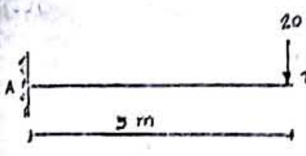
STRUCTURAL ANALYSIS

- STRUCTURAL ANALYSIS
(การวิเคราะห์โครงสร้าง)

แบบฝึกหัด ชุดที่ 2

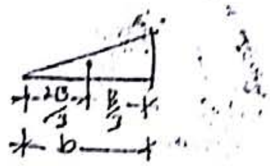
1. จงหา Δ_B และ θ_B ของคาน AB ที่ EI คงที่ <CONJUGATE BEAM METHOD.>



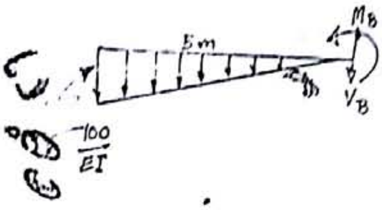
(ก)

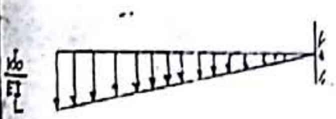
Solution

1. เขียน BMD ดังรูป (ข)
2. หาคานเสมือนดังรูป (ค).
3. หา Δ_B และ θ_B



(ข)



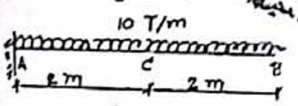


$$\Delta_B = M_B = -\frac{1}{2}\left(\frac{100}{EI}\right)(5)\left(\frac{2}{3}\times 5\right) = -\frac{833.33}{EI}\ m\ (\downarrow)$$

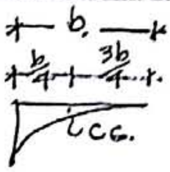
$$\theta_B = V_B = -\frac{1}{2}\left(\frac{100}{EI}\right)(5) = -\frac{250}{EI}$$

---

2. จงหา Δ_C และ θ_C ~~ของคาน~~ AB ที่ EI คงที่

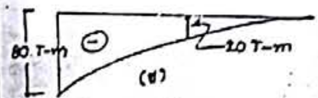


(ก)

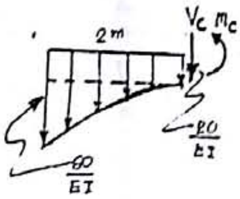


Solution

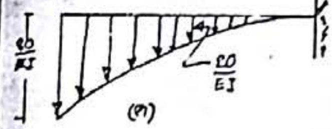
1. เขียน BMD ดังรูป (ข)
2. หาคานเสมือนดังรูป (ค)
3. หา Δ_C และ θ_C



(ข)



$$\theta_C = V_C = -\frac{20}{EI}(2) - \frac{1}{3}\left(\frac{60}{EI}\right)(2) = -\frac{80}{EI}$$

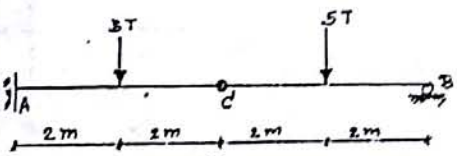


(ค)

$$\Delta_C = M_C = -\frac{20}{EI}(2)(1) - \frac{1}{3}\left(\frac{60}{EI}\right)(2)\left(\frac{3}{4}\times 2\right) = -\frac{100}{EI}\ m\ (\downarrow)$$

---

3. จงหา θ_C , θ_B ของคาน AB มี EI คงที่



(ก)

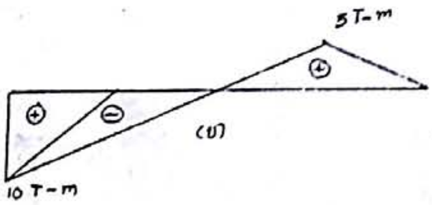
Solution

1. เขียน BMD ดังรูป(ข) Spperposition
2. หาคานเสมือนดังรูป (ค)
3. หา Reaction ของคานเสมือน.

$\Sigma M_B = 0$

$$4R_C = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(4)\left(\frac{2}{3}\times 4 + 4\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(2)\left(\frac{2}{3}\times 2 + 6\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{EI}\right)(4)(2)$$

$$R_C = \frac{46.66}{EI}$$

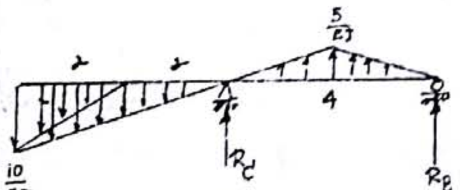


(ข)

$\Sigma F_y = 0.$

$$R_B = -R_C - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{EI}\right)(4) + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(4) + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(2)$$

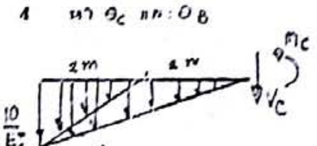
$$= -\frac{26.66}{EI}$$



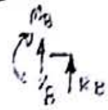
(ค)

4. หา θ_C และ θ_B

หา θ_C

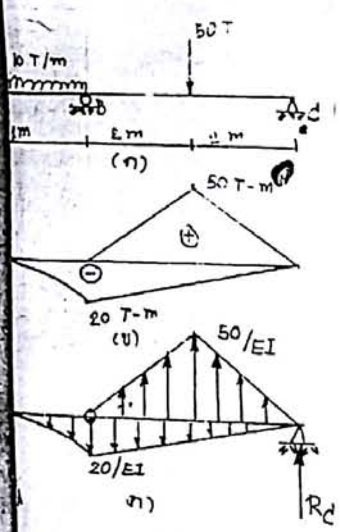


$$\theta_C = V_C = -\frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(4) = -\frac{30}{EI}$$



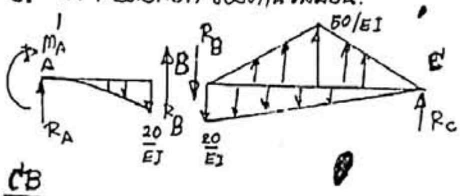
หา θ_B ; $\theta_B = V_B = -R_B = +\frac{26.66}{EI}$

1. จงหา Δ_A และ θ_A ของคาน ABC มี EI คงที่ <CONJUGATE BEAM>



Solution

1. เขียน BMD ดังรูป (ข) Superposition.
2. หาคานเสมือนดังรูป (ค)
3. หา Reaction ของคานเสมือน.



CB

$$\Sigma M_B = 0\ ; \quad 4R_C - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{20}{EI}\right)(4)\left(\tfrac{1}{3}\times 4\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{50}{EI}\right)(4)(2)$$

$$R_C = -36.67/EI$$

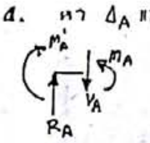
$$\Sigma F_y = 0\ ; \quad R_B = R_C + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{50}{EI}\right)(4) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{20}{EI}\right)(4) = 23.33/EI$$

AB

$$\Sigma F_y = 0\ ; \quad R_A = -R_B + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{20}{EI}\right)(2) = -10/EI$$

$$\Sigma M_A = 0\ ; \quad m_A' = R_B(2) - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{20}{EI}\right)(2)\left(\tfrac{3}{4}\times 2\right) = 26.66/EI$$

4. หา Δ_A และ θ_A

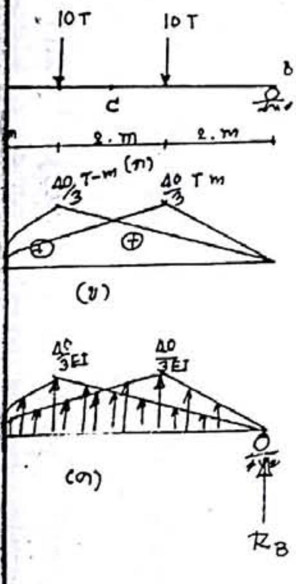


$$\theta_A = V_A = R_A = \frac{-10}{EI} \quad (\circlearrowleft)$$

$$\Delta_A = m_A = m_A' = \frac{26.66}{EI}\ \text{m} \quad (\uparrow)$$

Example 2.4 จงหา Δ_C ของคานในรูป (ก) EI คงที่

Solution



1. เขียน BMD แบบ Superposition ดังรูป (ข)
2. หาคานเสมือน ดังรูป (ค).
3. หา Reaction.

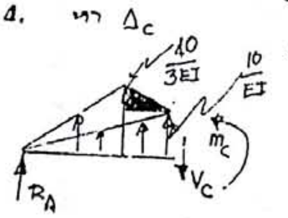
$$\Sigma M_A = 0\ ;$$

$$6R_B = -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{40}{3EI}\right)(2)\left(\tfrac{2}{3}\times 2\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{40}{3EI}\right)(4)\left(\tfrac{1}{3}\times 4 + 2\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{40}{3EI}\right)(4)\left(\tfrac{2}{3}\times 4\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{40}{3EI}\right)(2)\left(\tfrac{1}{3}\times 2 + 4\right)$$

$$R_B = -40/EI$$

$$\Sigma F_y = 0\ ; \quad R_A = -\frac{80}{EI} - R_A = -40/EI$$

4. หา Δ_C



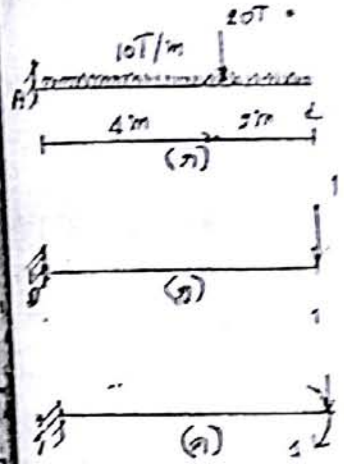
$$\Delta_C = m_C = R_A(3) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{40}{3EI}\right)(2)\left(1+\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{10}{EI}(1)\left(\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{10}{3EI}\right)(1)\left(\tfrac{2}{3}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{10}{EI}\right)(3)\left(\tfrac{1}{3}\times 3\right)$$

$$\Delta_C = -\frac{76.67}{EI}\ \text{m} \quad (\downarrow)$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3

จงใช้วิธี Unit Load หา Δ และ θ ที่จุดต่างๆ ของโครงสร้างต่อไปนี้

ก. หา Δ_c และ θ_c EI คงที่



Solution

① หา M ที่จุดใดๆ จากรูป ก

$$M = -10x\left(\frac{x}{2}\right) = -5x^2;\ 0 \leq x \leq 2$$

$$M = -10\frac{(x)^2}{2} - 20(x-2)$$
$$= -5x^2 - 20x + 40;\ 2 \leq x \leq 6$$

② หา Δ_c ใส่ Unit Load ที่จุด c ดังรูป (ข) แล้วหา m

$$m = -1(x) = -x \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

③ หา θ_c ใส่ Unit Moment ที่จุด c ดังรูป (ค) แล้วหา m

$$m = -1 \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

④ หา Δ_c และ θ_c

Find Δ_c ได้ M และ m จากข้อ ① และ ② จาก $\Delta = \int_0^L \frac{Mm\,dx}{EI}$

$$\Delta_c = \int_0^2 (-5x^2)(-x)\frac{dx}{EI} + \int_2^6 (-5x^2-20x+40)(-x)\frac{dx}{EI} = \int_0^2 5x^3\frac{dx}{EI} + \frac{1}{EI}\int_2^6 (5x^3+20x^2-40x)\,dx$$

$$= \frac{5x^4}{4EI}\Big|_0^2 + \frac{1}{EI}\left[\frac{5x^4}{4} + \frac{20x^3}{3} - \frac{40x^2}{2}\right]\Big|_2^6 = \frac{2346.67}{EI} \text{ เมตร } (\downarrow)$$

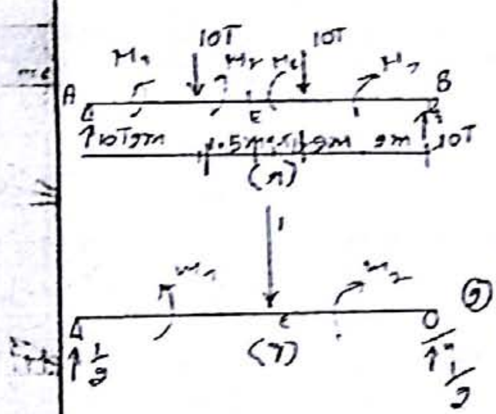
Find θ_c ได้ M และ m จากข้อ ① และ ③ จาก $\theta = \int_0^L \frac{Mm\,dx}{EI}$

$$\theta_c = \int_0^2 (-5x^2)(-1)\frac{dx}{EI} + \int_2^6 (-5x^2-20x+40)(-1)\frac{dx}{EI} = \int_0^2 5x^2\frac{dx}{EI} + \int_2^6 (5x^2+20x-40)\frac{dx}{EI}$$

$$= \frac{5x^3}{3EI}\Big|_0^2 + \frac{1}{EI}\left[\frac{5x^3}{3} + \frac{20x^2}{2} - 40x\right]\Big|_2^6 = \frac{520}{EI} \curvearrowright$$

ข. Find Δ_e EI constant

Solution



① หา M จากรูป (ก) โดยแบ่งเป็นโคนหาที่จุด e แล้วคิดทั้งสองข้าง

$$M = 10x;\ 0 \leq x \leq 2$$
$$M = 10x - 10(x-2) = 20;\ 2 \leq x \leq 3.5$$
$$M = 10x;\ 0 \leq x \leq 2$$
$$M = 10x - 10(x-2) = 20;\ 2 \leq x \leq 3.5$$

② หา m จากรูป (ข) โดยแบ่งเป็นโคน ก่อนหา Δ_e ให้ใส่ Unit Load ที่จุด e ดังรูป (ข)

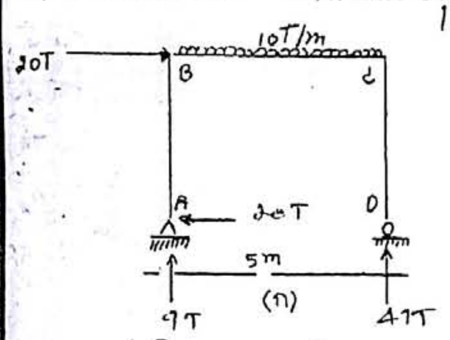
$$m = \frac{1}{2}x \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq x \leq 3.5 \end{cases}$$

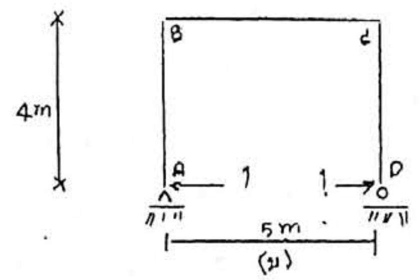
$$m = \frac{1}{2}x \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq x \leq 3.5 \end{cases}$$

3) หา Δ_e ได้ M และ m จาก ข้อ ①+②

$$= \int_0^2 (10x)\left(\frac{1}{2}x\right)\frac{dx}{EI} + \int_2^{3.5} 20\left(\frac{1}{2}x\right)\frac{dx}{EI} + \int_0^2 (10x)\left(\frac{1}{2}x\right)\frac{dx}{EI} + \int_2^{3.5} (20)\left(\frac{1}{2}x\right)\frac{dx}{EI} = \frac{5x^3}{3EI}\Big|_0^2 + \frac{10x^2}{2EI}\Big|_2^{3.5} + \frac{5x^3}{3EI}\Big|_0^2 + \frac{10x^2}{2EI}\Big|_2^{3.5} = \frac{109.14}{EI} \text{ m.}(\downarrow)$$

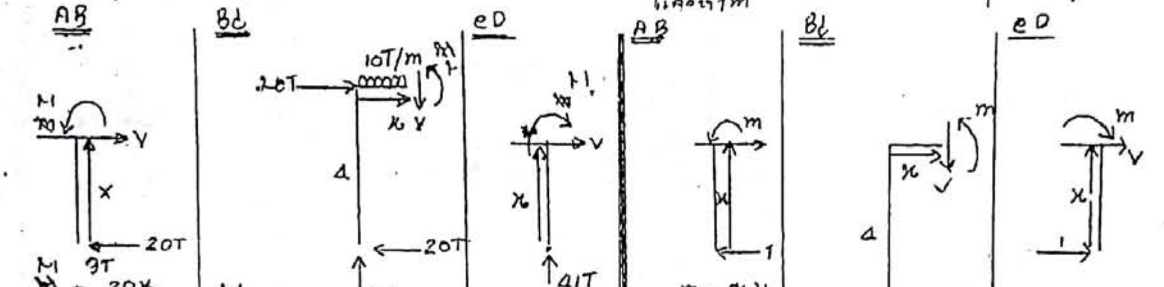
ค. หา Deflection ในแนวราบของจุด D EI คงที่





① หา M ที่จุดใดๆจากรูป(ก)

② หา Δ_D ในแนวราบ ใส่ Unit Load ลงที่จุด D ดังรูป(ข)



AB: $M = 20x$ $(0 \le x \le 4)$

BC: $M = (9)(x) + 20(4) - (10x)(\frac{x}{2})$
$= 9x + 80 - 5x^2$ $(0 \le x \le 5)$

CD: $M = 0$ $(0 \le x \le 4)$

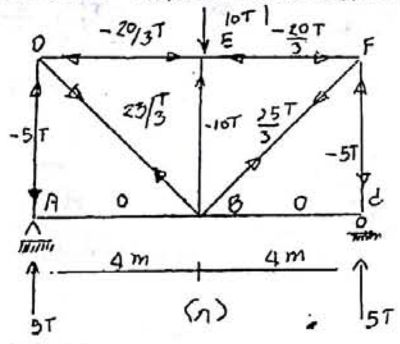
AB: $m = 1x$ $(0 \le x \le 4)$

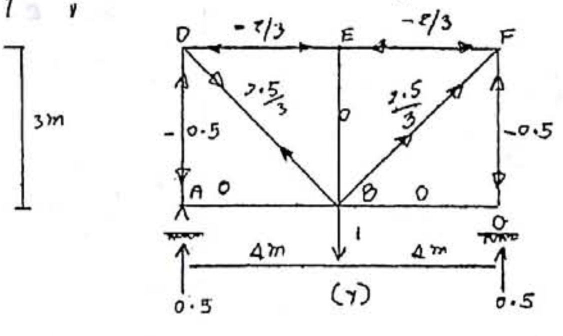
BC: $m = 1(4) = 4$ $(0 \le x \le 5)$

CD: $m = 1(x) = x$ $(0 \le x \le 4)$

③ หา Δ_{DH} ได้ M, m จากข้อ①+②
$$\Delta = \int_0^l \frac{Mm\,dx}{EI}$$
$$\Delta_{DH} = \int_0^4 (20x)(x)\frac{dx}{EI} + \int_0^5 (9x+80-5x^2)(4)\frac{dx}{EI} + \int_0^4 (0)(x)\frac{dx}{EI} = \int_0^4 20x^2\frac{dx}{EI} + \int_0^5 (36x+320-20x^2)\frac{dx}{EI}$$
$$= \left[\frac{20x^3}{3EI}\right]_0^4 + \frac{1}{EI}\left[\frac{36x^2}{2} + 320x - \frac{20x^3}{3}\right]_0^5 = \frac{1643.33}{EI}\ m.\ (\longrightarrow)$$

ง. หา Deflection ในแนวดิ่งที่จุด B ของโครงข้อหมุนในรูป A = 10 cm² E = 2.04×10³ T/cm³





Solution

① จากรูป(ก) Analysis Truss ได้ค่า S ดังแสดงในตาราง และรูป(ก)

② ใส่ Unit Load ลงที่จุดหา Deflection ดังรูป(ข) และ Analysis Truss ได้ค่า u ดังแสดงในตาราง และรูป(ข)

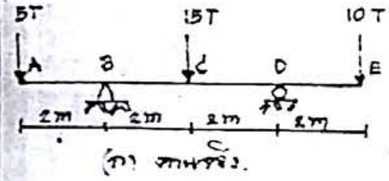
③ หา Δ_B
$$\Delta_B = \sum \frac{SuL}{AE}$$
$$= \frac{1200}{E} = \frac{1200}{2.04\times10^3}$$
$$= 0.588\ cm\ (\downarrow)$$

member	L (cm)	A (cm²)	S (T)	u	SuL/A (T/cm)
AB	400	10	0	0	0
BC	400	10	0	0	0
DE	400	10	-20/3	-2/3	177.78
EF	400	10	-20/3	-2/3	177.78
AD	300	10	-5	-0.5	75.00
DB	500	10	25/3	2.5/3	347.22
EB	300	10	10	0	0
BF	500	10	25/3	2.5/3	347.22
FC	300	10	-5	-0.5	75.00
					$\sum SuL/A = 1200$

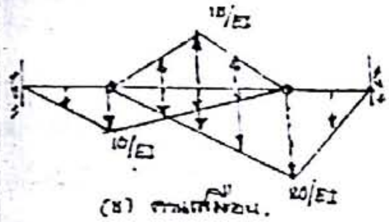
เฉลยข้อสอบ Mid Term

1. 5/24

จงใช้วิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) คำนวณหา Δ_C และ θ_C ของโครงสร้างดังรูป. ถ้ามี $I = 200\times10^{-6}\ m^4$, $E = 2.0\times10^{7}\ Ton/m^2$

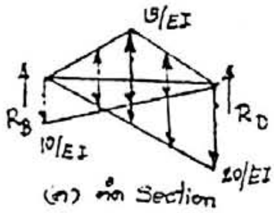


(ก) คานจริง.



(ข) คานเสมือน.

Solution เปลี่ยนคานจริงเป็นคานเสมือนดังรูป (ข) แล้วตัดที่ B และ D มาพิจารณา



(ค) ตัด Section

หา R_B และ R_D

$\Sigma M_B = 0;$

$$4R_D = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(4)\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{20}{EI}\right)(4)\left(\frac{2}{3}\times4\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(4)(2)$$

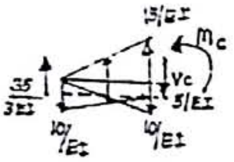
$$= \frac{220}{3EI}$$

$$R_D = \frac{55}{3EI} = \frac{18.33}{EI}$$

$$\Sigma F_y = 0;\quad R_B = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(4) + \frac{1}{2}\left(\frac{20}{EI}\right)(4) - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(4) - R_D$$

$$= \frac{35}{3EI} = \frac{11.67}{EI}$$

หา Δ_C และ θ_C ตัดตรง Joint C



(ง) Section ที่จุด C

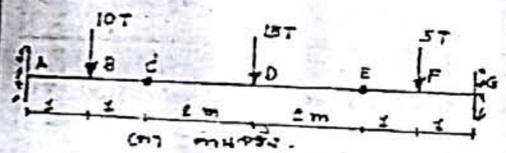
$$\theta_C = V_C = \frac{35}{3EI} + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2) - \frac{5}{EI}(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{EI}\right)(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(2)$$

$$= \frac{5}{3EI} = \frac{5}{3\times2.0\times10^7\times200\times10^{-6}} = 0.00042 \quad (\circlearrowleft)\quad \underline{Ans}$$

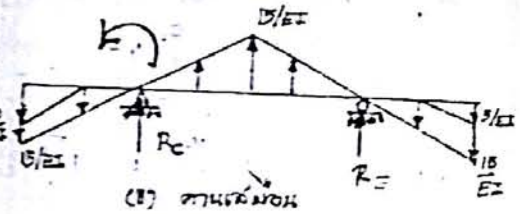
$$\Delta_C = M_C = \frac{35}{3EI}(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2)\left(\frac{2}{3}\right) - 2\left(\frac{5}{EI}\right)(1) - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{EI}\right)(2)\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(2)\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{10}{EI} = \frac{10}{2.0\times10^7\times200\times10^{-6}}\times100 = 0.25\ cm\ (\uparrow)\quad \underline{Ans}$$

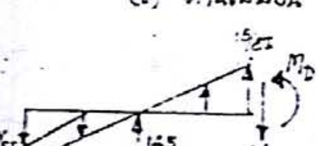
จงใช้วิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) คำนวณหา Δ_D และ θ_D ของโครงสร้างที่กำหนดให้ดังรูป ถ้ามี $I = 200\times10^{-6}\ m^4$, $E = 2.0\times10^{7}\ Ton/m^2$



(ก) คานจริง.



(ข) คานเสมือน



(ค) ตัด Section ที่จุด D

Solution. เปลี่ยนคานจริงเป็นคานเสมือน ดังรูป (ข) แล้วหา Reaction ที่จุด C และ E (หา R_C และ R_E)

$\Sigma M_C = 0;$

$$4R_E = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{EI}\right)(1)\left(5+\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2)\left(4+\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(4)(2)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(1)\left(1+\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{35}{6EI}$$

$$\therefore R_E = \frac{35}{24EI}$$

$\Sigma F_y = 0;$

$$R_C = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{EI}\right)(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(4) + \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(1)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2) - R_E$$

$$= \frac{145}{24EI}$$

หา Δ_D และ θ_D ตัด Section ที่จุด D

$$\theta_D = V_D = \frac{145}{24EI} + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(1) = \frac{25}{24EI}$$

$$= \frac{25}{24\times2.0\times10^7\times200\times10^{-6}} = 0.00026\ (\circlearrowleft)\quad \underline{Ans.}$$

$$\Delta_D = M_D = \frac{145}{24EI}(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2)\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{15}{EI}\right)(2)\left(2+\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{10}{EI}\right)(1)\left(3+\frac{1}{3}\right)$$

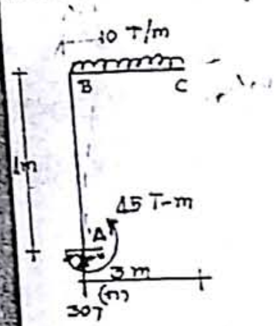
$$= -\frac{555}{12EI} = -\frac{555}{12\times2\times10^7\times200\times10^{-6}}\times100 = 1.156\ cm(\downarrow)\ \underline{Ans.}$$

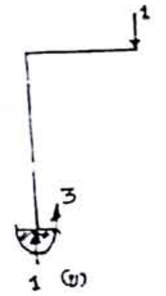
จงใช้วิธีงานสมมุติ (Unit Load) คำนวณหา Deflection ในแนวดิ่ง และในแนวราบ ที่จุด C (Δ_{CV} และ Δ_{CH})

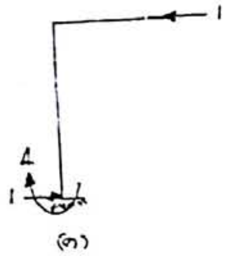
ΔCV 10 ΔCH

6/22

ของโครงข้อแข็งที่กำหนดให้ดังรูป ซึ่งมี $I = 200\times10^{-6}\ m^4$, $E = 200\times10^7\ Ton/m^2$







Solution ใช้วิธี Unit Load การหา Deflection ในแนวใดที่จุดใด ให้ใส่แรงในแนวนั้น ที่เราต้องการหา Δ_{CV} ก็ให้ใส่แรงหนึ่งหน่วยที่จุด C ในแนวดิ่ง ดังรูป (ข) และ ถ้าต้องการหา Δ_{CH} ก็ให้ใส่แรงหนึ่งหน่วยในแนวราบ ดังรูป (ค) แล้วหา M จากรูป (ก) m จากรูป (ข) และ (ค) แล้วแทนค่าในสูตร $\Delta = \int_0^L Mm\frac{dx}{EI}$

หา Δ_{CV} ได้ M และ m จากรูป (ก) และ (ข)

ช่วง AB $0\le x\le 4$: $M = -45$; $m = -3$

ช่วง BC $0\le x\le 3$: $M = -10x(\frac{x}{2}) = -5x^2$; $m = -(1)(x) = -x$

$$= \int_0^4 (-45)(-3)\frac{dx}{EI} + \int_0^3 (-5x^2)(-x)\frac{dx}{EI}$$

$$= \frac{135}{EI}(x)\Big|_0^4 + \frac{5}{EI}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^3 = \frac{641.25}{EI}$$

$$= \frac{641.25}{2.0\times10^7\times200\times10^{-6}}\times100 = 16.0\ cm\ (\downarrow)\ \text{Ans}$$

หา Δ_{CH} ได้ M และ m จากรูป (ก) และ (ค)

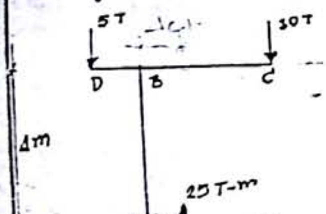
ช่วง AB $0\le x\le 4$: $M = -45$; $m = 4 - x$

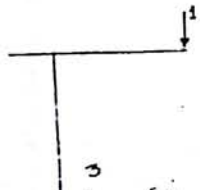
ช่วง BC $0\le x\le 3$: $M = -10x(\frac{x}{2}) = -5x^2$; $m = 0$

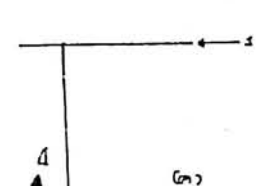
$$\Delta_{CH} = \int_0^4 (-45)(4-x)\frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI}\left[45\frac{x^2}{2} - 180x\right]\Big|_0^4$$

$$= \frac{-360}{EI} = \frac{-360}{2.0\times10^7\times200\times10^{-6}}\times100 = -9\ cm\ (\rightarrow)\ \text{Ans}$$

จงใช้วิธี Unit Load คำนวณหา Deflection ในแนวดิ่งและแนวราบที่จุด C (Δ_{CH}, Δ_{CV}) ของโครงสร้างที่กำหนดให้ดังรูป ซึ่งมี $E = 2.0\times10^7\ Ton/m^2$, $I = 200\times10^{-6}\ m^4$







หา Δ_{CV} ได้ M และ m จากรูป (ก) และ (ข)

ช่วง AB $0\le x\le 4$: $M = -25$; $m = -3$

ช่วง BC $0\le x\le 3$: $M = -10x$; $m = -x$

ช่วง BD $0\le x\le 1$: $M = -5x$; $m = 0$

$$= \int_0^4 (-25)(-3)\frac{dx}{EI} + \int_0^3 (-10x)(-x)\frac{dx}{EI}$$

$$= \frac{75x}{EI}\Big| + \frac{10x^3}{3EI}\Big| = \frac{390}{EI} = \frac{390}{2.0\times10^7\times200\times10^{-6}} = 9.75\ cm\ (\downarrow)$$

หา Δ_{CH} ได้ M และ m จากรูป (ก) และ (ค)

ช่วง AB $0\le x\le 4$: $M = -25$; $m = 4 - x$

ช่วง BC $0\le x\le 3$: $M = -10x$; $m = 0$

ช่วง BD $0\le x\le 1$: $M = -5x$; $m = 0$

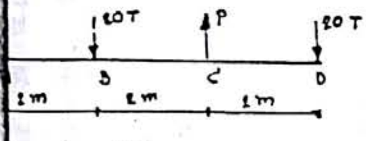
$$\Delta_{CH} = \int_0^4 (-25)(4-x)\frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI}\left[25\frac{x^2}{2} - 100x\right]\Big|_0^4$$

$$= \frac{-200}{EI} = \frac{-200}{2\times10^7\times200\times10^{-6}} = -5\ cm\ (\rightarrow)\ \text{Ans}$$

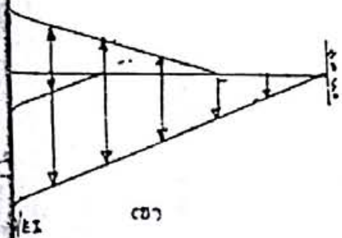
จงหา Δ_C ของคาน ABCD ดังรูป มี $I = 200 \times 10^{-6}\ m^4$ และ $E = 2.0 \times 10^{7}\ T/m^2$

ถ้า $\Delta_C = 0$ แล้ว แรง P จะมีค่าเท่ากับเท่าไร.

จงเขียน SFD และ BMD เมื่อหาแรง P ได้แล้ว



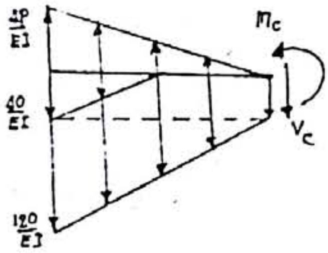
(ก)



(ข)

Solution

ก. หา Δ_C โดยใช้วิธี Conjugate beam โดยเปลี่ยนคานเป็นคานเสมือนในรูป (ข) และตัด Section ตรงจุด C มาพิจารณา



$$\Delta_C = M_C = -\frac{1}{2}\left(\frac{40}{EI}\right)(2)\left(2+\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4P}{EI}\right)(4)\left(\frac{8}{3}\right) - \left(\frac{40}{EI}\right)(4)(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{80}{EI}\right)(4)\left(\frac{8}{3}\right)$$

$$= -\frac{880}{EI} + \frac{64P}{3EI}$$

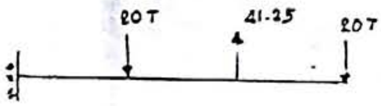
$$= -0.22 + 0.0053P \quad \underline{Ans.}$$

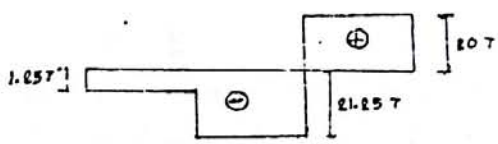
ข. ถ้า $\Delta_C = 0$

$$-\frac{880}{EI} + \frac{64P}{3EI} = 0$$

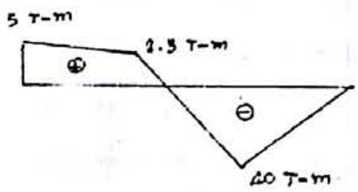
$$\therefore P = 41.25 \text{ Ton} \quad \underline{Ans.}$$

ค. SFD และ BMD





SFD

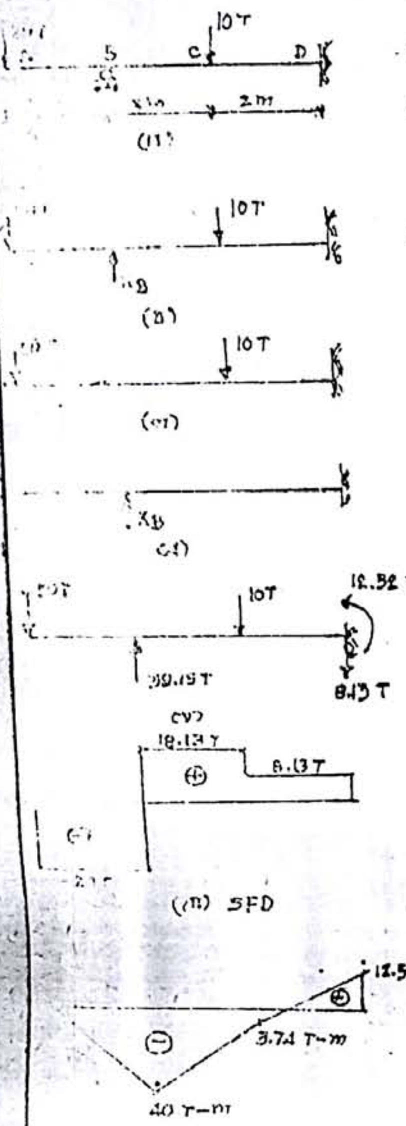


B.M.D

เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 4

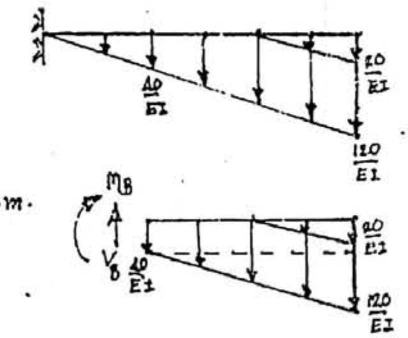
จงวิเคราะห์โครงสร้างต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียน SFD และ BMD (EI คงที่)

Solution



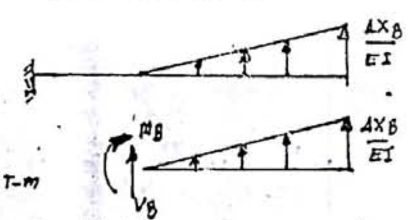
1. จำนวนแรงที่คำนวณไม่ได้ $= 4-3 = 1$
2. เลือกจุดที่ใช้เป็นแรงเกิน คือเลือกจุด B ให้มีแรงเกินเป็น X_B โดยมีเงื่อนไขว่า $\Delta_B = 0$ หรือ $\Delta_{B0}+\Delta_{BB}=0$ ดังรูป ข.
3. หา Δ_{B0} และ Δ_{BB} (ใช้วิธี Conjugate beam)

หา Δ_{B0} (จากรูป ค)



$$\Delta_{B0} = M_B = -\frac{1}{2}\left(\frac{20}{EI}\right)(2)\left(2+\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{40}{EI}\right)(4)(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{80}{EI}\right)(4)\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{813.33}{EI} \text{ m.}$$

หา Δ_{BB} (จากรูป ง)



$$\Delta_{BB} = M_B = \frac{1}{2}\left(\frac{4X_B}{EI}\right)(4)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{21.33X_B}{EI} \text{ m.}$$

4. หา X_B จาก $-\frac{813.33}{EI} + \frac{21.33X_B}{EI} = 0$

$X_B = 38.13$ Ton ← ทำให้เขียนคานได้ใหม่ดังรูป (จ)

5. เขียน SFD และ BMD ดังรูป (ฉ) และ (ช)

Solution

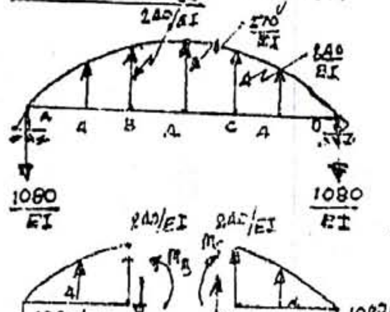
1. จำนวนแรงที่คำนวณไม่ได้ $= 5-3 = 2$.
2. เลือกจุดที่ใช้เป็นแรงเกิน คือ เลือกจุด B และ C ให้มีแรงเกินเป็น X_B และ X_C ซึ่งทำให้

$$\Delta_B = 0 = \Delta_{B0} + \Delta_{BB} + \Delta_{BC} \quad \cdots\cdots *$$

$$\Delta_C = 0 = \Delta_{C0} + \Delta_{CB} + \Delta_{CC} \quad \cdots\cdots * \quad \text{ดังรูป (ข)}$$

3. หา Δ_{B0}, Δ_{BB}, Δ_{BC}, Δ_{C0}, Δ_{CB}, Δ_{CC} โดยวิธี Conjugate beam

หา Δ_{B0} และ Δ_{C0} (จากรูป ค)



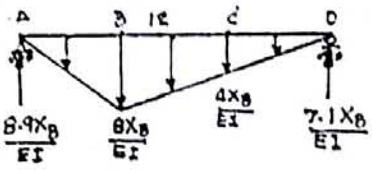
$\Delta_{B0} = M_B$ (ดูส่วนซ้าย)

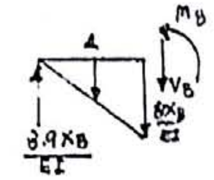
$$= -\frac{1080}{EI}(4) + \frac{2}{3}\left(\frac{240}{EI}\right)(4)\left(\frac{3\times4}{8}\right) = -\frac{3360}{EI} \text{ m}$$

$\Delta_{C0} = M_C$ (ส่วนขวา)

$$= -\frac{1080}{EI}(4) + \frac{2}{3}\left(\frac{240}{EI}\right)(4)\left(\frac{3\times4}{8}\right) = -\frac{3360}{EI}$$

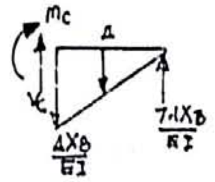
หา Δ_{BB} และ Δ_{CB} จากรูป(ค)





$$\Delta_{BB} = \left(\frac{8.9X_B}{EI}\right)(4) - \frac{1}{2}\left(\frac{8X_B}{3EI}\right)(4)\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{28.5X_B}{EI} \text{ m} \ldots\ldots\ldots\ldots$$



$$\Delta_{CB} = \left(\frac{7.1X_B}{EI}\right)(4) - \frac{1}{2}\left(\frac{4X_B}{3EI}\right)(4)\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{24.8X_B}{EI} \text{ m} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ทำนองเดียวกันนี้ หา Δ_{CC} และ Δ_{BC} ได้

$$\Delta_{CC} = \frac{28.5X_C}{EI} \text{ m} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_{BC} = \frac{24.8X_C}{EI} \text{ m} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. หา X_B และ X_C

จาก $\Delta_B = 0$; $-\frac{3360}{EI} + \frac{28.5X_B}{EI} + \frac{24.8X_C}{EI} = 0$

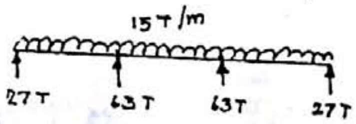
$-3360 + 28.5X_B + 24.8X_C = 0$ .... (1)

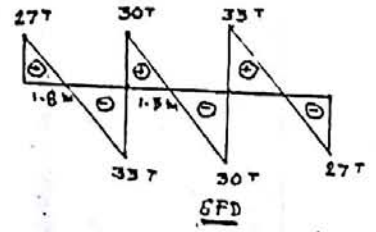
จาก $\Delta_C = 0$; $-\frac{3360}{EI} + \frac{24.8X_B}{EI} + \frac{28.5X_C}{EI} = 0$

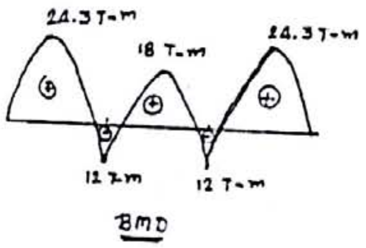
$-3360 + 24.8X_B + 28.5X_C = 0$ .... (2)

จากสมการ (1) และ (2) ได้ $X_B = X_C = 63$ Ton

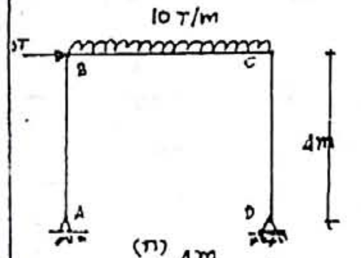
5 เขียน SFD และ BMD ดังรูป.

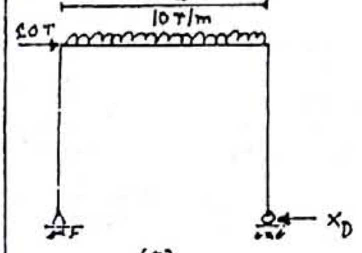


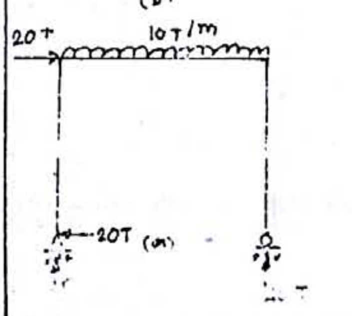




(๗)





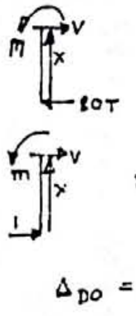


Solution

1. จำนวนแรงเกินที่คำนวณไม่ได้ = 4-3 = 1
2. เลือกจุดที่ใช้เป็นแรงเกินคือเลือกจุด D ให้มีแรงเกินเป็น X_D ตามแนวราบ โดยมีเงื่อนไขว่า $\Delta_D = 0$ or. $\Delta_{DO} + \Delta_{DD} = 0$ ดังรูป (ข)
3. หา Δ_{DO} และ Δ_{DD} โดยใช้วิธี Unit Load.

หา Δ_{DO} ได้ M และ m จากรูป(ข) และ(ค)

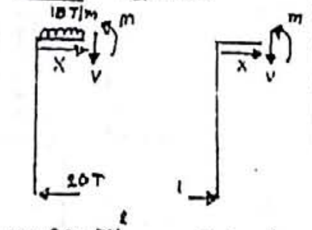
ช่วง AB $0 \le x \le 4$



$M = 20x$

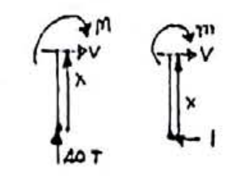
$m = -x$

ช่วง BC $0 \le x \le 4$



$M = 80 - 5x^2$ $\quad m = -4$

ช่วง CD $0 \le x \le 4$



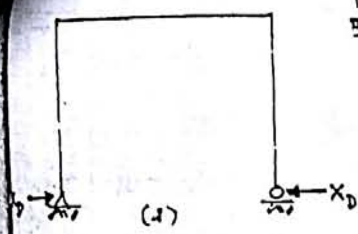
$M = 0$ $\quad m = -x$

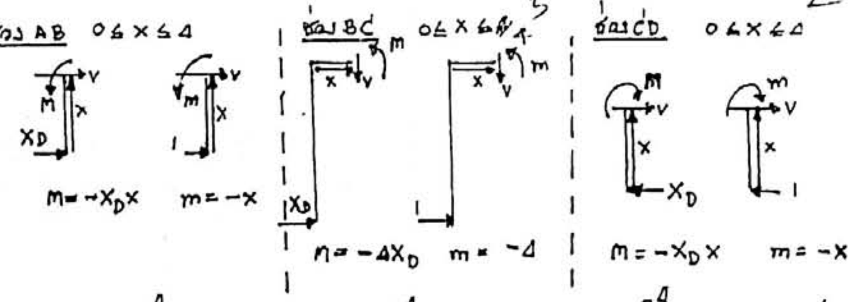
$$\Delta_{DO} = \int_0^L Mm\frac{dx}{EI}$$

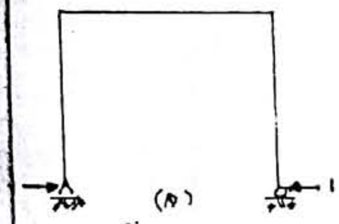
$$= \int_0^4 (20x)(-x)\frac{dx}{EI} + \int_0^4 (80-5x^2)(-4)\frac{dx}{EI}$$

$$= -\frac{20x^3}{3EI}\Big|_0^4 + \frac{1}{EI}\left[\frac{20x^3}{3} - 320x\right]\Big|_0^4 = -\frac{1280}{EI} \text{ m} \ldots\ldots\ldots$$

หา Δ_{DD} ได้ M และ m จากข้อ (ง) และ (จ)







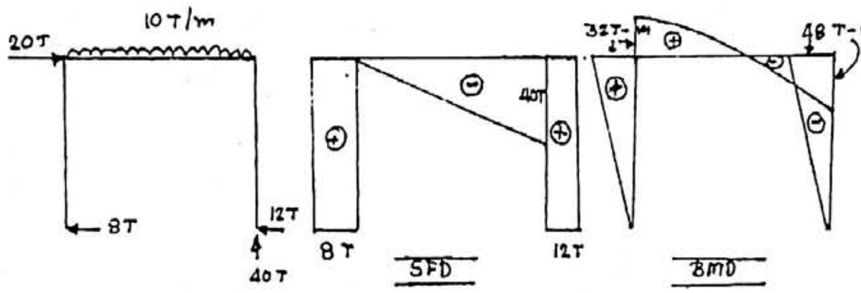
$$\Delta_{DD} = \int_0^4 (-X_D x)(-x)\frac{dx}{EI} + \int_0^4 (-4X_D)(-4)\frac{dx}{EI} + \int_0^4 (-X_D x)(-x)\frac{dx}{EI}$$

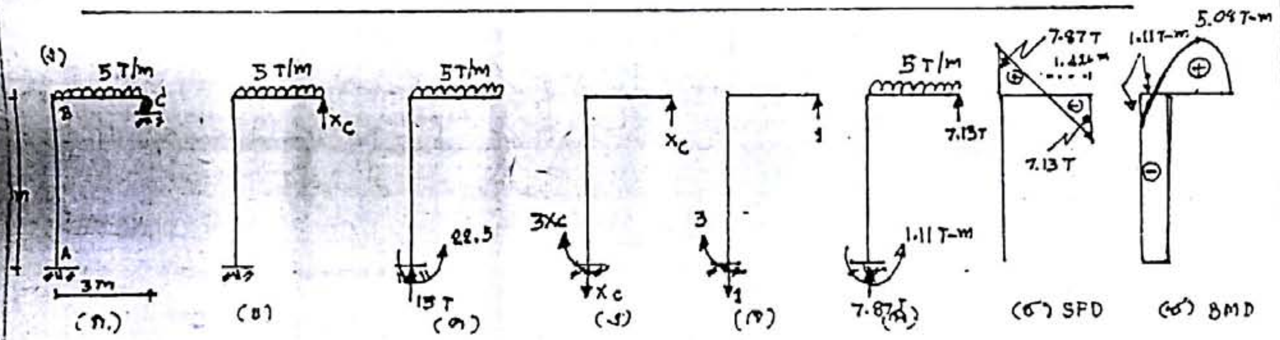
$$= X_D\left(\frac{x^3}{3EI}\right)\Big|_0^4 + 16X_D\left(\frac{x}{EI}\right)\Big|_0^4 + X_D\left(\frac{x^3}{3EI}\right)\Big|_0^4 = \frac{106.67X_D}{EI} \; \ldots\ldots$$

4. หา X_D

$$\Delta_D = 0 = -\frac{1280}{EI} + \frac{106.67X_D}{EI} = 0 \longrightarrow X_D = 12 \text{ Ton } (\leftarrow) \ldots\ldots$$

5 เขียน SFD และ BMD.





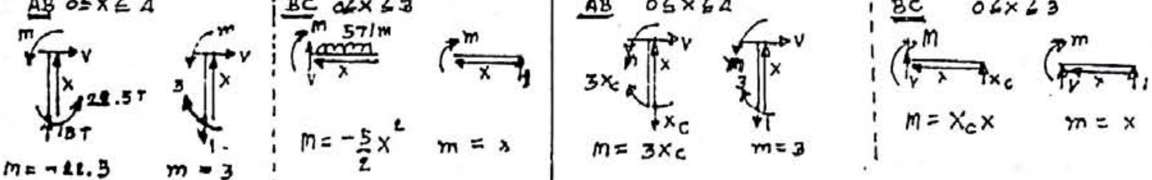
Solution.

1. จำนวนแรงเกินที่คำนวณไม่ได้ = 4-3 = 1
2. เลือกจุดที่ใช้เป็นแรงเกิน คือเลือกจุด C ให้มีแรงเกินเป็น X_c ตามแนวดิ่ง โดยมีเงื่อนไขว่า

   $\Delta_c = 0$ หรือ $\Delta_{co} + \Delta_{cc} = 0$ ตามรูป(ข)

3. หา Δ_{co} และ Δ_{cc}

Δ_{co} ได้ M และ m จากรูป (ค) และ (จ) | Δ_{cc} ได้ M และ m จากรูป(ง) และ (จ)

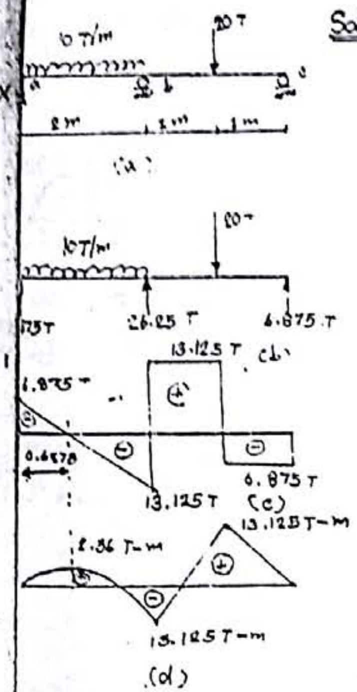


$$\Delta_{co} = \int_0^4 (-22.5)(3)\frac{dx}{EI} + \int_0^3 \left(-\frac{5}{2}x^2\right)(x)\frac{dx}{EI} = -\frac{320.625}{EI} \text{ m} \qquad \Delta_{cc} = \int_0^4 (3X_c)(3)\frac{dx}{EI} + \int_0^3 (X_c x)(x)\frac{dx}{EI} = \frac{45X_c}{EI} \text{ m}$$

4. หา X_c จาก $\Delta_c = 0 = -\frac{320.625}{EI} + \frac{45X_c}{EI} \Rightarrow X_c = 7.13$ Ton (↑) ……………………

5 เขียน SFD และ BMD ดังรูป (ฉ) และ (ช)

Example 3.5 จงวิเคราะห์คานโดยวิธี Slope-Deflection พร้อมทั้งเขียน SFD และ BMD.



Solution 1. หา Moment ที่ปลายแต่ละช่วง จากรูปพบว่า θ_a, θ_b, θ_c ไม่เป็นศูนย์ แต่ Δ ทุกช่วงเป็นศูนย์ และมี Moment เนื่องจาก Load ดังนี้

$M^F_{ab} = -\frac{1}{12}wL^2 = -\frac{1}{12}(10)(2)^2 = -\frac{10}{3}$ T-m , $M^F_{ba} = \frac{1}{12}wL^2 = \frac{10}{3}$ T-m.

$M^F_{bc} = -\frac{Pab^2}{L^2} = \frac{-20(1)(1)^2}{2^2} = -5$ T-m , $M^F_{cb} = \frac{Pba^2}{L^2} = \frac{20(1)(1)^2}{2^2} = 5$ T-m

สมการที่ได้คือ.

$M_{ab} = \frac{2EI}{2}(2\theta_a + \theta_b - 0) - \frac{10}{3}$

$M_{ba} = \frac{2EI}{2}(2\theta_b + \theta_a - 0) + \frac{10}{3}$

$M_{bc} = \frac{2EI}{2}(2\theta_b + \theta_c - 0) - 5$

$M_{cb} = \frac{2EI}{2}(2\theta_c + \theta_b - 0) + 5$

2. จากสมการพบว่ามีตัวแปร 3 ตัว เราหาสมการ 3 สมการดังนี้

$\Sigma M_a = 0$; $M_{ab} = 0$: $2\theta_a EI + \theta_b EI - \frac{10}{3} = 0$ .... (1)

$\Sigma M_b = 0$; $M_{ba} + M_{bc} = 0$: $4\theta_b EI + \theta_a EI + \theta_c EI - \frac{5}{3} = 0$ .... (2)

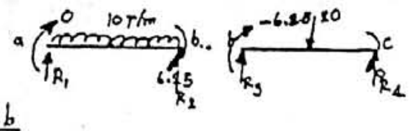
$\Sigma M_c = 0$; $M_{cb} = 0$: $2\theta_c EI + \theta_b EI + 5 = 0$ .... (3)

แก้สมการ ได้ $\theta_a = \frac{5}{4EI}$; $\theta_b = \frac{5}{6EI}$, $\theta_c = \frac{-35}{12EI}$

3. แทนค่าในข้อ 1 ได้

$M_{ab} = 0$, $M_{ba} = 6.25$ T-m , $M_{bc} = -6.25$ T-m , $M_{cb} = 0$.

4. หา Reaction โดยนำ Moment ที่ได้ในข้อ 3 ไปใส่ใน Free body ดังรูป.



ช่วง ab

$\Sigma M_a = 0$; $2R_2 = 0 + 6.25 + 10 \times 2 \times 1$

$R_2 = 13.125$ T.

$\Sigma F_y = 0$; $R_1 = 2 \times 10 - 13.125 = 6.875$ T.

ช่วง bc

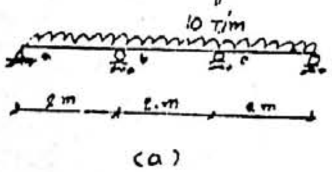
$\Sigma M_b = 0$; $2R_4 = 0 - 6.25 + 20 \times 1$

$R_4 = 6.875$ T

$\Sigma F_y = 0$; $R_3 = 20 - 6.875 = 13.125$ T

ได้ $R_a = R_1 = 6.875$ T , $R_b = R_2 + R_3 = 26.25$ T , $R_c = R_4 = 6.875$ T ดังไปเขียน Free body SFD และ BMD ดังรูป (b), (c) และ (d)

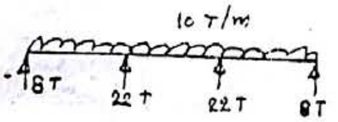
Example 3.6 จงวิเคราะห์คานโดยใช้วิธี Slope-Deflection พร้อมทั้งเขียน SFD และ BMD ของโครงสร้าง ดังรูป (a)



Solution 1. หา Moment ที่ปลายแต่ละช่วง จากรูปพบว่า θ_a, θ_b, θ_c และ θ_d ไม่เป็นศูนย์ แต่ Δ ทุกช่วงเป็นศูนย์ และมีโมเมนต์เนื่องจาก Load ดังนี้ $M^F_{ab} = -\frac{1}{12}wL^2 = -\frac{1}{12}(10)(2)^2 = -\frac{10}{3}$ T-m , $M^F_{ba} = \frac{1}{12}wL^2 = \frac{1}{12}(10)(2)^2 = \frac{10}{3}$ T-m

ทำนองเดียวกัน $M^F_{bc} = -\frac{10}{3}$ T-m, $M^F_{cb} = \frac{10}{3}$ T-m, $M^F_{cd} = -\frac{10}{3}$ T-m, $M^F_{dc} = \frac{10}{3}$ T-m

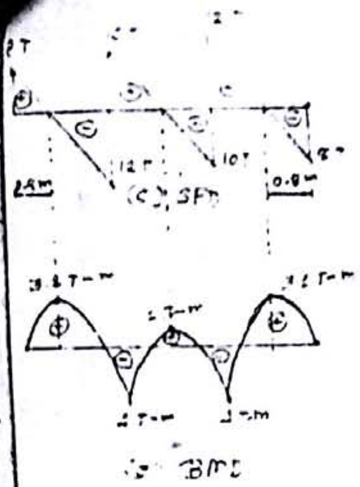
สมการที่ได้คือ.



$M_{ab} = \frac{2EI}{2}(2\theta_a + \theta_b - 0) + (-\frac{10}{3})$

$M_{ba} = \frac{2EI}{2}(2\theta_b + \theta_a - 0) + \frac{10}{3}$

$M_{bc} = \frac{2EI}{2}(2\theta_b + \theta_c - 0) - \frac{10}{3}$



$M_{cb} = \frac{2EI}{L}(2\theta_c + \theta_b - 0) + \frac{?}{3}$

$M_{cd} = \frac{2EI}{L}(2\theta_c + \theta_d - 0) - \frac{?}{3}$

$M_{dc} = \frac{2EI}{L}(2\theta_d + \theta_c - 0) + \frac{?}{3}$

2. หาสมการข้อ 2 พบว่ามีตัวแปร 4 ตัว ต้องหา 4 สมการ คือ

$\Sigma M_a = 0; \quad 2\theta_a EI + \theta_b EI - \frac{10}{3} = 0 \ldots\ldots (1)$

$\Sigma M_b = 0; \; M_{ba} + M_{bc} = 0; \; 4\theta_b EI + \theta_a EI + \theta_c EI = 0 \ldots\ldots (2)$

$\Sigma M_c = 0; \; M_{cb} + M_{cd} = 0; \; 4\theta_c EI + \theta_b EI - \theta_d EI = 0 \ldots\ldots (3)$

$\Sigma M_d = 0; \; M_{dc} = 0; \; 2\theta_d EI + \theta_c EI + \frac{10}{3} = 0 \ldots\ldots (4)$

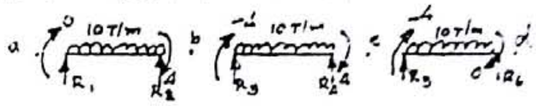
แก้สมการทั้ง 4 ได้

$\theta_a = \frac{2}{EI}, \quad \theta_b = -\frac{2}{3EI}; \; \theta_c = \frac{2}{3EI}, \quad \theta_d = -\frac{2}{EI}$

3. แทนค่า θ ลงในสมการข้อ 1 ได้

$M_{ab} = 0; \; M_{ba} = 4$ T-m $; \; M_{bc} = -4$ T-m $; \; M_{cb} = 4$ T-m $, \; M_{cd} = -4$ T-m $, \; M_{dc} = 0$

4. หา Reaction โดยนำ Moment ที่ได้ใน Free Body ก็จะหา Reaction แต่ละช่วงได้

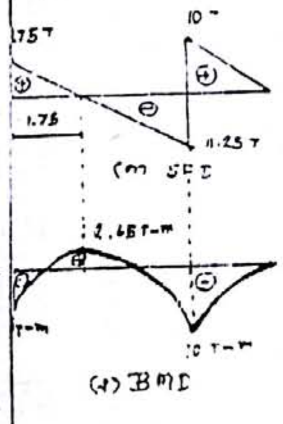


ช่วง ab	ช่วง bc	ช่วง cd
$\Sigma M_a = 0; \; 2R_2 = 4 + 10\times2\times1$	$\Sigma M_b = 0; \; 2R_4 = -4 + 4 + 10\times2\times1$	$\Sigma M_c = 0; \; 2R_6 = -4 + 10\times2\times1$
$R_2 = 12$ T	$R_4 = 10$ T	$R_6 = 8$ T
$\Sigma F_y = 0; \; R_1 = 8$ T	$\Sigma F_y = 0; \; R_3 = 10$ T	$\Sigma F_y = 0; \; R_5 = 12$ T

$R_a = R_1 = 8$ T, $R_b = R_2 + R_3 = 22$ T, $R_c = R_4 + R_5 = 22$ T และ $R_d = R_6 = 8$ T.

นำไปเขียน Free body, SFD และ BMD ได้ดังรูป (b), (c) และ (d) ตามลำดับ

Example 3.7 จงวิเคราะห์คานโดยใช้วิธี Slope - Deflection ดังรูป (a) พร้อมทั้งเขียน SFD และ BMD



Solution 1. หา Moment ที่ปลายแต่ละช่วง จากรูปพบว่า $\theta_a = 0$

แต่ $\theta_b \neq 0$ และ Δ ระหว่าง ab = 0 และมี Moment ปลายยื่นด้วย

$M^F_{ab} = -\frac{1}{12}wL^2 = -\frac{1}{12}(5)(4)^2 = -6.67$ T-m, $M^F_{ba} = \frac{1}{12}wL^2 = \frac{1}{12}(5)(4)^2 = 6.67$ T-m

$M^F_{bc} = -\frac{wL^2}{2} = -\frac{5(2)^2}{2} = -10$ T-m

ดังนั้นจะได้

$M_{ab} = \frac{2EI}{4}(0 + \theta_b - 0) + (-6.67)$

$M_{ba} = \frac{2EI}{4}(2\theta_b + 0 - 0) + (6.67)$

$M_{bc} = -10$

2. หาสมการข้อ 1 พบว่ามีตัวแปร 1 ตัว ต้องหา 1 สมการ คือ

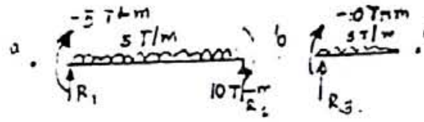
$\Sigma M_b = 0; \; M_{ba} + M_{bc} = 0; \; \theta_b EI - 3.33 = 0 \ldots\ldots (1)$

$\theta_b = \frac{3.33}{EI}$

3. แทนค่า θ ลงในข้อ 1 ได้

$M_{ab} = -5$ T-m $; \; M_{ba} = 10$ T-m $; \; M_{bc} = -10$ T-m.

Reaction โดยนำ Moment ที่ได้ใส่ใน Free body และหา Reaction ของแต่ละช่วง



ช่วง ab

$\Sigma M_a = 0 ;\quad 4R_2 = 10 - 5 + 5\times4\times\frac{4}{2}$

$R_2 = 11.25 \quad T$

$\Sigma F_y = 0 ;\quad R_1 = 8.75 \quad T$

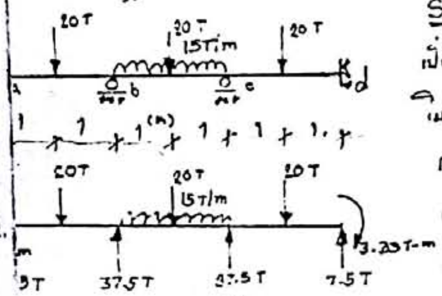
ช่วง BC

$\Sigma F_y = 0$

$R_3 = 5\times2 = 10 \quad T$

ได้ $R_a = R_1 = 8.75$, $R_b = R_2 + R_3 = 21.25$ T ซึ่งนำไปเขียน Free body , SFD และ BMD ที่รูป (ข), (ค), (ง)

Example 3.8 จงวิเคราะห์คานด้วยวิธี Slope - Deflection ดังรูป (ก) EI คงที่ พร้อมทั้งเขียน SFD และ BMD



Solution ① หา Moment ที่ปลายแต่ละช่วง สมมุติให้ θ_a และ θ_d เป็นศูนย์ θ_b และ θ_c ไม่เป็นศูนย์ และ Δ ทุกช่วงคานเป็นศูนย์ จะได้ โมเมนต์ที่ปลายยึดแต่ละช่วง คือ.

$M^F_{ab} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{20(1)(1)^2}{(2)^2} = -5$ T-m , $M^F_{ba} = \frac{Pba^2}{L^2} = \frac{20(1)(1)^2}{2^2} = 5$ T-m

$M^F_{bc} = -\frac{Pab^2}{L^2} - \frac{1}{12}wL^2 = -\frac{20(1)(1)^2}{2^2} - \frac{1}{12}(15)(2)^2 = -10$ T-m

$M^F_{cb} = \frac{Pba^2}{L^2} + \frac{1}{12}wL^2 = \frac{20(1)(1)^2}{2^2} + \frac{1}{12}(15)(2)^2 = 10$ T-m

$M^F_{cd} = -\frac{Pab^2}{L^2} = -\frac{20(1)(1)^2}{(2)^2} = -5$ T-m , $M^F_{dc} = \frac{Pba^2}{L^2} = \frac{20(1)(1)^2}{2^2} = 5$ T-m

ดังนั้นสมการที่ได้คือ.

$M_{ab} = \frac{2EI}{2}(0 + \theta_b - 0) - 5.$

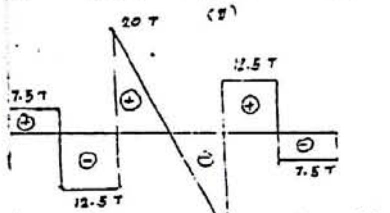
$M_{ba} = \frac{2EI}{2}(2\theta_b + 0 - 0) + 5$

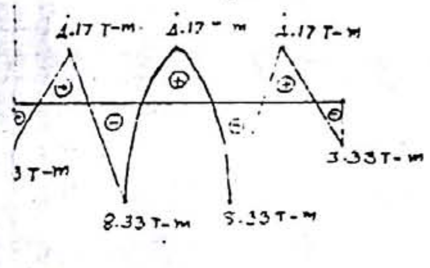
$M_{bc} = \frac{2EI}{2}(2\theta_b + \theta_c - 0) - 10$

$M_{cb} = \frac{2EI}{2}(2\theta_c + \theta_b - 0) + 10$

$M_{cd} = \frac{2EI}{2}(2\theta_c + 0 - 0) - 5$

$M_{dc} = \frac{2EI}{2}(0 + \theta_c - 0) + 5$





②. จากสมการในข้อ 1 หมุนไม่ทราบค่า 2 ตัว หาสมการ 2 สมการ คือ.

$\Sigma M_b = 0 ;\ M_{ba} + M_{bc} = 0 ;\ 4\theta_b EI + \theta_c EI - 5 = 0$ ....(1)

$\Sigma M_c = 0 ;\ M_{cb} + M_{cd} = 0 ;\ 4\theta_c EI + \theta_b EI + 5 = 0$ ....(2)

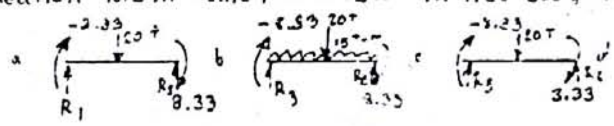
แก้สมการได้ $\theta_b = \frac{5}{3EI}$, $\theta_c = -\frac{5}{3EI}$

แทนค่า θ ต่างๆ ในข้อ 1 ได้

$M_{ab} = -3.33$ T-m , $M_{ba} = 8.33$ T-m , $M_{bc} = -8.33$ T-m , $M_{cb} = 8.33$ T-m , $M_{cd} = -8.33$ T-m

$M_{dc} = 3.33$ T-m

หา Reation โดยนำ Moment ที่ได้ไปใส่ใน Free body และหา Reaction ของแต่ละช่วง



ช่วง ab

$\Sigma M_a = 0 ;\ 2R_2 = -3.33 + 8.33 + 20(1)$

$R_2 = 12.5$ T

$\Sigma F_y = 0 ;\ R_1 = 7.5$ T

ช่วง bc

$\Sigma M_b = 0 ;\ 2R_4 = -8.33 + 8.33 + 20(1) + (15)(2)(1)$

$R_4 = 25$ T

$\Sigma F_y = 0 ;\ R_3 = 25$ T

ช่วง cd.

$\Sigma M_c = 0 ;\ 2R_6 = -8.33 + 3.33 + 20(1)$

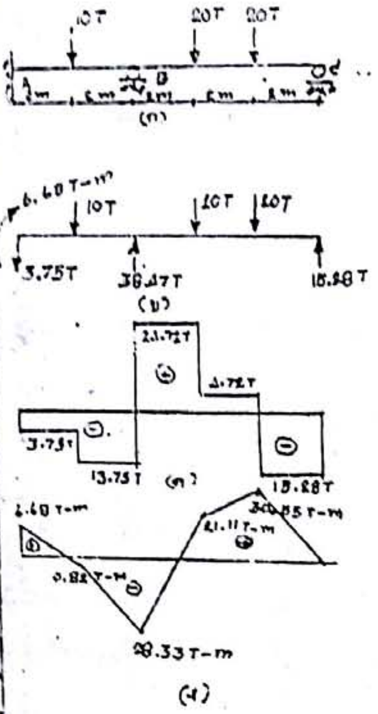
$R_6 = 7.5$ T

$\Sigma F_y = 0 ;\ R_5 = 12.5$ T

ได้ $R_a = R_1 = 7.5$ T , $R_b = R_2 + R_3 = 37.5$ T , $R_c = R_4 + R_5 = 37.5$ T , $R_d = R_6 = 7.5$ T ซึ่งนำไปเขียน Free body , SFD , BMD ดังรูป (ข)-(ง)

$\frac{1}{2EI}(2\theta_b - \theta_a - 3\Delta/L) + M_{ba}^F$

Example 3.9 นำคานต่อเนื่องรูป ก. โดยวิธี Slope - Deflection โดยที่จุด B ทรุดตัวลงไป 0.01 เมตร ($\Delta_b = 0.01$ m) พร้อมทั้งเขียน SFD และ BMD



Solution

1. หา Moment ที่ปลายแต่ละช่วง จากรูปพบว่า $\theta_a = 0$, θ_b และ θ_c ไม่เท่ากับศูนย์ และ $\Delta_b = 0.01$ หมายถึงถ้าพิจารณาช่วง AB ได้ $\Delta_{ab} = 0.01$ m ถ้าพิจารณาช่วง BC ได้ $\Delta_{bc} = -0.01$ m และมี Moment ปลายดังนี้

$M_{ab}^F = \frac{-10(2)(2)^2}{(4)^2} = -5$ T-m. ; $M_{ba}^F = \frac{10(2)(2)^2}{(4)^2} = 5$ T-m

$M_{bc}^F = -\frac{20(2)(4)^2}{(6)^2} - \frac{20(4)(2)^2}{(6)^2} = -26.67$ T-m.

$M_{cb}^F = +\frac{20(2)(4)^2}{(6)^2} + \frac{20(4)(2)^2}{(6)^2} = 26.67$ T-m

สมการได้ดังนี้

$M_{ab} = \frac{2EI}{4}(0 + \theta_b - 0.01(\frac{3}{4})) - 5$

$M_{ba} = \frac{2EI}{4}(2\theta_b + 0 - 0.01(\frac{3}{4})) + 5$

$M_{bc} = \frac{2EI}{6}(2\theta_b + \theta_c - \frac{3}{4}(-0.01)) - 26.67$.

$M_{cb} = \frac{2EI}{6}(2\theta_c + \theta_b - \frac{3}{4}(-0.01)) + 26.67$

2. จากสมการพบว่ามี 2 ตัวแปร หา 2 สมการ คือ.

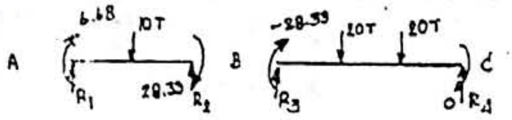
$\Sigma M_b = 0$; $1.67EI\theta_b + 0.33EI\theta_c - 0.00125 - 21.67 = 0$ .... (1)

$\Sigma M_c = 0$; $0.67EI\theta_c + 0.33EI\theta_b + 0.0025 + 26.67 = 0$ .... (2)

แก้สมการได้. $\theta_b = \frac{23.34}{EI}$, $\theta_c = -\frac{51.68}{EI}$

3. แทนค่าได้ $M_{ab} = 6.68$ T-m ; $M_{ba} = 28.33$ T-m ; $M_{bc} = -28.33$ T-m ; $M_{cb} = 0$

4. หา Reaction โดยนำโมเมนต์ที่ได้ในข้อ 3 ไปใส่ใน Free body ดังรูป.



ช่วง AB $\Sigma M_a = 0$

$4R_2 = 28.33 + 6.68 + 10(2) \Rightarrow R_2 = 13.75$ T.

$\Sigma F_y = 0$; $R_1 = -3.75$ T

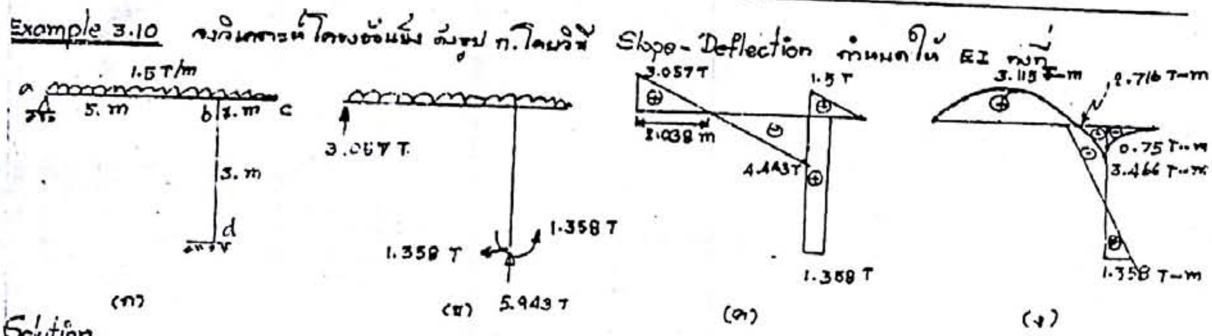
ช่วง BC $\Sigma M_b = 0$.

$6R_4 = -28.33 + 20(2) + 20(4) \Rightarrow R_4 = 15.28$ T

$\Sigma F_y = 0$; $R_3 = 24.72$ T

ได้ $R_a = R_1 = -3.75$ T , $R_b = R_2 + R_3 = 38.47$, $R_c = R_4 = 15.28$ T ซึ่งนำไปเขียน Free body , SFD และ BMD ได้ดังรูป (ข , ค) และ (ง)

Example 3.10 จงวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ดังรูป ก. โดยวิธี Slope - Deflection กำหนดให้ EI คงที่



Solution

1. หา Moment ที่ปลายแต่ละช่วง. จากรูปพบว่า θ_a , θ_b ไม่เท่ากับศูนย์ $\theta_d = 0$ และ Δ ในช่วงใดๆเท่ากับศูนย์ และมี Moment ที่เกิดจาก Load ดังนี้ $M_{ab}^F = -\frac{1}{12}wL^2 = -\frac{1}{12}(1.5)(5)^2 = -3.125$ T-m , $M_{ba}^F = \frac{1}{12}(1.5)(5)^2 = 3.125$ T-m

$M_{bc}^F = -\frac{1.5(1)^2}{2} = -0.75$ T-m. ; $M_{cd}^F = M_{dc}^F = 0$

ต่อจากหน้าที่แล้ว.

$m_{ab} = \frac{2EI}{5}(2\theta_a+\theta_b-0) - 3.125$

$m_{ba} = \frac{2EI}{5}(2\theta_b+\theta_a-0) + 3.125$

$m_{bc} = -0.75$

$m_{bd} = \frac{2EI}{3}(2\theta_b+0-0) + 0$

$m_{db} = \frac{2EI}{3}(0+\theta_b-0) + 0$

2. จากสมการ พบว่ามี 2 ตัวแปร ต้องสร้างสมการ 2 สมการได้.

$\Sigma M_a = 0$; $m_{ab} = 0 \Rightarrow 0.8EI\theta_a + 0.4EI\theta_b - 3.125 = 0$ .... (1)

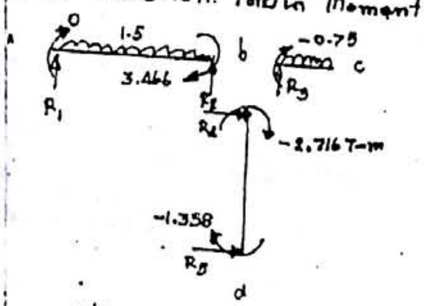
$\Sigma M_b = 0$; $m_{ba}+m_{bc}+m_{bd} = 0 \Rightarrow 0.4EI\theta_a + 2.13EI\theta_b - 0.75 = 0$ .... (2)

แก้สมการได้. $\theta_a = \frac{4.925}{EI}$, $\theta_b = -\frac{2.037}{EI}$

3. แทนค่าได้ $m_{ab} = 0$; $m_{ba} = 3.466$ T-m , $m_{bc} = -0.75$ T-m , $m_{bd} = -2.716$ T-m

$m_{db} = -1.358$ T-m.

4. หา Reaction โดยนำ Moment ในข้อ 3 ไปใส่ใน Free body ดังรูป



ช่วง ab

$\Sigma M_a = 0$; $5R_2 = 3.466 + 1.5(5)(\frac{5}{2})$

$R_2 = 4.443$

$\Sigma F_y = 0$; $R_1 = 3.037$ T

ช่วง bc $\Sigma F_y = 0$; $R_3 = 1.5$ T

ช่วง bd

$\Sigma M_b = 0$; $3R_5 = -1.358 - 2.716$

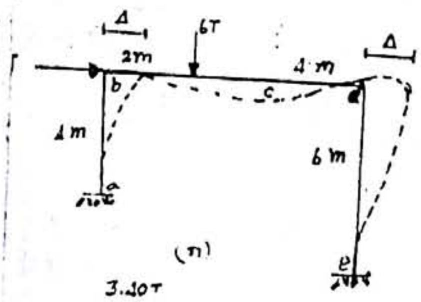
$R_5 = -1.358$ T

$\Sigma F_y = 0$; $R_4 = 1.358$ T

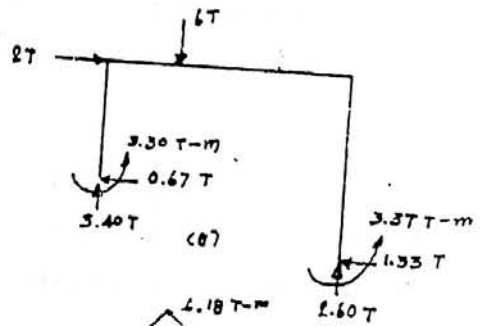
จะได้. $R_a = R_1 = 3.057$ T. , $R_d = R_2 + R_3 = 5.943$ T , $m_d = 1.358$ T-m (↺) หาได้เขียน Free body

SFD และ BMD ได้ดังรูป (ข), (ค) และ (ง)

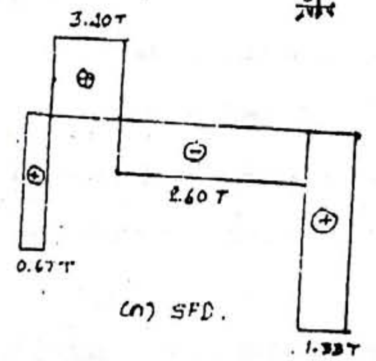
Example 3.11 จงวิเคราะห์โครงข้อแข็งดังรูป(ก) โดยวิธี Slope-Deflection กำหนดให้ EI คงที่



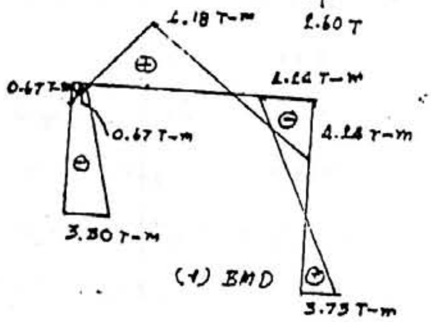
(ก)



(ข)



(ค) SFD.



(ง) BMD

Solution 1. หา Moment ที่ปลายแต่ละช่วง จากรูปพบว่า θ_a และ θ_e เท่ากับศูนย์ θ_b และ θ_d ไม่เป็นศูนย์ ในขณะเดียวกัน $\Delta_{ab} = \Delta$, $\Delta_{bd} = 0$, $\Delta_{de} = \Delta$ ดังรูป(ก) และมี Moment เนื่องจาก Load คือ

$M^F_{ab} = M^F_{ba} = M^F_{de} = M^F_{ed} = 0$; $M^F_{bd} = -6(2)(4)^2/6^2 = -5.33$ T-m ; $M^F_{db} = 6(2)^2(4)/(6)^2 = 2.67$ T-m

สมการที่ได้ คือ.

$M_{ab} = \frac{2EI}{4}(0+\theta_b - \frac{3}{4}(\Delta)) + 0.$

$M_{ba} = \frac{2EI}{4}(2\theta_b + 0 - \frac{3}{4}(\Delta)) + 0$

$M_{bd} = \frac{2EI}{6}(2\theta_b + \theta_d - 0) + (-5.33)$

$M_{db} = \frac{2EI}{6}(2\theta_d + \theta_b - 0) + 2.67.$

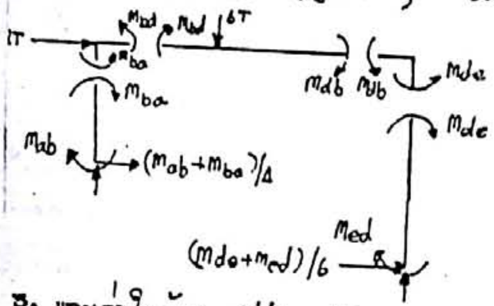
$M_{de} = \frac{2EI}{6}(2\theta_d + 0 - \frac{3}{6}(\Delta)) + 0$

$M_{ed} = \frac{2EI}{6}(0 + \theta_d - \frac{3}{6}(\Delta)) + 0$

2. จากสมการพบว่ามีตัวแปร 3 ตัว ต้องหาสมการได้.

$\Sigma M_b = 0$; $M_{ba} + M_{bd} = 0.$; $1.67\theta_b EI + 0.33\theta_d EI - 0.375\Delta EI - 5.33 = 0$ ...... (1)

$\Sigma M_d = 0$; $M_{db} + M_{de} = 0$; $0.33\theta_b EI + 1.33\theta_d EI - 0.167\Delta EI + 2.67 = 0$ ...... (2)



ซึ่งพบว่ายังขาดอีก 1 สมการ ซึ่งเราสามารถหาได้ โดยใช้สมดุลย์ในแนวแกน x ดังรูป.

$\Sigma F_x = 0.$; $2 + (M_{ab}+M_{ba})/4 + (M_{de}+M_{ed})/6 = 0$

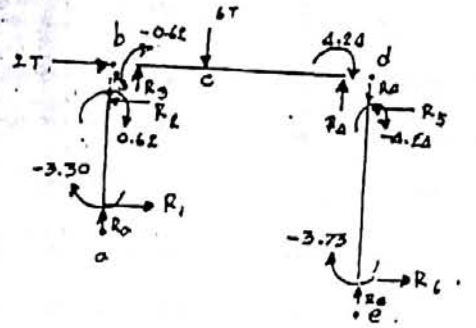
$0.375\theta_b EI + 0.167\theta_d EI - 0.243\Delta EI + 2 = 0$ .... (3)

แก้สมการได้: $\theta_b = \frac{7.84}{EI}$, $\theta_d = \frac{-1.86}{EI}$, $\Delta = \frac{19.26}{EI}$

3. แทนค่าในข้อ 1. ได้ $M_{ab} = -3.30$ T-m, $M_{ba} = 0.62$ T-m, $M_{bd} = -0.62$ T-m

$M_{db} = 4.24$ T-m, $M_{de} = -4.24$ T-m, $M_{ed} = -3.73$ T-m.

4. หา Reaction. โดยนำ Moment ในข้อ 3 ไปใส่ใน Free body ดังรูป.



ช่วง ab

$\Sigma M_b = 0$

$4R_1 = 0.62 - 3.30 \Rightarrow R_1 = -0.67$ T.

$\Sigma F_x = 0$; $R_2 = -0.67$. T.

ช่วง bd

$\Sigma M_b = 0$; $6R_4 = 4.24 - 0.62 + 6(2)$

$R_4 = 2.60$ T

$\Sigma F_y = 0$; $R_3 = 3.40$ T

ช่วง de

$\Sigma M_d = 0$; $6R_6 = -4.24 - 3.73$

$R_6 = -1.33$ T

$\Sigma F_x = 0$; $R_5 = -1.33$ T

จะได้: $R_{av} = R_3 = 3.40$ T , $R_{ah} = -R_1 = 0.67$ T , $R_{ev} = R_4 = 2.60$T

$R_{eh} = -R_6 = 1.33$T , $M_a = -M_{ab} = 3.30$, $M_e = -M_{ed} = 3.73$

เมื่อเขียน Free body , SFD, BMD ได้ดังรูป (ข), (ค), (ง)

3. วิธีของการกระจายโมเมนต์ (Moment Distribution Method)

วิธีของการกระจายโมเมนต์เป็นวิธีที่นิยมใช้กันมากสำหรับวิเคราะห์คาน และโครงข้อแข็ง ซึ่งเป็นโครงสร้างที่ต้านทานน้ำหนักบรรทุกโดยอาศัยโมเมนต์ดัดเป็นหลัก วิธีนี้ใช้การเคลื่อนที่เป็นตัวแปร เช่นเดียวกับวิธีมุมลาดระยะโก่ง จึงเป็นวิธีของการเคลื่อนที่วิธีหนึ่ง วิธีของการกระจายโมเมนต์อาศัยการคำนวณที่ง่ายๆ และมีความสะดวกรวดเร็ว เพราะมักไม่ต้องแก้สมการหลายชั้น ซึ่งอาจเสียเวลามากเพื่อหาค่าการเคลื่อนที่ก่อนดังวิธีมุมลาดระยะโก่ง วิธีนี้อาศัยการประมาณค่าโมเมนต์ที่ปลายชิ้นส่วนหลายๆ ครั้ง จนได้ค่าที่ละเอียดตามที่ต้องการ ในการวิเคราะห์โครงสร้างด้วยวิธีนี้ เราเริ่มโดยสมมุติจุดต่อทุกจุดของโครงสร้างถูกยึดไม่ให้เคลื่อนที่ชั่วคราว แล้วคำนวณหาโมเมนต์ปลายของชิ้นส่วนประกอบที่เกิดจากน้ำหนักบรรทุกสำหรับสภาพนี้ จากนั้นก็ทะยอยปล่อยจุดต่อให้หมุนเคลื่อนที่และกระจายโมเมนต์ที่ไม่สมดุลย์ที่จุดต่อให้แก่ชิ้นส่วนประกอบต่างๆ ซึ่งต่อกันที่จุดต่อนั้นๆ จนในที่สุดโมเมนต์ที่ไม่สมดุลย์มีค่าน้อย และทั้งผลรวมโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่แต่ละปลาย คือค่าของโมเมนต์ของแต่ละปลายของชิ้นส่วนประกอบนั้นเอง.

การกำหนดเครื่องหมายบวกลบแสดงทิศทางแรงและการเคลื่อนที่สำหรับวิธีของการกระจายโมเมนต์ เราจะใช้อย่างเดียวกับวิธีมุมลาดระยะโก่ง กล่าวคือ โมเมนต์ปลายและการหมุนของชิ้นส่วนประกอบในทิศทางตามเข็มนาฬิกาใช้เครื่องหมายบวก ส่วนทวนเข็มนาฬิกาใช้เครื่องหมายลบ ส่วนโมเมนต์ภายในของจุดต่อในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาใช้เครื่องหมายบวก.

วิธีของการกระจายโมเมนต์ใช้คำศัพท์ซึ่งมีนิยามดังนี้.

1. โมเมนต์ปลายยึดแน่น (Fixed-end moment) หมายถึง Moment ที่เกิดขึ้นที่ปลายชิ้นส่วนประกอบเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกที่กระทำบนชิ้นส่วนประกอบโดยสมมุติว่าปลายทั้งสองถูกยึดอยู่กับที่ โมเมนต์นี้ใช้อักษรย่อว่า FEM หรือ M^F และมีค่าสำหรับกรณีที่โมเมนต์ของความเฉื่อย (I) มีค่าคงที่ตลอดความยาว ดังที่แสดงในรูปที่ 3.5
2. สติฟเนสการหมุน หรือความแข็งเกร็งต้านการหมุน (Rotational Stiffness) หมายถึง โมเมนต์ปลายที่ทำให้เกิดการหมุนหนึ่งหน่วยที่ปลายหนึ่งของชิ้นส่วนประกอบในขณะที่อีกปลายหนึ่งยึดอยู่กับที่

สมมุติว่า คาน ab ในรูปที่ 3.7 ซึ่งมี EI คงที่ และปลาย a หมุนไปเป็นมุม $\theta_a = 1$ หน่วยเนื่องจากการกระทำของโมเมนต์ M_{ab} ในขณะที่ปลาย b ถูกยึดคงที่ไว้.

จากสมการมุมลาดระยะโก่ง

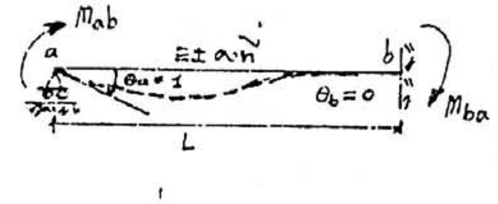
$$M_{ab} = (4EI/L)\,\theta_a = 4EK\theta_a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3.10$$

โดย K คือ ตัวคูณสติฟเนส (Stiffness factor) และ

$$K = I/L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3.11$$

ดังนั้น $$k_{ab} = M_{ab}/\theta_a = 4EI/L = 4EK \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3.12$$

โดยที่ k_{ab} คือ สติฟเนสการหมุน.



รูปที่ 3.7

3) <u>โมเมนต์ส่งข้าม (Carry-over moment)</u> ซึ่งใช้อักษรย่อว่า COM. หมายถึง -
โมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ปลายอีกข้างหนึ่งขององค์ประกอบเมื่อมีโมเมนต์มากระทำที่ปลายหนึ่ง ซึ่งหมุนได้
รูป 3.7 M_{ba} คือโมเมนต์ส่งข้าม อัตราส่วนระหว่างโมเมนต์ส่งข้ามต่อโมเมนต์ที่ปลายซึ่งหมุนได้ เรียกว่า 18/24
ตัวคูณการส่งข้าม (carry-over factor) และใช้ตัวอักษรย่อว่า C ดังนั้นตัวคูณการส่งข้ามจาก a ถึง b คือ

$$C_{ab} = M_{ba}/M_{ab} \quad \text{-----------} \quad 3.13$$

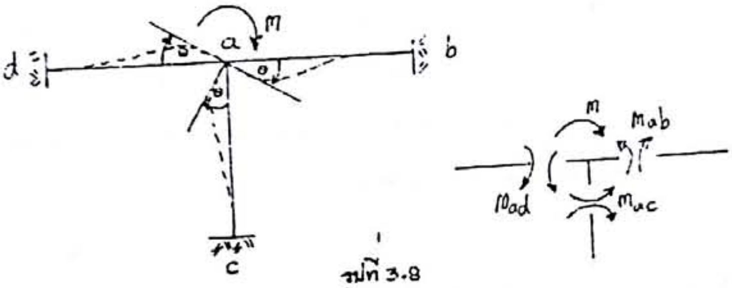
ดังนั้นโมเมนต์ส่งข้ามคือ $\quad M_{ba} = C_{ab} M_{ab}$ ----------- 3.14

จากสมการมุมลาดระยะโก่ง $\quad M_{ba} = (2EI/L)\theta_a = 2EK\theta_a$ ----------- 3.15

ดังนั้นสำหรับองค์ประกอบที่มีหน้าตัดคงที่ $\quad C_{ab} = \dfrac{M_{ba}}{M_{ab}} = \dfrac{2EK\theta_a}{4EK\theta_a} = \dfrac{1}{2}$

ทำนองเดียวกัน $\quad C_{ba} = \dfrac{1}{2} = C_{ab}$ ----------- 3.16

4) <u>ตัวคูณการกระจาย (Distribution factor)</u> ซึ่งใช้อักษรย่อ DF หมายถึงอัตราส่วนระหว่างค่าสติฟเนส
การหมุน (หรือตัวคูณสติฟเนส) ของชิ้นส่วน ต่อผลบวกของค่าสติฟเนสการหมุน (หรือตัวคูณสติฟเนส) ของ
ชิ้นส่วนทั้งหมด ซึ่งเชื่อมกันที่จุดๆ หนึ่ง



รูปที่ 3.8

รูปที่ 3.8 แสดงองค์ประกอบ 3 ชิ้นที่เชื่อมต่อกันที่จุด a และมีโมเมนต์ภายนอกเท่ากับ M กระทำที่จุดนั้น ปลาย a ของทุกชิ้นส่วนจะหมุนตามเข็มนาฬิกาไปทางเดียวกับ M ด้วยมุมที่เท่ากัน ซึ่งเรียกว่า θ โมเมนต์ M ถูกต้านด้วยโมเมนต์ปลาย คือ M_{ab}, M_{ac} และ M_{ad} โดยมี

$$\left.\begin{aligned} M_{ab} &= (4EI/L)_{ab}\theta = 4EK_{ab}\theta = k_{ab}\theta \\ M_{ac} &= (4EI/L)_{ac}\theta = 4EK_{ac}\theta = k_{ac}\theta \\ M_{ad} &= (4EI/L)_{ad}\theta = 4EK_{ad}\theta = k_{ad}\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{-----------} \quad 3.17$$

สมการเหล่านี้แสดงว่าเมื่อมีโมเมนต์ภายนอกมากระทำที่ข้อต่อขององค์ประกอบต่างๆ โดยที่ปลายอีกข้างหนึ่งของแต่ละองค์ประกอบยึดแน่น จะมีโมเมนต์เกิดขึ้นที่ปลายของข้อต่อ มีค่าเป็นสัดส่วนตรงกับค่าสติฟเนสของแต่ละชิ้นส่วน

จากการสมดุลของโมเมนต์กระทำที่ข้อต่อ a.

$$\left.\begin{aligned} M &= M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} \\ &= (k_{ab} + k_{ac} + k_{ad})\theta \\ &= 4E(K_{ab} + K_{ac} + K_{ad})\theta \end{aligned}\right\} \quad \text{-----------} \quad 3.18$$

$$\theta = \frac{M}{\Sigma k} = \frac{M}{4E\Sigma K} \quad \text{-----------} \quad 3.19$$

$$\text{โดยที่} \quad \left.\begin{aligned} \Sigma k &= k_{ab} + k_{ac} + k_{ad} \\ \Sigma K &= K_{ab} + K_{ac} + K_{ad} \end{aligned}\right\} \quad \text{-----------} \quad 3.20$$

19/24

ดังนั้น

$$
\left.\begin{aligned}
M_{ab} &= \frac{k_{ab}}{\Sigma k} M = \frac{K_{ab}}{\Sigma K} M = r_{ab} M \\
M_{ac} &= \frac{k_{ac}}{\Sigma k} M = \frac{K_{ac}}{\Sigma K} M = r_{ac} M \\
M_{ad} &= \frac{k_{ad}}{\Sigma k} M = \frac{K_{ad}}{\Sigma K} M = r_{ad} M
\end{aligned}\right\} \quad \text{- - - - - - - 3.21}
$$

สมการเหล่านี้แสดงว่าโมเมนต์ M ที่กระทำโดยข้อต่อถูกแบ่งกระจายระหว่างปลายองค์ประกอบที่เชื่อมกันที่ข้อต่อนั้นเป็นสัดส่วนกับตัวคูณการกระจายของชิ้นส่วน.

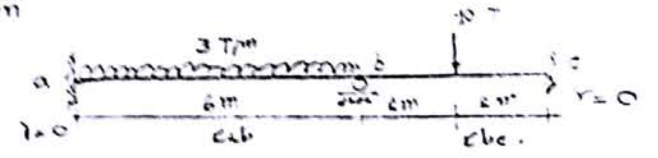
ดังนั้นจะเห็นได้ว่าถ้ามีโมเมนต์ M กระทำที่จุดต่อ a ระหว่างองค์ประกอบต่าง ๆ ซึ่งมีปลายอีกข้างหนึ่งยึดคงที่อยู่ ดังในรูป 3.8 เราคำนวณหาโมเมนต์ที่ปลาย a ของแต่ละชิ้นส่วนได้โดยใช้สมการ 3.21 และคำนวณโมเมนต์ที่ปลายอีกปลายหนึ่งได้โดยใช้สมการทำนองเดียวกับสมการ 3.14.

<u>ลำดับการวิเคราะห์โครงสร้างแบบวิธีการกระจายโมเมนต์</u>

1. เปรียบเทียบ stiffness factor, K ของชิ้นส่วนต่าง ๆ ในโครงสร้างเพื่อจะหา Distribution factor, r ของข้อต่อต่าง ๆ ในโครงสร้าง
2. หา FEM ของแต่ละชิ้นส่วนซึ่งเกิดจากน้ำหนักภายนอก แล้วเขียน F.E.M ลงในแต่ละปลายของชิ้นส่วน.
3. หาค่าโมเมนต์ยึดไม่สมดุลในแต่ละจุดต่อ แล้วกระจายโมเมนต์ยึดออกไปตามชิ้นส่วนต่าง ๆ ตามค่าของ distribution factor. โมเมนต์ที่กระจายออกนี้เรียกว่า distributed moment (DM)
4. ถ่าย distribution Moment ไปยังปลายอีกด้านหนึ่งของชิ้นส่วน โดยใช้ตามค่า carry over factor ซึ่งโมเมนต์ยึดนี้เรียกว่า carry-over moment (COM)
5. เริ่มที่จุดอื่น ๆ ตามข้อ (3) และ (4) ใหม่ เพื่อให้จุดต่อต่าง ๆ ในโครงสร้างมีค่าโมเมนต์ยึดไม่สมดุลน้อยตามความต้องการ ค่าโมเมนต์ยึดไม่สมดุลยิ่งมีค่าใกล้ศูนย์ก็แสดงว่าโครงสร้างอยู่ในสภาพสมดุลย์.
6. รวมโมเมนต์ยึดแต่ละปลาย ผลลัพธ์จะเป็นโมเมนต์ยึดแต่ละปลายของชิ้นส่วน.

Example 3.12 จงวิเคราะห์คานต่อเนื่อง โดยวิธี Moment Distribution ดังรูป

ให้ EI คงที่



Solution

	a	b (ba)	b (bc)	c
K	I/6		I/4	
r	0	0.4	0.6	0
FEM	-9	+9	-5	+5
DM	0	-1.6	-2.4	0
COM	-0.8	0	0	-1.2
DM	0	0	0	0
m	-9.8	+7.4	-7.4	+3.8

Find DM.

$9+(-5) = 4 \rightarrow (-4\times 0.4)$ DM = -1.6

$\rightarrow (-4 \times 0.6)$ DM = -2.4

FEM = Fix End Moment

DM = Distribution Moment

COM = Carry over Moment.

K = I/L Rotation Stiffness

r = Distribution Factor.

1. เตรียมค่า stiffness factor (K) และค่า Distribution Factor (r)

$K_{ab} = \frac{I}{6}$, $K_{bc} = \frac{I}{4}$ --- แล้วนำไปใส่ในตาราง

$r_{ab} = \frac{K_{ab}}{K_{ab}+\infty} = \frac{I/6}{I/6+\infty} = 0$

$r_{ba} = \frac{K_{ab}}{K_{ab}+K_{bc}} = \frac{I/6}{I/6+I/4} = 0.4$

$r_{bc} = \frac{K_{bc}}{K_{ab}+K_{bc}} = \frac{I/4}{I/6+I/4} = 0.6$ --- แล้วนำไปใส่ในช่องที่เหมือนแถวที่สอง

$r_{cb} = \frac{K_{bc}}{K_{bc}+\infty} = \frac{I/4}{I/4+\infty} = 0$

Note ปลายที่เป็น fix end ค่า K อีกด้านมีค่า = ∞ ซึ่งทำให้ค่า r = 0

2. หา Fix End Moment (FEM or m^F)

$m^F_{ab} = -\frac{1}{12}wL^2 = -\frac{1}{12}(3)(6)^2 = -9$ T-m ; $m^F_{ba} = \frac{1}{12}wL^2 = \frac{1}{12}(3)(6)^2 = 9$ T-m

$m^F_{bc} = \frac{-Pab^2}{L^2} = -\frac{10(2)(2)^2}{(4)^2} = -5$ T-m ; $m^F_{cb} = \frac{Pba^2}{L^2} = \frac{10(2)(2)^2}{(4)^2} = 5$ T-m } นำไปใส่ในแถวที่สาม

3. หาค่า DM โดยการรวมค่าโมเมนต์ที่ปลายจุดต่อ แล้วเปลี่ยนเครื่องหมาย คูณด้วย r

$DM_{ab} = 9(0) = 0$, $DM_{ba} = (-4)(0.4) = -1.6$

$DM_{bc} = (-4)(0.6) = -2.4$, $DM_{cb} = (-5)(0) = 0$ } นำไปใส่ในแถวที่สี่

4. หา Carry - Over Moment (COM) โดยใช้สูตรดังนี้

$COM_{ab} = \frac{1}{2}DM_{ba}$ และ $COM_{ba} = \frac{1}{2}DM_{ab}$

$\therefore$ $COM_{ab} = \frac{1}{2}(-1.6) = -0.8$; $COM_{ba} = \frac{1}{2}(0) = 0$

$COM_{bc} = \frac{1}{2}(0) = 0$; $COM_{cb} = \frac{1}{2}(-2.4) = -1.2$ } ...... นำไปใส่ในแถวที่ห้า

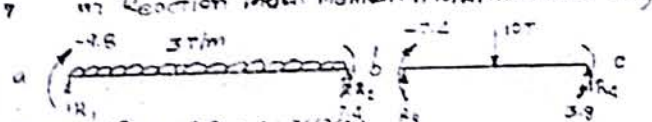
5. ทำซ้ำข้อ 3-4 ไปจนกระทั่ง DM เข้าใกล้ศูนย์หรือเท่ากับศูนย์

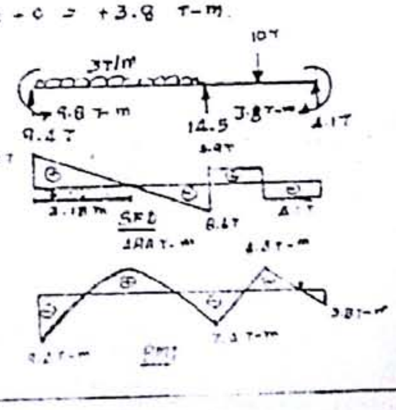
6. หาโมเมนต์ (m) โดยการรวมค่าโมเมนต์ทั้งหมดที่ปลายแต่ละด้าน

$m_{ab} = -9+0-0.8+0 = -9.8$ T-m $m_{bc} = -5-2.4+0+0 = -7.4$ T-m

$m_{ba} = +9-1.6+0-0 = 7.4$ T-m $m_{cb} = +5+0-1.2+0 = +3.8$ T-m

7. หา Reaction โดยนำ Moment ที่ได้มาเขียน Free body ดังรูป





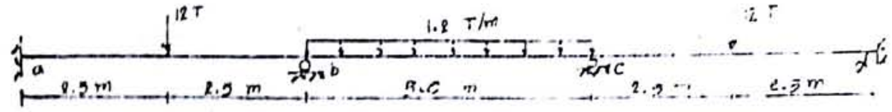
$\Sigma M_a = 0$; $6R_2 = -9.8+7.4+3(6)(3)$ $\Sigma M_b = 0$; $4R_4 = -7.4+3.8+10(2)$

$R_2 = 8.6$ T $R_4 = 4.1$ T

$\Sigma F_y = 0$: $R_1 = 9.4$ T $\Sigma F_y = 0$: $R_3 = 5.9$ T

21/24

Example 3.13 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องโดยวิธี Moment Distribution กำหนดให้ EI คงที่



(7.5)+(2.5) = 5
DM c (-5)(0.5) = -2.5

Solution

	a	b		c		d
K	I/5		I/5		I/5	
r	0.	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM	-7.5	7.5	-2.5	2.5	-7.5	7.5
DM	0	-2.5	-2.5	2.5	2.5	0
COM	-1.25	0	1.25	-1.25	0	1.25
DM	0	-0.625	-0.625	0.625	0.625	0
COM	-0.31	0	0.31	-0.31	0	0.31
DM	0	-0.16	-0.16	0.16	0.16	0
COM	-0.08	0	0.08	-0.08	0	0.08
DM	0	-0.04	-0.04	0.04	0.04	0
COM	-0.02	0	0.02	-0.02	0	0.02
DM	0	-0.01	-0.01	0.01	0.01	0
M	-9.16	4.17	-4.17	4.17	-4.17	9.16

= -0.625

(1) เริ่มจากหา stiffness factor (K) และค่า Distribution factor (r)

$K_{ab} = \frac{I}{5}$, $K_{bc} = \frac{I}{5}$, $K_{cd} = I/5$.

$r_{ab} = \frac{K_{ab}}{K_{ab}+\infty} = \frac{I/5}{I/5+\infty} = 0$, $r_{ba} = \frac{I/5}{I/5+I/5} = 0.5$

$r_{bc} = \frac{K_{bc}}{K_{bc}+K_{ab}} = \frac{I/5}{I/5+I/5} = 0.5$, $r_{cb} = \frac{K_{cb}}{K_{cb}+K_{cd}} = \frac{I/5}{I/5+I/5} = 0.5$

$r_{cd} = \frac{K_{cd}}{K_{cb}+K_{cd}} = \frac{I/5}{I/5+I/5} = 0.5$, $r_{dc} = \frac{K_{dc}}{K_{dc}+\infty} = \frac{I/5}{I/5+\infty} = 0$

(2) หา Fix End Moment (FEM)

$M^F_{ab} = -\frac{12(2.5)(2.5)^2}{(5)^2} = -7.5$ T-m. $M^F_{ba} = \frac{12(2.5)(2.5)^2}{(5)^2} = 7.5$ T-m.

$M^F_{bc} = -\frac{1}{12}(1.2)(5)^2 = -2.5$ T-m $M^F_{cb} = \frac{1}{12}(1.2)(5)^2 = 2.5$ T-m.

$M^F_{cd} = -\frac{12(2.5)(2.5)^2}{(5)^2} = -7.5$ T-m $M^F_{dc} = \frac{12(2.5)(2.5)^2}{(5)^2} = 7.5$ T-m

(3), 4., 5. เป็นการกระจาย Moment เหมือนที่อธิบายใน Example 3.12

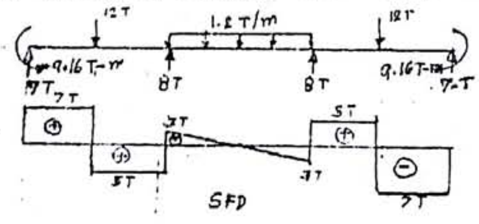
(6) หา Moment ของแต่ละ Column.

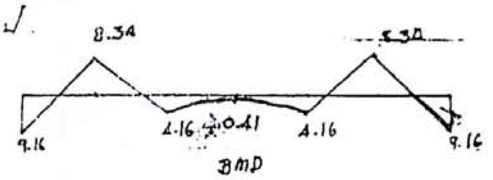
ได้ $M_{ab} = -7.5+0-1.25+0-0.31+0-0.08+0-0.02+0 = -9.16$ T-m.

$M_{ba} = 4.17$ T-m $M_{bc} = -4.17$ T-m , $M_{cb} = 4.17$ T-m , $M_{cd} = -4.17$ T-m

$M_{dc} = 9.16$ T-m.

(7) หา Reaction และเขียน SFD BMD ได้ดังรูป

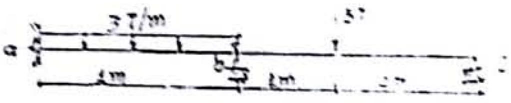




22/24

Example 3.13 [illegible] Moment [illegible]

EI คงที่



$2(4)+(-3.6)=0.4$

$\hookrightarrow (-0.40)$

DM $\Rightarrow \left(-0.40\times\frac{5}{9}\right) = -0.22$

$\Rightarrow \left(0.40\times\frac{4}{9}\right) = -0.18$

CO $(-1.20) = -1.20$

DM $\Rightarrow \left(1.20\times\frac{5}{9}\right) = 0.67$

$\Rightarrow \left(1.20\times\frac{4}{9}\right) = 0.53$

Solution

	a		b		c
	$I/4$			$I/5$	
r	0		5/9	4/9	1
FEM	-4.00		+4.00	-3.60	2.40
DM	0		-0.22	-0.18	-2.40
COM	-0.11		0	-1.20	-0.09
DM	0		0.67	0.53	0.09
COM	0.33		0	0.04	0.26
DM	0		-0.02	-0.02	-0.26
COM	-0.01		0	-0.13	-0.01
DM	0		0.07	0.06	0.01
M	-3.79		4.50	-4.50	0

1. เปรียบเทียบ stiffness factor (K) และหาค่า Distribution Factor (r)

$K_{ab} = I/4 \quad , K_{bc} = I/5$

$r_{ab} = \frac{K_{ab}}{K_{ab}+\infty} = \frac{I/4}{I/4+\infty} = 0 \; ; \; r_{ba} = \frac{I/4}{I/4+I/5} = 5/9$

$r_{bc} = \frac{I/5}{I/4+I/5} = \frac{4}{9} \; ; \; r_{cb} = \frac{I/5}{I/5+0} = 1$ Note ปลายที่เป็น hinge หรือ roller ค่า K ของส่วนนั้นเป็น 0 ซึ่งทำให้ r = 1

2. หาค่า Fix End Moment (FEM or M^F)

$M^F_{ab} = -\frac{1}{12}(3)(4)^2 = -4$ T-m $\quad M^F_{ba} = \frac{1}{12}(3)(4)^2 = 4$ T-m.

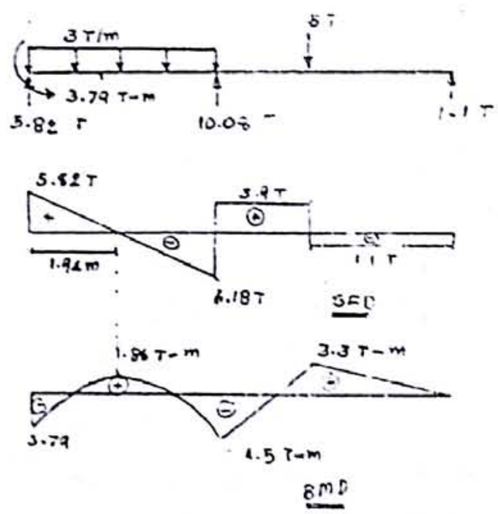
$M^F_{bc} = -\frac{5(3)^2(2)}{(5)^2} = -3.6$ T-m $\quad M^F_{cb} = \frac{5(2)^2(3)}{(5)^2} = 2.4$ T-m

3, 4, 5. เริ่มการกระจาย Moment ทำนองเดียวกับ Example 3.12

6. หา Moment [illegible] Column ได้

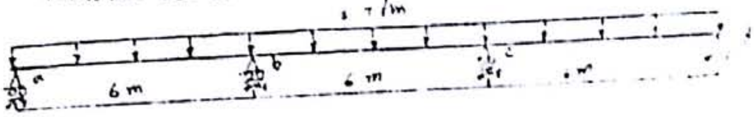
$M_{ab} = -3.79$ T-m, $M_{ba} = 4.50$ T-m $\quad M_{bc} = -4.50$ T-m $\quad , M_{cb} = 0$.

7. หา Reaction และเขียน SFD, BMD ดังรูป



23/24

Example 3.15 จงวิเคราะห์โครงสร้างดังรูป โดยวิธี Slope - Deflection
กำหนดให้ EI คงที่



Soln.

	a	b		c		d
	$I/6$		$I/6$		$I/6$	
r	1	0.5	0.5	0.5	0.5	1.00
FEM	-3.00	3.00	-3.00	3.00	-3.00	-3.00
DM	3.00	0	0	0	0	0
COM	0	1.50	0	0	-1.50	0
DM	0	-0.75	-0.73	0.75	0.75	0.38
COM	-0.38	0	0.38	-0.38	0	-0.38
DM	0.35	-0.19	-0.19	0.19	0.19	0.09
COM	-0.09	0.19	0.09	-0.04	-0.19	-0.09
DM	0.09	-0.14	-0.14	0.14	0.14	0.07
COM	-0.07	0.04	0.07	-0.07	-0.06	-0.07
DM	0.07	-0.05	-0.05	0.05	0.05	0.00
m.	0.00	-3.60	3.59	-3.59	3.60	

1. เขียนค่า Stiffness factor (K) และหาค่า Moment Distribution (r)

$K_{ab} = I/6$, $K_{bc} = I/6$, $K_{cd} = I/6$

$r_{ab} = \frac{I/6}{I/6+0} = 1$, $r_{ba} = \frac{I/6}{I/6+I/6} = 0.5$, $r_{bc} = \frac{I/6}{I/6+I/6} = 0.5$

$r_{cb} = \frac{I/6}{I/6+I/6} = 0.5$, $r_{cd} = \frac{I/6}{I/6+I/6} = 0.5$, $r_{dc} = \frac{I/6}{I/6+0} = 1.0$

2. หาค่า Fix End Moment (FEM or m^F)

$m^F_{ab} = -\frac{1}{12}(3)(6)^2 = -3.00$ T-m , $m^F_{ba} = \frac{1}{12}(3)(6)^2 = 3.00$ T-m , $m^F_{bc} = -\frac{1}{12}(3)(6)^2 = -3.00$ T-m

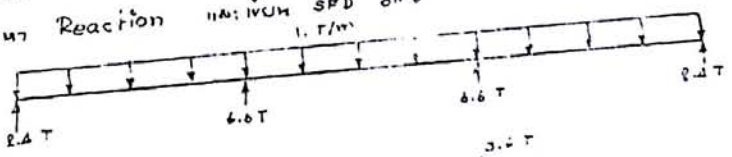
$m^F_{cb} = \frac{1}{12}(3)(6)^2 = 3.00$ T-m , $m^F_{cd} = -\frac{1}{12}(3)(6)^2 = -3.00$ T-m , $m^F_{dc} = \frac{1}{12}(3)(6)^2 = 3.00$ T-m

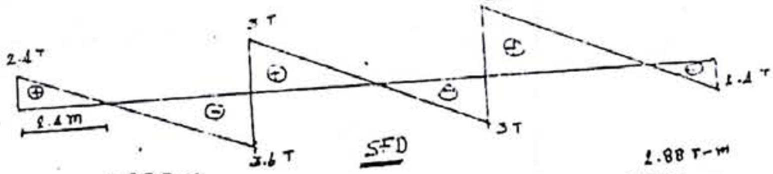
3, 4, 5. เป็นการกระจาย Moment ต่างๆ มีวิธีเหมือน Example ที่แล้ว

6. $m_{ab} = 0.00$, $m_{ba} = -3.60$ T-m , $m_{bc} = 3.59$ T-m , $m_{cb} = -3.59$ T-m

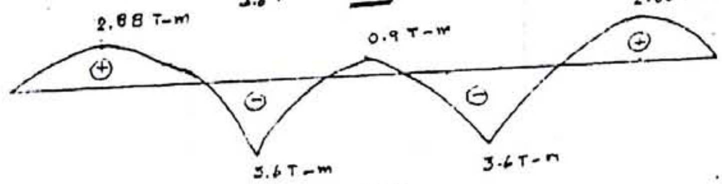
$m_{cd} = 3.60$ T-m , $m_{dc} = 0.00$ T-m

7. หา Reaction และเขียน SFD BMD



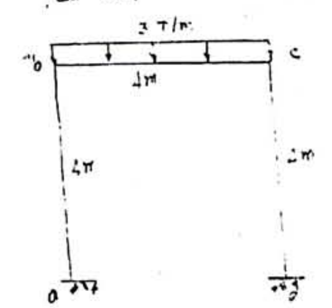


SFD



BMD

Example 3.16 จงวิเคราะห์โครงข้อแข็ง ด้วยวิธี Moment Distribution กำหนดให้ EI คงที่



Solution

	a	b	b	c	c	d
K		I/4		I/4		I/4
r	0	1/2	1/2	1/2	1/2	0
FEM	0	0	-4.00	4.00	0	0
DM	0	2.00	2.00	-2.00	-2.00	0
COM	1.00	0	-1.00	1.00	0	-1.00
DM	0	0.5	0.5	-0.5	-0.5	0
COM	0.25	0	-0.25	0.25	0	-0.25
DM	0	0.12	0.12	-0.12	-0.12	0
COM	0.06	0	-0.06	0.06	0	-0.06
DM	0	0.03	0.03	-0.03	-0.03	0
M	1.31	2.65	-2.66	2.66	-2.65	-1.31

1 เปรียบเทียบ K และหา r.

$K_{ab} = I/4$, $K_{bc} = I/4$, $K_{cd} = I/4$

$r_{ab} = \frac{I/4}{I/4+\infty} = 0$, $r_{ba} = \frac{I/4}{I/4+I/4} = 1/2$, $r_{bc} = \frac{I/4}{I/4+I/4} = \frac{1}{2}$

$r_{cb} = \frac{I/4}{I/4+I/4} = 1/2$, $r_{cd} = \frac{I/4}{I/4+I/4} = 1/2$, $r_{dc} = \frac{I/4}{I/4+\infty} = 0$

2 หา M^F

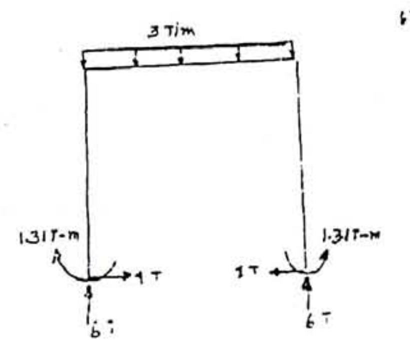
$M^F_{ab} = 0$, $M^F_{ba} = 0$, $M^F_{bc} = -\frac{1}{12}(3)(4)^2 = -4$ T-m , $M^F_{cb} = \frac{1}{12}(3)(4)^2 = 4$ T-m , $M^F_{cd} = 0$, $M^F_{dc} = 0$

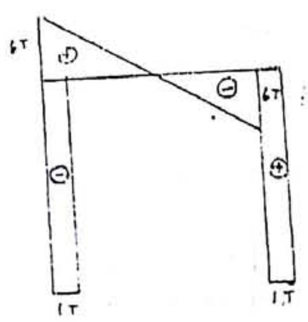
3, 4, 5. ขั้นตอนกระจาย Moment ต่างๆ ตาม Example 3.12

6. หา Moment ของแต่ละ Column.

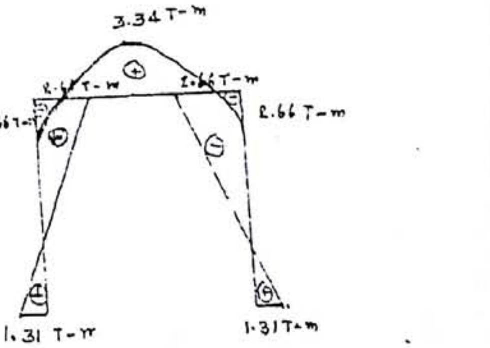
$M_{ab} = 1.31$ T-m , $M_{ba} = 2.65$ T-m , $M_{bc} = -2.66$ T-m , $M_{cb} = 2.66$ T-m , $M_{cd} = -2.65$ T-m , $M_{dc} = -1.31$ T-m

7. หา Reaction และเขียน SFD , BMD





SFD



BMD