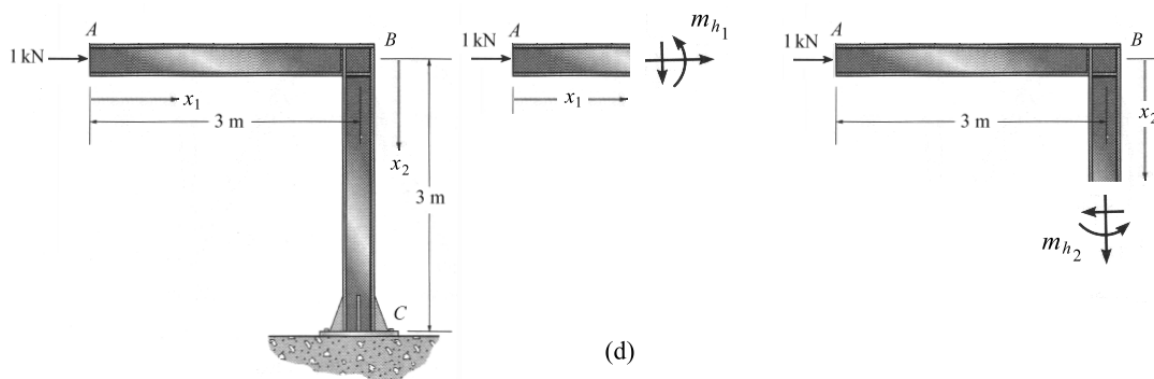
$$\Delta_{Av} = \frac{360 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = 0.010 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

หาค่าการโก่งตัวในแนวนอนที่จุด A

โดยวิธี unit-load method เราจะให้ virtual unit load ในแนวนอนไปทางขวามือ กระทำที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 7-32d ดังนั้น เราจะหา function ของโมเมนต์ดัด m_{h1} และ m_{h2} ได้โดยใช้ free body diagram ดังที่แสดง

$$m_{h1} = 0$$

$$m_{h2} = x_2$$



(d)

จากสมการที่ 8-25 เราจะหาค่าการโก่งตัวในแนวนอนที่จุด A ได้

$$(1 \text{ kN}) \Delta_{Ah} = \int_0^3 \frac{(0)(-10x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^3 \frac{(x_2)(-30)}{EI} dx_2$$

$$\Delta_{Ah} = 0 - \frac{135}{EI} = -\frac{135 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

เนื่องจาก Δ_{Ah} มีค่าเป็นลบ ดังนั้น Δ_{Ah} จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับ virtual unit load คือมีทิศไปทางซ้ายมือของจุด A

แทนค่าต่างๆ ลงในสมการของ Δ_{Ah} พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้

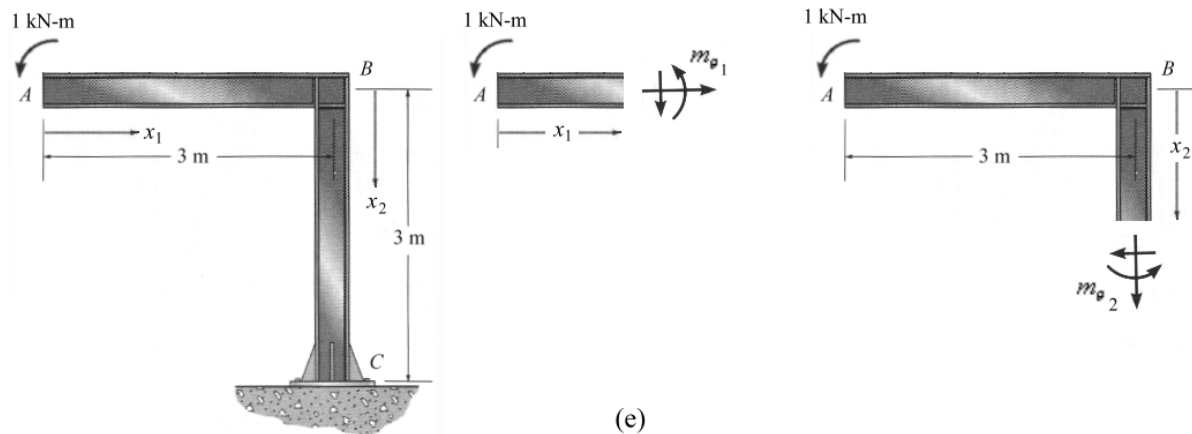
$$\Delta_{Ah} = -\frac{135 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = -0.0038 \text{ m} = -3.8 \text{ mm}$$

ค่าของ slope ที่จุด A

โดยวิธี unit-load method เราจะให้ virtual unit moment ซึ่งมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกากระทำที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 7-32e ดังนั้น เราจะหา function ของโมเมนต์ดัด m_{θ_1} และ m_{θ_2} ได้โดยใช้ free body diagram ดังที่แสดง

$$m_{\theta_1} = -1$$

$$m_{\theta_2} = -1$$



จากสมการที่ 7-26 เราจะหาค่าของ slope ที่จุด A ได้

$$(1 \text{ kN} \cdot \text{m}) \theta_A = \int_0^3 \frac{(-1)(-10x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^3 \frac{(-1)(-30)}{EI} dx_2$$

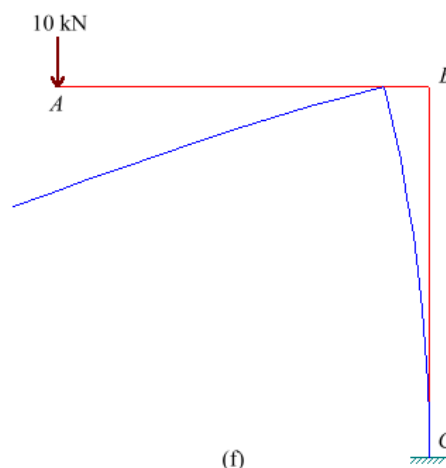
$$\theta_A = \frac{45}{EI} + \frac{90}{EI} = -\frac{135 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

เนื่องจาก θ_A มีค่าเป็นบวก ดังนั้น θ_A จะมีทิศทางเดียวกันกับ virtual unit moment ซึ่งมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

แทนค่าต่างๆ ลงในสมการของ θ_A พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้

$$\theta_A = \frac{135 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = 0.00377 \text{ radian}$$

รูปที่ 7-32f แสดงลักษณะการโก่งตัวของโครงข้อแข็งดังกล่าว



7.11 Virtual Strain Energy

โดยปกติแล้ว การโก่งตัวของคานและโครงข้อแข็งเกิดจากพลังงานความเครียด (strain energy) เนื่องจากโมเมนต์ดัดเท่านั้น แต่ในบางกรณี พลังงานความเครียดเนื่องจากแรงในแนวแกน (axial loads) แรงเฉือน (shear) และแรงบิด (torsion) จะมีส่วนสำคัญในการทำให้เกิดการโก่งตัวของคานและโครงข้อแข็งด้วย เช่น เมื่อคานมีอัตราส่วนของความยาวต่อความลึกน้อยกว่า 10 แล้ว พลังงานความเครียดเนื่องจากโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนจะถูกนำมาใช้ในการหาค่าการโก่งตัว เป็นต้น

Virtual Strain Energy เนื่องจากแรงในแนวแกน

ถ้าหน้าตัดขององค์อาคารที่ถูกกระทำโดยแรงในแนวแกนมีหน้าตัดที่คงที่แล้ว จากสมการที่ 7-16 เราจะได้ว่า

$$U_n = \frac{nNL}{AE} \quad (7-27)$$

เมื่อ n = แรงในแนวแกนที่เกิดจาก virtual unit load

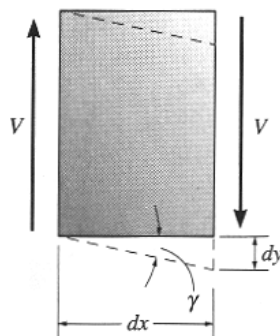
N = แรงในแนวแกนที่เกิดจากแรงกระทำจริง

L = ความยาวขององค์อาคาร

A = พื้นที่หน้าตัดขององค์อาคาร

E = modulus of elasticity ของวัสดุที่ใช้ทำองค์อาคาร

Virtual Strain Energy เนื่องจากแรงเฉือน



รูปที่ 7-33

พิจารณาส่วนขององค์อาคาร dx ตามที่แสดงในรูปที่ 7-33 จากรูป การเสียรูปที่เกิดจากแรงเฉือน dy บนส่วนขององค์อาคารที่เกิดจากแรงกระทำจริง "real load" มีค่าเท่ากับ $dy = \gamma dx$ ถ้าวัสดุมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic ภายใต้แรงกระทำแล้ว จากกฎของฮุก (Hooke's law) $\gamma = \tau / G$ ดังนั้น $dy = (\tau / G) dx$ และจากวิชากลศาสตร์วัสดุ เราได้มาว่า $\tau = K(V / A)$ โดยที่ K เป็นค่าตัวคูณประกอบ (form factor) ซึ่งขึ้นอยู่กับรูปร่างของหน้าตัดขององค์อาคารและ A เป็นพื้นที่หน้าตัด ดังนั้น การเสียรูปที่เกิดจากแรงเฉือน $dy = K(V / GA) dx$ และงาน virtual ภายในที่เกิดจากแรงเฉือน virtual (virtual shear force) v และการเสียรูป dy มีค่าเท่ากับ $dU_i = v dy = v (KV / GA) dx$ ดังนั้น เราจะได้ว่า พลังงานความเครียดตลอดความยาวคานจะมีค่าเท่ากับ

$$U_s = \int_0^L K \left(\frac{vV}{GA} \right) dx \quad (7-28)$$

เมื่อ v = แรงเฉือนในองค์อาคารที่เกิดจากแรงแบบ virtual หนึ่งหน่วย

V = แรงเฉือนในองค์อาคารที่เกิดจากแรงกระทำจริง

K = ค่าตัวคูณประกอบของหน้าตัดขององค์อาคาร โดยที่

$K = 1.2$ สำหรับองค์อาคารที่มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$K = 10/9 \quad \text{สำหรับองค์อาคารที่มีหน้าตัดเป็นรูปทรงกลม}$$

$$K = 1.0 \quad \text{สำหรับองค์อาคารที่มีหน้าตัดเป็นรูป I และ W เมื่อ } A = \text{พื้นที่หน้าตัดของ web}$$

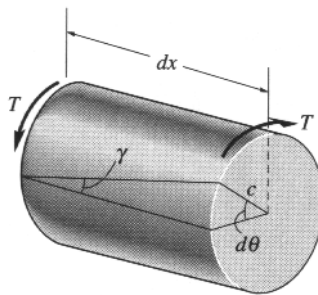
L = ความยาวขององค์อาคาร

A = พื้นที่หน้าตัดขององค์อาคาร

G = shear modulus of elasticity ของวัสดุที่ใช้ทำองค์อาคาร

Virtual Strain Energy เนื่องจากแรงบิด

โครงสร้างของอาคารที่อยู่ในรูปแบบ 3 มิติ มักจะถูกกระทำโดยแรงบิด ถ้าองค์อาคารของโครงสร้างนั้นมีหน้าตัดเป็นทรงกลมแล้ว หน้าตัดขององค์อาคารจะไม่เกิดการบิดเบี้ยว (warping) ซึ่งส่งผลให้เราสามารถหาค่าของ virtual strain ขององค์อาคารที่ถูกกระทำโดยแรงบิดนี้ได้โดยง่าย



รูปที่ 7-34

พิจารณาส่วนขององค์อาคาร dx ที่ถูกกระทำโดยแรงบิด ดังที่แสดงในรูปที่ 7-34 แรงบิดนี้ก่อให้เกิดความเครียดเฉือน (shearing strain) γ บนหน้าตัดของส่วนขององค์อาคารมีค่าเท่ากับ $\gamma = c d\theta / dx$ ถ้าวัสดุยังมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic แล้ว จากสมการของ Hooke's law ในกรณีของแรงเฉือน $\gamma = \tau / G$ โดยที่ $\tau = Tc / J$ ดังนั้น มุมบิดจะมีค่าเท่ากับ $d\theta = \gamma dx / c = (\tau / Gc) dx = (T / GJ) dx$ ถ้าแรงแบบ virtual หนึ่งหน่วยกระทำต่อองค์อาคารและก่อให้เกิดแรงบิด virtual ภายใน t แล้ว จากนั้น ให้ “real loads” กระทำ ดังนั้น พลังงานความเครียดแบบ virtual ตลอดความยาวขององค์อาคารจะมีค่าเท่ากับ

$$U_t = \frac{tTL}{GJ} \quad (7-29)$$

เมื่อ t = แรงบิดในองค์อาคารที่เกิดจาก external virtual unit load

T = แรงบิดในองค์อาคารที่เกิดจากแรงกระทำจริง

J = polar moment of inertia ของหน้าตัดขององค์อาคาร

= $\pi c^4 / 2$ เมื่อ c คือรัศมีของหน้าตัดขององค์อาคาร

L = ความยาวขององค์อาคาร

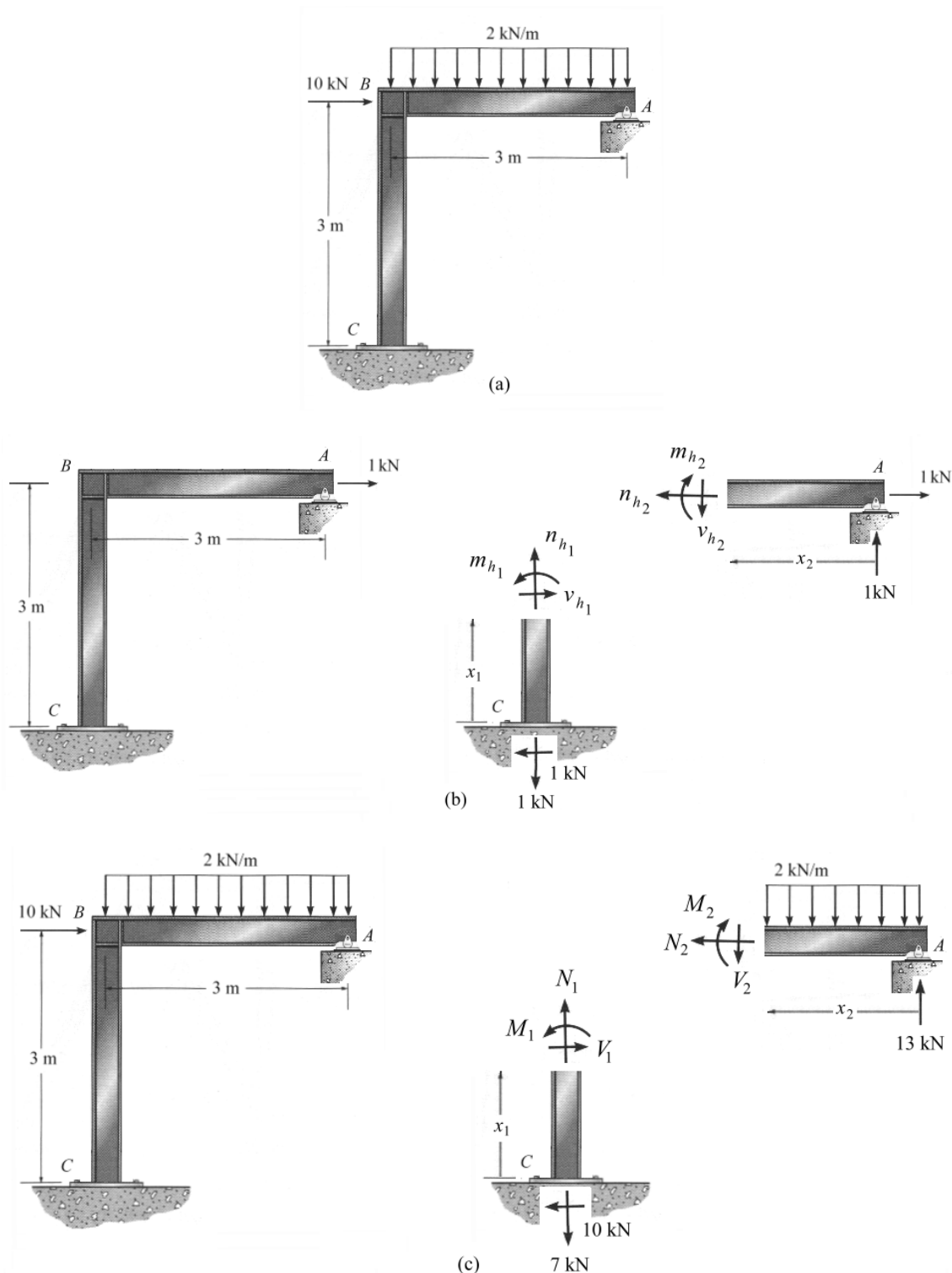
G = shear modulus of elasticity ของวัสดุที่ใช้ทำองค์อาคาร

ในกรณีที่เรากำลังต้องการหาระยะโก่งตัวของคานและโครงข้อแข็งเนื่องจากแรงในแนวแกน แรงเฉือน โมเมนต์ดัด และแรงบิดแล้ว เราจะได้ว่า

$$(1)\Delta = \frac{nNL}{AE} + \int_0^L K \left(\frac{vV}{GA} \right) dx + \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx + \frac{tTL}{GJ}$$

ตัวอย่างที่ 7-13

จงใช้วิธี unit-load method หาค่าการโก่งตัวในแนวนอนที่จุด A ของโครงข้อแข็งเหล็ก W360x64 ดังที่แสดงในรูปที่ 7-35a กำหนดให้ $E = 200 \text{ GPa}$ $G = 75 \text{ GPa}$ $I = 179(10^6) \text{ mm}^4$ $A = 8150 \text{ mm}^2$ โดยรวมค่าการโก่งตัวในแนวนอนเนื่องจากแรงในแนวแกนและแรงเฉือนด้วย



รูปที่ 7-35

โดยวิธี unit-load method เราจะให้ virtual unit load ในแนวนอนไปทางขวามือ กระทำที่จุด A ดังที่แสดงในรูปที่ 7-35b ดังนั้น เราจะหา function ของโมเมนต์ดัด แรงในแนวแกน และแรงเฉือนได้โดยใช้ free body diagram ดังที่แสดง

ในรูปที่ 7-35b นอกจากนั้นแล้ว เราจะหา function ของโมเมนต์ดัด แรงในแนวแกน และแรงเฉือนเนื่องจากแรงกระทำภายนอกได้โดยใช้ free body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 7-35c โดยที่ function ของโมเมนต์ดัด แรงในแนวแกน และแรงเฉือนเหล่านี้ได้ถูกสรุปอยู่ในตารางดังที่แสดงข้างล่าง

โมเมนต์ดัด แรงในแนวแกน และแรงเฉือนเนื่องจาก virtual unit load ในแนวนอน	โมเมนต์ดัด แรงในแนวแกน และแรงเฉือนเนื่องจากแรงกระทำภายนอก
$m_{h_1} = x_1$	$M_1 = 10x_1$
$m_{h_2} = x_2$	$M_2 = 13x_2 - x_2^2$
$n_{h_1} = 1 \text{ kN}$	$N_1 = 7 \text{ kN}$
$n_{h_2} = 1 \text{ kN}$	$N_2 = 0$
$v_{h_1} = 1 \text{ kN}$	$V_1 = 10 \text{ kN}$
$v_{h_2} = 1 \text{ kN}$	$V_2 = 13 - 2x_2$

จากสมการที่ 7-25 เราจะหาค่าการโก่งตัวในแนวนอนที่จุด A เนื่องจากโมเมนต์ดัดได้ดังนี้

$$[(1 \text{ kN}) \Delta_{Ah}]_b = \int_0^3 \frac{(x_1)(10x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^3 \frac{(x_2)(13 - x_2^2)}{EI} dx_2$$

$$[\Delta_{Ah}]_b = \frac{90}{EI} + \frac{117}{EI} - \frac{81}{4EI} = \frac{186.75 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

$$[\Delta_{Ah}]_b = \frac{186.75 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = 0.005216 \text{ m} = 5.216 \text{ mm}$$

จากสมการที่ 7-27 เราจะหาค่าการโก่งตัวในแนวนอนที่จุด A เนื่องจากแรงในแนวแกนได้ดังนี้

$$[(1 \text{ kN}) \Delta_{Ah}]_n = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{(1 \text{ kN})(7 \text{ kN})(3 \text{ m})}{AE} + \frac{(1 \text{ kN})(0)(3 \text{ m})}{AE}$$

$$[\Delta_{Ah}]_n = \frac{21 \text{ kN.m}}{[8150(10^{-6}) \text{ m}^2][200(10^6) \text{ kN/m}^2]} = 12.9(10^{-6}) \text{ m} = 0.013 \text{ mm}$$

จากสมการที่ 7-28 เนื่องจากหน้าตัดโครงข้อแข็งเป็นรูปตัว W ดังนั้น ค่าตัวคูณประกอบของหน้าตัดขององค์อาคาร $K = 1.0$ และเราจะหาค่าการโก่งตัวในแนวนอนที่จุด A เนื่องจากแรงเฉือนได้เท่ากับ

$$[(1 \text{ kN}) \Delta_{Ah}]_v = \int_0^L K \left(\frac{vV}{GA} \right) dx = \int_0^3 \frac{(1 \text{ kN})(10 \text{ kN})}{GA} dx_1 + \int_0^3 \frac{(1 \text{ kN})(13 - 2x_2)}{GA} dx_2$$

$$[\Delta_{Ah}]_v = \frac{30}{GA} + \frac{39}{GA} - \frac{9}{GA} = \frac{60 \text{ kN.m}}{GA}$$

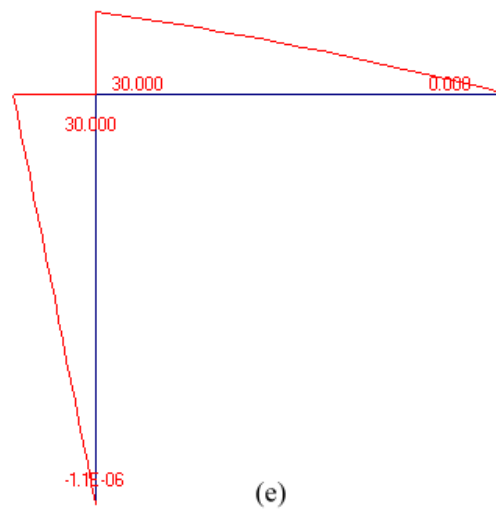
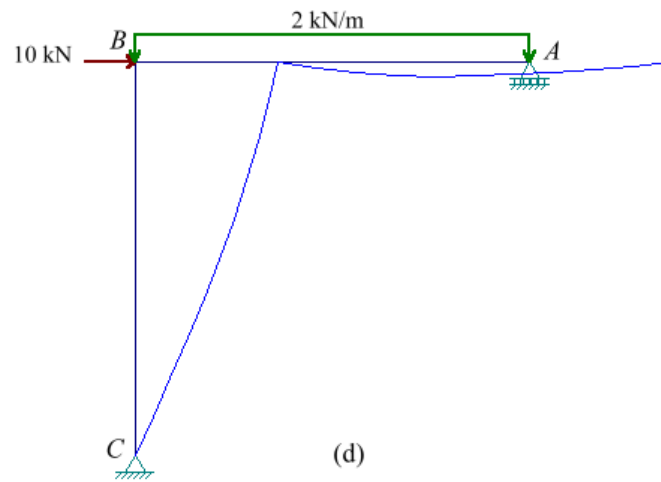
$$[\Delta_{Ah}]_v = \frac{60 \text{ kN.m}}{[75(10^6) \text{ kN/m}^2][8150(10^{-6}) \text{ m}^2]} = 98.2(10^{-6}) \text{ m} = 0.098 \text{ mm}$$

ผลรวมของค่าการโก่งตัวในแนวนอนที่จุด A ของโครงข้อแข็งเนื่องจากโมเมนต์ดัด แรงในแนวแกน และแรงเฉือนมีค่าเท่ากับ

$$\Delta_{Ah} = 5.216 + 0.013 + 0.098 = 5.327 \text{ mm หรือ } 5.3 \text{ mm}$$

เราควรสังเกตด้วยว่า ค่าการโก่งตัวในแนวนอนที่จุด A เนื่องจากแรงในแนวแกนและแรงเฉือนมีค่าเป็น 2.1% ของค่าการโก่งตัวเนื่องจากโมเมนต์ดัด ซึ่งเป็นเหตุผลว่า ทำไมเราจึงไม่คำนึงของผลของแรงในแนวแกนและแรงเฉือนในการวิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของโครงสร้าง

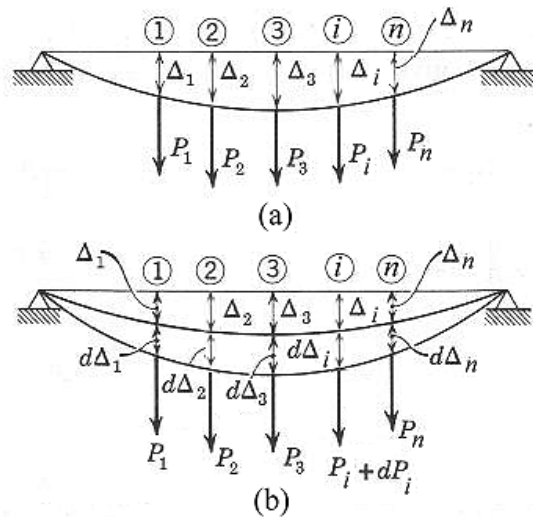
รูปที่ 7-35d แสดงลักษณะการโก่งตัวของโครงข้อแข็งเนื่องจากโมเมนต์ดัด ซึ่งเราสามารถที่จะร่างขึ้นมาได้โดยใช้ moment diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 7-35e



7.12 ทฤษฎีของ Castigiano

Alberto Castigiano ได้ตีพิมพ์ทฤษฎีที่ใช้หาค่าการโก่งตัวของโครงสร้างรูปแบบต่างๆ ซึ่งมักถูกเรียกว่า ทฤษฎีบทที่สองของ Castigiano (Castigiano's second theorem) ในปี ค.ศ. 1879 โดยกล่าวว่า

ในโครงสร้างอีลาสติก (Elastic structure) ค่าการโก่งตัว Δ_i ในทิศทางของแรงกระทำภายนอก P_i มีค่าเท่ากับค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของพลังงานความเครียดที่สะสมอยู่ในเทียบกับแรงกระทำภายนอก P_i



รูปที่ 7-36

พิจารณาคานอีลาสติก ดังที่แสดงในรูปที่ 7-36 ในกรณีแรก กำหนดให้โครงสร้างถูกกระทำโดยแรงกระทำ $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ และทำให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดที่แรงเหล่านั้นกระทำมีค่าเป็น $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ ตามลำดับ ดังนั้น พลังงานภายนอกเนื่องจากแรงชุดนี้จะมีค่าเป็น

$$U_e = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2 + \dots + \frac{1}{2} P_i \Delta_i + \dots + \frac{1}{2} P_n \Delta_n$$

จากนั้น ให้แรง P_i มีค่าเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย dP_i และการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่างๆ ที่แรงชุด P กระทำมีค่าเพิ่มขึ้นอีก $d\Delta_1, d\Delta_2, \dots, d\Delta_i, \dots, d\Delta_n$ ตามลำดับ ดังนั้น ค่าพลังงานภายนอกที่เพิ่มขึ้นจะมีค่าเท่ากับ

$$dU_e = P_1 d\Delta_1 + P_2 d\Delta_2 + \dots + \frac{1}{2} dP_i d\Delta_i + P_i d\Delta_i + \dots + P_n d\Delta_n \quad (7-30)$$

และผลรวมของพลังงานภายนอกทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ

$$U_e + dU_e = \frac{1}{2} P_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \Delta_2 + \dots + \frac{1}{2} P_i \Delta_i + \dots + \frac{1}{2} P_n \Delta_n + P_1 d\Delta_1 + P_2 d\Delta_2 + \dots + \frac{1}{2} dP_i d\Delta_i + P_i d\Delta_i + \dots + P_n d\Delta_n \quad (7-31)$$

กรณีที่สอง กำหนดให้แรง $P_1, P_2, \dots, P_i + dP_i, \dots, P_n$ กระทำกับโครงสร้างพร้อมกันและทำให้เกิดการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดเหล่านั้นมีค่าเป็น $\Delta_1 + d\Delta_1, \Delta_2 + d\Delta_2, \dots, \Delta_i + d\Delta_i, \dots, \Delta_n + d\Delta_n$ แล้ว เราจะได้ค่าพลังงานภายนอกทั้งหมดจะมีค่าเท่ากับ

$$U_e + dU_e = \frac{1}{2} P_1 (\Delta_1 + d\Delta_1) + \frac{1}{2} P_2 (\Delta_2 + d\Delta_2) + \dots + \frac{1}{2} (P_i + dP_i) (\Delta_i + d\Delta_i) + \dots + \frac{1}{2} P_n (\Delta_n + d\Delta_n) \quad (7-32)$$

เนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดที่แรงกระทำเป็นอิสระกับลำดับการกระทำของแรงเหล่านั้น ดังนั้น จากหลักการ superposition (principle of superposition) เราจะได้ว่า ค่าพลังงานภายนอกที่ได้จากสมการที่ (7-31) จะมีค่าเท่ากับค่าพลังงานภายนอกที่ได้จากสมการที่ (7-32) ดังนั้น

$$\frac{1}{2} P_1 d\Delta_1 + \frac{1}{2} P_2 d\Delta_2 + \dots + \frac{1}{2} P_i d\Delta_i + \dots + \frac{1}{2} P_n d\Delta_n = \frac{1}{2} (dP_i) \Delta_i$$

หรือ

$$P_1 d\Delta_1 + P_2 d\Delta_2 + \dots + P_i d\Delta_i + \dots + P_n d\Delta_n = dP_i \Delta_i \quad (7-33)$$

แทนค่าสมการที่ 7-33 ลงในสมการที่ 7-30 และไม่คิดเทอมที่มีค่าน้อยมาก หรือเทอม $\frac{1}{2} dP_i d\Delta_i$ ดังนั้น จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน (principle of conservation of energy) เราจะได้ว่า พลังงานแรงภายนอกจะมีค่าเท่ากับพลังงานความเครียด (strain energy) ที่สะสมอยู่ภายในตัววัตถุ หรือ $dU_e = dU_i$ เราจะได้ว่า

$$dU_i = dP_i \Delta_i$$

$$\Delta_i = \frac{dU_i}{dP_i}$$

เนื่องจากโครงสร้างมักจะถูกกระทำโดยแรงกระทำหลายค่า ดังนั้น สมการการโก่งตัวมักถูกเขียนให้อยู่ในรูปของ partial derivative และเราจะได้ว่า

$$\Delta_i = \frac{\partial U_i}{\partial P_i} \quad (7-34)$$

สมการที่ 7-34 มีความหมายว่า ค่าการโก่งตัว Δ_i ในทิศทางของแรงกระทำภายนอก P_i มีค่าเท่ากับค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของพลังงานความเครียดที่สะสมอยู่ภายในเทียบกับแรงกระทำภายนอก P_i และเนื่องจากสมการนี้มีพื้นฐานมาจากหลักการ superposition ดังนั้น สมการนี้จะใช้ได้เฉพาะกับโครงสร้างอิลาสติกเท่านั้น

นอกจากทฤษฎีบทที่สองแล้ว Castigliano ยังได้ตีพิมพ์ทฤษฎีที่หนึ่งด้วย ซึ่งทฤษฎีนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$P_i = \frac{\partial U_i}{\partial \Delta_i}$$

แต่เนื่องจากทฤษฎีบทนี้มีข้อจำกัดและความยุ่งยากมาก จึงไม่ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง

7.13 วิธี Castigliano ในการหาค่าการโก่งตัวของโครงข้อหมุน

เนื่องจากชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน ดังนั้น สมการพลังงานความเครียดในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนจึงอยู่ในรูปของสมการที่ 7-16 หรือ $U_i = N^2 L / 2AE$ เมื่อแทนสมการนี้ลงในสมการที่ 7-34 เราจะได้ว่า

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \left(\sum \frac{N^2 L}{2AE} \right)$$

โดยทั่วไปแล้ว ลำดับของการทำผลรวมและการทำอนุพันธ์ (differentiation) นั้นเป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น เราควรทำการอนุพันธ์ก่อน แล้วจึงทำการรวมสมการดังกล่าวเพราะจะง่ายกว่า และเราจะได้ว่า

$$\Delta = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} \quad (7-34)$$

เมื่อ P = imaginary force ที่กระทำกับจุดต่อของโครงข้อหมุนในทิศทางที่ต้องการหาค่าการโก่งตัว Δ

Δ = ค่าการโก่งตัวที่จุดต่อของโครงข้อหมุน

N = แรงในแนวแกนของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนซึ่งเกิดจากแรงกระทำภายนอกและแรง P

L = ความยาวของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน

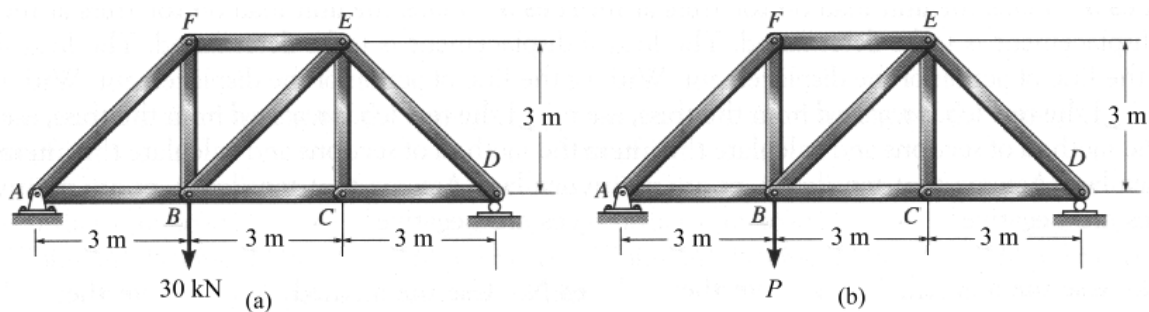
A = พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุน

E = โมดูลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity) ของวัสดุที่ใช้ทำโครงข้อหมุน

เราควรสังเกตว่า สมการนี้คล้ายกับสมการที่ 7-22 ของวิธี virtual work ยกเว้นแต่เทอม n ถูกแทนที่โดยเทอม $\partial N / \partial P$ โดยที่เทอมทั้งสองนี้เป็นเทอมเดียวกันเนื่องจากแสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของแรงในแนวแกนเปรียบเทียบกับแรง P หรือเป็นการเปลี่ยนแปลงของแรงในแนวแกนต่อแรงหนึ่งหน่วย (unit load)

ตัวอย่างที่ 7-14

จงหาค่าการแอ่นตัวในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B และค่าการแอ่นตัวในแนวนอนที่จุดต่อ D ของโครงข้อหมุนเหล็ก ดังที่แสดงในรูปที่ 7-37a โดยวิธีของ Castigliano กำหนดให้พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน $A = 300 \text{ mm}^2$ และค่า modulus of elasticity ของเหล็ก $E = 200 \text{ GPa}$



รูปที่ 7-37

หาค่าการแอ่นตัวในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B

1. เนื่องจากเราต้องการหาค่าการแอ่นตัวในแนวดิ่งที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ B ดังนั้น โดยวิธีของ Castigliano เราจะให้แรง P กระทำที่จุดต่อ B ในทิศทางดิ่งลง และเราจะแทนค่าแรง 30 kN ด้วยแรง P นี้ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-37b ขอให้ทราบไว้ด้วยว่า ในกรณีนี้ เราจะให้แรง P มีค่าเท่ากับ 30 kN เมื่อเราทำการแทนค่าหาค่าการแอ่นตัวดังกล่าว เนื่องจากแรง 30 kN เป็นแรงที่กระทำต่อโครงข้อหมุนจริง

2. ทำการวิเคราะห์หาค่าของแรงที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนเนื่องจากแรง P โดยวิธี method of joints หรือ method of sections ซึ่งผลลัพธ์ได้ถูกแสดงไว้ในตารางข้างล่าง

Member	$L \text{ (m)}$	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	N ($P = 30 \text{ kN}$)	$N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) L$
AB	3	$0.667 P$	0.667	20	40
BC	3	$0.333 P$	0.333	10	10
CD	3	$0.333 P$	0.333	10	10
DE	4.243	$-0.471 P$	-0.471	-14.142	28.262
EF	3	$-0.667 P$	-0.667	-20	40
AF	4.243	$-0.943 P$	-0.943	-28.284	113.168
BF	3	$0.667 P$	0.667	20	40
BE	4.243	$0.471 P$	0.471	14.142	28.262
CE	3	0	0	0	0

$$\sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) L = 309.692 \text{ kN.m}$$

3. จากทฤษฎีของ Castigliano เราจะได้ ค่าการแอ่นตัวที่จุดต่อ B ของโครงข้อหมุน

$$\Delta_{Bv} = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} = \frac{309.692 \text{ kN.m}}{AE}$$

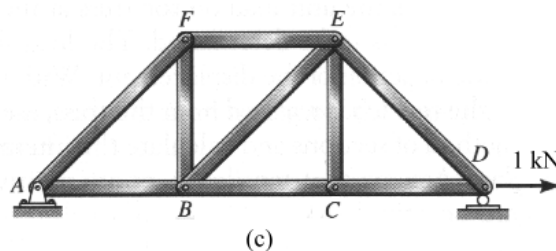
$$1 \text{ kN } \Delta_{Bv} = \frac{309.692 \text{ kN.m}}{300(10^{-6} \text{ m}^2)200(10^6 \text{ kN/m}^2)} = 5.2(10^{-3}) \text{ m} = 5.2 \text{ mm}$$

$$\Delta_{Bv} = 5.2(10^{-3}) \text{ m} = 5.2 \text{ mm}$$

เนื่องจาก Δ_{Bv} มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_{Bv} จะมีทิศทางเดียวกันกับแรง P คือมีทิศพุ่งลง

หาค่าการแอ่นตัวในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ D

เนื่องจากเราต้องการหาค่าการแอ่นตัวในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ D โดยวิธีของ Castigliano เราจะให้แรง P กระทำที่จุดต่อ D ในทิศทางนอนไปทางซ้ายมือ ดังที่แสดงในรูปที่ 7-37c และจากการวิเคราะห์โครงข้อหมุน เราจะได้ผลลัพธ์ดังที่แสดงไว้ในตารางข้างล่าง



Member	L (m)	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	N ($P = 0 \text{ kN}$)	$N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) L$
AB	3	$20 + P$	1	20	60
BC	3	$10 + P$	1	10	30
CD	3	$10 + P$	1	10	30
DE	4.243	-14.142	0	-14.142	0
EF	3	-20	0	-20	0
AF	4.243	-28.284	0	-28.284	0
BF	3	20	0	20	0
BE	4.243	14.142	0	14.142	0
CE	3	0	0	0	0

จากผลการวิเคราะห์ เราจะเห็นได้ว่า มีเพียงค่า $N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) L$ ในชิ้นส่วน AB BC และ CD เท่านั้นที่มีค่าไม่

เท่ากับศูนย์ โดยที่ $\sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) L = 120 \text{ kN.m}$

จากทฤษฎีของ Castigliano เราจะได้ ค่าการแอ่นตัวในแนวนอนที่เกิดขึ้นที่จุดต่อ D ของโครงข้อหมุน

$$\Delta_{Bh} = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} = \frac{120 \text{ kN.m}}{AE}$$

$$\Delta_{Bh} = \frac{120 \text{ kN.m}}{300(10^{-6} \text{ m}^2)200(10^6 \text{ kN/m}^2)} = 2(10^{-3}) \text{ m} = 2 \text{ mm}$$

เนื่องจาก Δ_{Bh} มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_{Bh} จะมีทิศทางเดียวกันกับแรง P คือมีทิศไปทางซ้ายมือ

7.14 วิธี Castigliano ในการหาค่าการโก่งตัวของคานและโครงข้อแข็ง

คานและโครงข้อแข็งมักจะถูกกระทำโดยแรงดัด ดังนั้น สมการพลังงานความเครียดของคานและโครงข้อแข็งจะอยู่ในรูปของสมการที่ 7-18 หรือ $U_i = \int M^2 dx / 2EI$ เมื่อแทนค่าสมการนี้ลงในสมการที่ 7-33 เราจะได้ว่า

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

จากนั้น ทำอนุพันธ์ (differentiate) แล้วทำการอินทิเกรต (integrate) สมการดังกล่าว เราจะได้ว่า

$$\Delta = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} \quad (7-35)$$

เมื่อ P = imaginary force ที่กระทำกับคานหรือโครงข้อแข็งในทิศทางที่ต้องการหาค่าการโก่งตัว Δ

Δ = ค่าการโก่งตัวของคานและโครงข้อแข็ง

M = โมเมนต์ที่เกิดขึ้นในคานหรือโครงข้อแข็ง ซึ่งเกิดจากแรงกระทำภายนอกและแรง P

L = ความยาวคานหรือองค์อาคารของโครงข้อแข็ง

I = moment of inertia รอบแกนสะเทิน (neutral axis) ของคานหรือองค์อาคารของโครงข้อแข็ง

E = โมดูลัสยืดหยุ่น (modulus of elasticity) ของวัสดุที่ใช้ทำคานหรือโครงข้อแข็ง

ถ้าเราต้องการหาค่ามุมลาดเอียง (slope) θ บนคานหรือโครงข้อแข็งแล้ว เราจะทำให้ imaginary moment M' กระทำที่จุดนั้นในทิศทางที่ต้องการหาค่ามุมลาดเอียง จากนั้นทำ partial derivative สมการของโมเมนต์ M เนื่องจากแรงกระทำและ imaginary moment เทียบกับ imaginary moment ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\theta = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI} \quad (7-36)$$

เช่นเดียวกับในกรณีของโครงข้อหมุน สมการที่ 7-35 และ 7-36 มีลักษณะคล้ายคลึงกับสมการที่ 7-25 และ 7-26 ของวิธี virtual work ตามลำดับ ยกเว้นแต่เทอม m และ m_θ จะถูกแทนที่ด้วยเทอม $\partial M / \partial P$ และ $\partial M / \partial M'$ ตามลำดับ

ในกรณีที่เรากำลังต้องการหาระยะโก่งตัวของคานและโครงข้อแข็งเนื่องจากแรงในแนวแกน แรงเฉือน โมเมนต์ดัด และแรงบิดแล้ว เราจะได้ว่า

$$\Delta = \sum N \left(\frac{\partial N}{\partial P} \right) \frac{L}{AE} + K \int_0^L \left(\frac{V}{GA} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right) dx + \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI} + \int_0^L \left(\frac{T}{GJ} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right) dx$$

ตัวอย่างที่ 7-15

จงหาค่าการโก่งตัวในแนวตั้งของคานที่จุด C และค่า slope ที่จุด B ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 7-38a โดยวิธีของ Castigliano กำหนดให้ $E = 200 \text{ GPa}$ $I = 179(10^6) \text{ mm}^4$

หาค่าการโก่งตัวในแนวตั้งของคานที่จุด C

1. โดยวิธีของ Castigliano เมื่อเราต้องการหาค่าการโก่งตัวในแนวตั้งของคานที่จุด C เราจะทำให้แรงในแนวตั้ง P กระทำที่จุด C แสดงในรูปที่ 7-38c

2. จากรูปที่ 7-38c เราจะหาโมเมนต์ดัดภายในที่เกิดจากการกระทำของแรงต่างๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} M_1 &= -Px_1 & \frac{\partial M_1}{\partial P} &= -x_1 \\ M_2 &= -P(x_2 + 1) - 10x_2^2 & \frac{\partial M_2}{\partial P} &= -x_2 - 1 \end{aligned}$$

เมื่อให้ $P = 0$ เราจะได้ว่า $M_1 = 0$ และ $M_2 = -10x_2^2$

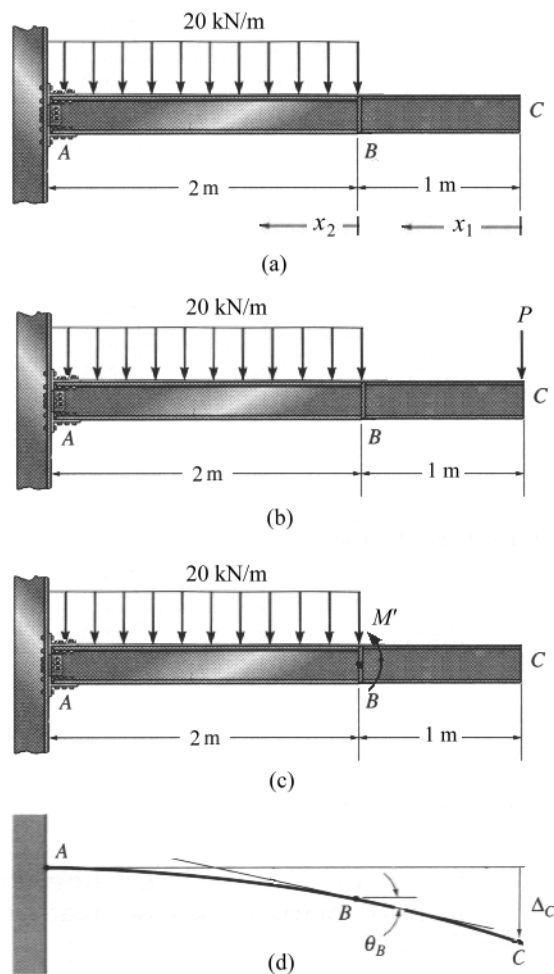
3. โดยทฤษฎีของ Castigliano เราจะได้ว่า

$$\Delta_C = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$\Delta_C = \int_0^1 \frac{(0)(-x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^2 \frac{(-10x_2^2)(-x_2 - 1)}{EI} dx_2$$

$$\Delta_C = 0 + \frac{200}{3EI} = \frac{200 \text{ kN.m}^3}{3[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^{-6}) \text{ m}^4]} = .00186 \text{ m} = 1.9 \text{ mm}$$

เนื่องจาก Δ_C มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_C จะมีทิศทางเดียวกันกับแรง P คือมีทิศพุ่งลง รูปที่ 7-38d แสดงลักษณะการโก่งตัวของคาน



รูปที่ 7-38

หาค่า slope ที่จุด B

1. โดยวิธีของ Castigliano เมื่อเราต้องการหาค่า slope ที่จุด B เราจะให้โมเมนต์ดัด M' กระทำที่จุด B ดังที่แสดงในรูปที่ 7-38c ซึ่งจากคานในรูปที่ 7-38a เราควรที่จะแบ่งคานโดยใช้ coordinate x_1 และ x_2 ดังที่แสดง

2. จากรูปที่ 7-38b เราจะหาโมเมนต์ดัดภายในที่เกิดจากการกระทำของแรงภายนอกและโมเมนต์ M' ได้ดังนี้

$$M_1 = 0 \quad \frac{\partial M_1}{\partial M'} = 0$$

$$M_2 = M' - 10x_2^2 \quad \frac{\partial M_2}{\partial M'} = 1$$

เมื่อให้ $M' = 0$ เราจะได้ว่า $M_1 = 0$ และ $M_2 = -10x_2^2$

3. โดยทฤษฎีของ Castigliano เราจะได้ว่า

$$\theta_B = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$\theta_B = \int_0^2 \frac{(-10x_2^2)(1)}{EI} dx_2 = -\frac{80 \text{ kN.m}^2}{3EI}$$

$$\theta_B = -\frac{80 \text{ kN.m}^2}{3[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^{-6}) \text{ m}^4]} = -0.74(10^{-3}) \text{ radian}$$

เนื่องจาก θ_B มีค่าเป็นลบ ดังนั้น θ_B จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับโมเมนต์ดัด M' คือมีทิศตามเข็มนาฬิกา ขอให้สังเกตด้วยว่า ค่า slope ในช่วง BC ของคานจะมีค่าคงที่เท่ากับ θ_B เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกกระทำในช่วงนี้ของคาน

เมื่อให้ $P = 10 \text{ kN}$ ซึ่งเป็นแรงจริงที่กระทำต่อโครงข้อแข็ง และ $M' = 0$ เราจะได้ว่า ค่าโมเมนต์ดัดภายใน M ได้ดังที่แสดงใน column ที่ 6

Member	Limits	M	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$\frac{\partial M}{\partial M'}$	M ($P = 10 \text{ kN}, M' = 0$)
AB	0 ถึง 3	$M_1 = -Px_1 - M'$	$\frac{\partial M_1}{\partial P} = -x_1$	$M_1 = -1$	$M_1 = -10x_1$
BC	0 ถึง 3	$M_2 = -3P - M'$	$M_2 = -3$	$M_2 = -1$	$M_2 = -30$

3. ทฤษฎีของ Castigliano

หาค่าการโก่งตัวในแนวดิ่งที่จุด A

$$\Delta_A = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$\Delta_A = \int_0^3 \frac{(-x_1)(-10x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^3 \frac{(-30)(-3)}{EI} dx_2$$

$$\Delta_A = \frac{90}{EI} + \frac{270}{EI} = \frac{360 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

เนื่องจาก Δ_C มีค่าเป็นบวก ดังนั้น Δ_C จะมีทิศทางเดียวกันกับแรง P คือมีทิศพุ่งลง เมื่อแทนค่าต่างๆ ลงในสมการของ Δ_{Av} พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้ว่า

$$\Delta_A = \frac{360 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = 0.010 \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

ค่าของ slope ที่จุด A

$$\Delta_A = \int_0^L M \left(\frac{\partial M}{\partial M'} \right) \frac{dx}{EI}$$

$$\theta_A = \int_0^3 \frac{(-1)(-10x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^3 \frac{(-1)(-30)}{EI} dx_2$$

$$\theta_A = \frac{45}{EI} + \frac{90}{EI} = -\frac{135 \text{ kN.m}^2}{EI}$$

เนื่องจาก θ_A มีค่าเป็นบวก ดังนั้น θ_A จะมีทิศทางเดียวกันกับ virtual unit moment ซึ่งมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เมื่อแทนค่าต่างๆ ลงในสมการของ θ_A พร้อมทำการแปลงหน่วยให้สอดคล้องกัน เราจะได้

$$\theta_A = \frac{135 \text{ kN.m}^3}{[200(10^6) \text{ kN/m}^2][179(10^6)(10^{-12}) \text{ m}^4]} = 0.00377 \text{ radian}$$

บทที่ 8

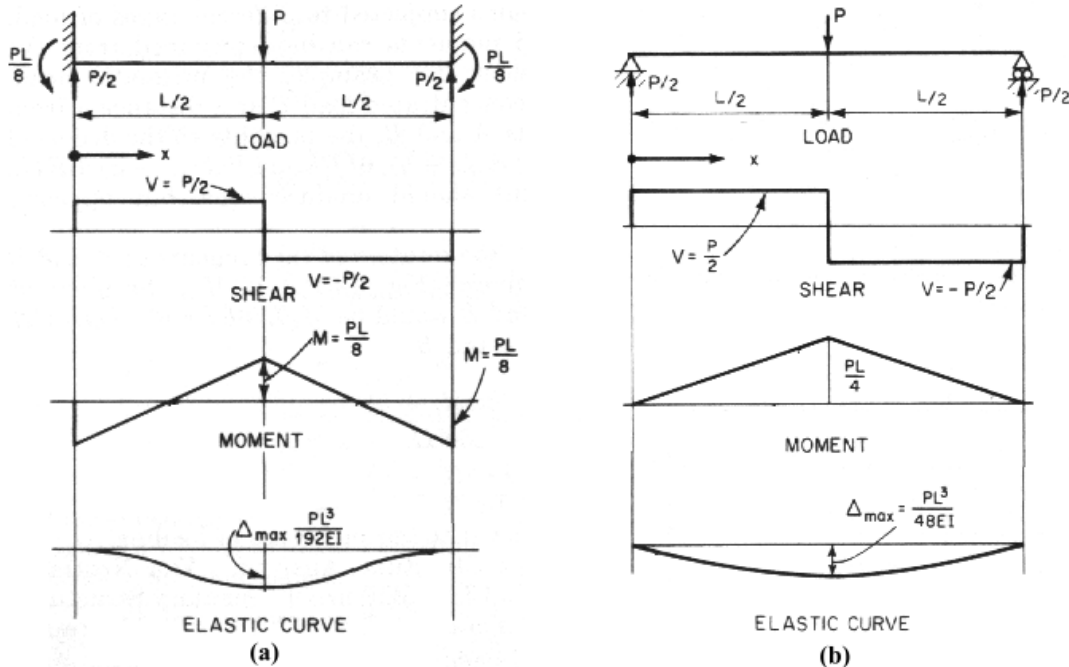
Analysis of Indeterminate Structures by Force Method

8.1 Statically Indeterminate Structures

โครงสร้าง statically indeterminate เป็นโครงสร้างซึ่งมีผลรวมของจำนวนของแรงปฏิกิริยา (reactions) และจำนวนของแรงและโมเมนต์ภายใน (internal loads) ที่ไม่ทราบค่ามากกว่าจำนวนของสมการความสมดุลของโครงสร้าง และเป็นโครงสร้างที่มีเสถียรภาพ โครงสร้างโดยทั่วไปจะเป็นโครงสร้าง statically indeterminate โดยเฉพาะโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก (reinforced concrete structures) ซึ่งเกิดจากการก่อสร้างที่เป็นการเทคอนกรีตอย่างต่อเนื่องซึ่งทำให้จุดต่อขององค์อาคารเป็นจุดต่อยึดแน่น (fixed joint)

ข้อดีของโครงสร้าง statically indeterminate (Advantages of Statically Indeterminate Structures)

1. โครงสร้าง statically indeterminate เป็นโครงสร้างที่ใช้วัสดุน้อยกว่าและมีการโค้งตัวน้อยกว่าโครงสร้าง statically determinate กำหนดให้แรงและน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อโครงสร้างมีค่าและรูปแบบใดรูปแบบหนึ่งแล้ว โครงสร้าง statically indeterminate จะมีขนาดเล็กกว่าโครงสร้าง statically determinate และ ถ้ากำหนดให้ขนาดหน้าตัดของโครงสร้างมีค่าเท่ากันแล้ว โครงสร้าง statically indeterminate จะมีระยะโค้งตัวน้อยกว่าระยะโค้งตัวของโครงสร้าง statically determinate ยกตัวอย่างเช่น คานตาม que แสดงในรูปที่ 8-1 จากรูปที่ 8-1a และ 8-1b คาน statically indeterminate ที่มีจุดรองรับยึดแน่น (fixed-supported beam) จะมีค่าโมเมนต์สูงสุดน้อยกว่าค่าโมเมนต์สูงสุดของคาน statically determinate ที่มีจุดรองรับเป็นหมุดและ roller สองเท่า และระยะโค้งตัวสูงสุดของคานที่มีจุดรองรับยึดแน่นจะมีค่าน้อยกว่าระยะโค้งตัวสูงสุดของคานที่มีจุดรองรับเป็นหมุดและ roller สี่เท่า

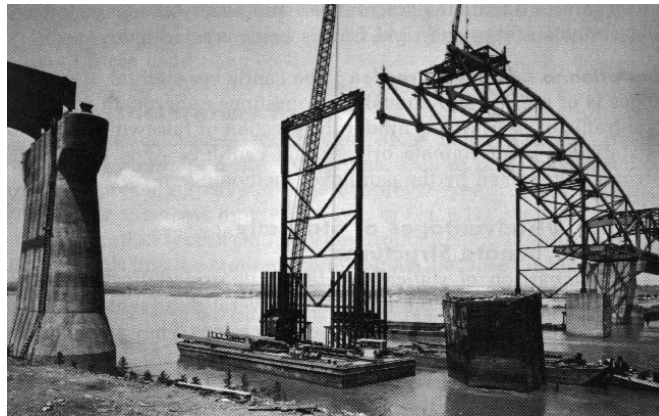


รูปที่ 8-1

2. โครงสร้าง statically indeterminate เป็นโครงสร้างที่มีการกระจายแรงที่ดีกว่าโครงสร้าง statically determinate ในกรณีที่มีความผิดพลาดเกิดขึ้นในการก่อสร้างหรือในกรณีที่แรงกระทำมีค่ามากกว่าที่ได้ออกแบบไว้มาก โครงสร้าง statically indeterminate จะมีการกระจายแรงและโมเมนต์ภายใน (internal loads) กลับไปที่จุดรองรับของโครงสร้าง ซึ่งจะเป็นผลให้โครงสร้างนี้มีเสถียรภาพและไม่วิบัติอย่างฉับพลัน

พิจารณาคาน ตามที่แสดงในรูปที่ 8-1a เมื่อแรง P มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนถึงจุดๆ หนึ่งแล้ว วัสดุที่ใช้ทำคาน ที่จุดที่รับโมเมนต์สูงสุด (ที่ผนังและที่กึ่งกลางคาน) จะเกิดการคลาก (yielding) ขึ้น และจุดทั้งสามนี้จะมีพฤติกรรมเหมือนบานพับ (hinge) หรือที่เรียกว่า plastic hinge ซึ่งทำให้คานดังกล่าวมีพฤติกรรมเปลี่ยนไป เป็นแบบคานที่ถูกรองรับโดย hinge และเมื่อระยะโก่งตัวมีค่ามากขึ้น ผนังที่รองรับคานในรูปของ hinge จะต้านทานแรงและโมเมนต์ปฏิกิริยาและจะป้องกันการบิดของคานอย่างฉับพลัน ในกรณีของคาน ตามที่แสดงในรูปที่ 8-1b เมื่อแรง P มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนถึงจุดๆ หนึ่ง แล้ว plastic hinge จะเกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางของคานเท่านั้น และเมื่อระยะโก่งตัวมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ จนถึงค่าหนึ่ง คานจะบิดอย่างฉับพลัน

3. โครงสร้าง statically indeterminate ทำให้เกิดการก่อสร้างแบบ cantilever การก่อสร้างในรูปแบบ cantilever ดังที่แสดงในรูปที่ 8-2 ทำให้การก่อสร้างสะพานมีความง่ายขึ้นมาก เมื่อพื้นที่ได้สะพานมีระดับน้ำที่ลึกหรือมีการใช้งานอยู่ในขณะที่ทำการก่อสร้าง



รูปที่ 8-2

ข้อเสียของโครงสร้าง statically indeterminate (Disadvantages of Statically Indeterminate Structures)

1. การวิเคราะห์และการออกแบบโครงสร้าง statically indeterminate มีความยุ่งยากมากกว่าการวิเคราะห์และการออกแบบโครงสร้าง statically determinate เราจะไม่สามารถวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate ได้ ถ้าเราไม่ทราบข้อมูลของขนาดหน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้าง และในทางกลับกัน ถ้าเราไม่ทราบค่าแรงและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นภายในโครงสร้างแล้ว เราก็จะไม่สามารถออกแบบหาขนาดหน้าตัดของโครงสร้างได้ โดยปกติแล้ว ปัญหานี้ได้ถูกแก้ไขโดยการวิเคราะห์โครงสร้างอย่างประมาณ "approximate analysis" ก่อน แล้วใช้ค่าแรงและโมเมนต์ที่วิเคราะห์ได้ในการออกแบบโครงสร้าง จากนั้นทำการวิเคราะห์โครงสร้างที่ได้โดยการวิเคราะห์โครงสร้างแบบ "exact analysis" แล้วทำการออกแบบโครงสร้างอีกครั้งหนึ่ง ขั้นตอนการวิเคราะห์และออกแบบจะถูกกระทำซ้ำๆ จนหน้าตัดขององค์อาคารที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงจากการวิเคราะห์และออกแบบในครั้งก่อนหน้านี้น้อยมาก
2. ในบางกรณี ค่าก่อสร้างโครงสร้าง statically indeterminate มีราคาแพงกว่าโครงสร้าง statically determinate เช่นในโครงสร้างเหล็ก (steel structure) เป็นต้น เนื่องจากโครงสร้าง statically indeterminate ต้องการจุดรองรับ (supports) และจุดต่อ (connections) ที่มีความแข็งแรงสูง ดังนั้น ค่าก่อสร้างจุดต่อและจุดรองรับของโครงสร้างเหล็กที่เพิ่มขึ้นอาจจะมีค่าสูงกว่าค่าวัสดุที่ลดลงเนื่องจาก indeterminacy ของโครงสร้าง

3. การหลุดตัวที่ไม่เท่ากัน การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ และความผิดพลาดในการก่อสร้างจะก่อให้เกิดหน่วยแรงขึ้นภายในโครงสร้าง statically indeterminate เพราะจุดรองรับและจุดต่อของโครงสร้างจะไม่ยอมให้มีการยัดหรือหดตัวเกิดขึ้น
4. การเปลี่ยนแปลงรูปแบบของแรงกระทำต่อโครงสร้างอาจจะทำให้เกิด stress reversal ขึ้นในโครงสร้าง statically indeterminate ได้ง่ายกว่าในโครงสร้าง statically determinate ซึ่งในบางกรณี เราจะต้องเสริมหน้าตัดขององค์อาคารของโครงสร้าง statically indeterminate เพื่อที่จะรองรับ stress reversal นี้

ขั้นตอนการวิเคราะห์โครงสร้าง Statically Indeterminate (Methods of Analysis of Statically Indeterminate Structures)

โครงสร้าง statically indeterminate เป็นโครงสร้างที่เราไม่สามารถทำการวิเคราะห์ได้โดยใช้สมการความสมดุลของโครงสร้างเพียงอย่างเดียว เราต้องใช้สมการความสอดคล้อง (compatibility equation) และความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเปลี่ยนตำแหน่ง (force-displacement relationships) ของโครงสร้างในการวิเคราะห์ด้วย โดยใช้สมการความสอดคล้องเป็นเงื่อนไขที่กำหนดให้โครงสร้างไม่มีการแตกแยกหรือ overlaps กันภายใต้แรงกระทำ และความสัมพันธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างจะกำหนดพฤติกรรมของวัสดุในการตอบสนองต่อแรงกระทำ ในการศึกษาวิชานี้เรากำหนดให้การตอบสนองของวัสดุเป็นแบบ linear elastic ภายใต้แรงกระทำ โดยทั่วไปแล้ว วิธีวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate จะถูกแบ่งออกเป็น 2 วิธีหลักคือ force method และ displacement method

วิธี force method

1. เปลี่ยนโครงสร้าง statically indeterminate เป็นโครงสร้าง statically determinate โดยการเอาแรงเกินจำเป็น (redundant force) ซึ่งเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า (unknown) ออกจากโครงสร้าง จากนั้น คำนวณหาค่าเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) เนื่องจากแรงกระทำ ณ จุดและในทิศทางที่แรงเกินจำเป็นกระทำ
2. ให้แรงเกินจำเป็นกระทำต่อโครงสร้างที่ละแรง (โดยไม่มีแรงภายนอกกระทำ) แล้ว หาค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง ณ จุดต่างๆ ในทิศทางที่แรงเกินจำเป็นกระทำ
3. เขียนสมการความสอดคล้องของโครงสร้าง ซึ่งมีจำนวนเท่ากับ degree of indeterminacy ของโครงสร้าง แล้ว แก้สมการหลายชั้น (simultaneous equation) เพื่อหาค่าแรงเกินจำเป็น
4. ใช้สมการความสมดุลหา shear diagram และ moment diagram

วิธีการนี้ยังถูกเรียกในอีกชื่อหนึ่งว่าวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง (method of consistent deformation) อีกวิธีการหนึ่งที่เป็นวิธี force method คือ วิธีงานน้อยที่สุด (method of least work) ซึ่งมีพื้นฐานมาจากทฤษฎีของ Castigliano

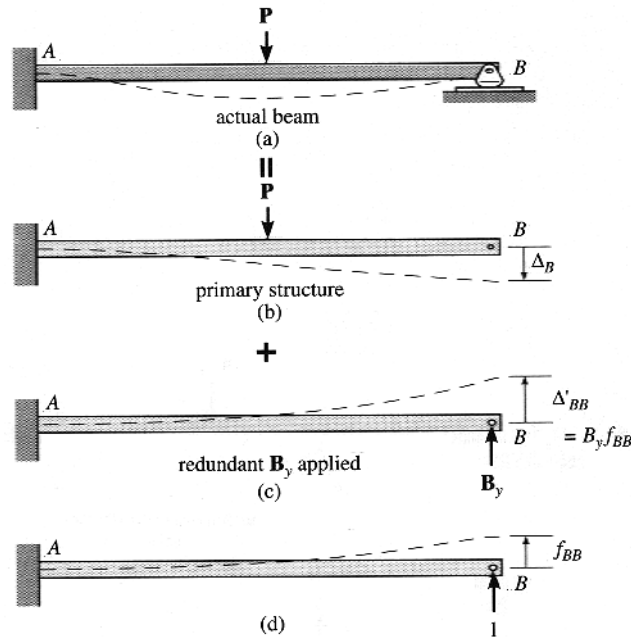
วิธี displacement method

1. กำหนดให้มีการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่า (unknown displacement) เกิดขึ้นที่จุดต่อ (joint) ต่างๆ ของโครงสร้าง
2. เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่า
3. เขียนสมการความสมดุลที่จุดต่อของโครงสร้างจากสมการแสดงความสัมพันธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่ทราบค่า
4. แก้สมการหลายชั้นเพื่อหาค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง
5. โดยการแทนค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่หามาได้ลงในสมการแสดงความสัมพันธ์ของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้าง เพื่อหาค่าแรงต่างๆ ที่เกิดขึ้นในโครงสร้าง
6. ใช้สมการความสมดุลเขียน shear diagram และ moment diagram

ตัวอย่างของวิธีการวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate ที่เราจะได้ศึกษาต่อไปคือ วิธีมุมลาด-การแอ่น (slope-deflection method) วิธีกระจายโมเมนต์ (moment distribution method) และวิธี matrix displacement method วิธีการวิเคราะห์โครงสร้างทั้งสองนี้มีข้อดีและข้อเสียในการใช้ที่แตกต่างกัน ซึ่งขึ้นอยู่กับ geometry และ degree of indeterminacy ของโครงสร้าง

8.2 วิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง (method of consistent deformation)

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-3a ซึ่งเป็นโครงสร้างที่มีจำนวนดีกรีอิสระเกินเท่ากับ 1 (statically indeterminate to the first degree) เนื่องจากมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าที่จุดรองรับ A และ B รวม 4 แรง และมีสมการความสมดุลแค่ 3 สมการเท่านั้น ดังนั้น เราจะวิเคราะห์คานดังกล่าวได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 8-3

1. เลือกแรงปฏิกิริยาหนึ่งให้เป็นแรงเกินจำเป็น (redundant force) โดยที่เราจะเลือกโดยพิจารณาถึงความง่ายในการหาการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างเป็นหลัก ในที่นี้ เราจะเลือกแรงปฏิกิริยาที่จุด B เป็นแรงเกินจำเป็น และเมื่อเราเอาแรงเกินจำเป็นออก คานดังกล่าวจะกลายเป็นคานยื่น (cantilever beam) ซึ่งเป็นโครงสร้าง statically determinate และถูกเรียกว่าโครงสร้างปฐม (primary structure) ดังที่แสดงในรูปที่ 8-3b
2. หาระยะการโก่งตัวของคานที่จุด B เนื่องจากแรง P ให้มีค่าเท่ากับ Δ_B ซึ่งมีทิศทางลง
3. โดยหลักการ superposition เราจะได้ว่า แรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าที่จุด B (B_y) จะทำให้เกิดการโก่งตัวของคานที่จุด B ในทิศทางขึ้นและมีค่าเท่ากับ Δ'_{BB} ดังที่แสดงในรูปที่ 8-3c โดยที่ subscript ตัวแรก (B) แทนจุดที่เราต้องการหาระยะการโก่งตัวและ subscript ตัวที่สอง (B) แทนจุดที่แรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่ากระทำ ซึ่งถ้ากำหนดให้ระยะการโก่งตัวที่มีทิศทางลงมีค่าเป็นบวกแล้ว จากรูปที่ 8-3b และ 8-3c เราจะเขียนสมการความสอดคล้อง (compatibility equation) ที่จุด B ได้เป็น

$$+\downarrow \quad 0 = \Delta_B - \Delta'_{BB}$$

โดยทั่วไปแล้ว เราจะกำหนดให้แรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบค่าที่จุด B (B_y) มีค่า 1 หน่วย ซึ่งจะทำให้เกิดการโก่งตัวที่จุด B มีค่าเป็น f_{BB} และเราจะเรียก f_{BB} ว่า linear flexibility coefficient ตามที่แสดงในรูปที่ 8-

3d โดยที่ subscripts ดังกล่าวจะบอกตำแหน่งเช่นเดียวกับ subscripts ของระยะโก่งตัว Δ'_{BB} เมื่อวัสดุมีพฤติกรรมแบบ linear elastic ภายใต้แรงกระทำ P แล้ว ค่า Δ'_{BB} จะแปรผันโดยตรงกับค่า f_{BB} หรือ

$$\Delta'_{BB} = B_y f_{BB}$$

ดังนั้น จากรูปที่ 8-3b และ 8-3d เราจะเขียนสมการความสอดคล้องที่จุด B ได้ใหม่เป็น

$$0 = \Delta_B - B_y f_{BB}$$

และแรงปฏิกิริยาที่จุด B จะมีค่าเท่ากับ

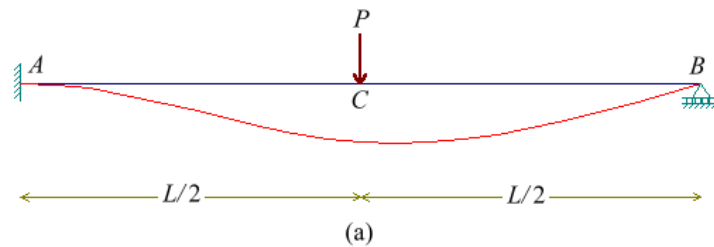
$$B_y = \frac{\Delta_B}{f_{BB}}$$

ตัวอย่างที่ 8-1

พิจารณาคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-3a กำหนดให้คานมีความยาว L และแรง P กระทำที่กึ่งกลางคานที่ระยะ $L/2$ จากจุดรองรับ A ดังที่แสดงในรูปที่ 8-4a จงหา

1. สมการของแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B
2. เขียน shear diagram และ moment diagram ของคาน
3. สมการของการโก่งตัวของคานที่จุดที่แรงกระทำ C

โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง



รูปที่ 8-4

ค่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B

1. กำหนดให้แรงปฏิกิริยาที่จุด B เป็นแรงเกินจำเป็น ดังนั้น จากหลักการ superposition เราจะทำการแยกคานออกได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-3b และ 8-3c และกำหนดให้ $\Delta'_{BB} = B_y f_{BB}$ เมื่อ f_{BB} เป็นค่าการโก่งตัวของคานที่จุด B เนื่องจากแรง 1 หน่วยในทิศทางของแรงปฏิกิริยา B_y

2. จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ B เราจะได้ว่า

$$+\downarrow \quad 0 = \Delta_B - B_y f_{BB}$$

โดยวิธี conjugate beam และรูปที่ 8-3b เราจะได้

$$\Delta_B = \frac{PL^2}{8EI} \left(\frac{5}{6} L \right) = \frac{5PL^3}{48EI}$$

โดยวิธี conjugate beam และรูปที่ 8-3d เราจะได้

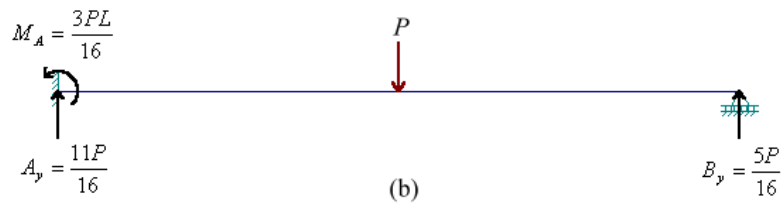
$$f_{BB} = \frac{L^2}{2EI} \left(\frac{2}{3} L \right) = \frac{L^3}{3EI}$$

จากสมการ compatibility เราจะได้ว่า

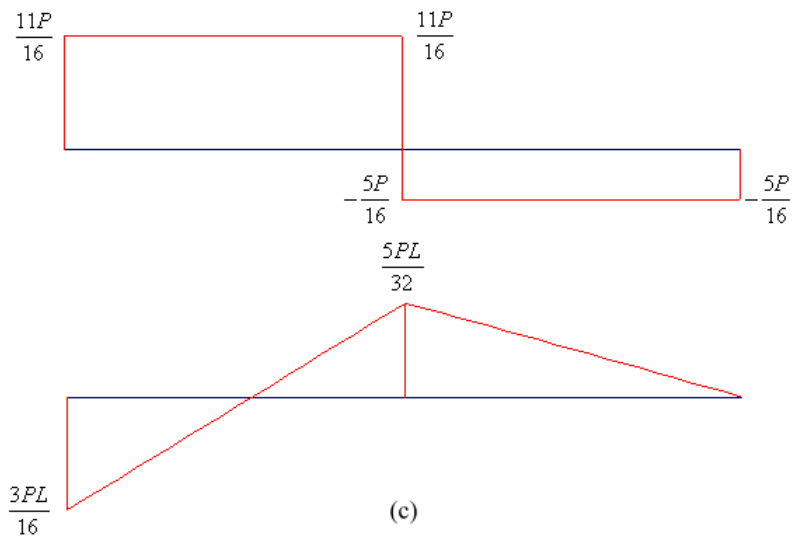
$$B_y = \frac{5P}{16}$$

เมื่อเราทราบแรงปฏิกิริยา B_y แล้ว เราจะใช้สมการสมดุลหาค่าแรงปฏิกิริยา A_y และ M_A ได้ดังที่แสดงโดย free body diagram ในรูปที่ 8-4b โดยที่

$$A_y = \frac{11P}{16} \quad \text{และ} \quad M_A = \frac{3PL}{16}$$

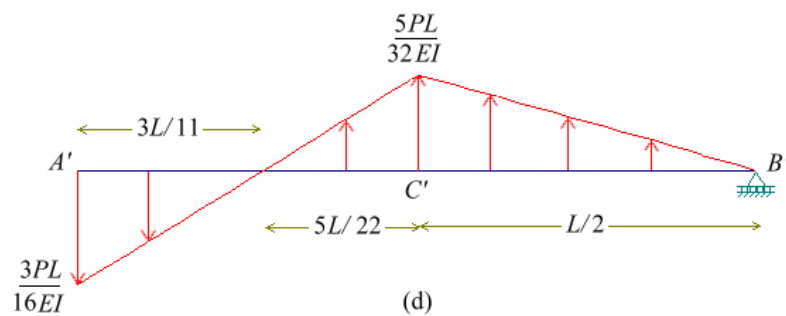


3. เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-4c ตามลำดับ

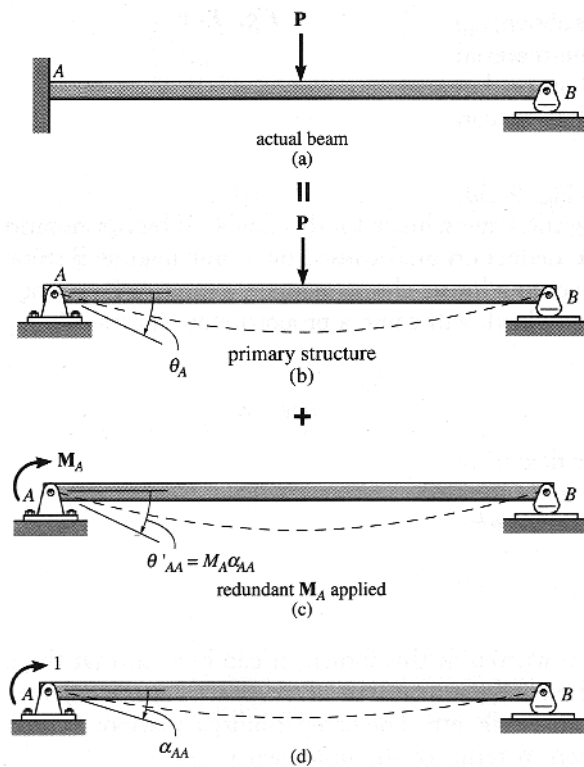


4. เราจะหาสมการของการโก่งตัวในแนวตั้งที่จุด C ได้โดยใช้วิธี conjugate beam และจาก free body diagram ของส่วน $C'B'$ ของ conjugate beam ดังที่แสดงในรูปที่ 8-4d และเราจะได้ว่า

$$M_{C'} = \Delta_C = -\frac{7PL^3}{768EI}$$



เนื่องจากว่า เราสามารถเลือกค่าของแรงหรือโมเมนต์ปฏิกิริยาใดๆ เป็น redundant ก็ได้ ดังนั้น เราจะวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-3a โดยให้โมเมนต์ปฏิกิริยาที่จุด A เป็น redundant ได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-5 และเราจะวิเคราะห์คานดังกล่าวได้ดังต่อไปนี้



รูปที่ 8-5

1. ให้โมเมนต์ปฏิกิริยาที่จุด A เป็น redundant ซึ่งเราจะเขียนโครงสร้างปฐม (primary structure) ของคานได้โดยการเปลี่ยนจุดรองรับ (support) ที่ A จากแบบยึดแน่นให้เป็นหมุด ตามที่แสดงในรูปที่ 8-5b
2. หาค่าการหมุน (rotation) ที่จุด A เนื่องจากแรงกระทำ P โดยกำหนดให้มีค่า θ_A
3. หาค่าการหมุน angular flexibility coefficient ที่จุด A โดยให้โมเมนต์ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด A ในทิศทางของ redundant M_A กำหนดให้มีค่า α_{AA} ดังนั้น เราจะเขียนสมการความสอดคล้อง (compatibility equation) ของการหมุนที่จุด A ได้เป็น

$$0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA}$$

และเราจะหาค่าของโมเมนต์ปฏิกิริยาที่จุด A ได้จาก

$$M_A = -\frac{\theta_A}{\alpha_{AA}}$$

เครื่องหมายลบของ M_A แสดงว่า M_A มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของโมเมนต์ 1 หน่วย

ตัวอย่างที่ 8-2

จงหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-3a โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง กำหนดให้คานมีความยาว L และแรง P กระทำที่กึ่งกลางคานที่ระยะ $L/2$ จากจุดรองรับ A ดังที่แสดงในรูปที่ 8-4a

1. กำหนดให้โมเมนต์ปฏิกิริยาที่จุด A เป็น redundant ดังนั้น จากหลักการ superposition เราจะทำการแยกคานออกได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-5b และ 8-5c และกำหนดให้ $\theta'_{AA} = \theta_A + M_A \alpha_{AA}$ เมื่อ α_{AA} เป็นค่า slope ที่จุด A เนื่องจากโมเมนต์ดัด 1 หน่วยในทิศทางของโมเมนต์ดัด M_A

2. จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ A เราจะได้ว่า

$$\uparrow + \quad 0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA}$$

โดยวิธี conjugate beam และรูปที่ 8-5b เราจะได้

$$\theta_A = \frac{PL^2}{8EI} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{PL^2}{16EI}$$

โดยวิธี conjugate beam และรูปที่ 8-5d เราจะได้

$$\alpha_{AA} = \frac{L}{2EI} \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{L}{3EI}$$

จากสมการ compatibility เราจะได้ว่า

$$M_A = \frac{3PL}{16}$$

เมื่อเราทราบแรงปฏิกิริยา M_A แล้ว เราจะใช้สมการสมดุลหาค่าแรงปฏิกิริยา A_y และ B_y โดยที่

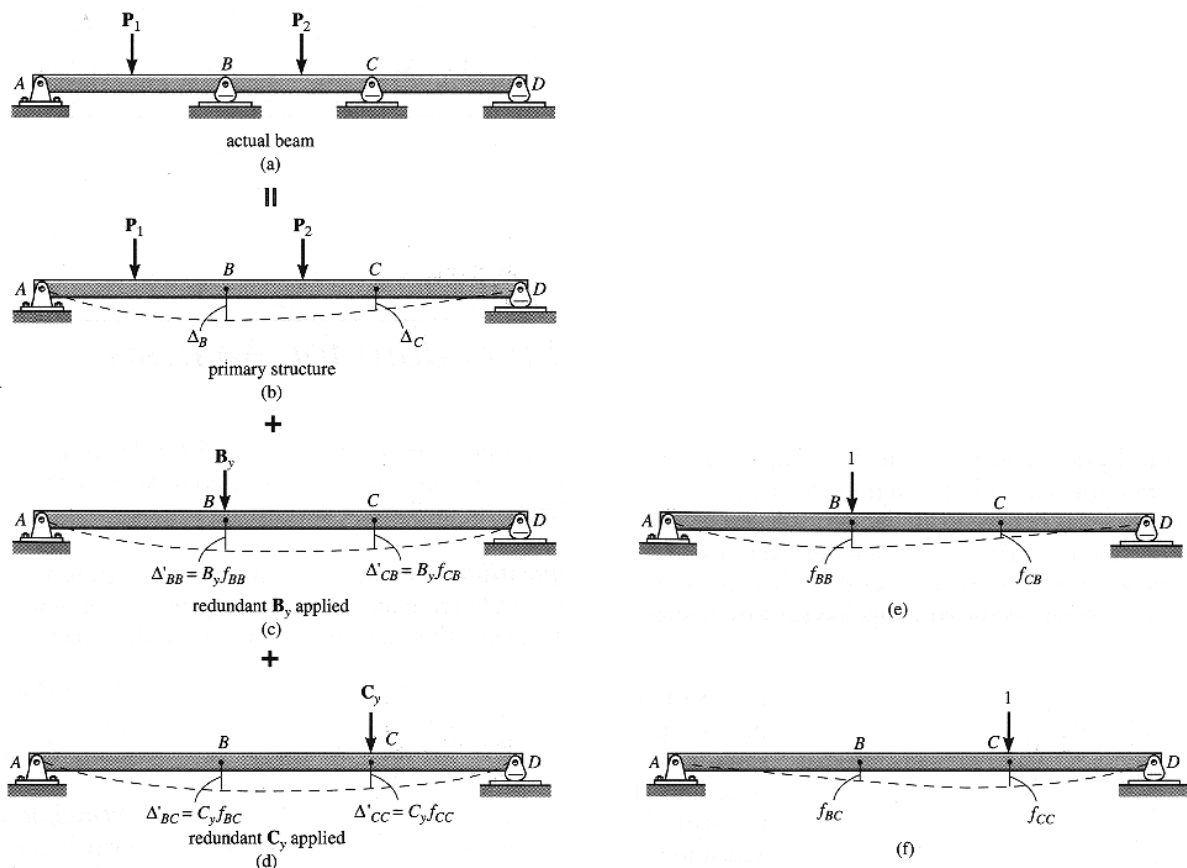
$$A_y = \frac{11P}{16} \quad \text{และ} \quad B_y = \frac{5P}{16}$$

เมื่อคานมี degree of indeterminacy เท่ากับสอง ดังตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 8-6a แล้ว เราจะวิเคราะห์คานดังกล่าวได้ดังต่อไปนี้

1. สมมติให้แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B และ C เป็น redundant เมื่อเราเอาจุดรองรับทั้งสองออกแล้ว เราจะได้คาน statically determinate ซึ่งเป็นโครงสร้างปฐม ดังที่แสดงในรูปที่ 8-6b
2. หาระยะโก่งตัวของคานเนื่องจากแรง P_1 และ P_2 ที่จุด B และจุด C ให้มีค่าเท่ากับ Δ_B และ Δ_C
3. โดยหลักการ superposition เราจะให้แรงเกินจำเป็นขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด B ซึ่งจะให้เกิดการโก่งตัวของคานที่จุด B และจุด C มีเป็นค่า f_{BB} และ f_{CB} ดังที่แสดงในรูปที่ 8-6e ตามลำดับ จากนั้น ให้แรงเกินจำเป็นขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด C ซึ่งจะให้เกิดการโก่งตัวของคานที่จุด B และจุด C มีเป็นค่า f_{BC} และ f_{CC} ตามที่แสดงในรูปที่ 8-6f ตามลำดับ และเราจะเขียนสมการความสอดคล้องของการโก่งตัวที่จุด B และจุด C ได้เป็น

$$\begin{aligned} +\downarrow \quad 0 &= \Delta_B + B_y f_{BB} + C_y f_{BC} \\ +\downarrow \quad 0 &= \Delta_C + B_y f_{CB} + C_y f_{CC} \end{aligned} \quad (8-1)$$

หลังจากที่เราแก้สมการหาค่าของแรงปฏิกิริยา B_y และ C_y แล้ว เราจะวิเคราะห์คานต่อไปโดยใช้สมการความสมดุล



รูปที่ 8-6

ตัวอย่างที่ 8-3

จงทำการวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-7 โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง

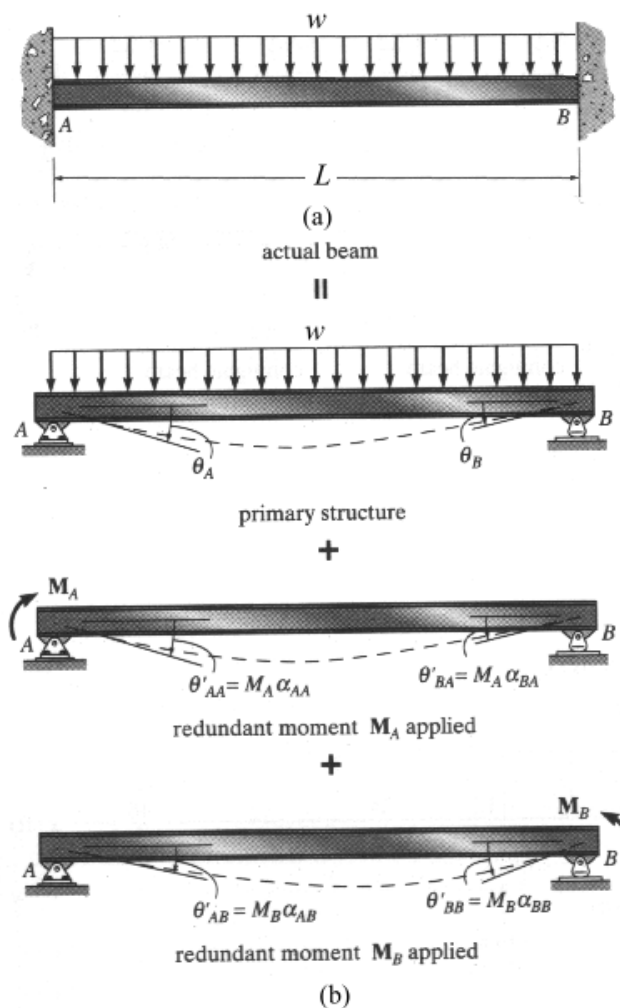
เราควรสังเกตด้วยว่า คานนี้มีความสมมาตรที่จุดกึ่งกลางคาน

1. กำหนดให้โมเมนต์ปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A และจุดรองรับ B เป็น redundant ของคาน ดังนั้น จากหลักการ superposition เราจะทำการแยกคานออกได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-7
2. จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ A เราจะได้ว่า

$$\uparrow + \quad 0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA} + M_B \alpha_{AB}$$

จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ B เราจะได้ว่า

$$\downarrow + \quad 0 = \theta_B + M_A \alpha_{BA} + M_B \alpha_{BB}$$



รูปที่ 8-7

โดยวิธี conjugate beam เราจะได้

$$\begin{aligned} \theta_A &= -\left(\frac{1}{2}\right) \frac{2}{3} \frac{wL^2}{8EI} L = \frac{wL^3}{24EI} \downarrow & \theta_B &= \left(\frac{1}{2}\right) \frac{2}{3} \frac{wL^2}{8EI} L = \frac{wL^3}{24EI} \downarrow \\ \alpha_{AA} &= -\frac{L}{2EI} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{L}{3EI} \downarrow & \alpha_{BA} &= \frac{L}{2EI} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{L}{6EI} \downarrow \\ \alpha_{AB} &= -\frac{L}{2EI} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{L}{6EI} \downarrow & \alpha_{BB} &= \frac{L}{2EI} \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{L}{3EI} \downarrow \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า slope ต่างๆ ที่หาได้ลงในสมการ compatibility เราจะได้ว่า

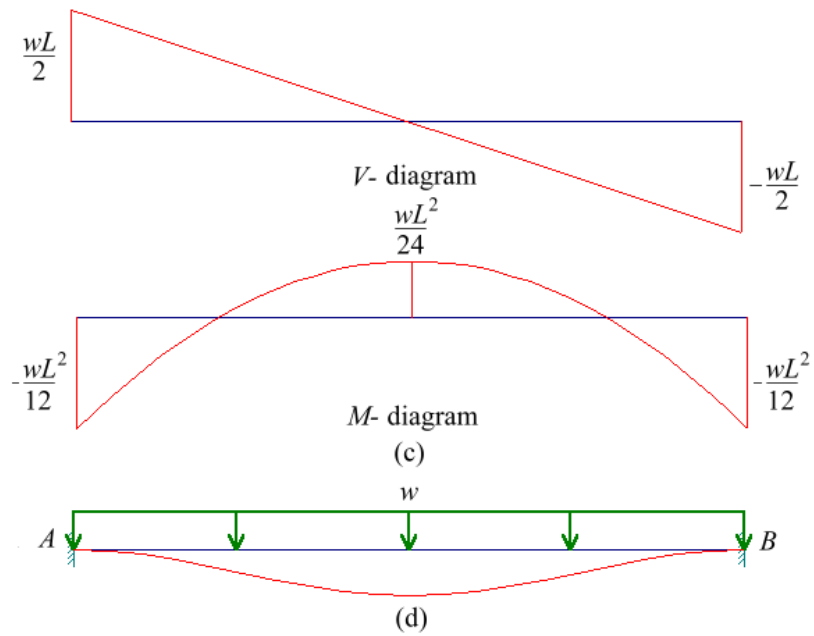
$$M_A = \frac{wL^2}{12} \quad \text{และ} \quad M_B = \frac{wL^2}{12}$$

จากสมการสมดุล เราจะหาค่าแรงปฏิกิริยา A_y และ B_y ได้ว่า

$$A_y = \frac{wL}{2} \quad \text{และ} \quad B_y = \frac{wL}{2}$$

3. เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานาได้ดังที่แสดงในรูปที่ 8-7c

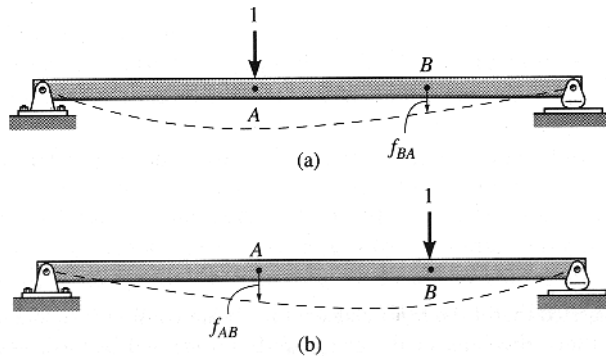
4. เราจะร่างรูปร่างการโก่งตัวของคานได้ดังที่แสดงในรูปที่ 8-7d โดยเราจะหาค่าการโก่งตัวที่จุดใดๆ บนคานได้โดยใช้วิธี conjugate-beam



8.3 กฎผกผันของ Maxwell (Maxwell's Theorem of Reciprocal Displacements)

กฎผกผันของ Maxwell จะช่วยให้เราวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี force Method ได้ง่ายขึ้นมาก โดยกฎนี้กล่าวว่า **ค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง (displacement) ที่เกิดขึ้นที่จุด B บนโครงสร้าง ในทิศทาง b เนื่องจากแรงขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด A ในทิศทาง a จะมีค่าเท่ากับค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดขึ้นที่จุด A ในทิศทาง a เนื่องจากแรงขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด B ในทิศทาง b หรือ $f_{BA} = f_{AB}$**

กฎผกผันของ Maxwell จะทำให้การคำนวณค่าโก่งตัวที่ใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างโดยวิธี force Method ที่มีจำนวนดีกรีของอินดีเทอริเมนต์เท่ากับหรือมากกว่าสองมีจำนวนลดลง อย่างเช่นในสมการที่ 9-1 เราจะหาแต่เพียง f_{BC} หรือ f_{CB} เพียงตัวเดียวเท่านั้น เพราะ $f_{BC} = f_{CB}$ เป็นต้น



รูปที่ 8-8

เราสามารถพิสูจน์กฎผกผันของ Maxwell ได้โดยวิธี virtual work หรือวิธี unit load พิจารณาดังที่แสดงในรูปที่ 8-8 ระยะโก่งตัวที่จุด B (f_{BA}) เนื่องจากแรงขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด A จะหาได้จาก

1. หาค่าของโมเมนต์ภายในคานเนื่องจากแรง 1 หน่วย ตามที่แสดงในรูปที่ 8-8a โดยใช้สมการความสมดุล สมมติให้มีค่าเป็น m_A
2. เอาแรง 1 หน่วยออก แล้วให้ virtual force ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด B ตามที่แสดงในรูปที่ 8-8b จากนั้น หาค่าโมเมนต์ที่เกิดขึ้นภายในคานโดยใช้สมการความสมดุล สมมติให้มีค่าเป็น m_B
3. หาระยะโก่งตัวที่จุด B (f_{BA}) เนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่จุด A จากสมการ $\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx$ เมื่อ

$$M = m_A \text{ และ } m = m_B \text{ ดังนั้น}$$

$$f_{BA} = \int \frac{m_B m_A}{EI} dx$$

ในลักษณะที่คล้ายคลึงกัน โดยวิธี virtual work ระยะโก่งตัวที่จุด A (f_{AB}) เนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่จุด B ตามที่แสดงในรูปที่ 8-8b จะหาได้จากสมการ

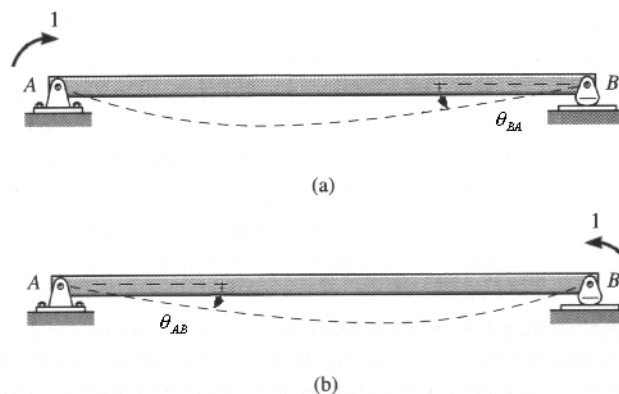
$$f_{AB} = \int \frac{m_A m_B}{EI} dx$$

เมื่อ $M = m_B$ ซึ่งเป็นโมเมนต์ภายในเนื่องจากแรง 1 หน่วยกระทำที่จุด B และ $m = m_A$ ซึ่งเป็นโมเมนต์ภายในเนื่องจาก virtual force ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด A ตามที่แสดงในรูปที่ 8-8a

เราจะเห็นได้ว่า จากสมการข้างต้นทั้งสอง $f_{BA} = f_{AB}$

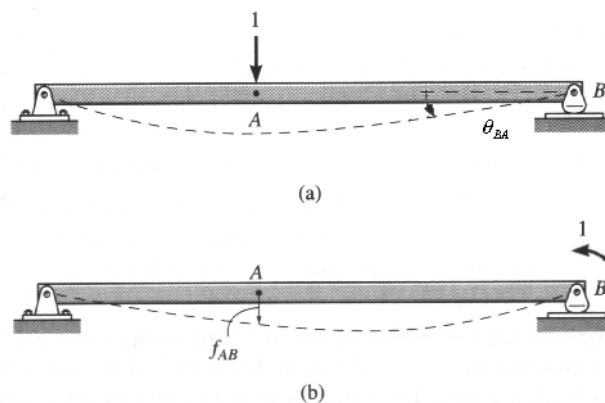
ในกรณีของมุมลาดเอียง (slope) กฎผกผันของ Maxwell กล่าวว่า **ค่ามุมลาดเอียงที่เกิดขึ้นที่จุด B บนโครงสร้าง ในทิศทาง b เนื่องจากโมเมนต์ขนาด 1 หน่วย (unit moment) กระทำที่จุด A ในทิศทาง a จะมีค่าเท่ากับ ค่า**

มุมลาดเอียงที่เกิดขึ้นที่จุด A ในทิศทาง a เนื่องจากโมเมนต์ขนาด 1 หน่วย กระทำที่จุด B ในทิศทาง b หรือ $\theta_{BA} = \theta_{AB}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-9



รูปที่ 8-9

ในกรณีของระยะโก่งตัวและมุมลาดเอียง กฎผกผันของ Maxwell กล่าวว่า ค่ามุมลาดเอียงที่มีหน่วยเป็นเรเดียน (radian) ที่เกิดขึ้นที่จุด B บนโครงสร้าง ในทิศทาง b เนื่องจากแรงขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด A ในทิศทาง a จะมีค่าเท่ากับระยะโก่งตัวที่เกิดขึ้นที่จุด A ในทิศทาง a เนื่องจากโมเมนต์ขนาด 1 หน่วยกระทำที่จุด B ในทิศทาง b หรือ $\theta_{BA} = f_{AB}$ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-10



รูปที่ 8-10

เมื่อกฎผกผันของ Maxwell ถูกเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปแล้ว กฎนี้จะถูกเรียกว่า Betti's Law ซึ่งจะกล่าวอย่างสั้นๆ ได้ว่า virtual work U_{AB} ที่เกิดจากแรงชุด $\sum P_B$ เมื่อโครงสร้างมีการเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจากแรงชุด $\sum P_A$ จะมีค่าเท่ากับ virtual work U_{BA} ที่เกิดจากแรงชุด $\sum P_A$ เมื่อโครงสร้างมีการเปลี่ยนตำแหน่งเนื่องจากแรงชุด $\sum P_B$ หรือ $U_{AB} = U_{BA}$

8.4 ข้อสังเกตเพิ่มเติมในการวิเคราะห์โครงสร้าง Statically Indeterminate โดยวิธี Force Method

ในกรณีที่โครงสร้างมีจำนวนดีกรีของอินดีเทอริเนตเท่ากับ n แล้ว โครงสร้างนั้นจะมีจำนวนของแรงเกินจำเป็น (redundant force) เท่ากับ n ค่า หรือ R_n และเราจะเขียนสมการความสอดคล้องของโครงสร้างโดยวิธี force method ได้ n สมการ หรือ

$$\begin{aligned}\Delta_1 + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 + \cdots + f_{1n}R_n &= 0 \\ \Delta_2 + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 + \cdots + f_{2n}R_n &= 0 \\ &\vdots \\ \Delta_n + f_{n1}R_1 + f_{n2}R_2 + \cdots + f_{nn}R_n &= 0\end{aligned}$$

โดยที่ $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ เป็นค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างเนื่องจากแรงกระทำ การทวัดตัวของจุดรองรับ การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ และความผิดพลาดในการก่อสร้าง เนื่องจากการแถมการข้างต้นซึ่งมีจำนวนของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าจำนวนหลายค่ากระทำได้ยากมาก โดยทั่วไปแล้ว เราจะเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ (matrix) แล้วจึงทำการแถมการโดยใช้วิธีการทางด้านเมตริกซ์ ซึ่งเราจะได้ว่า

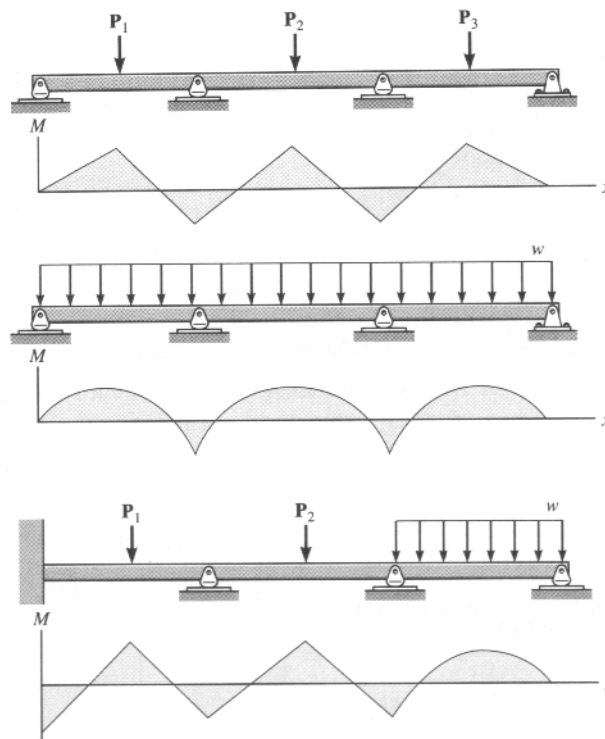
$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ & & \ddots & \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (8-2)$$

หรือ

$$\mathbf{fR} = -\Delta$$

จากกฎผกผันของ Maxwell, $f_{ij} = f_{ji}$ ดังนั้น เมตริกซ์ $\mathbf{f}$ จึงเป็นเมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) ซึ่งจะช่วยให้เราแถมการดังกล่าวได้ง่ายขึ้น

8.5 Moment Diagram ของคาน Statically Indeterminate



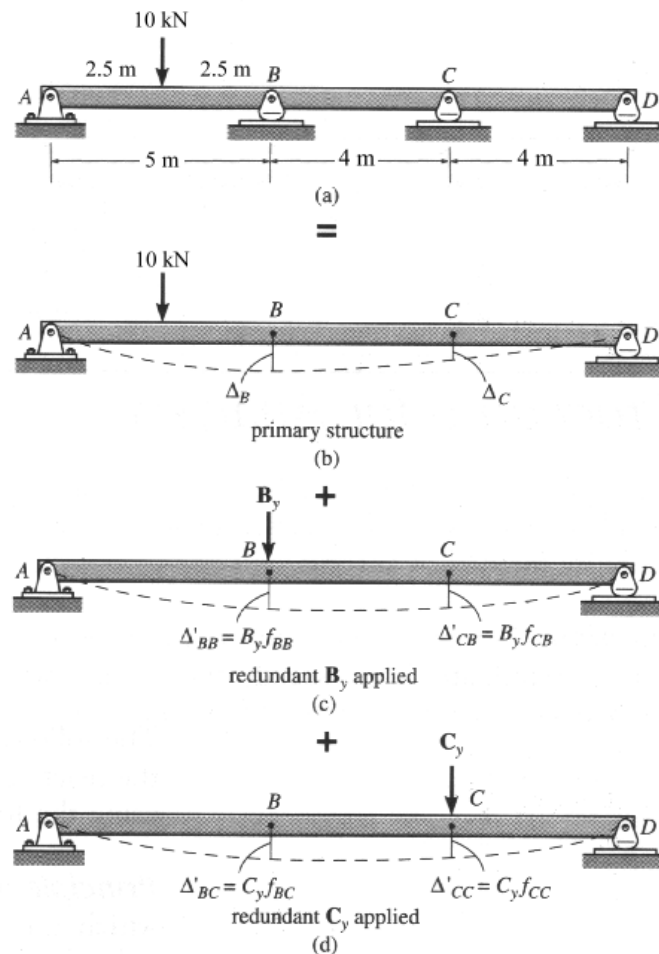
รูปที่ 8-11

รูปที่ 8-11 เป็นตัวอย่างของ moment diagram ของคานต่อเนื่อง (continuous beam) ที่เรามักจะพบเห็นโดยทั่วไป ซึ่งเราจะสังเกตเห็นได้ว่า

- จุดรองรับแบบหมุดที่อยู่ทีปลายคาน และ internal hinge จะเป็นจุดที่มีค่าโมเมนต์ตัดเท่ากับศูนย์
- จุดรองรับยึดแน่นและจุดรองรับหมุดที่อยู่ภายในช่วง span ของคานจะมีค่าโมเมนต์ตัดเกิดขึ้น
- แรงกระทำเป็นจุด (concentrated load) จะทำให้ moment diagram มีลักษณะเป็นเส้นตรงที่มีความชัน
- แรงแผ่กระจายสม่ำเสมอ (uniform distributed load) จะทำให้ moment diagram ที่มีลักษณะเป็นเส้นโค้ง parabola

ตัวอย่างที่ 8-4

จงทำการวิเคราะห์หาคานต่อเนื่อง (continuous beam) ดังที่แสดงในรูปที่ 8-12 โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง กำหนดให้ จุดรองรับ B เกิดการทรุดตัวในแนวดิ่ง 0.10 m $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 179(10^6) \text{ mm}^4$



รูปที่ 8-12

1. กำหนดให้แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B และจุดรองรับ C เป็น redundant ของคาน ดังนั้น จากหลักการ superposition เราจะทำการแยกคานออกได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-12b ถึง 8-12d

2. จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ B ซึ่งมีการทรุดตัวในแนวดิ่ง 0.10 m เราจะได้ว่า

$$\downarrow + \quad 0.01 = \Delta_B + B_y f_{BB} + C_y f_{BC}$$

จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ C เราจะได้ว่า

$$\downarrow + \quad 0 = \Delta_C + B_y f_{CB} + C_y f_{CC}$$

ถ้าเราใช้วิธี conjugate beam วิเคราะห์หาค่าการโก่งตัวของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-12e แล้ว เราจะได้ conjugate beam ของคานดังกล่าว ดังที่แสดงในรูปที่ 8-12f และเราจะหาค่าการโก่งตัวของคานดังที่แสดงในรูปที่ 8-12b ถึง 8-12d ได้ดังต่อไปนี้

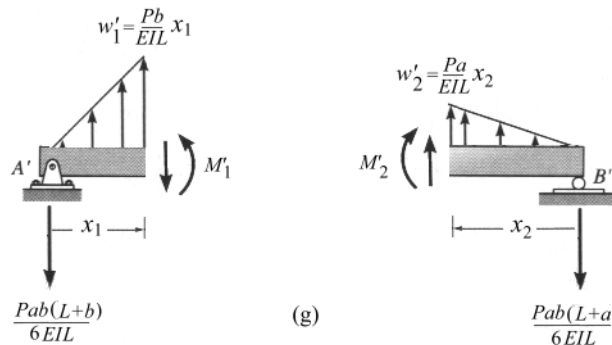
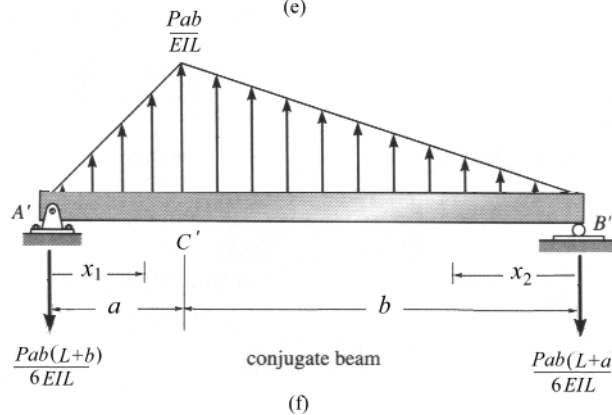
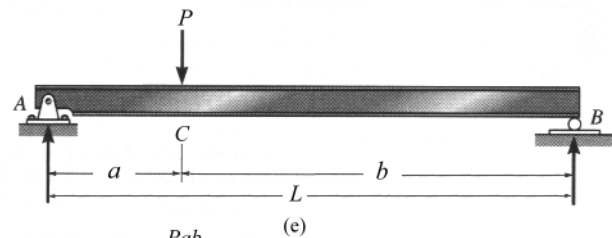
สมการของ elastic weight ที่ $x = x_1$ และ $x = x_2$ จะหาได้โดยใช้ free body diagram ดังที่แสดงในรูปที่ 8-12g และจากสามเหลี่ยมคล้าย เราจะได้ว่า

$$w'_1 = \frac{Pb}{L} x_1 \quad \text{และ} \quad w'_2 = \frac{Pa}{L} x_2$$

และโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้นใน conjugate beam ที่ $x = x_1$ และ $x = x_2$ จะมีค่าเท่ากับ

$$M'_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{Pb}{EI} x_1 \right) x_1 \left(\frac{x_1}{3} \right) - \frac{Pab(L+b)}{6EI} x_1 = \frac{Pbx_1}{6EI} (x_1^2 - aL - ab)$$

$$M'_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Pa}{EI} x_2 \right) x_2 \left(\frac{x_2}{3} \right) - \frac{Pab(L+a)}{6EI} x_2 = \frac{Pax_2}{6EI} (x_2^2 - bL - ab)$$



ดังนั้น ในการหาค่า Δ_B ($\downarrow +$) เราจะได้ว่า ระยะ $a = 2.5$ m $b = 10.5$ m และ $x_2 = 8$ m

$$\Delta_B = - \frac{(10 \text{ kN})(2.5 \text{ m})(8 \text{ m})}{6EI(13 \text{ m})} [(8 \text{ m})^2 - (10.5 \text{ m})(13 \text{ m}) - (2.5 \text{ m})(10.5 \text{ m})] = \frac{253.205 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

ในการหาค่า Δ_C ($\downarrow +$) เราจะได้ว่า ระยะ $a = 2.5$ m $b = 10.5$ m และ $x_2 = 4$ m

$$\Delta_C = - \frac{(10 \text{ kN})(2.5 \text{ m})(4 \text{ m})}{6EI(13 \text{ m})} [(4 \text{ m})^2 - (10.5 \text{ m})(13 \text{ m}) - (2.5 \text{ m})(10.5 \text{ m})] = \frac{188.141 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

ในการหาค่า f_{BB} ($\downarrow +$) เราจะได้ว่า ระยะ $a = 5$ m $b = 8$ m และ $x_2 = 8$ m

$$f_{BB} = - \frac{(1 \text{ kN})(5 \text{ m})(8 \text{ m})}{6EI(13 \text{ m})} [(8 \text{ m})^2 - (8 \text{ m})(13 \text{ m}) - (5 \text{ m})(8 \text{ m})] = \frac{41.026 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

ในการหาค่า f_{CB} ($\downarrow +$) ซึ่งมีค่าเท่ากับ f_{BC} เราจะได้ว่า ระยะ $a = 5$ m $b = 8$ m และ $x_2 = 4$ m

$$f_{CB} = f_{BC} = - \frac{(1 \text{ kN})(5 \text{ m})(4 \text{ m})}{6EI(13 \text{ m})} [(4 \text{ m})^2 - (8 \text{ m})(13 \text{ m}) - (5 \text{ m})(8 \text{ m})] = \frac{32.821 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

ในการหาค่า f_{CC} ($\downarrow +$) เราจะได้ว่า ระยะ $a = 9$ m $b = 4$ m และ $x_2 = 4$ m

$$f_{CC} = -\frac{(1 \text{ kN})(9 \text{ m})(4 \text{ m})}{6EI(13 \text{ m})}[(4 \text{ m})^2 - (4 \text{ m})(13 \text{ m}) - (4 \text{ m})(9 \text{ m})] = \frac{33.231 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

หรือเราจะหาค่า f_{CC} ($\downarrow +$) ได้จากสมการของการโก่งตัวของคานซึ่งเป็น function ของ coordinate x_1 โดยที่เราจะได้ว่า ระยะ $a = 9 \text{ m}$ $b = 4 \text{ m}$ และ $x_2 = 9 \text{ m}$

$$f_{CC} = -\frac{(1 \text{ kN})(4 \text{ m})(9 \text{ m})}{6EI(13 \text{ m})}[(9 \text{ m})^2 - (9 \text{ m})(13 \text{ m}) - (4 \text{ m})(9 \text{ m})] = \frac{33.231 \text{ kN.m}^3}{EI}$$

จากสมการ compatibility เราจะได้ว่า

$$0.01 \text{ m} = \frac{253.205}{EI} + B_y \left[\frac{41.026}{EI} \right] + C_y \left[\frac{32.821}{EI} \right]$$

$$0 = \frac{188.141}{EI} + B_y \left[\frac{32.821}{EI} \right] + C_y \left[\frac{33.231}{EI} \right]$$

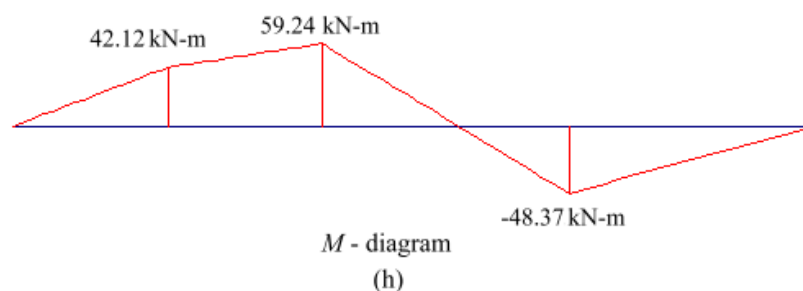
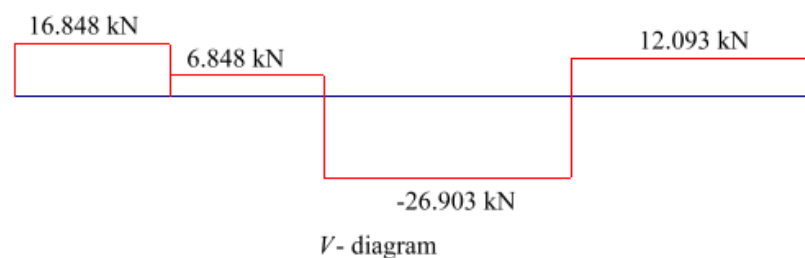
แทนค่า $EI = 200(10^6 \text{ kN/m}^2)179(10^{-6} \text{ m}^4) = 35800 \text{ kN.m}^2$ ลงในสมการทั้งสอง แล้วทำการแก้สมการ เราจะได้แรงปฏิกิริยา B_y และ C_y มีค่าเท่ากับ

$$B_y = 33.753 \text{ kN} \downarrow \quad \text{และ} \quad C_y = 39.00 \text{ kN} \uparrow$$

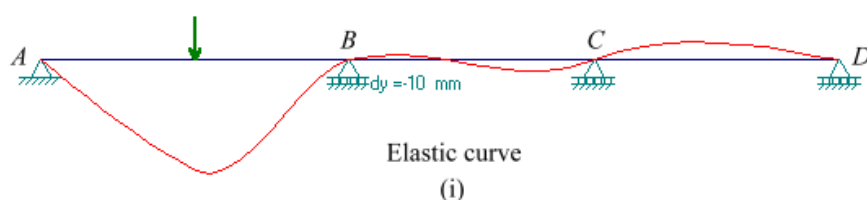
จากนั้น เราจะใช้สมการสมดุลหาค่าแรงปฏิกิริยา A_y และ D_y ได้โดยที่

$$A_y = 16.848 \text{ kN} \uparrow \quad \text{และ} \quad D_y = 12.093 \text{ kN} \downarrow$$

3. เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานได้ดังที่แสดงในรูปที่ 8-7h



4. เราจะร่างรูปร่างการโก่งตัวของคานได้ดังที่แสดงในรูปที่ 8-7i โดยเราจะหาค่าการโก่งตัวที่จุดใดๆ บนคานได้โดยใช้วิธี Conjugate-beam

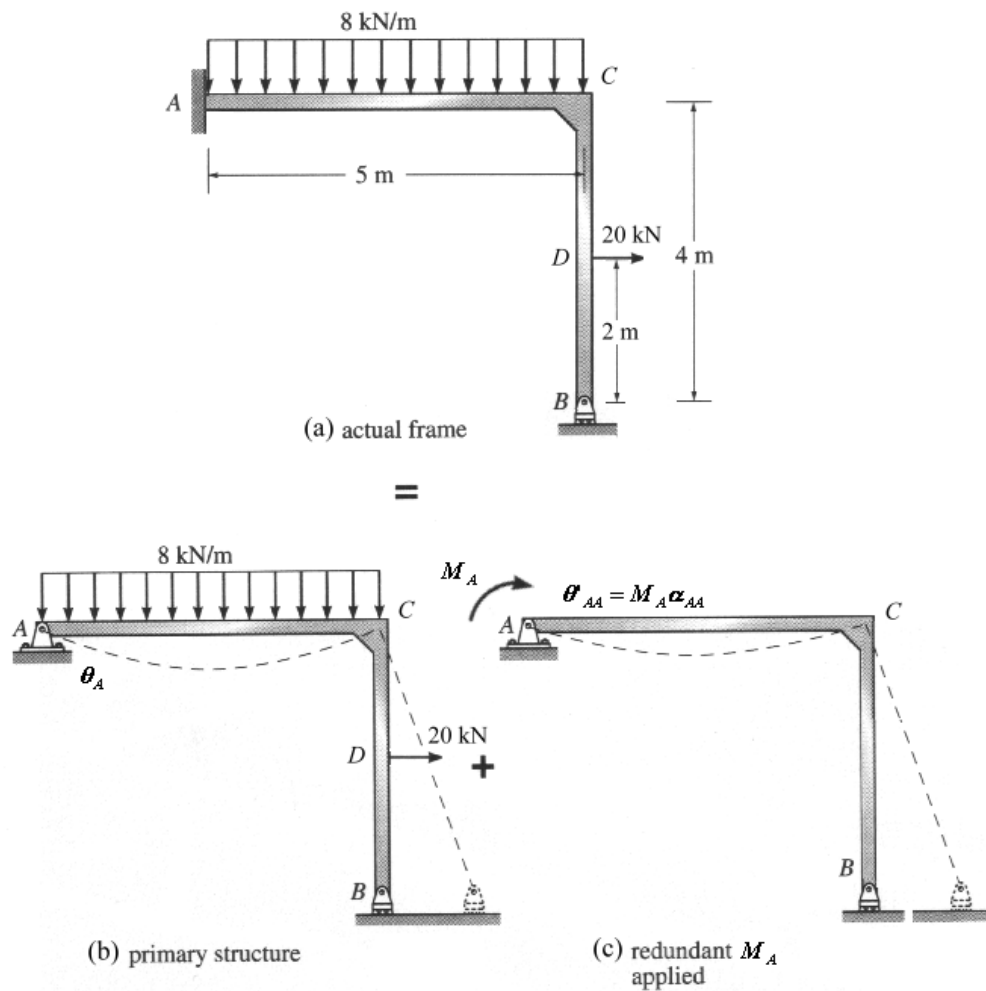


8.6 การวิเคราะห์โครงข้อแข็ง (frame) โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง

การวิเคราะห์โครงข้อแข็งโดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่องนี้จะเหมาะกับโครงข้อแข็งที่มีลักษณะเป็นชั้นเดียวและมีรูปร่างที่ไม่ปกติ เช่น gabled frames เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 8.5

จงทำการวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-13 โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง กำหนดให้ EI มีค่าคงที่



รูปที่ 8-13

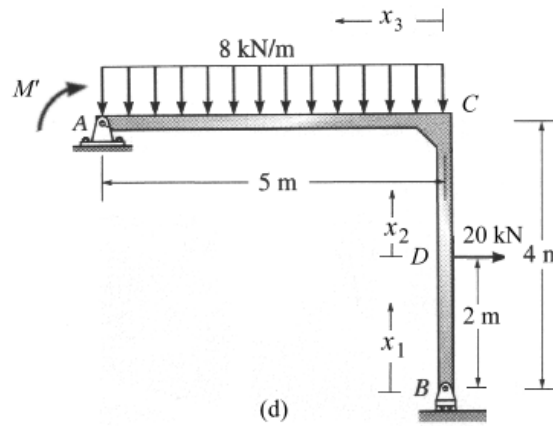
1. โครงข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-13a เป็นโครงสร้าง statically indeterminate 1 degree ดังนั้น เราจะให้โมเมนต์ดัดปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A เป็น redundant ดังนั้น จากหลักการ superposition เราจะทำการแยกโครงข้อแข็งออกได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-13b และ 8-13c

2. จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ A เราจะได้ว่า

$$0 = \theta_A + M_A \alpha_{AA}$$

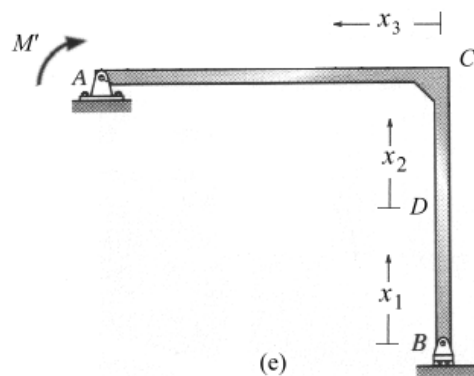
โดยวิธีของ castiglino และรูปที่ 8-13b และ 8-13d เราจะหาค่า slope θ_A ได้ดังต่อไปนี้

$$\theta_A = \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial M'} \frac{dx}{EI} = 0 + 0 + \int_0^5 \frac{(40 + 12x_3 - 4x_3^2) \left(\frac{x_3}{5}\right)}{EI} dx = \frac{75}{EI}$$



member	M	$\frac{\partial M}{\partial M'}$	M เมื่อ $M' = 0$
BD	$M_1 = 0$	0	$M_1 = 0$
DC	$M_2 = 20x_2$	0	$M_2 = 20x_2$
CA	$M_3 = 40 + 12x_3 - 4x_3^2 + \frac{M'x_3}{5}$	$\frac{x_3}{5}$	$M_3 = 40 + 12x_3 - 4x_3^2$

โดยวิธีของ castiglino และรูปที่ 8-13e เราจะหาค่า slope α_{AA} ได้ดังต่อไปนี้



menber	M	$\frac{\partial M}{\partial M'}$	M เมื่อ $M' = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$
BD	$M_1 = 0$	0	$M_1 = 0$
DC	$M_2 = 0$	0	$M_2 = 0$
CA	$M_3 = \frac{M'x_3}{5}$	$\frac{x_3}{5}$	$\frac{x_3}{5}$

$$\alpha_{AA} = 0 + 0 + \int_0^5 \frac{x_2}{5} \frac{x_2}{5} \frac{dx}{EI} = \frac{5}{3EI}$$

จากสมการ compatibility เราจะได้ว่า

$$0 = \frac{75}{EI} + M_A \frac{5}{3EI}$$

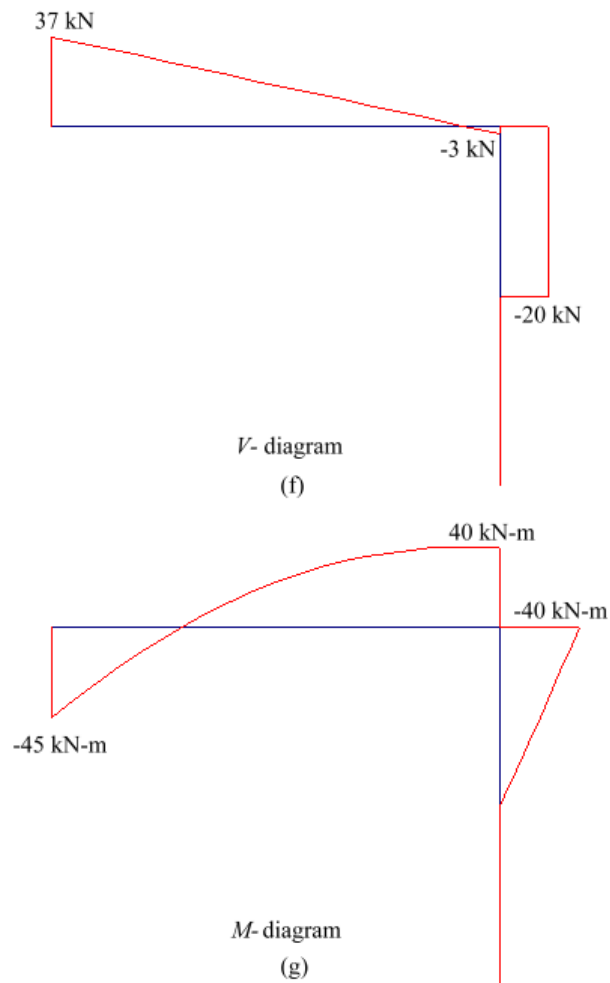
$$M_A = -45 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

เครื่องหมายลบ แสดงว่าโมเมนต์ดัด M_A มีทิศทางตรงกันข้ามกับที่ได้สมมติไว้หรือมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

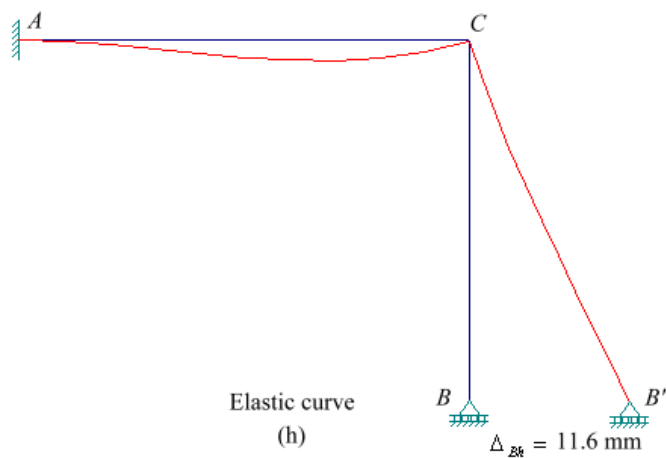
เมื่อเราทราบแรงปฏิกิริยา M_A แล้ว เราจะใช้สมการสมดุลหาค่าแรงปฏิกิริยา A_y และ B_y มีค่าเท่ากับ

$$A_y = 37 \text{ kN} \quad \text{และ} \quad B_y = 3 \text{ kN}$$

3. เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-13f และ 8-13g ตามลำดับ

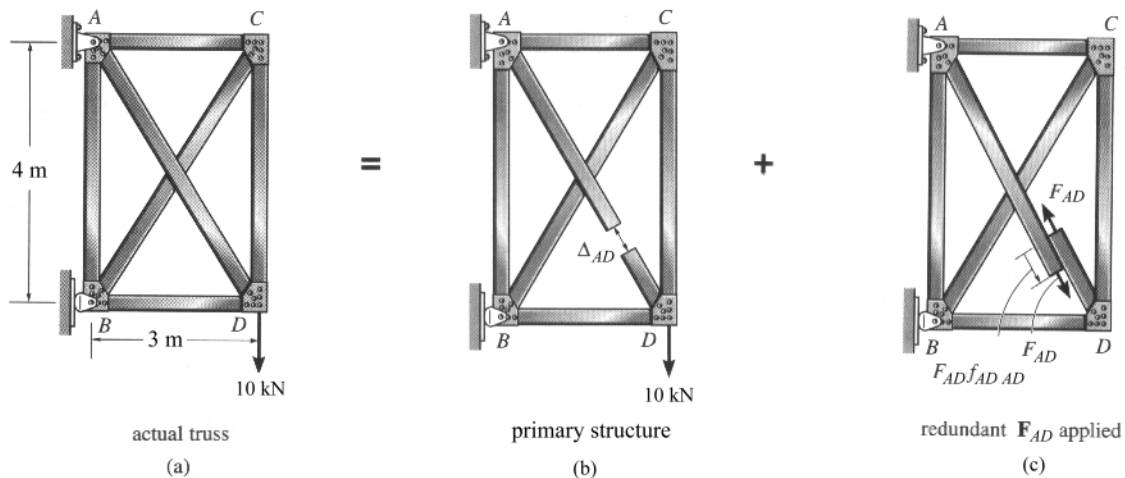


4. รูปที่ 8-13h แสดงการโก่งตัวของโครงข้อแข็ง ถ้ากำหนดให้ $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 179(10^6) \text{ mm}^4$ เราจะหาค่าการดงตัวในแนวนอนที่จุดรองรับ B ได้เท่ากับ 11.6 mm



8.7 การวิเคราะห์โครงข้อหมุน (truss) โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง ตัวอย่างที่ 8.6

จงทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-14 โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง



รูปที่ 8-14

1. โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-14a เป็นโครงสร้าง statically indeterminate 1 degree เนื่องจากชิ้นส่วนในแนวทแยง ดังนั้น เราจะให้แรงในแนวแกนของชิ้นส่วน AD เป็น redundant และจากหลักการ superposition เราจะทำการแยกโครงข้อหมุนออกได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-14b และ 8-14c

2. จาก compatibility condition ของชิ้นส่วน AD เราจะได้ว่า

$$0 = \Delta_{AD} + F_{AD} f_{AD AD}$$

โดยวิธีของ unit-load และรูปที่ 8-14b เราจะหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง Δ_{AD} ได้ดังที่แสดงในตารางต่อไปนี้

Member	L (m)	N (kN)	n (kN)	nNL (kN ² .m)
AB	4	10	-0.8	-32
AC	3	7.5	-0.6	-13.5
BD	3	0	-0.6	0
CD	4	10	-0.8	-32
AD	5	0	1	0
BC	5	-12.5	1	-62.5

$$\sum nNL = -140 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}$$

$$\Delta_{AD} = -\frac{140 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE}$$

โดยวิธีของ unit-load และรูปที่ 8-14c เราจะหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง $f_{AD AD}$ ได้ดังที่แสดงในตารางต่อไปนี้

$$\sum nNL = 17.28 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}$$

$$f_{AD AD} = \frac{17.28 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE}$$

จากสมการ compatibility เราจะได้ว่า

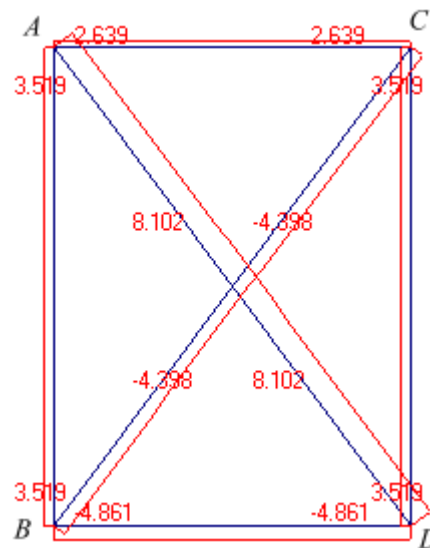
$$0 = -\frac{140}{AE} + F_{AD} \frac{17.28}{AE}$$

$$F_{AD} = 8.102 \text{ kN}$$

เครื่องหมายบวก แสดงว่าให้แรงในแนวแกน F_{AD} มีทิศทางเดียวกันกับที่ได้สมมติไว้ (แรงดึง)

Member	L (m)	N (kN)	n (kN)	nNL (kN ² .m)
AB	4	-0.8	-0.8	2.56
AC	3	-0.6	-0.6	1.08
BD	3	-0.6	-0.6	1.08
CD	4	-0.8	-0.8	2.56
AD	5	1	1	5
BC	5	1	1	5

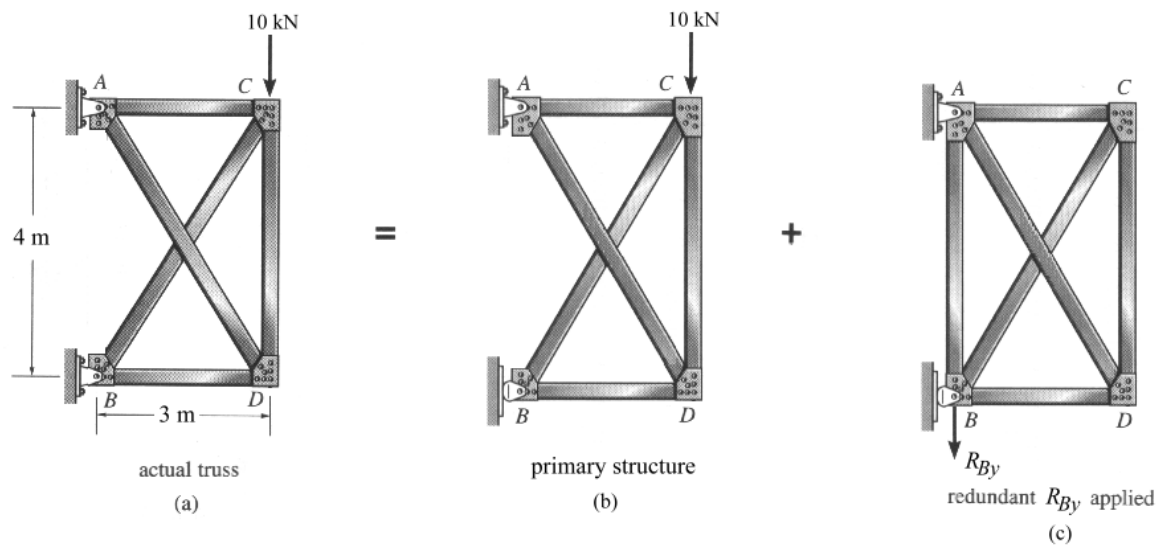
เมื่อเราทราบแรง F_{AD} แล้ว เราจะสามารถหาแรงในชิ้นส่วนอื่นๆ ของโครงข้อหมุนได้ดังที่แสดงที่ 8-14d



(d)

ตัวอย่างที่ 8.7

จงทำการวิเคราะห์โครงสร้างข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-15 โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง



รูปที่ 8-15

1. โครงสร้างข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-15a เป็นโครงสร้าง statically indeterminate 1 degree เนื่องจากจุดรองรับ ดังนั้น เราจะให้แรงปฏิกิริยาในแนวตั้งที่จุดรองรับ B เป็น redundant และจากหลักการ superposition เราจะทำการแยกโครงสร้างออกมาได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-15b และ 8-15c

2. จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ B เราจะได้ว่า

$$0 = \Delta_B + R_{By} f_{BB}$$

โดยวิธีของ unit-load และรูปที่ 8-15b เราจะหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง Δ_B ได้ดังที่แสดงในตารางต่อไปนี้

Member	L (m)	N (kN)	n (kN)	nNL (kN ² ·m)
AC	3	0	-0.75	0
BD	3	-7.5	-0.75	16.875
CD	4	-10	-1	40
AD	5	12.5	1.25	78.125
BC	5	0	1.25	0

$$\sum nNL = 135 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}$$

$$\Delta_B = \frac{135 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE}$$

โดยวิธีของ unit-load และรูปที่ 8-15c เราจะหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่ง f_{BB} ได้ดังที่แสดงในตารางต่อไปนี้

$$\sum nNL = 23 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}$$

$$f_{ACAC} = \frac{23 \text{ kN} \cdot \text{m}}{AE}$$

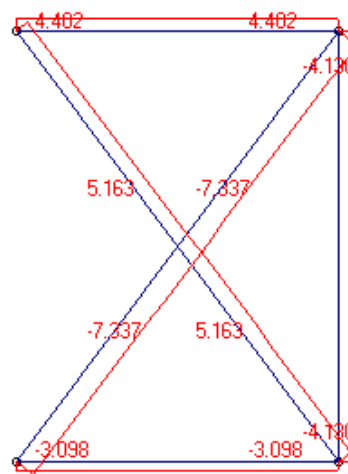
จากสมการ compatibility เราจะได้ว่า

$$R_{By} = -\frac{\Delta_B}{f_{BB}} = -\frac{135}{23} = -5.87 \text{ kN}$$

เครื่องหมายลบ แสดงว่าให้แรงปฏิกิริยา R_{By} มีทิศทางตรงกันข้ามกับที่ได้สมมติไว้ ($\uparrow$)

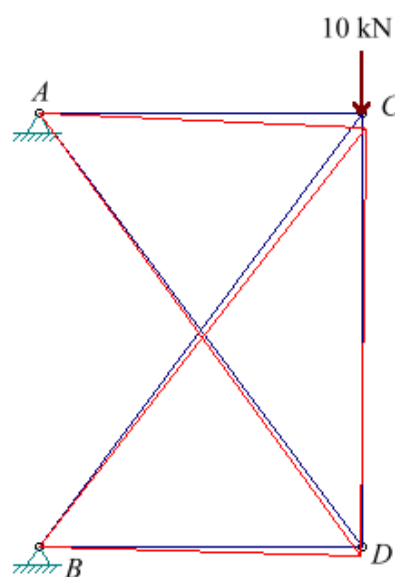
Member	L (m)	N (kN)	n (kN)	nNL (kN ² .m)
AC	3	-0.75	-0.75	1.6875
BD	3	-0.75	-0.75	1.6875
CD	4	-1	-1	4
AD	5	1.25	1.25	7.8125
BC	5	1.25	1.25	7.8125

เมื่อเราทราบแรงปฏิกิริยา R_{By} แล้ว เราจะสามารถหาแรงในชิ้นส่วนอื่นๆ ของโครงข้อหมุนได้ดังที่แสดงที่ 8-15d



(d)

3. เราจะหาการโก่งตัวของโครงข้อหมุนที่จุดใดๆ ได้โดยใช้วิธี unit-load หรือวิธีของ Castigliano และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโครงข้อหมุนจะมีลักษณะดังที่แสดงที่ 8-15e



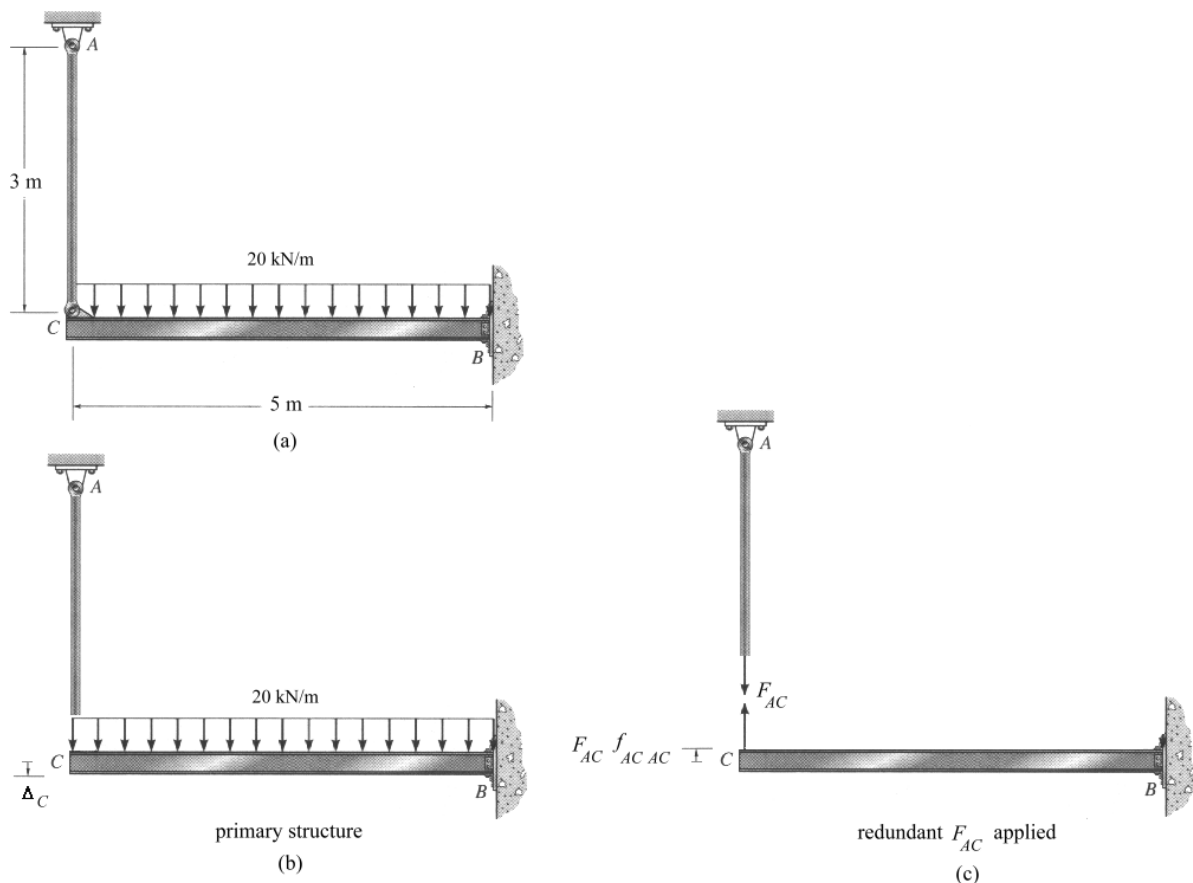
(e)

8.8 การวิเคราะห์โครงสร้างประกอบ (Composite Structures) เปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง

โครงสร้างประกอบเป็นโครงสร้างที่มีองค์อาคารบางส่วนถูกกระทำโดยแรงในแนวแกน (axial force) และองค์อาคารที่เหลือถูกกระทำโดยโมเมนต์ดัด (bending moment)

ตัวอย่างที่ 8.8

จงทำการวิเคราะห์คานประกอบ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-16 โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง กำหนดให้ คานเป็นคาน W250x80 มีค่า $E = 200 \text{ GPa}$ และ $I = 126(10^6) \text{ mm}^4$ และแท่งเหล็ก AC มีค่า $E = 200 \text{ GPa}$ และ $A = 126 \text{ mm}^2$



รูปที่ 8-16

1. จากการตรวจสอบคานประกอบ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-16a เป็นโครงสร้าง statically indeterminate 1 degree ดังนั้น เราจะให้แรงในแนวแกน AC เป็น redundant และจากหลักการ superposition เราจะทำการแยกคานออกได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-16b ถึง 8-16c

2. จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ C เราจะได้ว่า

$$\downarrow + \quad 0 = \Delta_C - F_{AC} f_{AC AC}$$

โดยวิธี unit-load และ free body diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-16d และ 8-16e โดยที่

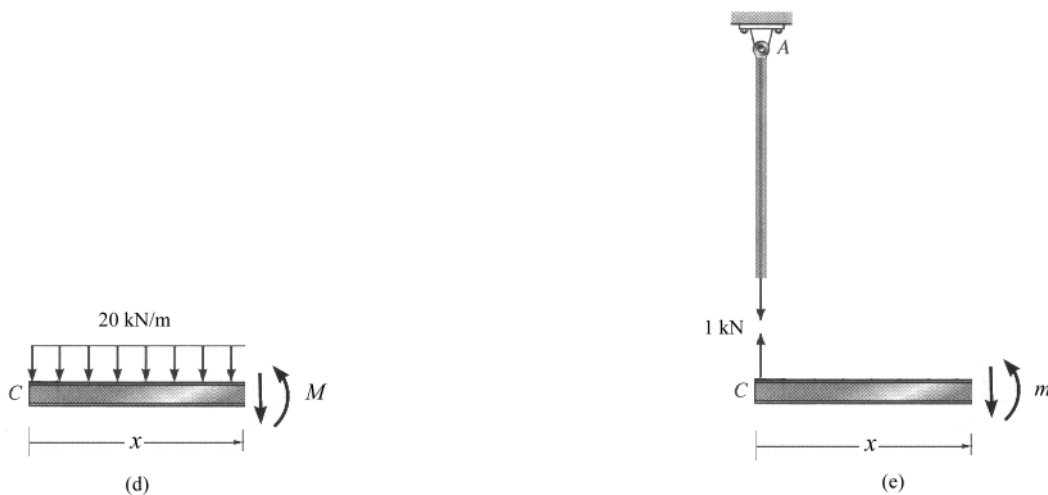
$$M = -10x^2$$

$$m = x$$

เราจะหาค่าการโก่งตัวของคาน Δ_C ได้เป็น

$$(1 \text{ kN}) \Delta_C = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^5 \frac{(-10x^2)(x)}{EI} dx = -\frac{1562.5}{EI} = \frac{1562.5}{EI} \downarrow$$

$$\Delta_C = \frac{1562.5 \text{ kN.m}^3}{200(10^6 \text{ kN/m}^2)126(10^{-6} \text{ m}^4)} = 0.062 \text{ m}$$



และเราจะหาค่าการโก่งตัวของคานและค่าการยืดตัวของชิ้นส่วน AC ได้ดังนี้

$$(1 \text{ kN}) f_{AC AC} = \int_0^L \frac{m^2}{EI} dx + \sum \frac{n^2 L}{AE}$$

$$(1 \text{ kN}) f_{AC AC} = \int_0^5 \frac{x^2}{EI} dx + \frac{(1 \text{ kN})^2 (3 \text{ m})}{AE} = \frac{125}{3EI} + \frac{3}{AE}$$

$$f_{AC AC} = \frac{125 \text{ kN.m}^3}{3(200)(10^6 \text{ kN/m}^2)126(10^{-6} \text{ m}^4)} + \frac{3 \text{ kN.m}}{126(10^{-6} \text{ m}^2)200(10^6 \text{ kN/m}^2)}$$

$$= 0.001653 + 0.000119 = 0.001772 \text{ m}$$

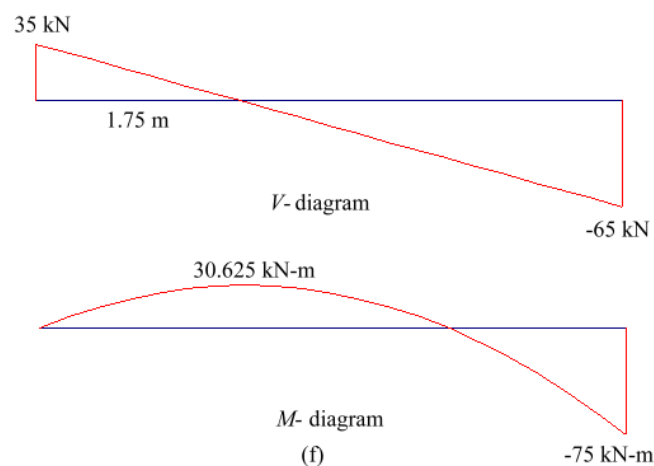
จากสมการ compatibility เราจะได้ว่า

$$F_{AC} = \frac{\Delta_C}{f_{AC AC}} = \frac{0.062}{0.001772} = 35 \text{ kN}$$

เมื่อเราทราบแรงปฏิกิริยา F_{AC} แล้ว เราจะใช้สมการสมดุลหาค่าแรงปฏิกิริยา B_y และ M_B โดยที่

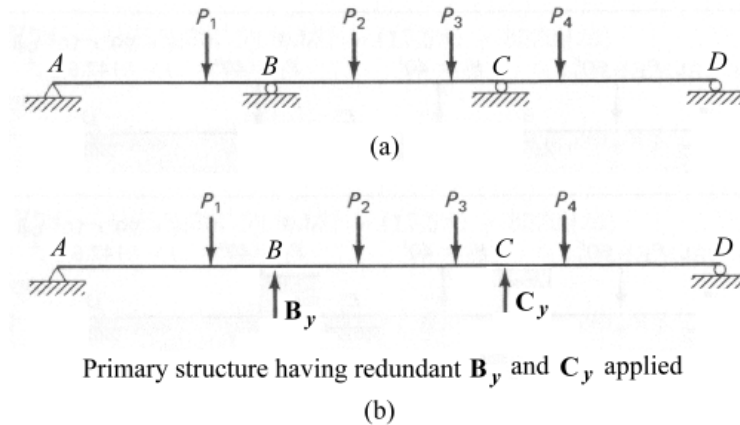
$$B_y = 65 \text{ kN} \quad \text{และ} \quad M_B = -75 \text{ kN-m}$$

3. เขียน shear diagram และ moment diagram ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-16f



8.9 วิธีงานน้อยที่สุด (Method of Least Work)

วิธี least work มีความใกล้เคียงกับวิธีการเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง (consistent deformation) และเหมาะสำหรับใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate โดยเฉพาะอย่างยิ่งโครงข้อหมุน (truss) และโครงสร้างประกอบ (composite structure) วิธีการนี้มีพื้นฐานมาจากทฤษฎีบทหนึ่งของ Castigliano



รูปที่ 8-17

จงพิจารณาคานต่อเนื่อง (continuous beam) ที่มีจำนวน degree of indeterminacy เท่ากับ 2 ดังที่แสดงในรูปที่ 8-17a โดยวิธีเปลี่ยนรูปร่างต่อเนื่อง เราจะกำหนดให้แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B และ C เป็นแรงเกินจำเป็น (redundant) ที่ไม่ทราบค่า ดังนั้น เราจะเขียนโครงสร้างปฐม (primary structure) ของคานดังกล่าวได้ดังที่แสดงในรูปที่ 8-17b โดยในที่นี้เราจะให้แรงเกินจำเป็น B_y และ C_y กระทำต่อโครงสร้างปฐมร่วมกับแรงกระทำภายนอก จากสมการความสอดคล้อง (compatibility condition) ของคาน เราจะได้ว่า ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งตรงจุดรองรับ B และ C จะต้องเป็นศูนย์ และเมื่อเราใช้ทฤษฎีบทหนึ่งของ Castigliano เราจะเขียนสมการความสอดคล้องดังกล่าวได้อยู่ในรูป

$$\begin{Bmatrix} \Delta_B \\ \Delta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial B_y} \\ \frac{\partial U}{\partial C_y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8-3)$$

เมื่อ U เป็นพลังงานความเครียด (strain energy) ที่เกิดขึ้นในโครงสร้างปฐมและเป็น function กับแรงกระทำและแรงเกินจำเป็น B_y และ C_y โดยทั่วไปแล้ว ถ้าโครงสร้างมีแรงเกินจำเป็น n ค่า ($X_1, X_2, \dots, X_n$) แล้ว เราจะเขียนสมการที่ 8-3 ใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial U}{\partial X_2} = \dots = \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0 \quad (8-4)$$

ซึ่งมักถูกเรียกว่า Castigliano's compatibility equation จากสมการนี้ เราจะได้ว่า

“พลังงานความเครียดของโครงสร้าง statically indeterminate ซึ่งถูกกระทำโดยแรงเกินจำเป็นต้องมีค่าน้อยที่สุดที่จะรักษาความสมดุลของโครงสร้าง”

โดยสรุปแล้ว การวิเคราะห์โครงสร้าง statically indeterminate โดยวิธี least work มีขั้นตอนการทำได้ดังนี้

1. ทำโครงสร้าง statically indeterminate ให้เป็นโครงสร้างปฐมซึ่งเป็นโครงสร้าง statically determinate
2. ให้แรงภายนอกและแรงเกินจำเป็นกระทำต่อโครงสร้างและคำนวณหาสมการของโมเมนต์ภายในที่เกิดขึ้น ซึ่งอยู่ในรูปของตัวแปรแรงเกินจำเป็นที่ไม่ทราบค่า
3. แทนสมการของโมเมนต์ที่ได้ลงในสมการที่ 8-4 แล้วหาอนุพันธ์ (differentiation) สมการดังกล่าว

4. แก้สมการหาค่าของแรงเกินจำเป็น
5. ใช้สมการความสมดุลทำการวิเคราะห์โครงสร้างเพื่อเขียน shear diagram และ moment diagram
6. ทำการวิเคราะห์หาค่าการแอ่นตัวของโครงสร้าง

8.10 การวิเคราะห์โครงข้อหมุนโดยวิธี least work

จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน พลังงานความเครียด (strain energy) ที่เกิดขึ้นภายในโครงข้อหมุนจะอยู่ในรูป

$$U_i = \sum \frac{N^2 L}{2AE}$$

และโดยวิธี least work เมื่อเราหาอนุพันธ์ของ U_i เทียบกับแรงเกินจำเป็นที่ไม่ทราบค่า X_i แล้ว เราจะได้ว่า

$$\sum \frac{N(\partial N / \partial X_i) L}{AE} = 0$$

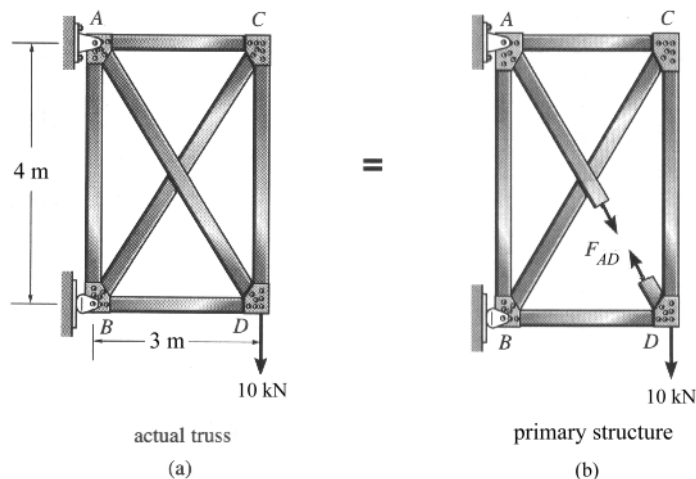
ดังนั้น เมื่อโครงข้อหมุนมี degree of indeterminacy เท่ากับ n แล้ว เราจะเขียนสมการ Castigliano's compatibility equation ของโครงข้อหมุนได้ทั้งหมด n สมการคือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial X_1} \\ \frac{\partial U}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial X_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \frac{N(\partial N / \partial X_1) L}{AE} \\ \sum \frac{N(\partial N / \partial X_2) L}{AE} \\ \vdots \\ \sum \frac{N(\partial N / \partial X_n) L}{AE} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8-5)$$

เมื่อทำการแก้สมการหลายชั้นของสมการที่ 8-5 แล้ว เราจะได้ค่าของแรงเกินจำเป็น X_1 ถึง X_n ที่เกิดขึ้นในโครงข้อหมุน

ตัวอย่างที่ 8.9

จงทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-18 โดยวิธีงานน้อยที่สุด (Method of least work) กำหนดให้ AE ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีค่าคงที่



รูปที่ 8-18

1. โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-18a เป็นโครงสร้างแบบ statically indeterminate 1 degree ดังนั้น กำหนดให้แรงในแนวแกนของชิ้นส่วน AD เป็น redundant และโดยวิธีงานน้อยที่สุด เราจะให้แรงในแนวแกนดังกล่าวกระทำต่อโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-18b

2. เราจะหาสมการของแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนได้ดังที่แสดงในตาราง

Member	L (m)	N (kN)	$\frac{\partial N}{\partial F_{AD}}$	$N \frac{\partial N}{\partial F_{AD}} L$
AB	4	$10-0.8 F_{AD}$	-0.8	$-32+2.56 F_{AD}$
AC	3	$7.5-0.6 F_{AD}$	-0.6	$-13.5+1.08 F_{AD}$
BD	3	$-0.6 F_{AD}$	-0.6	$1.08 F_{AD}$
CD	4	$10-0.8 F_{AD}$	-0.8	$-32+2.56 F_{AD}$
AD	5	F_{AD}	1	$5 F_{AD}$
BC	5	$-12.5+ F_{AD}$	1	$-62.5+5 F_{AD}$

จาก compatibility condition ในชิ้นส่วน AD และสมการของ castigliano เราจะได้ว่า

$$\Delta_{AD} = \frac{\partial U}{\partial F_{AD}} = \sum N \frac{\partial N}{\partial F_{AD}} \frac{L}{AE} = 0$$

$$\frac{-140 + 17.28 F_{AD}}{AE} = 0$$

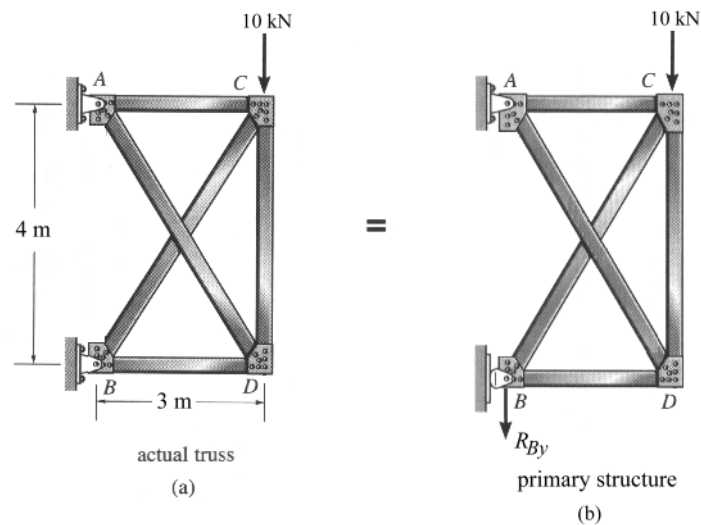
$$R_{By} = 8.102 \text{ kN}$$

เครื่องหมายบวก แสดงว่าให้แรงในแนวแกน F_{AD} มีทิศทางเดียวกันกับที่ได้สมมติไว้ (แรงดึง)

3. เราจะหาแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนได้ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 8-6

ตัวอย่างที่ 8.10

จงทำการวิเคราะห์โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-19 โดยวิธีงานน้อยที่สุด (Method of least work) กำหนดให้ AE ของชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนมีค่าคงที่



รูปที่ 8-19

1. โครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-19a เป็นโครงสร้างแบบ statically indeterminate 1 degree ดังนั้น กำหนดให้แรงปฏิกิริยาในแนวตั้งที่จุดรองรับ B เป็น redundant และโดยวิธีงานน้อยที่สุด เราจะให้แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B หรือ R_{By} กระทำต่อโครงข้อหมุน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-19b

2. เราจะหาสมการของแรงในแนวแกนที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนได้ดังที่แสดงในตาราง

Member	L (m)	N	$\frac{\partial N}{\partial R_{By}}$	$N \frac{\partial N}{\partial R_{By}} L$
AC	3	$-0.75 R_{By}$	-0.75	$1.6875 R_{By}$
BD	3	$-7.5 - 0.75 R_{By}$	-0.75	$16.875 + 1.6875 R_{By}$
CD	4	$-10 - R_{By}$	-1	$40 + 4 R_{By}$
AD	5	$12.5 + 1.25 R_{By}$	1.25	$78.125 + 7.8125 R_{By}$
BC	5	$1.25 R_{By}$	1.25	$7.8125 R_{By}$

จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ B และสมการของ castigliano เราจะได้ว่า

$$\Delta_{By} = \frac{\partial U}{\partial R_{By}} = \sum N \frac{\partial N}{\partial R_{By}} \frac{L}{AE} = 0$$

$$\frac{135 + 23R_{By}}{AE} = 0$$

$$R_{By} = -5.87 \text{ kN}$$

เครื่องหมายลบแสดงว่าให้แรงปฏิกิริยา R_{By} มีทิศทางตรงกันข้ามกับที่ได้สมมติไว้ (↑)

3. เราจะหาแรงภายในที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนต่างๆ ของโครงข้อหมุนได้ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 8-7

4. เราจะหาการโก่งตัวของโครงข้อหมุนที่จุดใดๆ ได้โดยใช้วิธี unit-load หรือวิธีของ castigliano ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 8-7

8.11 การวิเคราะห์คานและโครงข้อแข็งโดยวิธี least work

ในการศึกษาวิชานี้ เรากำหนดให้พลังงานความเครียด (strain energy) ที่เกิดขึ้นภายในคานและโครงข้อแข็งจะเกิดจากโมเมนต์ดัดเท่านั้น ดังนั้น จากหลักการอนุพันธ์พลังงาน (สมการที่ 7-18) เราจะได้ว่า

$$U_i = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

และโดยวิธี least work เมื่อเราหาอนุพันธ์ของ U_i เทียบกับแรงเกินจำเป็นที่ไม่ทราบค่า X_i แล้ว เราจะได้ว่า

$$\int \frac{M(\partial M / \partial X_i)}{EI} dx = 0$$

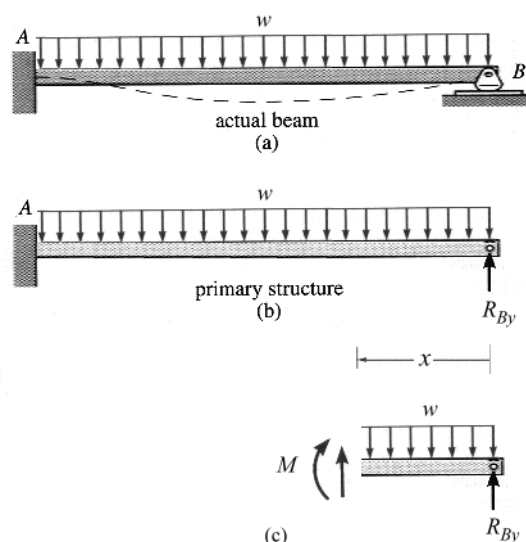
ดังนั้น เมื่อคานและโครงข้อแข็งมี degree of indeterminacy เท่ากับ n แล้ว เราจะเขียนสมการ Castigliano's compatibility equation ได้ทั้งหมด n สมการ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial X_1} \\ \frac{\partial U}{\partial X_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial X_n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int \frac{M(\partial M / \partial X_1)}{EI} dx \\ \int \frac{M(\partial M / \partial X_2)}{EI} dx \\ \vdots \\ \int \frac{M(\partial M / \partial X_n)}{EI} dx \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8-6)$$

เมื่อทำการแก้สมการหลายชั้นของสมการที่ 8-6 แล้ว เราจะได้ค่าของแรงเกินจำเป็น X_1 ถึง X_n ที่เกิดขึ้นในคานและโครงข้อแข็ง

ตัวอย่างที่ 8.11

จงทำการวิเคราะห์คาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-20 โดยวิธีงานน้อยที่สุด (method of least work) กำหนดให้ EI ของคานมีค่าคงที่



รูปที่ 8-20

1. คาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-20a เป็นโครงสร้างแบบ statically indeterminate 1 degree ดังนั้น กำหนดให้แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B เป็น redundant ของคาน และโดยวิธีงานน้อยที่สุด เราจะให้แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B หรือ R_{By} กระทำต่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-20b

2. จากรูปที่ 8-20c เราจะหาสมการของโมเมนต์ภายในของคานได้เท่ากับ

$$M = R_{By}x - \frac{wx^2}{2}$$

และ

$$\frac{\partial M}{\partial R_{By}} = x$$

จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ B และสมการของ castigliano เราจะได้ว่า

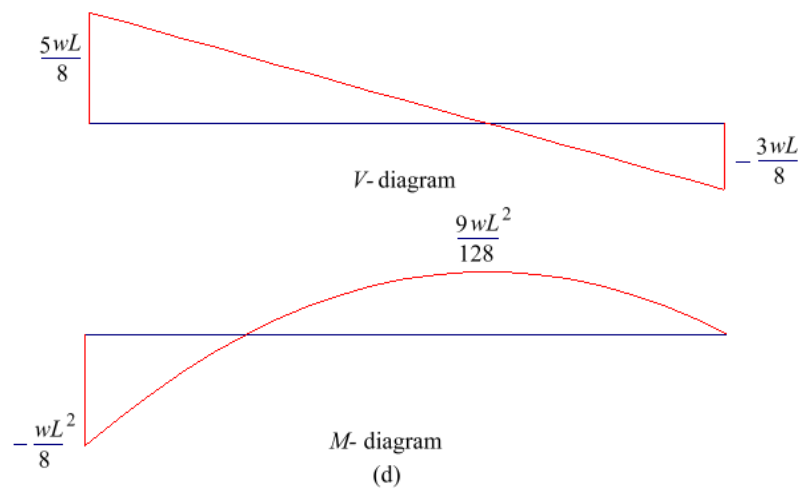
$$\Delta_{By} = \frac{\partial U}{\partial R_{By}} = \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial R_{By}} \frac{dx}{EI} = 0$$

$$\int_0^L \left(R_{By}x - \frac{wx^2}{2} \right) x \frac{dx}{EI} = 0$$

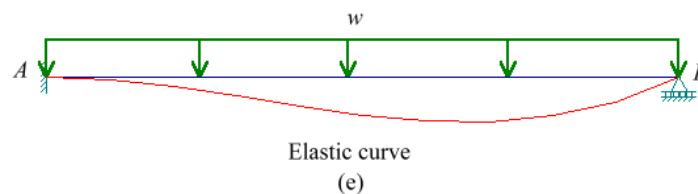
$$\left[R_{By} \frac{x^3}{3} - \frac{wx^4}{8} \right]_0^L = 0$$

$$R_{By} = \frac{3wL}{8}$$

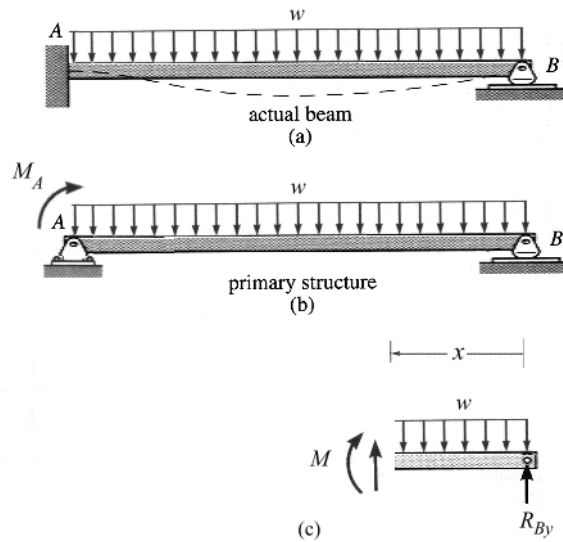
3. เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของคานได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-20d



4. เราสร้างรูปร่างการโก่งตัว (elastic curve) ของคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-20e และหาค่าการโก่งตัวที่จุดใดๆ บนคานได้โดยใช้วิธี Conjugate-beam



นอกจากการใช้แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B เป็น redundant แล้ว เรายังสามารถใช้แรงปฏิกิริยาที่จุด A เป็น redundant ก็ได้ กำหนดให้โมเมนต์ปฏิกิริยาที่จุด A หรือ M_A เป็น redundant ดังนั้น โดยวิธีงานน้อยที่สุด เราจะให้โมเมนต์ปฏิกิริยา M_A กระทำต่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-21b



รูปที่ 8-21

จากรูปที่ 8-21c เราจะหาสมการของโมเมนต์ภายในของคานได้เท่ากับ

$$M = \frac{wLx}{2} + M_A \frac{x}{L} - \frac{wx^2}{2}$$

และ

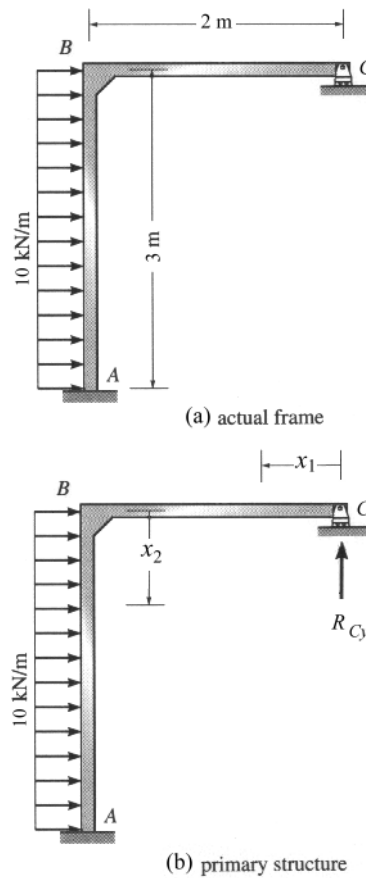
$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = \frac{x}{L}$$

จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ A และสมการของ castigliano เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial M_A} \frac{dx}{EI} = 0 \\ \int_0^L \left[\frac{wLx}{2} + M_A \frac{x}{L} - \frac{wx^2}{2} \right] \frac{x}{L EI} dx &= 0 \\ \left[\frac{wx^3}{6} + \frac{M_A}{L^2} \frac{x^3}{3} - \frac{w}{2L} \frac{x^4}{4} \right]_0^L &= 0 \\ M_A &= -\frac{wL^2}{8} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8-8

จงทำการวิเคราะห์โครงสร้างข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-22 โดยวิธีงานน้อยที่สุด (method of least work) กำหนดให้ EI มีค่าคงที่



รูปที่ 8-22

1. โครงสร้างข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-22a เป็นโครงสร้างแบบ statically indeterminate 1 degree ดังนั้น กำหนดให้แรงปฏิกิริยาในแนวดิ่งที่จุดรองรับ C เป็น redundant และโดยวิธีงานน้อยที่สุด เราจะให้แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ C หรือ R_{Cy} กระทำต่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-22b

2. โดยใช้ coordinate ดังที่แสดงในรูปที่ 8-22b เราจะหาสมการของโมเมนต์ภายในของคานได้เท่ากับ

$$M_1 = R_{Cy} x_1 \quad \frac{\partial M_1}{\partial R_{Cy}} = x_1$$

และ

$$M_2 = 2R_{Cy} - 5x_2^2 \quad \frac{\partial M_2}{\partial R_{Cy}} = 2$$

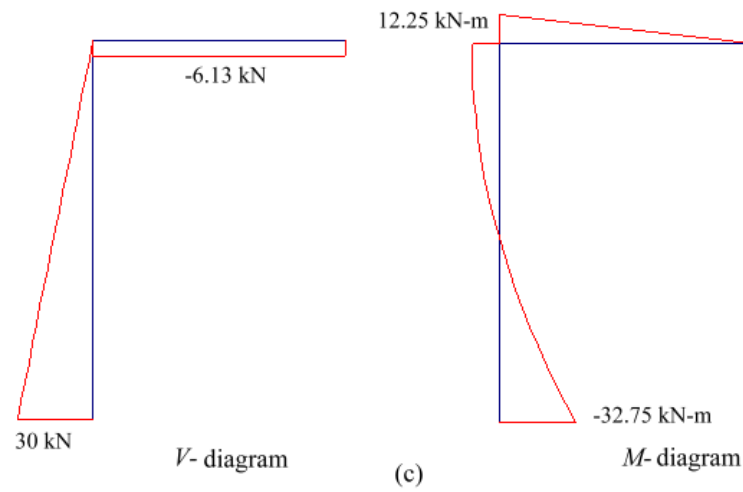
จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ C และสมการของ castigliano เราจะได้ว่า

$$\Delta_{BCy} = \frac{\partial U}{\partial R_{Cy}} = \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial R_{Cy}} \frac{dx}{EI} = 0$$

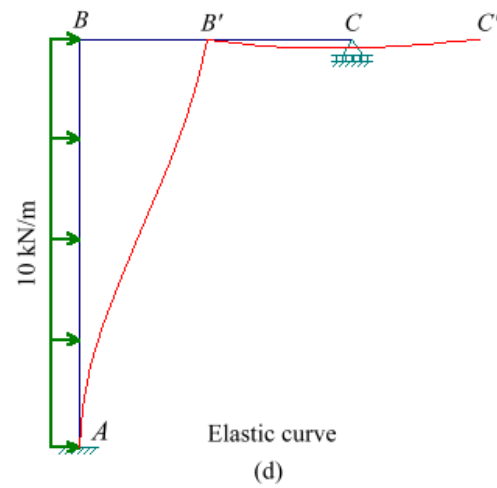
$$\int_0^2 (R_{Cy} x_1) x_1 \frac{dx_1}{EI} + \int_0^3 (2R_{Cy} - 5x_2^2) 2 \frac{dx_2}{EI} = 0$$

$$R_{Cy} = \frac{270}{44} = 6.136 \text{ kN}$$

3. เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของโครงสร้างข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-22c

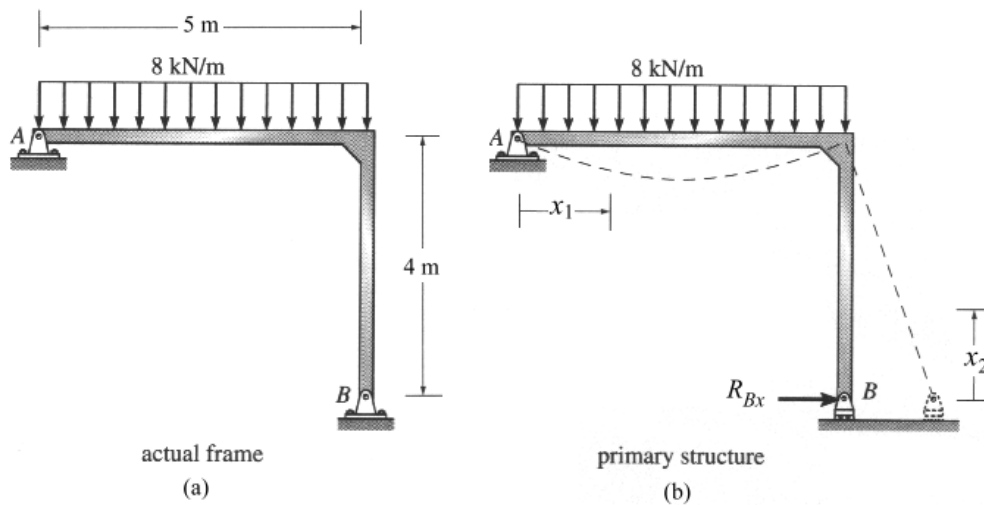


4. เราจะร่างรูปร่างการโก่งตัวของโครงข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-22d และเราจะหาค่าการโก่งตัวที่จุดใดๆ บนโครงข้อแข็งได้โดยใช้วิธี unit-load หรือวิธีของ castigliano



ตัวอย่างที่ 8-9

จงทำการวิเคราะห์โครงสร้างข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-23 โดยวิธีงานน้อยที่สุด (method of least work) กำหนดให้ EI มีค่าคงที่



รูปที่ 8-23

1. โครงสร้างข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-23a เป็นโครงสร้างแบบ statically indeterminate 1 degree ดังนั้น กำหนดให้แรงปฏิกิริยาในแนวนอนที่จุดรองรับ B เป็น redundant และโดยวิธีงานน้อยที่สุด เราจะให้แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ B หรือ R_{Bx} กระทำต่อคาน ดังที่แสดงในรูปที่ 8-23b

2. โดยใช้ coordinate ดังที่แสดงในรูปที่ 8-23b เราจะหาสมการของโมเมนต์ภายในของคานได้เท่ากับ

$$M_1 = 20x_1 + 0.8R_{Bx}x_1 - 4x_1^2 \quad \frac{\partial M_1}{\partial R_{Bx}} = 0.8x_1$$

และ

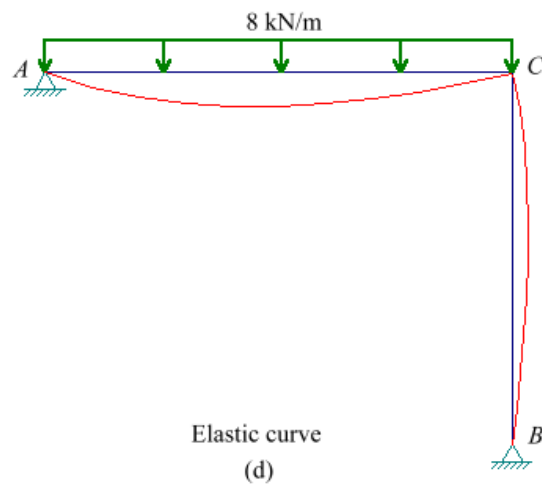
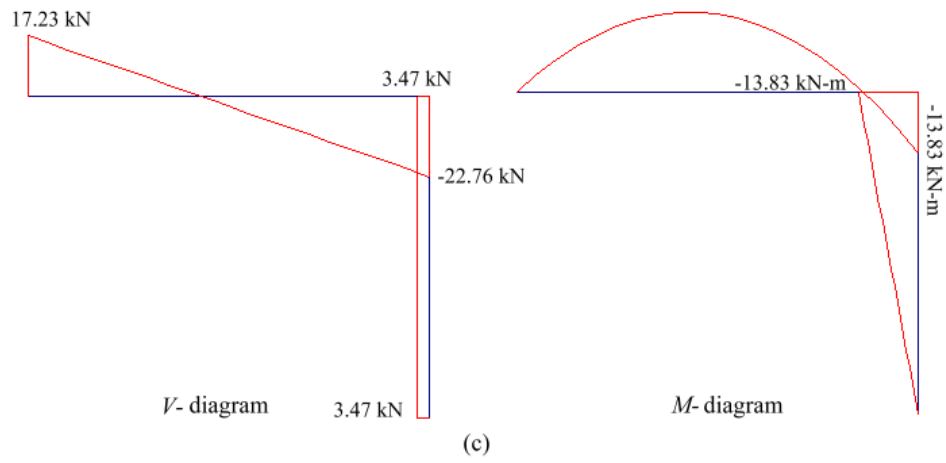
$$M_2 = R_{Bx}x_2 \quad \frac{\partial M_2}{\partial R_{Bx}} = x_2$$

จาก compatibility condition ที่จุดรองรับ B และสมการของ castigliano เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Delta_{Bx} &= \frac{\partial U}{\partial R_{Bx}} = \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial R_{Bx}} \frac{dx}{EI} = 0 \\ \int_0^5 (20x_1 + 0.8R_{Bx}x_1 - 4x_1^2) 0.8x_1 \frac{dx_1}{EI} + \int_0^4 (R_{Bx}x_2) x_2 \frac{dx_2}{EI} &= 0 \\ \left[\frac{16x_1^3}{3} + \frac{16R_{Bx}x_1^3}{75} - \frac{4x_1^4}{5} \right]_0^5 + \left[\frac{R_{Bx}x_2^3}{3} \right]_0^4 &= 0 \\ R_{Bx} &= \frac{-166.667}{48} = -3.472 \text{ kN} \end{aligned}$$

3. เราจะเขียน shear diagram และ moment diagram ของโครงสร้างข้อแข็ง ดังที่แสดงในรูปที่ 8-23c

4. เราจะร่างรูปร่างการโก่งตัวของโครงสร้างข้อแข็งได้ ดังที่แสดงในรูปที่ 8-23d และเราจะหาค่าการโก่งตัวที่จุดใดๆ บนโครงสร้างข้อแข็งได้โดยใช้วิธี unit-load หรือวิธีของ castigliano



หนังสืออ้างอิง

1. Hibberler, R.C., "Structural Analysis," 3rd Ed., Prentice-Hall, New Jersey, NY, 1997
2. McCormac, J.C., "Structural Analysis," 3rd Ed., Harper & Row, New York, NY, 1975
3. Wang, C.K., "Intermediate Structural Analysis," 1st Ed., McGraw-Hill, New York, NY, 1983
4. Hsieh, Y.Y., "Elementary Theory of Structures," 2nd Ed., Prentice-Hall, New Jersey, NY, 1982
5. West, H.H., "Fundamentals of Structural Analysis," John Wiley & Sons, New York, NY, 1993
6. "ศัพท์วิทยาการวิศวกรรมโยธา" คณะกรรมการวิชาการวิศวกรรมโยธา, วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย, 2540

