พลศาสตร์โครงสร้างเบื้องต้น

BASIC STRUCTURAL DYNAMICS

นคร ภู่วโรดม

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

9 July 2014

พลศาสตร์โครงสร้าง (Structural Dynamics)

<u>วัตถุประสงค์</u>

ศึกษาพฤติกรรมของโครงสร้างภายใต้แรงพลวัต (Dynamic force) และวิเคราะห์ผลการตอบสนอง (Response) สำหรับปัญหาแบบต่าง ๆ เพื่อที่จะสามารถตรวจสอบความเหมาะสมของโครงสร้าง ทั้งทางด้านความปลอดภัย (Safety) และความเหมาะสมที่จะใช้งาน (Serviceability)

เนื้อหาของการนำเสนอ

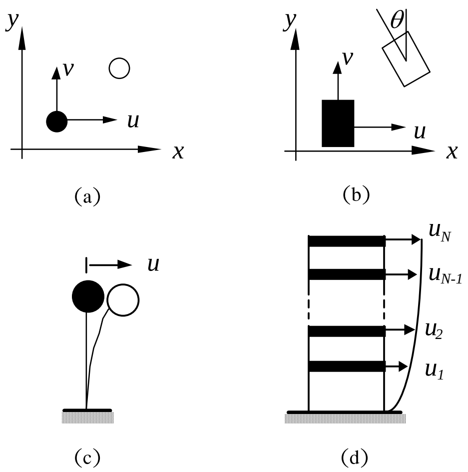
- ระบบโครงสร้างแบบง่าย
- สมการของการเคลื่อนที่
- การสั่นแบบอิสระ
- การสั่นเนื่องจากแรงภายนอกแบบฮาร์โมนิค
- ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง
- ระบบที่มีคุณสมบัติต่อเนื่อง

Some examples and figures are from
“Dynamics of Structures by Anil K. Chopra”

ระบบโครงสร้างแบบง่าย

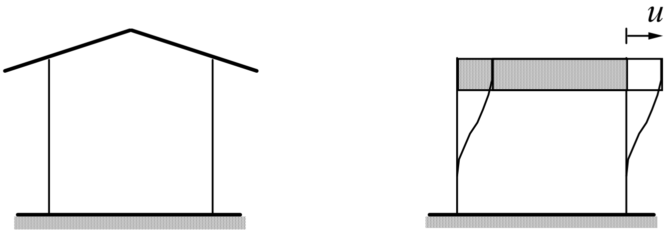
ระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) DOF

- ***จำนวนของระยะพิกัดอิสระที่สามารถใช้อธิบายการเคลื่อนที่ได้อย่างสมบูรณ์***



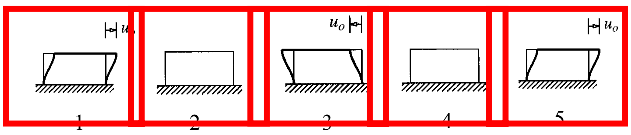
ระบบที่มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับหนึ่ง

Single Degree-of-Freedom System (SDOF)

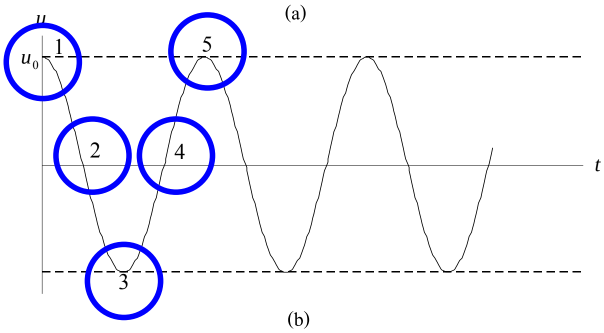


เพื่อการศึกษาพื้นฐานของพลศาสตร์โครงสร้าง และสามารถประยุกต์สำหรับปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นได้ต่อไป

องค์ประกอบของระบบพลวัต



(a)



(b)

แรงที่เกิดขึ้นระหว่างการเคลื่อนที่

- **แรงเฉื่อย (Inertia force)**
- **แรงสติฟเนส (Stiffness force)**
- **แรงหน่วง (Damping force)**

องค์ประกอบของระบบพลวัต

ผลตอบสนองที่เกิดขึ้นระหว่างการเคลื่อนที่

- การขจัด (Displacement) $u(t)$

- ความเร็ว (Velocity) $v(t) = \dfrac{\Delta u}{\Delta t} = \dfrac{du}{dt}$ ใช้สัญลักษณ์ $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$

- ความเร่ง (Acceleration) $a(t) = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{d^2u}{dt^2}$ ใช้สัญลักษณ์ $\ddot{u} = \dfrac{d^2u}{dt^2}$

ก. องค์ประกอบพื้นฐานของแรงเฉื่อย

มวล (Mass) m

กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน

แรงเฉื่อย (Inertia force) $f_I = m\dfrac{d^2u}{dt^2}$

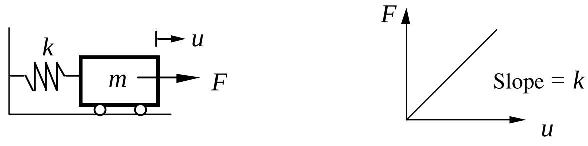
ใช้สัญลักษณ์ $\ddot{u} = \dfrac{d^2u}{dt^2}$ ดังนั้น

$$\boxed{f_I = m\ddot{u}}$$

แรง = มวล X ความเร่ง

ข. องค์ประกอบพื้นฐานของแรงสติฟเนส

สติฟเนส (Stiffness) k



(a) (b)

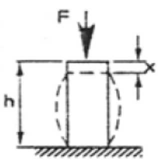
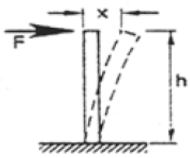
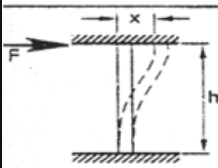
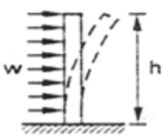
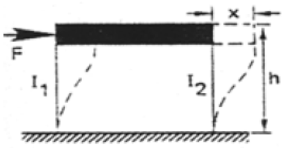
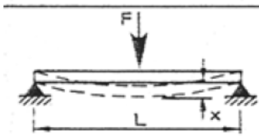
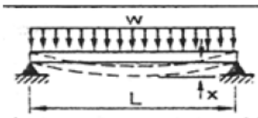
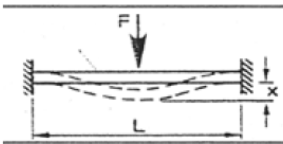
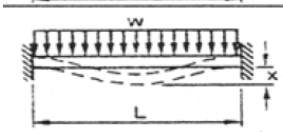
กฎของฮุค

แรงสติฟเนส (Stiffness force) f_S

$$\boxed{f_S = ku}$$

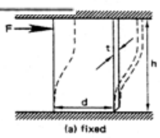
แรง = ค่าสติฟเนส X การขจัด

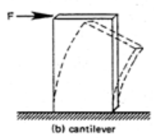
Deflection and Stiffness for Various Systems
(Due to Bending Moment Alone)

System	Maximum Deflection (x)	Stiffness (k)
	$\frac{Fh}{AE}$	$\frac{AE}{h}$
	$\frac{Fh^3}{3EI}$	$\frac{3EI}{h^3}$
	$\frac{Fh^3}{12EI}$	$\frac{12EI}{h^3}$
	$\frac{wL^4}{8EI}$	$\frac{8EI}{L^3}$
	$\frac{Fh^3}{12E(I_1+I_2)}$	$\frac{12E(I_1+I_2)}{h^3}$
	$\frac{FL^3}{48EI}$	$\frac{48EI}{L^3}$
 (w is load per unit length)	$\frac{5wL^4}{384EI}$	$\frac{384EI}{5L^3}$
	$\frac{FL^3}{192EI}$	$\frac{192EI}{L^3}$
 (w is load per unit length)	$\frac{wL^4}{384EI}$	$\frac{384EI}{L^3}$

สติฟเนส = แรงที่ทำให้เกิดการเสียรูปหนึ่งหน่วย

$$k = \left[\frac{h^3}{12EI} + \frac{1.2h}{AG}\right]^{-1}$$



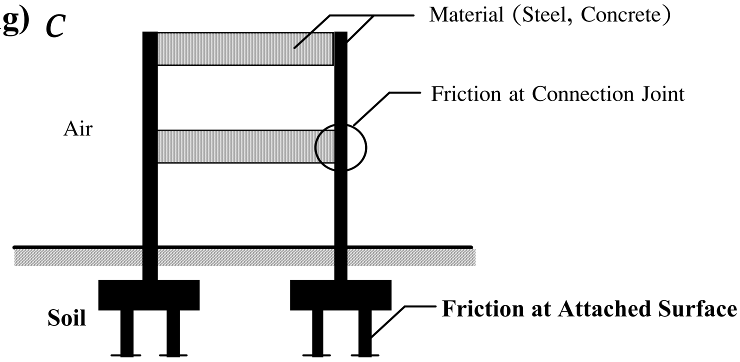


$$k = \left[\frac{h^3}{3EI} + \frac{1.2h}{AG}\right]^{-1}$$

ค. องค์ประกอบพื้นฐานของแรงหน่วง

ความหน่วง (Damping) c

ที่มาของความหน่วงในโครงสร้าง



จากการทดลองพบว่า

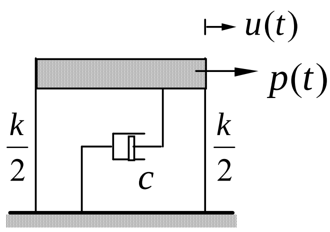
แรงหน่วง (Damping force) $$f_D = c\frac{du}{dt}$$

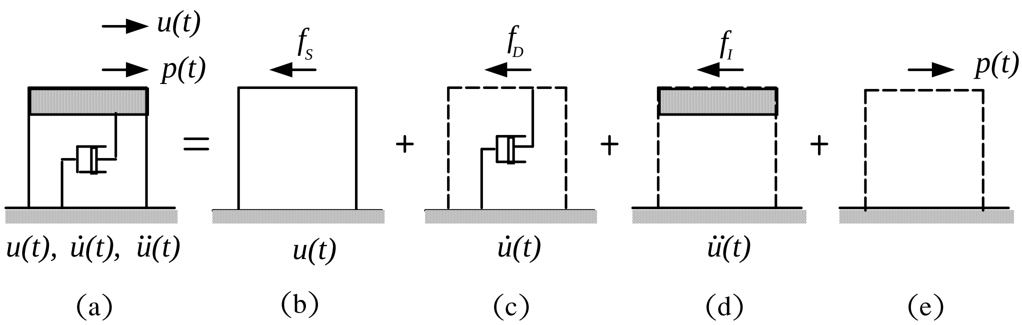
ใช้สัญลักษณ์ $\dot{u} = \dfrac{du}{dt}$ **ดังนั้น**

$$\boxed{f_D = c\dot{u}}$$

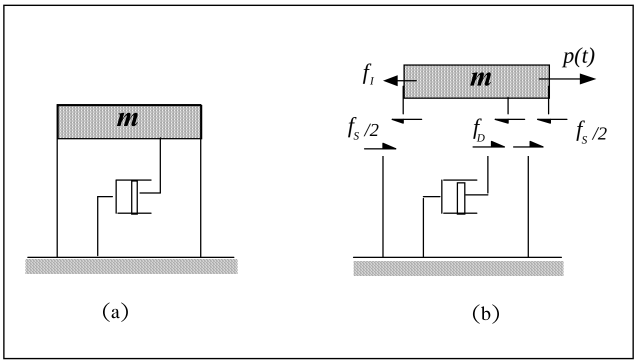
แรง = ค่าความหน่วง X ความเร็ว

แบบจำลองสำหรับระบบ SDOF





สมการของการเคลื่อนที่



จาก Free Body Diagram ของมวล *m*

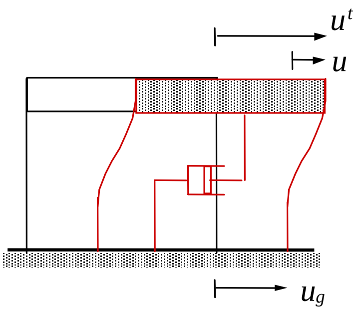
$$f_I + f_D + f_S = p(t)$$

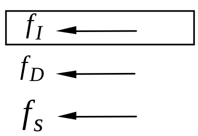
ดังนั้น

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)}$$

Dynamic Equilibrium → ***Equation of Motion***

สมการของการเคลื่อนที่สำหรับโครงสร้างภายใต้แผ่นดินไหว

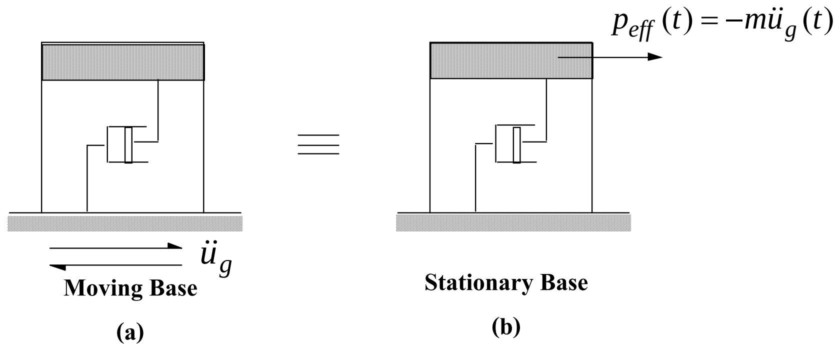




- **การขจัดรวมของมวล** m $\quad u^t(t) = u(t) + u_g(t)$
- **สมดุล** $\quad f_I + f_D + f_S = 0$
- **แรงเฉื่อย** $\quad f_I = m\ddot{u}^t$
- **สมการของการเคลื่อนที่** $\quad m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku = 0$

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)}$$

แรงแผ่นดินไหวประสิทธิผล



Effective Earthquake Force $p_{eff}(t)$

$$\boxed{p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_g(t)}$$

แรงจากแผ่นดินไหว มีค่าตามมวล (หรือน้ำหนักของโครงสร้าง) และความเร่งของพื้น

การสั่นไหวของโครงสร้าง

- การสั่นแบบอิสระ (ไม่มีแรงภายนอก)
  - ระบบที่ไม่มีความหน่วง
  - ระบบที่มีความหน่วง
- การสั่นเนื่องจากแรงภายนอกแบบฮาร์โมนิค

การสั่นแบบอิสระของระบบที่ไม่มีความหน่วง

$$m\ddot{u} + \cancelto{0}{c\dot{u}} + ku = \cancelto{0}{p(t)} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{u} + ku = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0$$ **หรือ** $$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$ **โดยที่** $$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

คำตอบ

$$\boxed{u(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t}$$ A, B หาได้จากสภาวะเริ่มต้น

$$\dot{u}(t) = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t$$

$$\ddot{u}(t) = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t$$

หากสภาวะเริ่มต้นคือ ที่เวลา 0 วินาที

Displacement = $u(0)$ Velocity = $\dot{u}(0)$

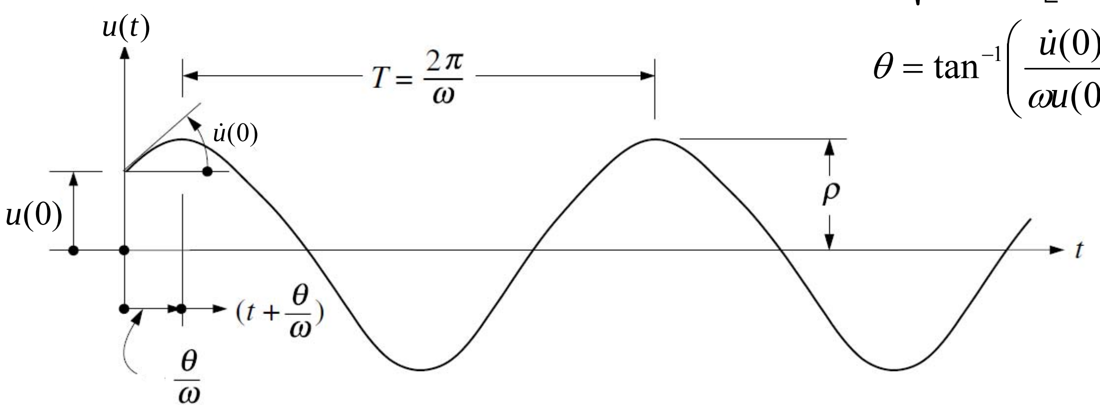
$$\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega}\sin\omega t + u(0)\cos\omega t}$$

การสั่นแบบอิสระของระบบที่ไม่มีความหน่วง

หรือ $$\boxed{u(t) = \rho\cos(\omega t - \theta)}$$

$$\rho = \sqrt{u(0)^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right]^2}$$

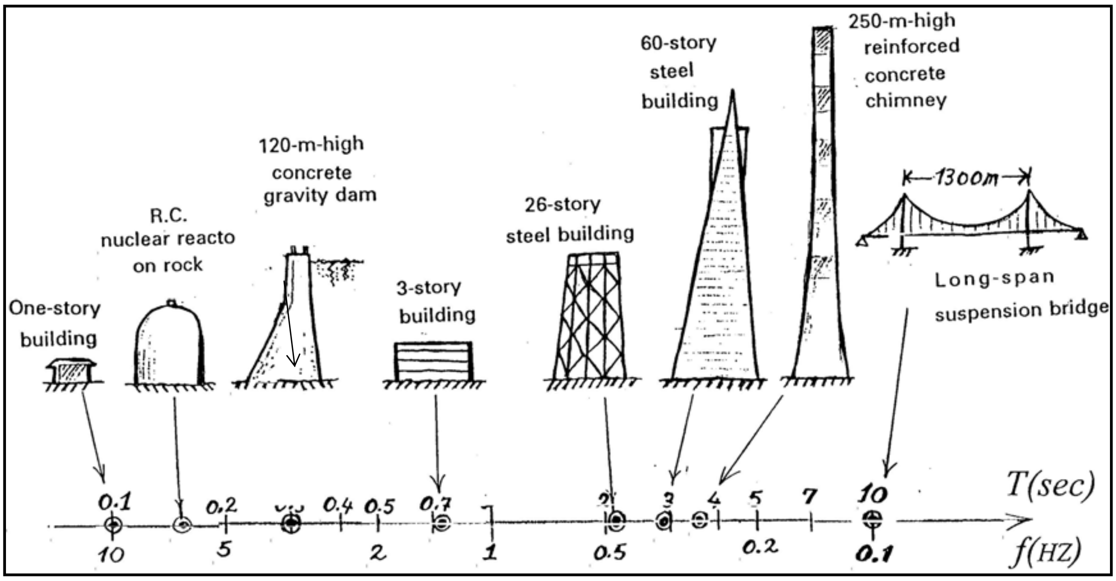
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)}\right)$$



คาบธรรมชาติ (Natural Period)	$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency)	$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

Natural Frequency and Natural Period

Natural Frequency $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Natural Period $T = \dfrac{1}{f}$



โครงสร้าง Rigid
ความถี่สูงหรือคาบสั้น

โครงสร้าง Flexible
ความถี่ต่ำหรือคาบยาว

การสั่นแบบอิสระของระบบที่มีความหน่วง

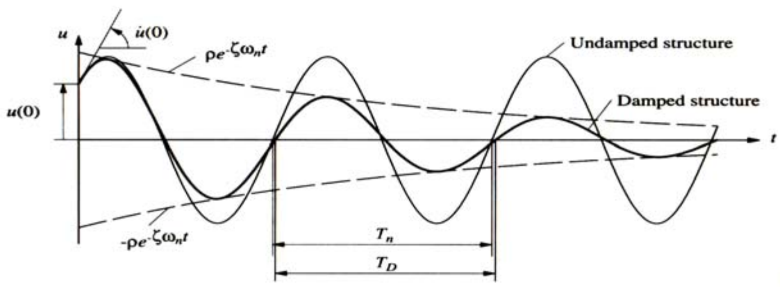
$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0}$$

หารด้วย *m* ตลอด $\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$

นิยาม Damping Ratio $\boxed{\xi = \dfrac{c}{2m\omega}}$

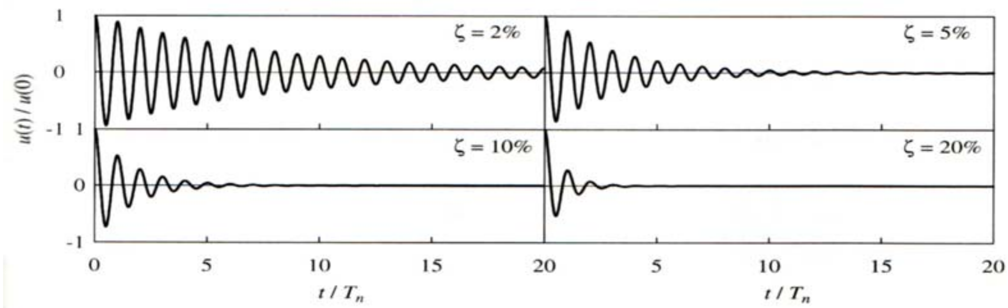
(โดยทั่วไป $\xi \approx 0.01 - 0.05$)

คำตอบ $\boxed{u(t) \approx e^{-\xi\omega t}\rho\cos(\omega t - \theta)}$



การสั่นแบบอิสระของระบบที่มีความหน่วง

(Damped Free Vibration)



การสั่นแบบอิสระของระบบ SDOF ที่มี ξ = 2% , 5% ,10% และ 20%

ω, ξ **ตัวแปรสำคัญในการอธิบายการสั่นไหว**

ถ้า ξ สูง → **แอมปลิจูดลดลงด้วยอัตราเร็ว**

Example

จงคำนวณค่าคาบธรรมชาติของถังน้ำที่มีน้ำหนัก 23 kN เสาที่รองรับสูง 3.65 m
เป็นท่อเหล็กมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 114 mm. หนา 6 mm.
โมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 200 x 10^9 N/m^2 น้ำหนักเสาเท่ากับ 158 N/m

วิธีทำ

I ของหน้าตัด $$I = \frac{\pi}{64}\left(0.114^4 - 0.102^4\right) = 3 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

สติฟเนส $$k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \times 200 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-6}}{3.65^3} = 37{,}016\ \text{N/m}$$

น้ำหนักเสา $158 \times 3.65 = 577 << 23{,}000$ N ดังนั้น ไม่คิดน้ำหนักเสา

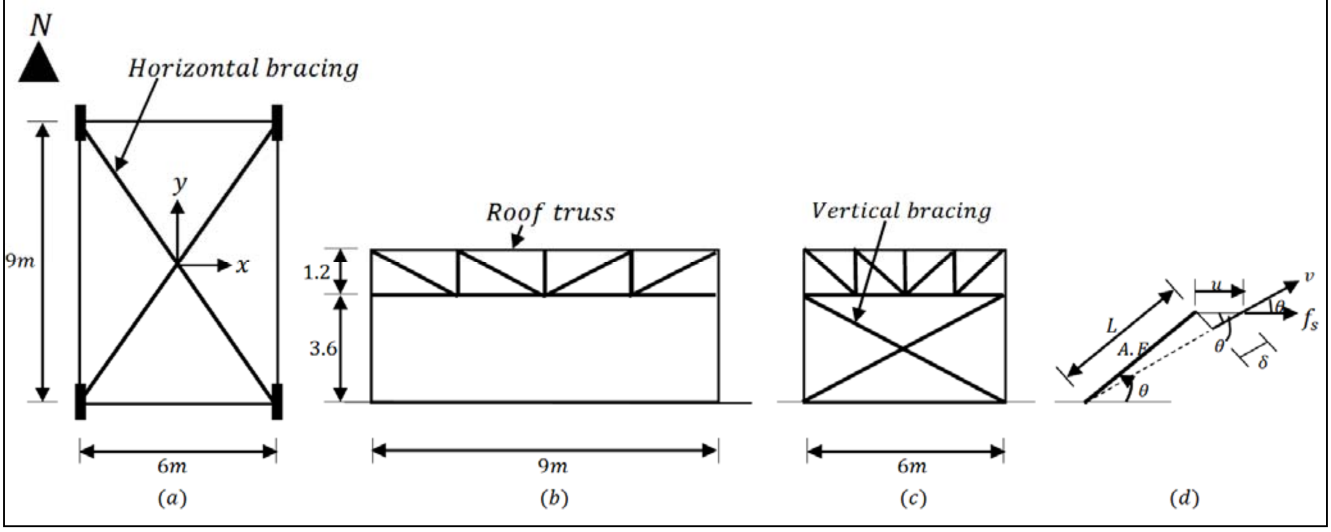
มวลของระบบ $$m = \frac{W}{g} = \frac{23{,}000}{9.81} = 2345\ \text{kg}$$

ความถี่ธรรมชาติ $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{37{,}016}{2{,}345}} = 3.97\ \text{rad/sec}$$

คาบธรรมชาติ $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.59\ \text{sec}$$

Formulate equation of motion of a small 1-story building, 6m x 9m

- -Moment frame in N-S direction
- -Braced frame in E-W direction
- -Mass is only at roof = 146.5 kg/m^2
- -All column Ix = 3446 cm4, Iy = 762 cm^4
- -Bracings are rod with A = 5 cm^2
- -E steel = 200,000 MPa



The lumped mass of roof, m = 146.5 x 6 x 9 = 7911 kg
Consider roof as a rigid diaphragm.

N-S direction
Consider each column as clamped-clamped ends

$$k_{N-S} = 4\left(\frac{12EI_X}{h^3}\right) = \frac{4 \times 12 \times 200{,}000 \times 10^6 \times 3446/100^4}{3.6^3}$$

$$= 7.09 \times 10^6 \quad \text{N/m}$$

E-W direction
The lateral stiffness of a brace is

$$k_{brace} = \left(\frac{AE}{L}\right)(\cos\theta)^2 = \left(\frac{5/100^2 \times 200{,}000 \times 10^6}{7.00}\right)\left(\frac{6}{\sqrt{6^2 + 3.6^2}}\right)^2$$

$$= 10.50 \times 10^6 \quad \text{N/m}$$

Note that, although each frame has two members, only the member in tension provides resistance, the other will be buckle.

Consider 2 frames in both sides

$$k_{E-W} = 2 \times 10.50 \times 10^6$$

$$= 21.0 \times 10^6 \quad \text{N/m}$$

Note that the contribution from column stiffness is negligible;

$$k_{Col} = \frac{4 \times 12 \times 200{,}000 \times 10^6 \times 762 / 100^4}{3.6^3}$$
$$= 1.57 \times 10^6 \quad \text{N/m}$$

Natural Frequency and Period

N-S direction

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7911}{7.09 \times 10^6}} = 0.210 \quad \text{sec.}$$

$$f = \frac{1}{0.210} = 4.76 \quad \text{Hz.}$$

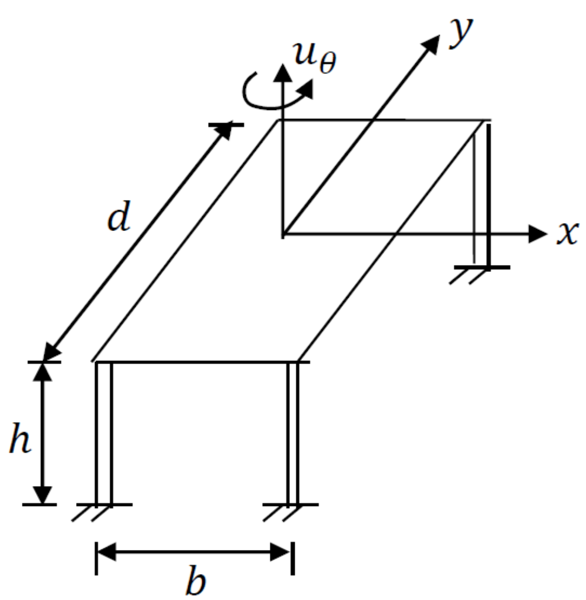
E-W direction

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7911}{21.0 \times 10^6}} = 0.122 \quad \text{sec.}$$

$$f = \frac{1}{0.122} = 8.20 \quad \text{Hz.}$$

Example

Uniform rigid slab with total mass “m” is supported on 4 columns. Each column has Ix and Iy. Determine the equation of motion in rotational direction.

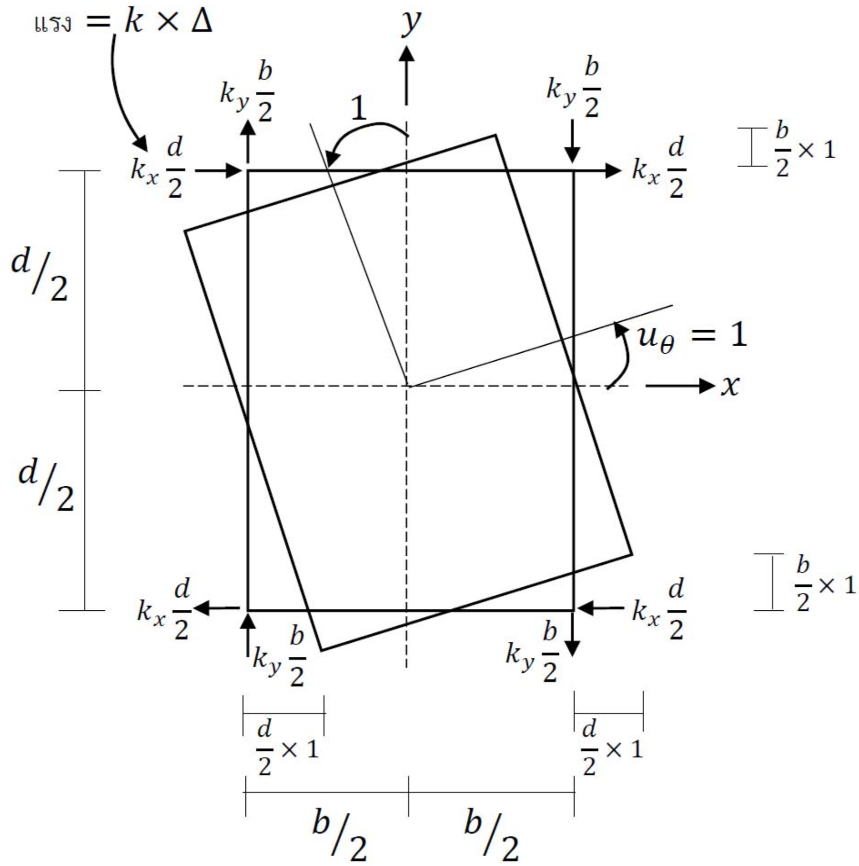


For moment of inertia of slab about the axis normal to the plane;

$$I_O = \frac{m}{12}\left(b^2 + d^2\right) \quad \text{(unit = forcexlength}^2\text{/acceleration)}$$

$$f_I = I_O \ddot{u}_\theta \quad \text{(Inertia force term)}$$

For k_θ; introduce a unit rotation $u_\theta = 1.0$
and identify the resisting forces in each column.



The torque required to equilibrate these force is;

$$k_\theta \times 1 = 4\left(k_X \times \frac{d}{2} \times \frac{d}{2}\right) + 4\left(k_Y \times \frac{b}{2} \times \frac{b}{2}\right)$$
$$= k_X d^2 + k_Y b^2$$

Equation of motion;

$$I_O \ddot{u}_\theta + \left(k_X d^2 + k_Y b^2\right) u_\theta = 0$$

For clamped-clamped column;

$$k_X = \frac{12EI_Y}{h^3} \text{ and } k_Y = \frac{12EI_X}{h^3}$$

Determine natural frequency for
b = 9 m, d = 6 m, mass = 490 kg/m^2,
k_x = 263,000 N/m, k_y = 175,000 N/m

$$I_O = \frac{(490 \times 9 \times 6)}{12}\left(9^2 + 6^2\right) = 258{,}000 \text{ kg.m}^2$$

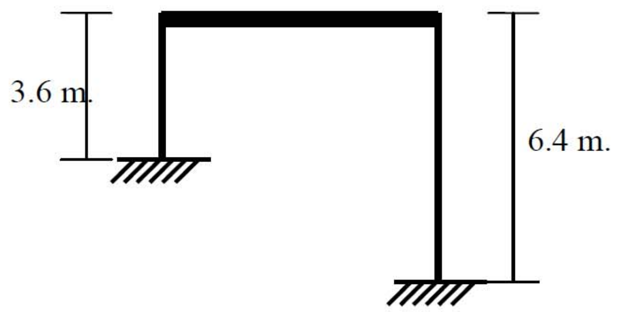
$$k_\theta = 263{,}000 \times 6^2 + 175{,}000 \times 9^2$$
$$= 23.64 \times 10^6$$

$$T_\theta = 2\pi\sqrt{\frac{258{,}000}{23.64 \times 10^6}} = 0.656 \text{ sec.}$$
$$f_\theta = 1.523 \text{ Hz.}$$

$$T_X = 2\pi\sqrt{\frac{490 \times 9 \times 6}{4 \times 263{,}000}} = 0.996 \quad \text{sec.}$$

$$T_Y = 2\pi\sqrt{\frac{490 \times 9 \times 6}{4 \times 175{,}000}} = 1.222 \quad \text{sec.}$$

ตัวอย่าง พิจารณาโครงข้อแข็งดังรูป เสามีขนาด 0.25 m x 0.25 m โมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 20,000 MPa คานมีความแข็งแกร่งสูง และมีมวล 4500 kg. สมมุติให้อัตราส่วนความหน่วงคือ 0.02 จงคำนวณแรงเฉือนที่เสาทั้งสอง ที่เกิดแรงกระทำที่คานเท่ากับ 5000 sin[20t] (หน่วย N)



วิธีทำ

สติฟเนส

$$k = \frac{12EI}{L_1^3} + \frac{12EI}{L_2^3} = 12 \times 20000 \times 10^6 \times \left(0.25^4 / 12\right)\left(\frac{1}{(3.6)^3} + \frac{1}{(6.4)^3}\right)$$

$$= (1.674 + 0.298) \times 10^6 = 1.972 \times 10^6 \quad \text{N/m}$$

ความถี่ธรรมชาติ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 20.94$ rad/s

คาบธรรมชาติ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = 0.30$ sec

Steady state response $u(t) = \rho \sin(\overline{\omega}t - \phi)$

$$\rho = \frac{p_0}{k}\left[\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega} = \frac{20}{20.94} = 0.955$$

$$\rho = \frac{5000}{1.972\times10^6}\left[\left(1-0.955^2\right)^2 + \left(2\times0.02\times0.955\right)^2\right]^{-1/2} = 0.0264 \text{ m}$$

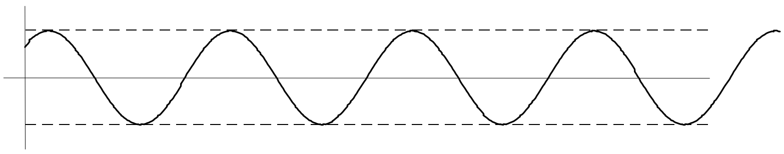
แรงเฉือนที่เสาต้นสั้น $V_{short} = 1.674\times10^6 \times 0.0264 =$ 44,200 N

แรงเฉือนที่เสายาว $V_{long} = 0.298\times10^6 \times 0.0264 =$ 7,870 N

<u>ควรระวัง ชิ้นส่วนที่มีสติฟเนสสูงจะรับแรงในสัดส่วนที่สูง</u>

การสั่นเนื่องจากแรงภายนอกแบบฮาร์โมนิค

(Harmonically Forced Vibration)



- **แรงแบบฮาร์โมนิค คือแรงที่กระทำกลับไปมาและมีความถี่คงที่เช่นฟังก์ชัน Sine หรือ Cosine เป็นต้น**
- **แรงจากแผ่นดินไหวและแรงตามธรรมชาติทั่วไปไม่ใช่แรงแบบฮาร์โมนิค แต่สามารถพิจารณาว่าเป็นส่วนผสมของแรงย่อยแบบฮาร์โมนิค หลายแรงที่มีความถี่ต่าง ๆ ผสมกันอยู่ได้**
- **ผลตอบสนองของแรงทั่วไปมีพื้นฐานจากความเข้าใจผลตอบสนองจากแรงแบบฮาร์โมนิค**

การสั่นเนื่องจากแรงภายนอกแบบฮาร์โมนิค

(Harmonically Forced Vibration)

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \sin \overline{\omega} t}$$

คำตอบ

$$u(t) \approx \boxed{e^{-\xi \omega t} \rho \cos(\omega t - \theta)} + \boxed{\boxed{\frac{p_0}{k}} \overline{D} \sin(\overline{\omega} t - \phi)}$$

แอมปลิจูดลดลงตามเวลา

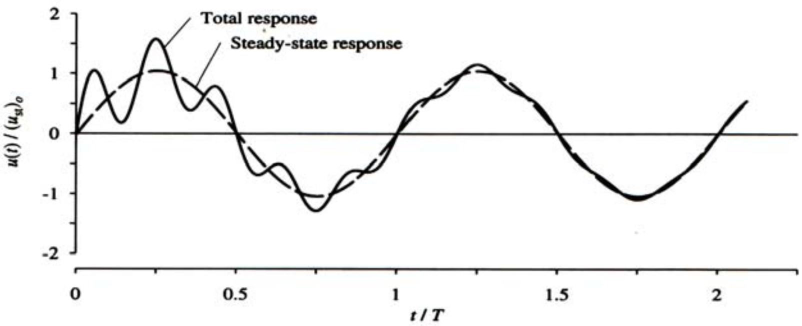
Transient Response

สั่นด้วยความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง ω

แอมปลิจูดคงที่

Steady State Response

สั่นด้วยความถี่ของแรงภายนอก $\overline{\omega}$



Steady State Response

(1)
$$u(t) = C \sin \overline{\omega} t + D \cos \overline{\omega} t$$

$$C = \frac{p_0}{k} \frac{\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}$$

$$D = \frac{p_0}{k} \frac{(-2\xi\beta)}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2} \left[\left(1-\beta^2\right) \sin \overline{\omega} t - 2\xi\beta \cos \overline{\omega} t\right]}$$

Steady State Response

(2) $$u(t) = \rho \sin(\overline{\omega} t - \phi)$$

$$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}}$$

Frequency Ratio $$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \overline{D} \sin(\overline{\omega} t - \phi)$$

$$\boxed{\overline{D} = \frac{\rho}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}}}$$

การสั่นเนื่องจากแรงภายนอกแบบฮาร์โมนิค

(Harmonically Forced Vibration)

แอมปลิจูดของ Steady State Response $= \dfrac{p_0}{k}\overline{D}$

ตัวคูณขยายทางพลวัต

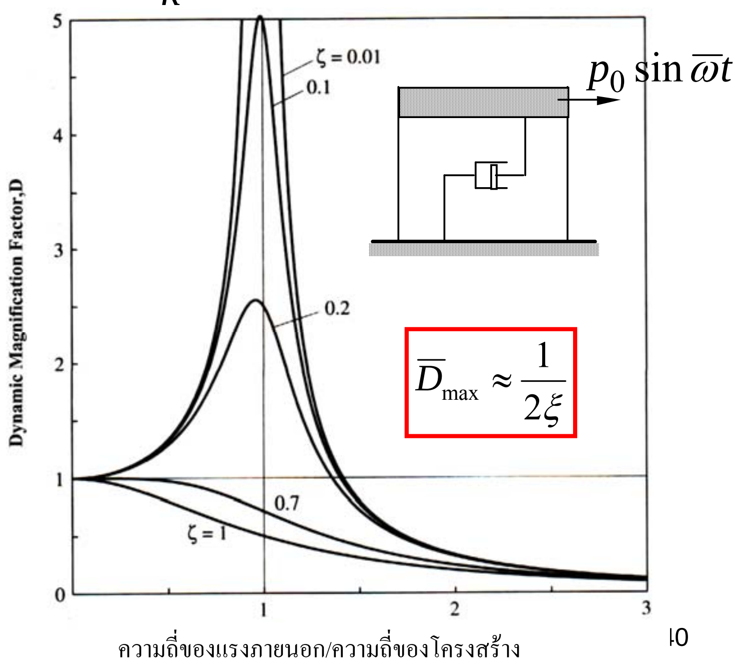
(Dynamic Magnification Factor)

$$\boxed{\overline{D} = \frac{\text{Dynamic Response}}{\text{Static Response}}}$$

มีค่าขึ้นกับ

- **ความถี่ของแรงและของโครงสร้าง**
- **อัตราส่วนความหน่วง**

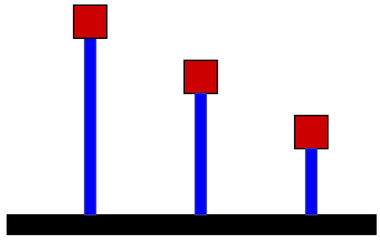
$$\boxed{\overline{D} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta\xi)^2}}}$$



$$\boxed{\overline{D}_{\max} \approx \frac{1}{2\xi}}$$

การสั่นพ้อง (การกำทอน) (Resonance)

Example

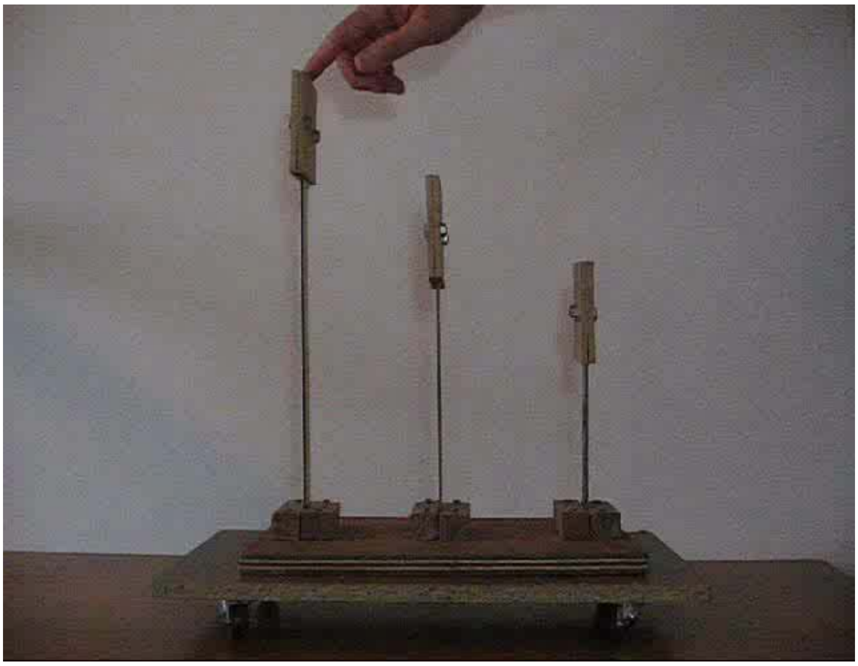


T **สูง**   ***T*** **ต่ำ**

f, ω **ต่ำ** f, ω **สูง**

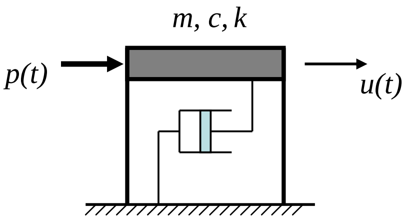
$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$

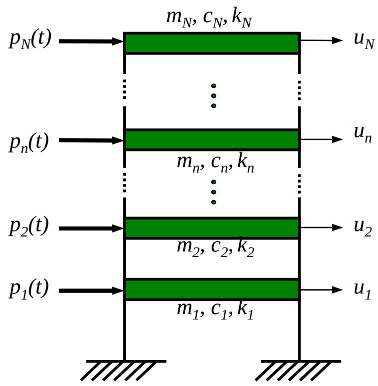
การตอบสนองของแบบจำลองอาคารต่อแผ่นดินไหว



ระบบโครงสร้างที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง

(Multi Degree of Freedom System , MDOF)





ระบบ SDOF $u(t)$ ขึ้นกับ

- แรงภายนอก
- คาบธรรมชาติ
- ความหน่วง

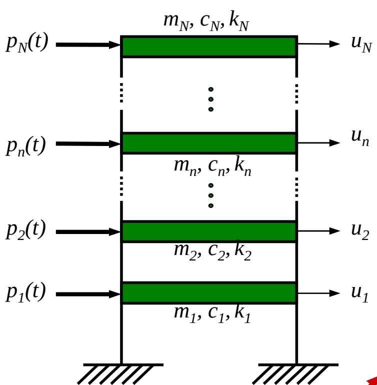
ระบบ MDOF $u(t)$ ขึ้นกับ

- แรงภายนอก
- คาบธรรมชาติ
- ความหน่วง
- ตำแหน่งของ $u(t)$หรือรูปร่างขณะเกิดการสั่นไหว

คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์
(Dynamic Properties)

ระบบโครงสร้างที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง

(Multi Degree of Freedom System , MDOF)



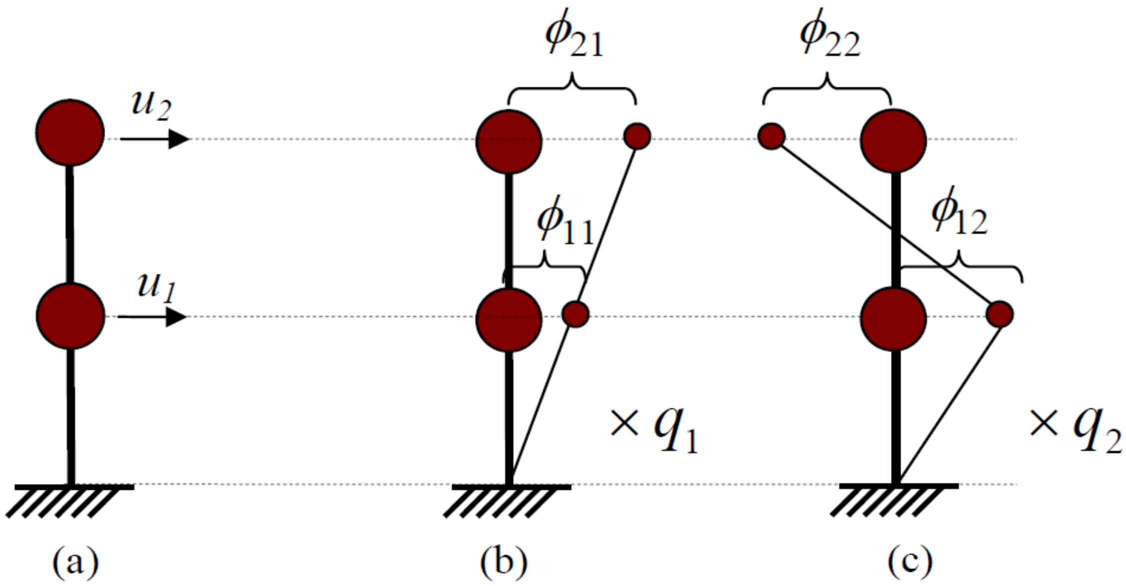
คุณสมบัติเชิงพลศาสตร์ของระบบ MDOF

- ความหน่วง มักใช้ค่าจากการประมาณ ไม่ใช่จากการวิเคราะห์
- ตำแหน่งของ $u(t)$หรือรูปร่างขณะเกิดการสั่นไหว เรียกว่า รูปร่างการสั่นไหว (Mode Shape)
- คาบธรรมชาติ หรือ ความถี่ธรรมชาติ

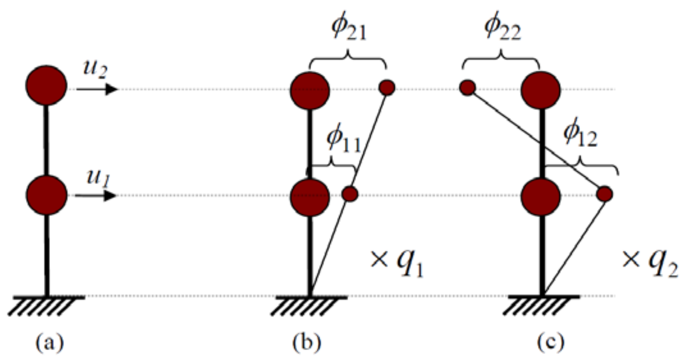
ได้จากการแก้ปัญหาที่เรียกว่า Eigenvalue
โดยสำหรับระบบที่มีจำนวน DOF เท่ากับ N ตัว
จะมี N ชุดคำตอบสำหรับความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหว

Mode of Response

พิจารณาระบบ 2DOF ที่ต้องการอธิบายการเคลื่อนที่ u_1 และ u_2 สามารถแทน u_1 และ u_2 ได้ด้วยผลรวมจาก 2 รูปแบบ (b) และ (c)



Mode of Response



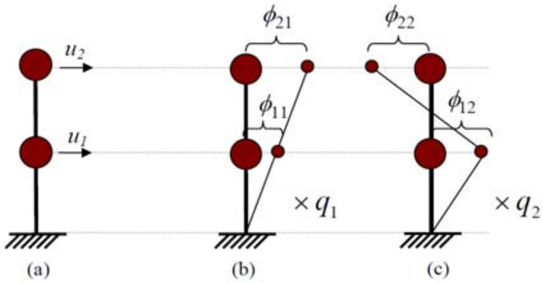
(b) คือรูปแบบ (Mode) ที่ 1 มีรูปร่างของชั้น 1 และ 2 คือ ϕ_{11} และ ϕ_{21}
และมีตัวปรับค่า (weight) เท่ากับ q_1

(c) คือรูปแบบ (Mode) ที่ 2 มีรูปร่างของชั้น 1 และ 2 คือ ϕ_{12} และ ϕ_{22}
และมีตัวปรับค่า (weight) เท่ากับ q_2

Mode of Response

ตัวอย่าง ถ้า $\phi_{11} = 0.5 \quad \phi_{21} = 1.0$ และ $\phi_{12} = 1.0 \quad \phi_{22} = -1.0$

สามารถอธิบายขณะที่ $u_1 = 2$ และ $u_2 = 1$ ได้ดังนี้



จากรูป

$u_1 = \phi_{11} q_1 + \phi_{12} q_2$ แทนค่า $2 = 0.5 q_1 + 1.0 q_2$

$u_2 = \phi_{21} q_1 + \phi_{22} q_2$ แทนค่า $1 = 1.0 q_1 - 1.0 q_2$

จะได้ $q_1 = 2, q_2 = 1$

Mode of Response

สำหรับ u ที่เวลา t ใด ๆ จะสามารถแทนค่าจาก

ϕ_{ij} ที่ตำแหน่งนั้น และร่วมกับ q ที่เวลานั้นได้

สำหรับระบบที่มี N ชั้น การเคลื่อนตัวที่ชั้น x ใด ๆ

$$u_x = \phi_{x1} q_1 + \phi_{x2} q_2 + \phi_{x3} q_3 + \ldots + \phi_{xN} q_N$$

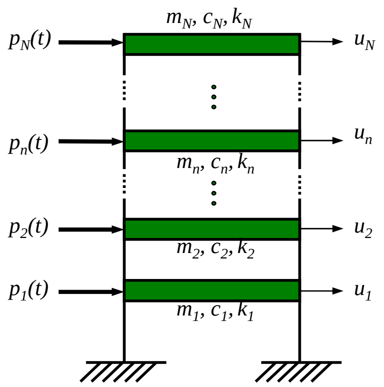
$$= \sum_{i=1}^{N} \phi_{xi} q_i$$

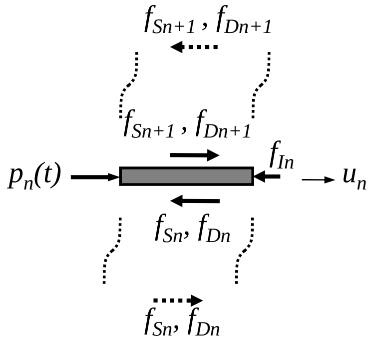
Mode ที่ i

Mode Shape

Modal Response

ระบบโครงสร้างที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง (Multi Degree of Freedom System , MDOF)





n-th Floor

Equilibrium Equation

n-th Floor $$f_{In} + f_{Dn} + f_{Sn} - f_{Dn+1} - f_{Sn+1} = p_n(t)$$

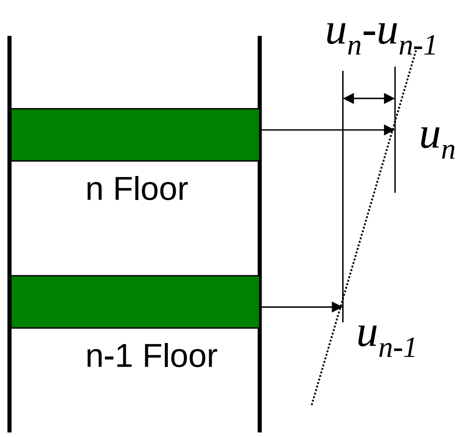
N-th Floor $$f_{IN} + f_{DN} + f_{SN} = p_N(t)$$

สมการการเคลื่อนที่สำหรับระบบ MDOF

แรงเฉื่อย
$$f_{In} = m_n \ddot{u}_n$$

แรงหน่วง
$$f_{Dn} = c_n(\dot{u}_n - \dot{u}_{n-1})$$

แรงสติฟเนส
$$f_{Sn} = k_n(u_n - u_{n-1})$$



ตัวอย่างสมการการเคลื่อนที่สำหรับระบบ MDOF

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots\cdots \\ u_N \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \cdots\cdots \\ p_N(t) \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & m_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & c_N \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & k_N \end{bmatrix}$$

ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหว

(Natural Frequency and Mode Shape)

การสั่นแบบอิสระสำหรับระบบที่ไม่คิดผลของความหน่วง

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

คำตอบ $\mathbf{u}$ อยู่ในรูปของฟังก์ชันฮาร์โมนิค

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdots\cdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 e^{i\omega t} \\ \phi_2 e^{i\omega t} \\ \cdots\cdots \\ \phi_N e^{i\omega t} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi} e^{i\omega t}$$

จะได้

$$\left[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi} = 0$$

ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหว

(Natural Frequency and Mode Shape)

เงื่อนไขสำหรับการหาคำตอบ $\det\left|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right| = 0$

➡ สมการที่มีเลขยกกำลัง N สำหรับตัวแปร ω^2

➡ N คำตอบสำหรับ ω^2

จาก
$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdots\cdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 e^{i\omega t} \\ \phi_2 e^{i\omega t} \\ \cdots\cdots \\ \phi_N e^{i\omega t} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi} e^{i\omega t}$$
จะได้ว่า ω คือค่าความถี่ธรรมชาติของระบบ

ดังนั้น มี N ค่าความถี่ธรรมชาติของระบบ

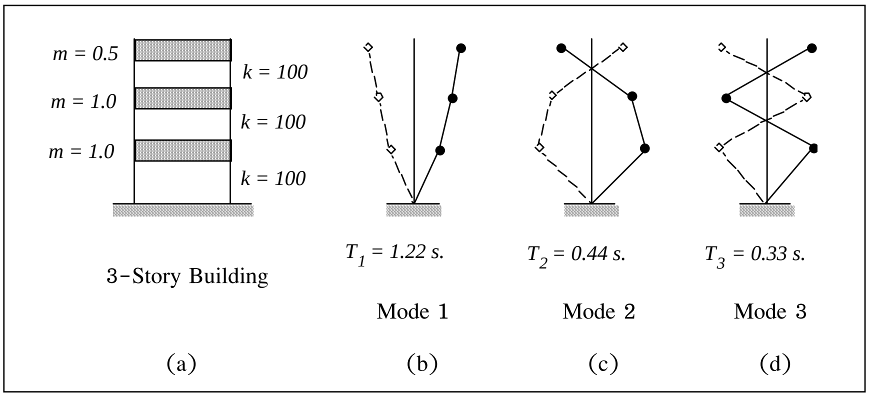
ความถี่ธรรมชาติและรูปร่างการสั่นไหว

(Natural Frequency and Mode Shape)

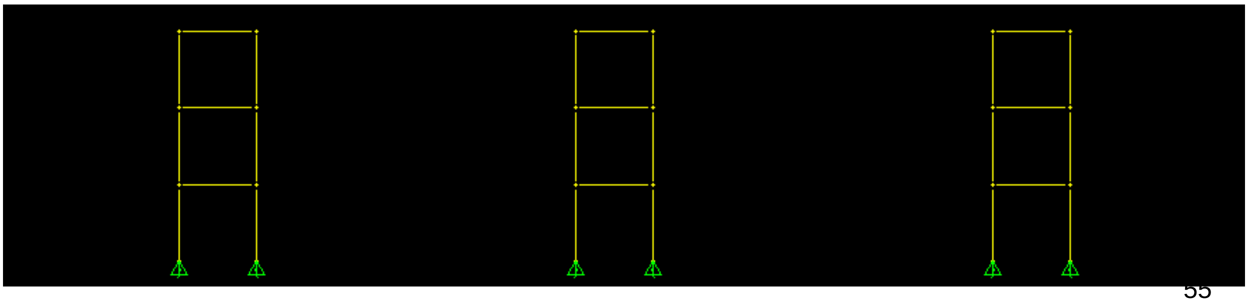
- N คำตอบที่แตกต่างกัน แสดงถึงรูปแบบของคำตอบที่แตกต่างกันหรือ Mode เหล่านั้น
- แต่ละ Mode มีคุณลักษณะในการสั่นไหวที่แตกต่างกัน
- ความถี่ธรรมชาติสำหรับ Mode ใด ๆ แสดงถึงจังหวะของการสั่นตามธรรมชาติของ Mode นั้น
- Mode ที่มีค่าความถี่ธรรมชาติน้อยที่สุดเรียกว่า รูปแบบการสั่นไหวพื้นฐาน (Fundamental Mode) หรือ Mode ที่หนึ่ง
- สำหรับ Mode ที่มีความถี่ธรรมชาติสูงขึ้นเรียกชื่อเป็น Mode ลำดับต่อ ๆ ไป

ระบบโครงสร้างที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง

(Multi Degree of Freedom System , MDOF)



Mode 1 **Mode 2** **Mode 3**



Vibration of 3-DOF System (Mode 1)

Vibration of 3-DOF System (Mode 2)

Vibration of 3-DOF System (Mode 3)

คุณสมบัติ Orthogonality

จาก

$$\left[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi} = 0$$

คำตอบของ Mode ที่ n และ Mode ที่ m

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \times \left[\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi}_n = 0$$

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \times \left[\mathbf{K} - \omega_m^2 \mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi}_m = 0$$

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_m = \omega_n^2 \boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n - \omega_m^2 \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m$$

(1 x N) (N x N) (N x 1) = 1 x 1 (Scalar)

คุณสมบัติ Orthogonality

จาก

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n = \left(\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n\right)^T = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K}^T \boldsymbol{\varphi}_m = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_m$$

และ $\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m$

ดังนั้นสมการ

$$\boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_m = \omega_n^2 \boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n - \omega_m^2 \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m$$

เขียนได้เป็น $(\omega_n^2 - \omega_m^2)\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m = 0$

ดังนั้น

$$\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_m = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ M_n & \text{for } n = m \end{cases} \qquad \boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_m = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ \omega_n^2 M_n = K_n & \text{for } n = m \end{cases}$$

คุณสมบัติ Orthogonality

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\Phi} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K\Phi} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_N \end{bmatrix}$$

การวิเคราะห์ผลตอบสนองโดยวิธี Modal Analysis

จาก $$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots\dots \\ u_N(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 e^{i\omega t} \\ \phi_2 e^{i\omega t} \\ \dots\dots \\ \phi_N e^{i\omega t} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi} e^{i\omega t}$$

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi q}(t)}$$

$$\mathbf{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_N]$$

$$\mathbf{q}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_N(t)]$$

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1 q_1(t) + \boldsymbol{\varphi}_2 q_2(t) + \dots + \boldsymbol{\varphi}_N q_N(t)}$$

การวิเคราะห์ผลตอบสนองโดยวิธี Modal Analysis

สามารถจัดรูปสมการการเคลื่อนที่ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \dots \\ \ddot{q}_N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_N \end{Bmatrix} = \mathbf{p}^*$$

$$M_n = \boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_n \qquad K_n = \boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_n \qquad \mathbf{p}^* = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathbf{p}$$

ดังนั้น $$M_n \ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = p_n^*(t)$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{p_n^*}{M_n}$$ โดยที่ $$\omega_n^2 = \frac{K_n}{M_n}$$

การวิเคราะห์ผลตอบสนองโดยวิธี Modal Analysis

หากพิจารณาให้อัตราส่วนความหน่วงของ Mode ที่ n มีค่าเป็น ξ_n

$$\boxed{\ddot{q}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{p_n^*}{M_n}}$$

วิเคราะห์หาคำตอบ $q_n(t)$ โดยวิธีเดียวกับระบบ SDOF

$$\boxed{\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1 q_1(t) + \boldsymbol{\varphi}_2 q_2(t) + \dots + \boldsymbol{\varphi}_N q_N(t)}$$

วิธี Modal Analysis หรือ Modal Superposition (วิธีรวมโหมด)

ระบบโครงสร้างที่มีระดับขั้นความเสรีมากกว่าหนึ่ง

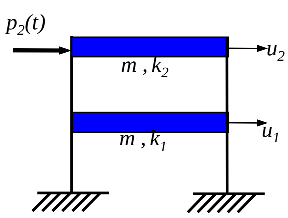
ผลตอบสนองสำหรับ Mode '*n*' (T_n, ξ_n) $\approx$ **ผลตอบสนองสำหรับโครงสร้างแบบง่าย SDOF** $(\text{with } T = T_n \text{ and } \xi = \xi_n)$

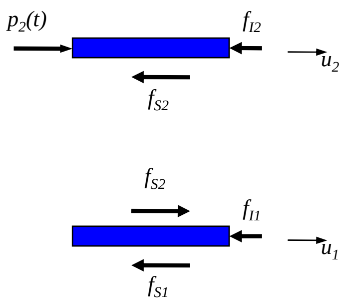
ผลตอบสนองรวมทั้งหมด = $\sum_{n=1}^{N}$ **ผลตอบสนองย่อยของแต่ละ Mode**

สำหรับโครงสร้างที่มีจำนวน Mode มาก อาจประมาณผลตอบสนองรวม จากการพิจารณา เฉพาะ ผลตอบสนองของ Mode ต่ำ ๆ ได้

ตัวอย่าง

โครงสร้างอาคาร 2 ชั้น แต่ละชั้นมีมวล 50 ton สติฟเนสของชั้น 1 (*k1*) เท่ากับ 40 x 10^6 N/m และ สติฟเนสของชั้น 2 (*k2*) เท่ากับ 20 x 10^6 N/m สมมุติให้อัตราส่วนความหน่วงสำหรับทุก Mode คือ 0.02 จงหาผลตอบสนองแบบสภาวะคงตัว (Steady State Response) ภายใต้แรงกระทำที่ชั้นบน $p_2(t) = 10{,}000 \sin(1.1\omega_1 t)$ N





$$f_{I2} + f_{s2} = p_2(t)$$

$$f_{I1} + f_{S1} - f_{s2} = 0$$

$f_{I1} = m\ddot{u}_1 \qquad f_{S1} = k_1 u_1 \qquad\qquad f_{I2} = m\ddot{u}_2 \quad f_{S1} = k_2(u_2 - u_1)$

$$m\ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) = 0$$

$$m\ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) = p_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

ปัญหา Eigenvalue $\quad [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]\boldsymbol{\varphi} = 0$

คำตอบอยู่ในเงื่อนไข $\quad \det|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$

$$\det \left\| \begin{bmatrix} 60\times10^6 - \omega^2 \times 50{,}000 & -20\times10^6 \\ -20\times10^6 & 20\times10^6 - \omega^2 \times 50{,}000 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$2.5\times10^9 \omega^4 - 4\times10^{12}\omega^2 + 8\times10^{14} = 0$$

ω_n^2 = 234.3 และ 1365.7

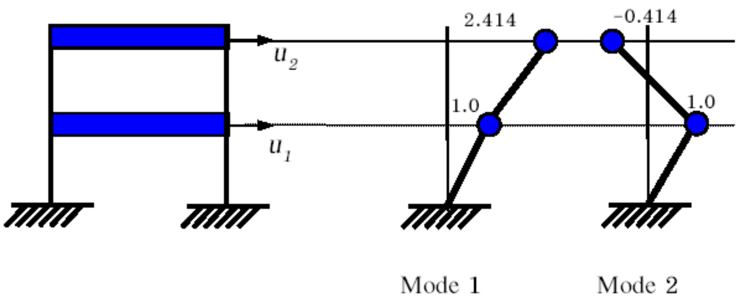
ω_1 = 15.31 rad/sec

ω_2 = 36.96 rad/sec

แทนค่า ω_n^2 เพื่อหา $\boldsymbol{\varphi}$ จากสมการ $\left[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right]\boldsymbol{\varphi} = 0$

สำหรับ ω_1 = 15.31 จะได้ $\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.414 \end{Bmatrix}$

สำหรับ ω_2 = 36.96 จะได้ $\boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ -0.414 \end{Bmatrix}$



คำนวณ Modal Mass

$$M_1 = \boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_1 = m(1^2 + 2.414^2) = 341\times10^3 \text{ kg}$$
$$M_2 = \boldsymbol{\varphi}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_2 = m(1^2 + 0.414^2) = 58.6\times10^3 \text{ kg}$$

คำนวณ Modal Force $\mathbf{p}^* = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}$

$$\begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2.414 \\ 1 & -0.414 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 10{,}000\sin(1.1\omega_1 t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24{,}140\sin(1.1\omega_1 t) \\ -4{,}140\sin(1.1\omega_1 t) \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{q}_n(t) + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{p_n^*}{M_n}$$ โดย n=1, 2

ผลตอบสนองแบบสภาวะคงตัว (Steady State Response)

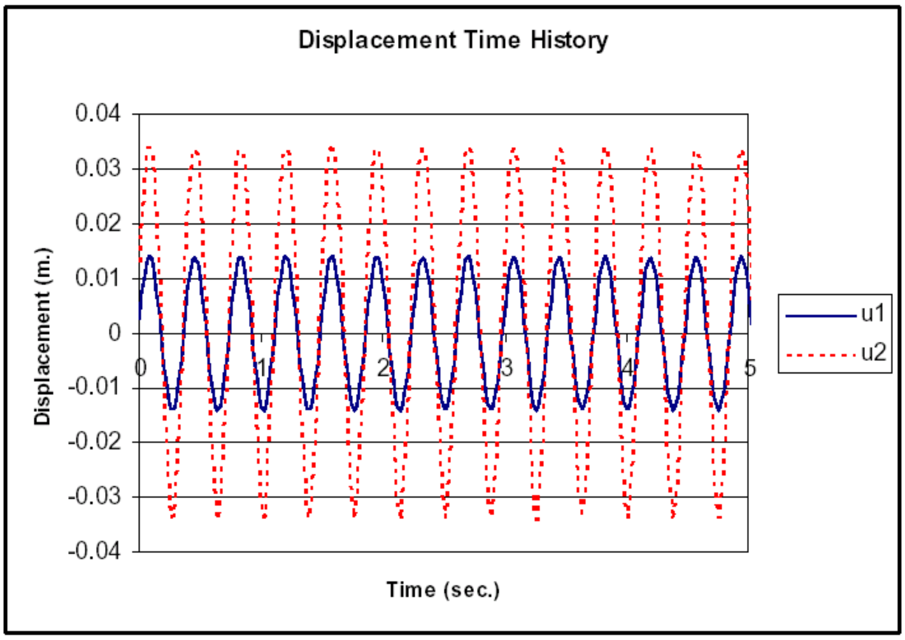
$$q_n(t) = \frac{p_{n0}^*}{K_n}\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\overline{\omega}/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\xi_n\,\overline{\omega}/\omega_n\right]^2}}\sin(\overline{\omega}t - \phi_n)$$

ดังนั้น

$$q_1(t) = 0.014\sin(16.8t + 0.207)$$
$$q_2(t) = -0.00065\sin(16.8t - 0.023)$$

หาคำตอบของการขจัด u ได้คือ

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Phi q}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.414 & -0.414 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} 0.014\sin(16.8t + 0.207) - 0.00065\sin(16.8t - 0.023) \\ 0.034\sin(16.8t + 0.207) + 0.00027\sin(16.8t - 0.023) \end{Bmatrix} \text{ m.}$$
$$\approx \begin{Bmatrix} 0.014\sin(16.8t + 0.207) \\ 0.034\sin(16.8t + 0.207) \end{Bmatrix} \text{ m.}$$



ระบบที่มีคุณสมบัติต่อเนื่อง (Continuous system)

Continuous system ≡ System with distributed parameters (mass and elasticity)

- Infinite number of particles = infinite number of DOF
- Consider continuous function for infinite DOF problem
- System contains an infinite number of modes of vibration.
- Dynamic response can be calculated as the sum of an infinite number of normal mode contributions.

Example (1D): Beam, Cable, Rod

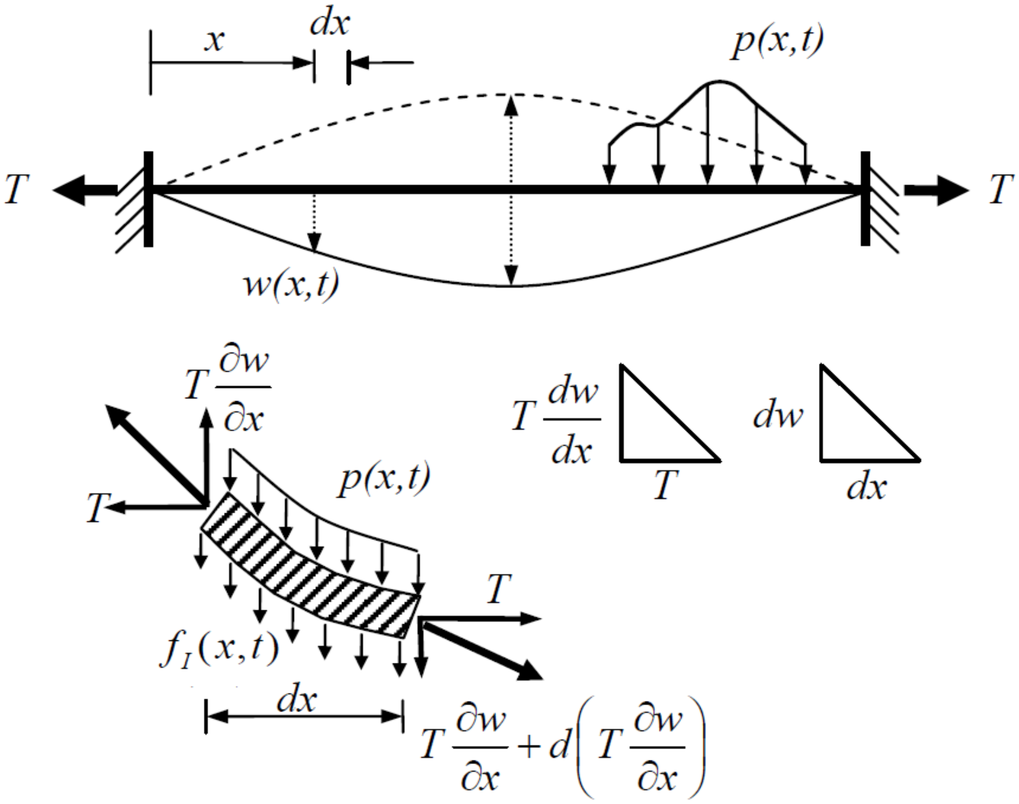
Application: Tower, Bridge, Cable

Equation of Motion

1. String (Long cable without sag)

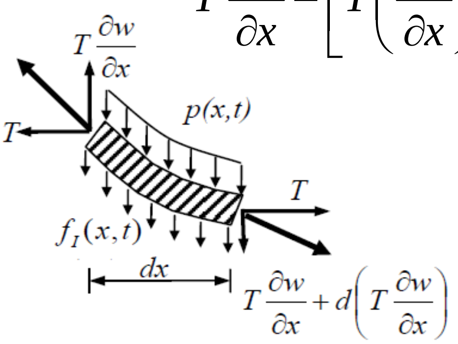
Parameters, m (mass per length), A, E, L, T (tension)

- Carry transverse loading, $p(x,t)$
- Axial stiffness from pre-tension, T
- Consider transverse displacement, $w(x,t)$



$$\sum F_y = 0;$$

$$T\frac{\partial w}{\partial x} - \left[T\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + d\left(T\frac{\partial w}{\partial x}\right) \right] - p(x,t)dx - f_I(x,t)dx = 0$$



$$f_I(x,t)dx = -mdx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\boxed{m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x,t)} \qquad (1)$$

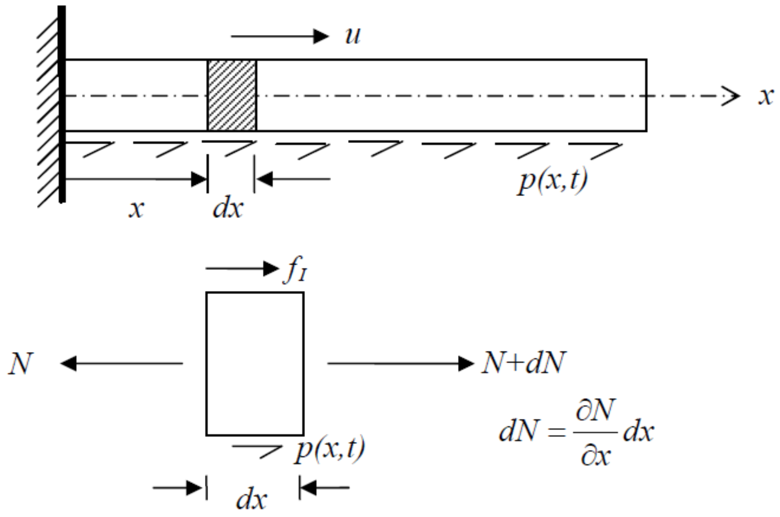
or

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{p(x,t)}{m}$$

Wave velocity: $c = \sqrt{\frac{T}{m}}$

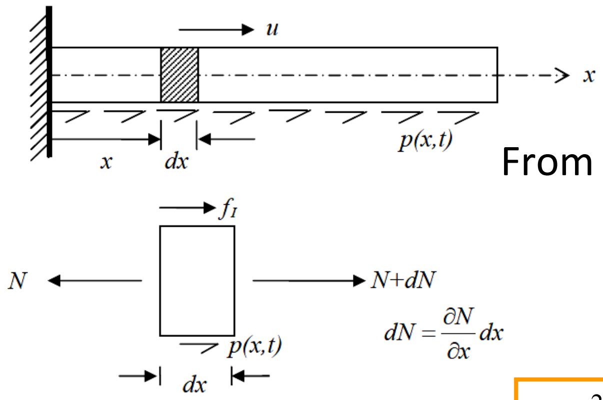
Equation of Motion

2. Beam (Longitudinal vibration)



$$\sum F_x = 0;$$

$$-N + \left[N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \right] + p(x,t)dx + f_I(x,t)dx = 0$$



$$f_I(x,t)dx = -mdx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

From

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\boxed{m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p(x,t)} \qquad (2)$$

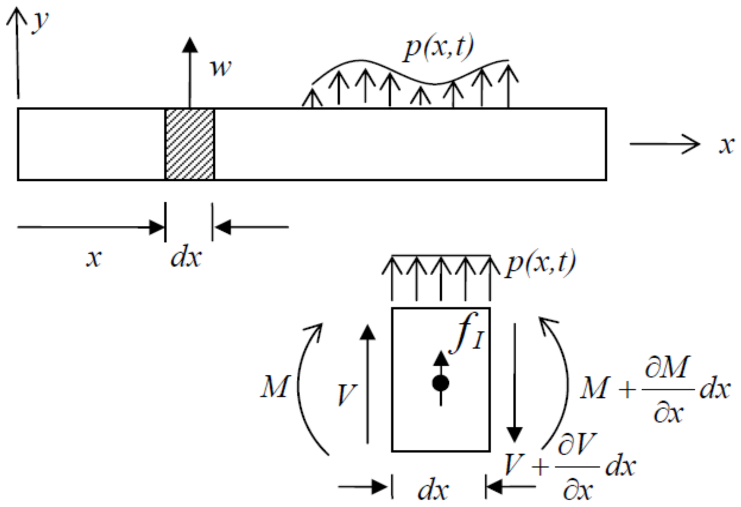
Wave equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{p(x,t)}{m}$$

Wave velocity: $c = \sqrt{\frac{EA}{m}}$

Equation of Motion

3. Beam (Transverse vibration)



$$\sum F_y = 0; \qquad -V + \left[V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right] + p(x,t)dx + f_I(x,t)dx = 0$$

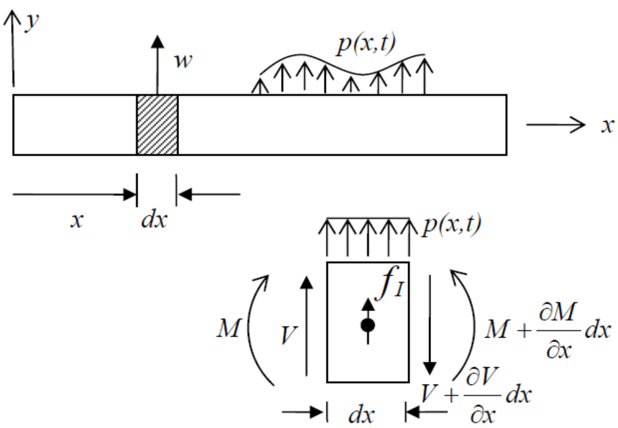
$\sum M = 0;$ neglect higher order term, dx^2

$$-Vdx + \frac{\partial M}{\partial x} dx \approx 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$$

$$f_I(x,t)dx = -mdx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = p(x,t)$$



From flexural theory

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\boxed{m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p(x,t)} \qquad (3)$$

Natural Frequency & Mode Shape

1. String (Long cable without sag)

equation for free vibration : eq.(1)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Assume $\quad w(x,t) = \phi(x)q(t)$

constant shape $\quad$ varying amplitude

$$\phi(x)\ddot{q}(t) - c^2 q(t)\phi''(x) = 0$$

Where $\quad \bullet'' \equiv \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad \ddot{\bullet} \equiv \frac{\partial}{\partial t^2}$

$$c^2 \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}$$

Function of x $\quad$ Function of t

$$c^2 \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\omega^2$$

and

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -\omega^2$$

or $\quad \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \qquad (4)$

$$\phi''(x) + \lambda^2 \phi(x) = 0 \qquad (5)$$

$$\lambda = \frac{\omega}{c}$$

From eq. (4)

$$q(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \qquad (6)$$

For initial condition $q(0)$ $\dot{q}(0)$

$$q(t) = \frac{\dot{q}(0)}{\omega}\sin(\omega t) + q(0)\cos(\omega t)$$

= Harmonic motion with natural frequency ω

From eq. (5) $\phi(x) = C\sin(\lambda x) + D\cos(\lambda x)$ (7)

Apply the boundary conditions for string

Zero displacement at both ends $w(0,t) = 0 \Rightarrow \phi(0) = 0$ (8)

$w(L,t) = 0 \Rightarrow \phi(L) = 0$

Substitute eq.(8) into eq.(7)

$\sin(\lambda L) = 0$ (Infinite number of solution)

Solution of the equation; $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ n = 1, 2, 3, …

Natural frequency;

$$\omega_n = \lambda_n c = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

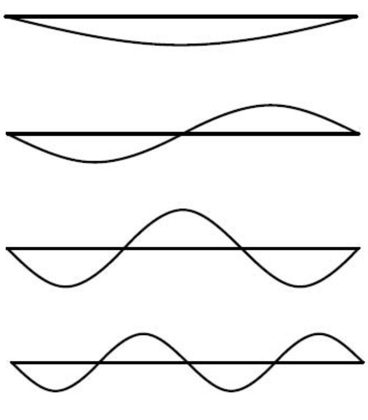
Mode shape; $\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

1st mode, $\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m}}$ $\phi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

2nd mode $\omega_2 = \frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m}}$ $\phi_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

3rd mode $\omega_3 = \frac{3\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m}}$ $\phi_3(x) = \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$

4th mode $\omega_4 = \frac{4\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m}}$ $\phi_4(x) = \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$



$\vdots$

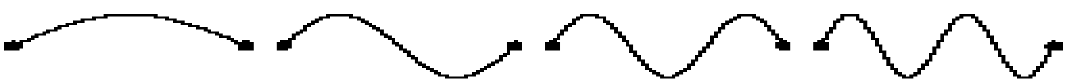
∞

Free vibration solution;

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)\right]$$

Vibration of Cable Structure

String model $$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}}$$



1st Mode
Low frequency

4th Mode
Higher frequency

$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}}$ $f_2 = 2f_1$ $f_3 = 3f_1$ $f_4 = 4f_1$

$$\boxed{f_n = nf_1}$$

Natural Frequency & Mode Shape
2. Transverse Vibration of Beam

Free vibration equation of motion;

$$\boxed{m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0}$$

Assume solution;

$$w(x,t)=\phi(x)q(t)$$

$$\frac{m}{EI}\phi(x)\ddot{q}(t)+\phi^{IV}(x)q(t)=0$$

$$\frac{m}{EI}\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}=-\frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)}$$

Let a^4 = a constant;

$$\frac{m}{EI}\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}=-a^4 \qquad \text{and} \qquad \frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)}=a^4$$

Then $$\ddot{q}(t)+\omega^2 q(t)=0 \qquad (9)$$

$$\phi^{IV}(x)-a^4\phi(x)=0 \qquad (10)$$

$$\omega^2=\frac{a^4 EI}{m} \qquad a^4=\frac{\omega^2 m}{EI}$$

Assume $\phi(x)=Ce^{sx}$

Rewrite eq.(10) $$(s^4-a^4)Ce^{sx}=0 \qquad (11)$$

$$s=\pm a,\pm ai \qquad i=\sqrt{-1}$$

Solution of (11) $\phi(x) = C_1 e^{iax} + C_2 e^{-iax} + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}$

or

$$\phi(x) = A_1 \cos(ax) + A_2 \sin(ax) + A_3 \cosh(ax) + A_4 \sinh(ax) \quad (12)$$

Constant A_1 to A_4 define shape and amplitude of mode, they can be computed from beam's boundary conditions.

Displacement	$w(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = 0$
Slope	$w'(x) = 0 \Rightarrow \phi'(x) = 0$
Moment	$w''(x) = 0 \Rightarrow \phi''(x) = 0$
Shear	$w'''(x) = 0 \Rightarrow \phi'''(x) = 0$

Then the frequency equation can be derived.

a) Simple Beam

Boundary Condition = Displacement and moment at two ends are zero

$$\begin{aligned} w(0,t) = 0 &\Rightarrow \phi(0) = 0 \\ w''(0,t) = 0 &\Rightarrow \phi''(0) = 0 \\ w(L,t) = 0 &\Rightarrow \phi(L) = 0 \\ w''(L,t) = 0 &\Rightarrow \phi''(L) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Apply eq. (13) into eq. (12);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(aL) & \sin(aL) & \cosh(aL) & \sinh(aL) \\ -\cos(aL) & -\sin(aL) & \cosh(aL) & \sinh(aL) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Determinant of matrix in eq.(14) = 0,
then the frequency equation is

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(aL) &= 0 \\ aL = n\pi \quad n &= 1,2,\ldots \end{aligned}}$$

Natural frequency of the n-th mode; $\omega_n^{\ 2} = a^4 \dfrac{EI}{m}$

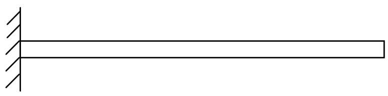
$$\boxed{\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}}$$

The corresponding mode shape;

$$\boxed{\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \qquad n = 1,2,\ldots\infty$$

(similar to string)

b) Cantilever Beam



Boundary Condition = Displacement & slope at fixed end,
and moment & shear at free end are zero

$$\begin{aligned} w(0,t) = 0 &\;\Rightarrow\; \phi(0) = 0 \\ w'(0,t) = 0 &\;\Rightarrow\; \phi'(0) = 0 \\ w''(L,t) = 0 &\;\Rightarrow\; \phi''(L) = 0 \\ w'''(L,t) = 0 &\;\Rightarrow\; \phi'''(L) = 0 \end{aligned}$$

The frequency equation is

$$\cos(aL)\cosh(aL) = -1$$

Natural frequency of the n-th mode; $\omega_n{}^2 = a^4 \dfrac{EI}{m}$

$$a_1 L = 1.875104$$
$$a_2 L = 4.694091$$
$$a_3 L = 7.854757$$
$$a_4 L = 10.995540$$
$$a_5 L = 14.137168$$

For $n > 5$ $\quad a_n L = (2n-1)\pi/2$

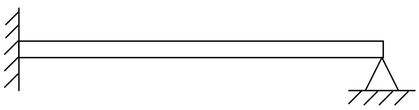
The corresponding mode shape;

$$\boxed{\phi(x) = \sin(a_n x) - \sinh(a_n x) + \frac{\sin(a_n L) + \sinh(a_n L)}{\cos(a_n L) + \cosh(a_n L)}\left(\cosh(a_n x) - \cos(a_n x)\right)}$$

or

$$\boxed{\phi(x) = \cosh(a_n x) - \cos(a_n x) - \frac{\sinh(a_n L) - \sin(a_n L)}{\cosh(a_n L) + \cos(a_n L)}\left(\sinh(a_n x) - \sin(a_n x)\right)}$$

c) Fixed-Hinged Beam



Boundary Condition = Displacement & slope at fixed end, and displacement & moment at free end are zero

$$w(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; \phi(0) = 0$$
$$w'(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; \phi'(0) = 0$$
$$w(L,t) = 0 \;\Rightarrow\; \phi(L) = 0$$
$$w''(L,t) = 0 \;\Rightarrow\; \phi''(L) = 0$$

The frequency equation is

$$\cos(aL)\sinh(aL) - \sin(aL)\cosh(aL) = 0$$

Natural frequency of the n-th mode; $\omega_n^{\ 2} = a^4 \dfrac{EI}{m}$

$$a_1 L = 3.926602$$
$$a_2 L = 7.068583$$
$$a_3 L = 10.210176$$
$$a_4 L = 13.351769$$
$$a_5 L = 16.493361$$

For $n > 5$ $\quad a_n L = (4n+1)\pi/4$

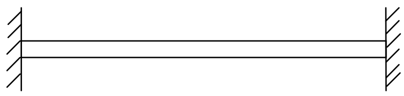
The corresponding mode shape;

$$\boxed{\phi(x) = \sin(a_n x) - \sinh(a_n x) - \frac{\sin(a_n L) - \sinh(a_n L)}{\cos(a_n L) - \cosh(a_n L)}\left(\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)\right)}$$

or

$$\boxed{\phi(x) = \cosh(a_n x) - \cos(a_n x) - \frac{\cosh(a_n L) - \cos(a_n L)}{\sinh(a_n L) - \sin(a_n L)}\left(\sinh(a_n x) - \sin(a_n x)\right)}$$

d) Fixed-Fixed Beam



Boundary Condition = Displacement & slope at fixed end,
and displacement & slope at free end are zero

$$w(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; \phi(0) = 0$$
$$w'(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; \phi'(0) = 0$$
$$w(L,t) = 0 \;\Rightarrow\; \phi(L) = 0$$
$$w'(L,t) = 0 \;\Rightarrow\; \phi'(L) = 0$$

The frequency equation is

$$\cos(aL)\cosh(aL) = 1$$

Natural frequency of the n-th mode; $\omega_n{}^2 = a^4 \dfrac{EI}{m}$

$$a_1L = 4.730041$$

$$a_2L = 7.853205$$

$$a_3L = 10.995608$$

$$a_4L = 14.137166$$

$$a_5L = 17.278760$$

For $n > 5$ $\quad a_nL = (2n+1)\pi/2$

The corresponding mode shape;

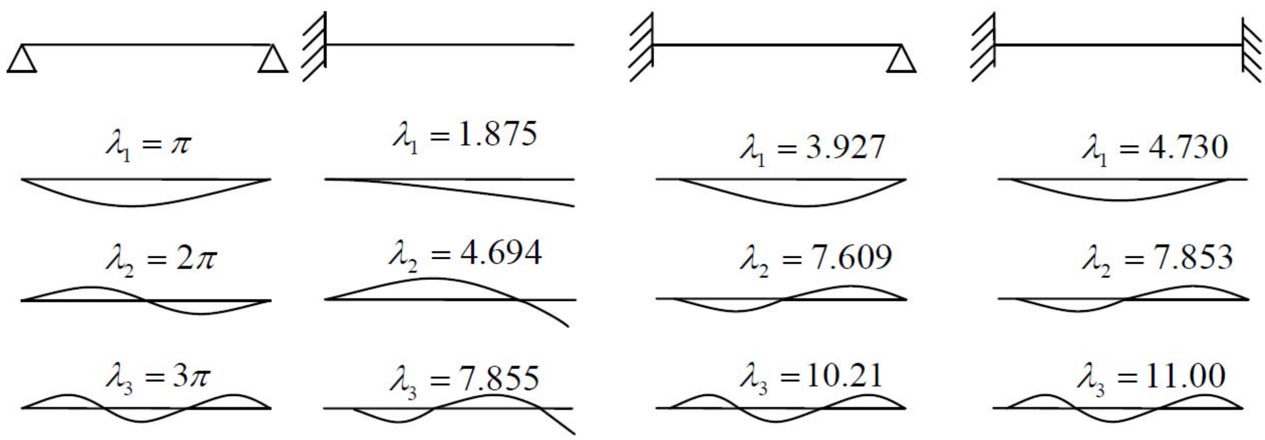
$$\boxed{\phi(x) = \sin(a_n x) - \sinh(a_n x) - \frac{\sin(a_nL) - \sinh(a_nL)}{\cos(a_nL) - \cosh(a_nL)}\left(\cos(a_n x) - \cosh(a_n x)\right)}$$

or

$$\boxed{\phi(x) = \cosh(a_n x) - \cos(a_n x) - \frac{\cosh(a_nL) - \cos(a_nL)}{\sinh(a_nL) - \sin(a_nL)}\left(\sinh(a_n x) - \sin(a_n x)\right)}$$

Summary

$\lambda = aL$



Modal Analysis of Continuous System

Assume the solution as; $$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t)$$

$$m\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\ddot{q}_i(t) + EI\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^{IV}(x) q_i(t) = p(x,t)$$

Using modal orthogonality;

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{p_n^*}{M_n} \qquad n = 1,2,\ldots$$

Damped system; $$\ddot{q}_n(t) + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{p_n^*}{M_n}$$

Modal parameters;

$$M_n = \int_0^L m\phi_n^2 dx \qquad K_n = \omega_n^2 M_n \qquad p_n^* = \int_0^L \phi_n(x) p(x,t) dx$$