อดิศรณ์ พรพรหมินทร์ 3815030

วิธีการอย่างง่ายสำหรับโครงสร้างรับแรงกระทำทางข้าง

Simplified Methods for Laterally Loaded Structures

รองศาสตราจารย์ ดร.สุธรรม สุริยะมงคล

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กันยายน 2535

1. ความนำ

องค์ประกอบของโครงสร้างของอาคารสูงโดยทั่วไปที่ทำหน้าที่ในการรับแรงกระทำทางข้าง (Lateral Load) ได้แก่ โครงข้อแข็ง (Frame) กำแพง (Wall or Shear wall) กำแพงคู่ (Coupled wall) เป็นต้น เมื่อมีแรงมากระทำทางข้าง องค์ประกอบของเหล่านี้ก็จะร่วมกันออกแรงต้าน โดยมีพื้นอาคาร (Floor Slabs) เป็นตัวยึดรั้งให้แต่ละองค์ประกอบดังกล่าวเคลื่อนตัวไปพร้อมๆ กัน ดังนั้นแต่ละองค์ประกอบก็จะออกแรงต้านตามสัดส่วนของ Stiffness ของมัน

การที่เราจะประเมินว่าแต่ละองค์ประกอบใดจะออกแรงต้านเท่าใดนั้น จะต้องศึกษาพฤติกรรมการรับแรงทางข้างของแต่ละองค์ประกอบนั้นว่าเป็นอย่างไร จนกระทั่งสามารถประเมินค่า Stiffness ของมันออกมาได้ ต่อจากนั้นเราก็จะต้องสร้างแบบจำลอง (Model) ในการวิเคราะห์ ที่จะต้องไม่ซับซ้อนจนเกินไป เพื่อลดงานคำนวณไม่ให้ยุ่งยากจนเกินไป แต่ก็จะต้องให้ผลที่พอจะเชื่อถือได้เช่นกัน ในบทความนี้จะได้นำเสนอข้อมูลต่างๆ ที่จะต้องใช้ ตามลำดับของการทำงาน

2. โครงข้อแข็งรับแรงกระทำทางข้าง (Laterally Loaded Rigid Frame)

วิธีโดยประมาณในการวิเคราะห์โครงข้อแข็งเมื่อรับแรงกระทำทางข้างมีหลายวิธี แต่ที่จะนำมากล่าวในที่นี้มี 2 วิธีคือ วิธีพอร์ทอล (Portal method) และวิธีโครงทดแทน (Method of substitute frame) ดังนี้ :

ก. Portal Method วิธีพอร์ทอลนี้เป็นการตั้งสมมติฐานเกี่ยวกับตำแหน่งของจุดดัดกลับ (Inflection point) ของคานและเสา และสัดส่วนของแรงเฉือนของเสาแต่ละต้น จนทำให้จำนวนตัวแปรของแรงลดลงเหลือเท่ากับจำนวนสมการสมดุลเท่านั้น จึงสามารถคำนวณค่าโดยประมาณของแรงต่างๆ ออกมาได้โดยง่าย

สมมติฐานมีดังนี้

1) จุดดัดกลับของคานทุกตัวอยู่ที่กึ่งกลางของช่วงคานนั้น
2) จุดดัดกลับของเสาทุกต้นอยู่ที่กึ่งกลางความสูงของชั้น
3) แรงเฉือนในแนวราบ (Horizontal shear) ในแต่ละชั้นของโครงข้อแข็ง จะกระจายให้กับเสาแต่ละต้น โดยเสาภายใน (Interior column) จะรับเป็นสองเท่าของเสาริม (Exterior column)

โดยสมมติฐานสามข้อข้างบนเราสามารถคำนวณหาโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนในคานและเสาทุกต้นได้โดยอาศัยเงื่อนไขสมดุลของแรง ตัวอย่างเช่น โครงข้อแข็งในรูปที่ 1 ภายใต้แรงกระทำทางข้าง เราสามารถคำนวณตามขั้นตอนต่อไปนี้ :

คำนวณแรงเฉือน S ในเสาทุกต้นโดยสมมติฐานข้อ (3) เช่นแรงเฉือนในแนวราบ (Horizontal shear) ของชั้นที่สองมีค่า 13 ตัน มีเสาภายใน (Interior column) 2 ต้น แต่ละต้นรับแรงเฉือนสมมติเป็น 2X มีเสาริม 2 ต้น แต่ละต้นรับแรงเฉือน X ดังนั้นเงื่อนไขของความสมดุลของแรงกำหนดให้

$6X = 13$ หรือ $X = 13/6 = 2.167$ ตัน

ดังนั้นเสาภายในแต่ละต้นจะมีแรงเฉือน S = 2x2.167 = 4.333 ในขณะที่เสาริมจะมีแรงเฉือน S = 2.167

คำนวณตามนี้จนได้แรงเฉือนของเสาทุกต้น

<u>คำนวณโมเมนต์ดัดในเสา</u> สมมติฐาน ข้อ(2) กำหนดให้จุดดัดกลับ (Inflection point) อยู่ที่กึ่งกลางความสูงของชั้น ดังนั้น<u>โมเมนต์ที่ปลายทั้งสองของเสาจะมีค่าเท่ากับแรงเฉือนคูณด้วยครึ่งหนึ่งของความสูงของเสาในชั้นนั้น</u> ตัวอย่างเช่น เสา 1A-2A จะมีโมเมนต์เท่ากับ - 2.167 x (4.00/2) = - 4.33 ตัน-เมตร <u>เครื่องหมายลบหมายถึงโมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกา</u> (ดูรูปที่ 2)

คำนวณตามนี้จนกระทั่งได้ค่าโมเมนต์ของเสาทุกต้น

<u>คำนวณโมเมนต์ดัดในคาน</u> <u>โมเมนต์ดัดที่ปลายคานคำนวณได้จากเงื่อนไขที่ว่าโมเมนต์ที่กระทำรอบจุดต่อ (Joint) ใดๆ จะต้องเป็นศูนย์ และโมเมนต์ที่ปลายทั้งสองของคานแต่ละตัวจะมีค่าเท่ากัน</u> ทั้งนี้เพื่อให้เป็นไปตามสมมติฐานข้อ (1) ที่กำหนดให้จุดดัดกลับอยู่ที่จุดกึ่งกลางของช่วงคาน

โดยเริ่มที่จุดต่อของเสาและคานตัวริม เช่น ที่จุด 3A โมเมนต์ของเสาจำนวน -3.38 ตัน-เมตร จะต้องต้านด้วยโมเมนต์ปลาย (End moment)

M_{3A-3B} = + 3.38 ตัน-เมตร โมเมนต์ที่อีกปลายหนึ่งของคานก็จะมีค่า

M_{3B-3A} = + 3.38 ตัน-เมตร ด้วย เพราะจุดดัดกลับอยู่ที่จุดกึ่งกลางช่วงคาน (ดูรูปที่ 2)

ต่อมาคำนวณ M_{3B-3C} จากเงื่อนไขของโมเมนต์รอบจุด 3B ได้

$M_{3B-3C} = - 3.38 - (-2.25) - (-6.75) = + 5.62$ ตัน-เมตร

คำนวณตามนี้จนกระทั่งได้โมเมนต์ของคานทุกตัว

จะเห็นได้ว่าสมมติฐานที่ตั้งไว้ในวิธีนี้มีจำนวนพอดี และมีความสอดคล้องกัน ทำให้โมเมนต์ดัดที่คำนวณได้ไม่มีค่าใดที่ขัดแย้งกัน

โดยที่วิธีพอร์ทอลเป็นวิธีการโดยประมาณ ที่มิได้คำนึงถึงค่า Stiffness ของเสาและคานที่ประกอบเป็นโครงข้อแข็ง ดังนั้นคำตอบที่ได้จึงมีความคลาดเคลื่อนมากน้อยขึ้นอยู่กับอัตราส่วนระหว่าง Stiffness ของเสาและคาน ซึ่งอาจประเมินจากอัตราส่วนเฉลี่ยของแต่ละชั้นของโครงข้อแข็งดังนี้

$$\lambda = 1/2\ \Sigma\ (I_c/h)/\Sigma\ (I_b/l) \qquad (1)$$

โดย I_c I_b h l หมายถึง ค่าโมเมนต์ของความเฉื่อย และความยาวของเสาและคานตามลำดับ เครื่องหมาย Σ หมายถึงค่ารวมในแต่ละชั้น

ถ้าอัตราส่วน λ อยู่ในเกณฑ์ที่เหมาะสม ($\lambda < 10$) [7] * หมายความว่าคานมีค่าStiffness สูงพอที่จะรั้งเสาให้เกิดการดัดกลับตามสมมติฐานข้อ (2) ดังนั้นค่าโมเมนต์ดัดที่คำนวณตามวิธีนี้ ก็จะใกล้เคียงกับความเป็นจริง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในชั้นกลางๆ ของอาคาร ยกเว้นชั้นล่างสุดซึ่งจุดดัดกลับของเสามักจะเลื่อนขึ้นมาอยู่ที่ระดับประมาณ 2/3 ของความสูง ในกรณีเฉพาะที่ Stiffness ของคานสูงมากๆ การดัดของโครงข้อแข็งก็จะเข้าลักษณะที่เรียกว่า Shear mode of deformation กล่าวคือ จุดดัดกลับจะอยู่ที่กึ่งกลางความสูงของเสาทุกชั้น ดังในรูปที่ 3(ก)

---

* ตัวเลขในวงเล็บใหญ่ หมายถึง หมายเลขของเอกสารอ้างอิง

ในทางกลับกัน ถ้า λ มีค่าสูงๆ ก็แสดงว่าคานมีค่า Stiffness ต่ำมากๆ ไม่สามารถรั้งเสาให้ดัดกลับได้ เสาแต่ละต้นก็จะดัดตัวแบบเสายื่น (Cantilever column) โดยมีคานทำหน้าที่เหมือนกับเป็น Link โยงเสาทุกต้นให้เคลื่อนตัวไปเท่าๆ กัน ลักษณะการดัดตัวแบบนี้เรียกว่าเป็นแบบ Bending mode of deformation (ดูรูปที่ 3(ข)) ไม่มีจุดดัดกลับ และจะใช้วิธีพอร์ทอลไม่ได้

ข. Method of Substitute Frame โครงทดแทน (Substitute frame) คือโครงพอร์ทอลสมมาตรที่มีคูหาเดียว (Symmetrical single-bay portal frame) ที่จะใช้เป็นตัวแทนในการวิเคราะห์หาแรงและการเปลี่ยนรูป (Deformation) ของโครงจริง (Actual frame) โครงทดแทนจะมีสัดส่วนและคุณสมบัติดังนี้ :

- มีจำนวนชั้นและความสูงเท่ากับโครงจริง
- คานในแต่ละชั้นของโครงทดแทนมีค่าสติฟเนสเท่ากับผลรวมของคานทุกๆ ตัวในชั้นเดียวกัน ของโครงจริง
- เสาทั้งสองต้นของโครงทดแทนในชั้นใดๆ จะมีค่าสติฟเนสเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลรวมของค่าสติฟเนสของเสาทุกต้นของโครงจริงในชั้นนั้นๆ

ดังนั้นถ้าเรากำหนดให้ Kb_i และ Kc_i แทนสติฟเนสของคานและเสาในชั้น i ของโครงทดแทนตามลำดับ ก็จะได้ว่า :

$$Kb_i = \sum_j kb_{ij} \qquad (2)$$

$$Kc_i = 1/2\sum_j kc_{ij} \qquad (3)$$

โดยที่ kb_{ij} และ kc_{ij} เป็นสติฟเนสของคานและเสาแต่ละตัวในชั้น i ของโครงจริง:

$$kb_{ij} = Ib_{ij}/l_j, \quad kc_{ij} = Ic_{ij}/h_i \tag{4}$$

รูปที่ 4 แสดงการเขียนโครงทดแทนโดยเปรียบเทียบกับโครงจริง เนื่องจากโครงทดแทนมีพฤติกรรมแบบปฏิสมมาตร (Anti-symmetrical) ดังแสดงในรูปที่ 5 ปลายทั้งสองของคานในแต่ละชั้นจะมีการหมุนตัว (Rotation) เท่ากัน ดังนั้นค่าสติฟเนสประสิทธิผล K^e ของคานจึงมีค่าเป็น

$$\boxed{Kb^e = 1.5\ Kb} \tag{5}$$

สำหรับเสานั้น ค่าแรงเฉือนในแต่ละชั้น ซึ่งเท่ากับผลบวกของแรงกระทำทางข้างตั้งแต่ชั้นนั้นจนถึงชั้นสูงสุด จะแบ่งครึ่งเป็นแรงเฉือนในเสาทั้งสองต้นเท่ากัน ซึ่งค่าแรงเฉือนในเสานี้จะไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้น หากว่าในระหว่างการกระจายโมเมนต์ เราสามารถรักษาค่าแรงเฉือนของเสาให้คงที่ เราก็จะได้คำตอบที่ถูกต้อง

แรงเฉือนในเสาจะไม่เปลี่ยนแปลง ถ้าเราให้ปลายเสาหมุนตัว (Rotate) และเลื่อนตัว (Translate)ไปพร้อมๆกันในลักษณะของเสายื่น (Cantilever column) ดังในรูปที่ 6 ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างมุม และโมเมนต์ M อาจหาได้จาก Moment-area theorem ดังนี้:

$$M = EKc.\theta = 0.25\ (4EKc)\,\theta \tag{6}$$

หรืออาจจะสรุปได้ว่าค่าสติฟเนสประสิทธิผลของเสา Kc^e เฉพาะกรณีนี้เป็น

$$\boxed{Kc^e = 0.25\ Kc} \tag{7}$$

ในรูปที่ 6 เช่นกัน ที่เราจะเห็นว่าเมื่อเราดัดปลายหนึ่งของเสาด้วยโมเมนต์ตามเข็ม M ก็จะเกิดโมเมนต์ที่ปลายอีกข้างหนึ่งมีค่าเท่ากับ -M ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าอัตราการส่งถ่าย (Carry-over factor, COF) ของกรณีพิเศษนี้เป็น -1

$$\underline{COF_c = -1} \tag{8}$$

การคำนวณเริ่มต้นจาก Fixed-end moment (FEM) ที่เกิดจากการเซ (Sway) ของโครงทดแทน โดยให้ทุกจุดต่อมีค่า เป็นศูนย์ก่อน ดังนั้น FEM ของเสาที่เกิดขึ้นจะมีค่าเป็น

แบ่งให้เสา 2 ต้น

รวม IF

$$\underline{FEM_c = -(Q/2)(h/2) = -Qh/4} \tag{9}$$

ยังไม่ได้แบ่งให้เสา

โดยที่ Q เป็นค่าของแรงเฉือนในชั้นนั้น (ดูรูปที่ 5 ประกอบ) จากนั้นจึงทำตามวิธีการของการกระจายโมเมนต์ โดยใช้ค่าสติฟเนสประสิทธิผลตามสมการ (5) และ (7) COF ของเสาเป็น -1

ตัวอย่างเช่นโครงจริงในรูป 4(ก) เป็นโครงสี่ชั้น มีค่าสติฟเนสสัมพันธ์ดังแสดง รับแรงกระทำทางข้างที่จุดต่อระหว่างชั้น การวิเคราะห์จะเริ่มด้วยการใช้โครงทดแทนดังแสดงในรูปที่ 4(ข) เป็นตัวแทน คำนวณอัตราการกระจาย (Distribution factor, DF) และ FEM ได้ดังนี้

ที่จุดต่อ 1: $K^e_{1,0} = K^e_{1,2} = 0.25(5k) = 1.25k$ $K^e_{1,1'} = 1.5(6k) = 9k$

$\Sigma K^e = 1.25k + 1.25k + 9k = 11.5k$ $DF_{1,0} = DF_{1,2} = 1.25k/11.5k = 0.109$

ที่จุดต่อ 2: $K^e_{2,1} = 0.25(5k) = 1.25k$ $\quad K^e_{2,3} = 0.25(2.5k) = 0.625k$

$K^e_{2,2'} = 1.5(5k) = 7.5k$

$\Sigma K^e = 9.375k \quad DF_{2,1} = 0.133 \quad DF_{2,3} = 0.067$

ที่จุดต่อ 3: $K^e_{3,2} = 0.25(2.5k) = 0.625k$ $\quad K^e_{3,4} = 0.25(k) = 0.25k$

$K^e_{3,3'} = 1.5(3k) = 4.5k$

$\Sigma K^e = 5.375k \quad DF_{3,2} = 0.116 \quad DF_{3,4} = 0.047$

ที่จุดต่อ 4: $K^e_{4,3} = 0.25k \quad K^e_{4,4'} = 1.5k$

$\Sigma K^e = 1.75k \quad DF_{4,3} = 0.143$

$FEM_{0,1} = FEM_{1,0} = -(4+4+6+3)(4/4) = -17$ ตัน-เมตร

$FEM_{1,2} = FEM_{2,1} = -(4+6+3)(4/4) = -13$ "

$FEM_{2,3} = FEM_{3,2} = -(6+3)(3/4) = -6.75$ "

$FEM_{3,4} = FEM_{4,3} = -3(3/4) = -2.25$ "

เอาค่า DF และ EFM ที่คำนวณได้ไปทำการกระจายโมเมนต์ โดยทำ Joint balance (JB) และ Carry over (CO) สลับกันไปดังนี้:

ตารางที่ 1- การกระจายโมเมนต์โครงทดแทน

Joint	0	1		2		3		4	
DF	0	0.109	0.109	0.133	0.067	0.116	0.047	0.143	
COF	-1		-1		-1		-1		
FEM	-17.00	-17.00	-13.00	-13.00	- 6.75	-6.75	-2.25	-2.25	รอบที่ 1
JB	0	+ 3.27	+ 3.27	+ 2.63	+ 1.32	+1.04	+0.42	+0.32	
CO	- 3.27	0	- 2.63	- 3.27	- 1.04	-1.32	-0.32	-0.42	รอบที่ 2
JB	0	+ 0.29	+ 0.29	+ 0.57	+ 0.29	+0.19	+0.08	+0.06	
CO	- 0.29	0	- 0.57	- 0.29	- 0.19	-0.29	-0.06	-0.08	รอบที่ 3
JB	0	+ 0.06	+ 0.06	+ 0.06	+ 0.03	+0.04	+0.02	+0.01	
CO	- 0.06	0	- 0.06	- 0.06	- 0.04	-0.03	-0.01	-0.02	รอบที่ 4
JB	-	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.01	-	-	-	
Mc	-20.62	-13.37	-12.63	-13.35	- 6.37	-7.12	-2.12	-2.37	
Mb	+20.62	+26.00		+19.72		+9.24		+2.37	

ค่าโมเมนต์ที่เราคำนวณได้ข้างบนนี้ เป็นค่าซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของความสมดุลของแรง (Equilibrium) และเงื่อนไขของความต่อเนื่องของการเปลี่ยนรูป (Compatibility) ดังนั้นจึงถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง (Exact solution) ของโครงทดแทน

ถ้าเราตั้งสมมติฐานต่อมาว่า คานและเสาในทุกชั้นของโครงจริงจะมีค่า End rotation และ Sway angle เท่ากับที่เกิดขึ้นในโครงทดแทน โมเมนต์ที่เกิดขึ้นในคานและเสาแต่ละตัวของโครงจริง mb_{ij} และ mc_{ij} ก็จะมีค่าเทียบได้กับ Mb_i และ Mc_i ตามอัตราส่วนของค่าสติฟเนส ดังนี้:

$$mb_{ij} = \frac{kb_{ij} Mb_i}{Kb_i} \tag{10}$$

$$mc_{ij} = \frac{kc_{ij} Mc_i}{Kc_i} \tag{11}$$

9 = 10K/2

ทำดังนี้เราจะได้ค่าโมเมนต์โดยประมาณค่าแรก ดังตัวเลขที่เขียนกำกับไว้ในรูปที่ 7 โดยมีตัวเลขที่ถูกต้องอยู่ในวงเล็บเพื่อการเปรียบเทียบ

จะเห็นได้ว่า คำตอบโดยประมาณคำตอบแรกนี้ย่อมจะต้องมีความคลาดเคลื่อนที่เห็นได้ชัดคือผลรวมของโมเมนต์รอบจุดต่อ (Joint) ไม่เป็นศูนย์ ซึ่งผิด แต่ถ้ารวมค่าแรงเฉือนของเสาในแต่ละชั้น ก็จะพบว่ามีค่าเท่ากับแรงกระทำทางข้างพอดีดังนั้นคำตอบแรกของเราจึงสอดคล้องกับสมดุลของแรงเฉือน (Shear equilibrium) แต่ไม่สอดคล้องกับสมดุลของโมเมนต์รอบจุดต่อ (Joint equilibrium)

ถ้าต้องการคำตอบที่ดีกว่านี้ เราก็สามารถกระทำได้โดยการกระจายโมเมนต์ (Moment distribution) และปรับแก้ค่าแรงเฉือนในเสา (Shear correction) ได้ ซึ่งจะไม่นำมากล่าวในที่นี้ ผู้สนใจอาจศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิงท้ายบทความนี้ แต่อยากจะชี้ให้เห็นว่าการที่เราได้คำตอบแรกใกล้เคียงกับความเป็นจริงเช่นนี้ แสดงว่าสมมติฐานดังกล่าวข้างต้นที่ว่าโครงทดแทนและโครงจริงมีค่าการเปลี่ยนรูป (Deformation configuration) คล้ายกันมาก ดังนั้นเราจึงอาจจะใช้โครงทดแทนเป็นตัวแทนของโครงจริงในการศึกษาพฤติกรรมร่วมกับองค์ประกอบอื่นของอาคาร เช่น Shear wall เป็นต้น

ยังมีวิธีวิเคราะห์โครงทดแทนอีกวิธีหนึ่งเรียกว่า Direct rotation contribution method [1] ซึ่งจะให้คำตอบที่ถูกต้อง (Exact solution) และวิธีนี้จะเป็นประโยชน์อย่างมากในกรณีที่เสามีค่า Kc สูงๆ ทำให้ค่า DF ในตารางการกระจายโมเมนต์มีค่าสูงเช่นเกิน 0.5 ซึ่งอาจจะทำให้ตัวเลขของการกระจายและส่งถ่ายโมเมนต์ Converge ช้ามาก หรืออาจไม่ Converge เลย รายละเอียดอาจศึกษาเพิ่มเติมจากเอกสารอ้างอิง ในที่นี้จะสรุปขั้นตอนการคำนวณของวิธีการนี้ ดังนี้:

1) คำนวณค่า Distribution factor DF ของทุกจุดต่อ

$$DF_{0,1},\ DF_{i,i-1},\ DF_{i,i+1},\ \ldots,\ DF_{n,n-1},\quad i = 1,2,3,\ldots n-1$$

2) คำนวณค่า Modified distribution factor DF' โดยใช้สูตรการคำนวณสืบเนื่องกันจากล่างขึ้นบน

$$DF'_{0,1} = DF_{0,1}$$

$$DF'_{i,i-1} = DF_{i,i-1}/(1-DF_{i,i-1}DF'_{i-1,i})$$

$$DF'_{i,i+1} = DF_{i,i+1}/(1-DF_{i,i-1}DF'_{i-1,i}),\quad i=1,2,3,\ldots\ldots n-1$$

$$DF'_{n,n-1} = DF_{n,n-1}/(1-DF_{n,n-1}DF'_{n-1,n})$$

3) คำนวณ FEM_{ij}

4) คำนวณ M' สืบเนื่องจากล่างขึ้นบน

$$M'_{0,1} = DF'_{0,1}\,(-\,FEM_{0,1})$$

$$M'_{i,i-1} = DF'_{i,i-1}\,(M'_{i-1,i} - FEM_{i,i-1} - FEM_{i,i+1})$$

$$M'_{i,i+1} = DF'_{i,i+1}\,(M'_{i-1,i} - FEM_{i,i-1} - FEM_{i,i+1}), \quad i=1,2,3, \ldots n-1$$

$$M'_{n,n-1} = DF'_{n,n-1}\,(M'_{n-1,n} - FEM_{n,n-1})$$

5) คำนวณ M" สืบเนื่องย้อนจากบนลงล่าง

$$M''_{n,n-1} = 0$$

$$M''_{k,k+1} = DF'_{k,k+1}\,(M'_{k+1,k} + M''_{k+1,k})$$

$$M''_{k,k-1} = DF'_{k,k-1}\,(M'_{k+1,k} + M''_{k+1,k}), \quad k=n-1, n-2, n-3, \ldots\ldots 1$$

$$M''_{0,1} = DF'_{0,1}\,(M'_{1,0} + M''_{1,0})$$

6) รวมค่า M' และ M" ส่วนที่เหลือ

$$M'_{i,i+1} + M''_{i,i+1}$$

7) Carry-over mement $COM_{ij} = -\,(M'_{ji} + M''_{ji})$

8) $Mc_{ij} = FEM_{ij} + (M'_{ij} + M''_{ij}) + COM_{ij}$

ตารางที่ 2 ข้างล่างนี้เป็นการใช้แบบแผนการคำนวณดังกล่าวข้างต้นกับโครงทดแทนตัวอย่างเดิม :

① .2 .2 .2 .2 .3

① .2 .2 .2 .2

ตารางที่ 2 -Direct rotation contribution method

Joint	0	1		2		3		4
DF	0	0.109	0.109	0.133	0.067	0.116	0.047	0.143
DF'	0	0.109	0.109	0.135	0.068	0.117	0.047	0.144
FEM	-17.00	-17.00	-13.00	-13.00	- 6.75	-6.75	-2.25	-2.25
M'	0 →	+ 3.27	+ 3.27 →	+ 3.11 ~~+ 3.06~~	+ 1.56 ~~+ 1.54~~ →	+ 1.24 ~~+1.22~~	+0.50 →	+0.39
M"	0 ←	+ 0.36 - 0.35	+ 0.36 ~~+ 0.35~~ ←	+ 0.17	+ 0.09 ←	+0.05	+0.02 ←	0
M=M'+M"	0	+ 3.63 + 3.62	+ 3.63 +3.62	+ 3.25 ~~+3.23~~	+ 1.66 ~~+1.63~~	+1.29	+0.52	+0.39
COM	- 3.62	0	- 3.23	- 3.62	- 1.27	-1.63	-0.39	-0.52
Mc	-20.62	-13.38	-12.61	-13.39	- 6.39	-7.11	-2.12	-2.38
Mb	+20.62		+25.99		+19.78		+9.23	+2.38

โครงสมมาตรคูหาเดี่ยวที่เราใช้เป็นโครงทดแทนดังกล่าวข้างต้นนั้น ซึ่งมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า Virendeel frame นั้น เมื่อวางตัวในแนวราบ ก็จะมีสภาพเป็นคล้ายๆ โครงถัก (Truss) แต่ไม่มี Diagonal web มีแต่ Top chord และ Bottom chord ซึ่งขนานกัน ยึดแน่นกับ Vertical web เหมาะสำหรับเป็นโครงสร้างที่ต้องการช่วง (Span) ยาวๆ แต่ไม่ต้องการมี Diagonal member เพื่อให้สอดคล้องกับความเหมาะสมทางสถาปัตย์ เช่นใช้เป็นสะพานลอยข้ามถนนหรือเป็น Transfer girder เป็นต้น ในรูปที่ 8 เป็นตัวอย่างของ Virendeel frame ที่ใช้เป็นสะพานข้ามถนน ซึ่งสามารถวิเคราะห์ด้วยวิธี Direct rotation contribition ได้ดังนี้ :

ที่จุดต่อ o : $K^e_{0,1} = 0.25k(4K) = K$ $K^e_{0,0'} = 1.5(3K) = 4.5K$ $\Sigma K^e_o = 5.5\ K$

$DF_{0,1} = K/5.5\ K = 0.182$

ที่จุดต่อ i ใดๆ ตั้งแต่ i = 1 ถึง 7: $K^e_{i,i-1} = K^e_{i,i+1} = 0.25(4K) = K$

$K^e_{i,i'} = 1.5(3K) = 4.5K$ $\Sigma K^e_i = 6.5K$ $DF_{i,i-1} = DF_{i,i+1} = K/6.5K = 0.154$

ที่จุดต่อ 8 : $K^e_{8,7} = 0.25(4K) = K$ $K^e_{8,8'} = 4.5K$ $\Sigma K^e_8 = 5.5K$

$DF_{8,7} = K/5.5K = 0.182$

แรงเฉือน : $Q_{0,1} = 41$ $Q_{1,2} = 41-14 = 27$ $Q_{2,3} = 27-8 = 19$

$Q_{3,4} = 19-14 = 5$ $Q_{4,5} = 5-10 = -5$ $Q_{5,6} = -5-16 = -21$

$Q_{6,7} = -21-8 = -29$ $Q_{7,8} = -29-8 = -37$

$$FEM_{0,1} = FEM_{1,0} = -Q_{0,1}(h/4) = -41(3/4) = -30.75$$

$$FEM_{1,2} = FEM_{2,1} = -27\ (3/4) = -20.25$$

$$FEM_{2,3} = FEM_{3,2} = -19\ (3/4) = -14.25$$

$$FEM_{3,4} = FEM_{4,3} = -\ 5\ (3/4) = +\ \overset{-3.75}{\cancel{2.25}}$$

$$FEM_{4,5} = FEM_{5,4} = +\ 5\ (3/4) = -\ \overset{+3.75}{\cancel{2.25}}$$

$$FEM_{5,6} = FEM_{6,5} = +21\ (3/4) = +15.75$$

$$FEM_{6,7} = FEM_{7,6} = +29\ (3/4) = +21.75$$

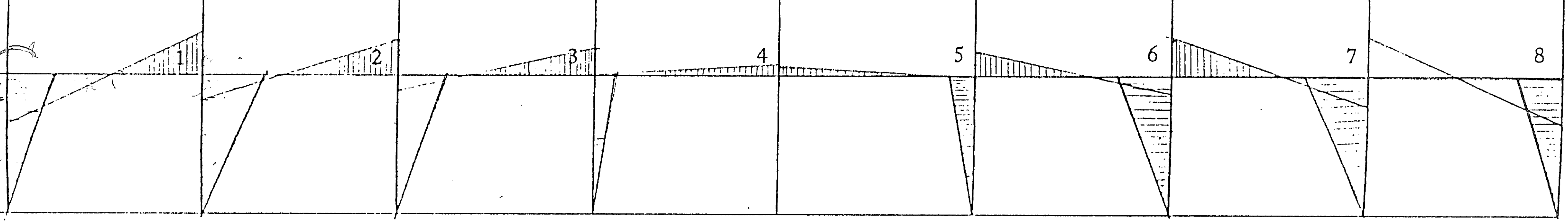
$$FEM_{7,8} = FEM_{8,7} = +37\ (3/4) = +27.75$$

ในตอนท้ายของตารางได้เขียนผังภูมิโมเมนต์ (Moment diagram, BMD) ไว้ด้วยแล้ว

ตารางที่ 3 - Direct rotation contribution method สำหรับ Vierendeel frame รูปที่ 9

Joint	0	1		2		3		4		.5		6		7		
DF	0.182	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.154	0.182
DF'	0.182	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.158	0.187
FEM	-30.75	-30.75	-20.25	-20.25	-14.25	-14.25	-3.75 ~~-2.25~~	-3.75 ~~-2.25~~	+3.75 ~~+2.25~~	+3.75 ~~+2.25~~	+15.75	+15.75	+21.75	+21.75	+27.75	+27.75
M'	+5.60 →	18.94	18.94 →	16.86	16.86 →	+3.93 ~~+3.69~~	+3.93 ~~+3.69~~ →	+0.62 ~~+0.58~~	+0.62 ~~+0.58~~ →	-2.98 ~~-2.75~~	-2.92 ~~-2.75~~ →	-6.40 ~~-6.36~~	-6.40 ~~-6.36~~ →	-8.83	-8.83 →	-6.84
M"	11.84	11.18	11.18	+0.62 ~~10.58~~	+0.62 ~~10.58~~	-0.01	-0.01	-0.67 ~~-0.63~~	-0.67 ~~-0.63~~	-1.26 ~~-1.25~~	-1.26 ~~-1.25~~	-1.57	-1.57	-1.08	-1.08	0
M'+M"	17.44	+10.12	+10.12	+7.48 ~~+7.44~~	+7.48 ~~7.44~~	+3.92 ~~+3.68~~	+3.92 ~~+3.68~~	-0.05	-0.05	-4.24 ~~-4.00~~	-4.24 -4.00	-7.97 ~~-7.93~~	-7.97 ~~-7.93~~	-9.91	-9.91	-6.84
COM	-10.12	-7.44	-7.48 ~~-7.44~~	-10.12	3.92 ~~-3.68~~	-7.48 ~~-7.44~~	+0.05	-3.92 ~~-3.68~~	+4.24 ~~+4.00~~	+0.05	+7.97 +7.93	+4.24 ~~+4.00~~	+9.91	+7.97 17.93	16.84	+9.91
Mc	-33.43	-28.07	-17.61 ~~-17.57~~	-22.89 ~~-22.93~~	-10.69 ~~-10.49~~	-17.21 -18.01	+0.22 ~~+1.48~~	-7.72 ~~-5.98~~	+7.34 16.20	-0.44 ~~-1.70~~	+19.48 +15.68	+12.02 ~~+11.82~~	+23.69 ~~+23.73~~	+19.21 ~~+19.77~~	+24.68	+30.82
Mb	+33.43	+45.68 ~~145.64~~		+33.58 ~~33.42~~		+17.59 ~~16.53~~		-0.22		-19.04 ~~-17.98~~		-35.71 ~~-35.55~~		-44.49 ~~-44.45~~		-30.82

BMD



3. การคำนวณระยะโก่ง (Deflection) ในโครงข้อแข็ง

สำหรับโครงข้อแข็งใดก็ตาม ถ้าเราสามารถวิเคราะห์หาค่าโมเมนต์ได้ทั้งหมดอย่างถูกต้อง เราก็ย่อมจะหาระยะโก่งทางข้าง (Lateral deflection) ได้จาก BMD ได้โดยตรง จากทฤษฎีพื้นที่โมเมนต์ (Moment-area theorem) กล่าวคือระยะโก่ง δ_k ที่จุดต่อ k ใดๆ ซึ่งสูงจากฐานรองรับ (support) เป็นระยะทาง x_k จะมีค่าดังนี้ :

$$\delta_k = \theta_o x_k + \delta_k^1 - \delta_k^2 \tag{12}$$

โดยที่ θ_0 เป็น Rotation ที่ฐานรองรับ (ในกรณีที่ฐานไม่ได้ยึดแน่น) ซึ่งอาจคำนวณจากความสัมพันธ์ของระยะโก่งของเสาและคานในชั้นแรกดังนี้

$$\theta_0 = \theta_1 + \theta_{0,1}$$

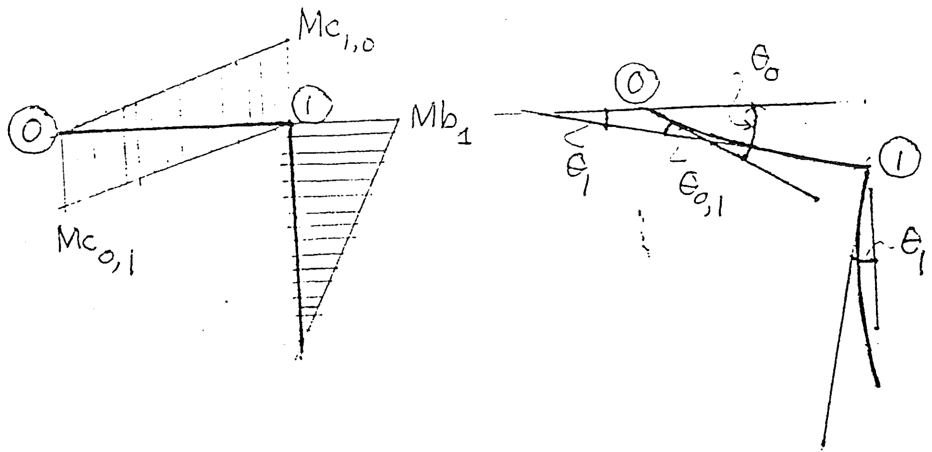
$$\theta_1 = 1/2\ (Mb_1/EIb_1)(L/2)(2/3)(L/2)/(L/2)$$

$$= Mb_1/6EKb_1 = (-Mc_{1,0} - Mc_{1,2})/EKb_1$$

$$\theta_{0,1} = 1/2\ (Mc_{0,1} - Mc_{1,0})h_1$$

$$= (Mc_{0,1} - Mc_{1,0})/2EKc_1$$

$$\theta_0 = -(Mc_{1,0} + Mc_{1,2})/(6EKb_1) + (Mc_{0,1} - Mc_{1,0})/(2EKc_1) \tag{13}$$



$$\delta_k^1 = 1/2 \sum_{i=1,2,3,...}^{k} Mc_{i,i-1}\,(x_k - x_i + h_i/3)/EKc_i \qquad (14)$$

$$\delta_k^2 = 1/2 \sum_{i=1,2,3,...}^{k} Mc_{i-1,i}\,(x_k - x_i + 2h_i/3)/EKc_i \qquad (15)$$

โดย h_i คือ ความสูงของชั้น i มีค่าเท่ากับ $x_i - x_{i-1}$ E = Modulus of elasticity แทน (13) (14) และ (15) ลงใน (12) ก็จะได้

$$E\delta_k = x_k\,[(Mc_{0,1} - Mc_{1,0})/2Kc_1 - (Mc_{1,0} + Mc_{1,2})/6Kb_1]$$
$$+ 1/2 \sum_{i=1,2,3...}^{k} [Mc_{i,i-1}(x_k - x_i + h_i/3) - Mc_{i-1,i}(x_k - x_i + 2h_i/3)]/Kc_i \qquad (16)$$

สำหรับกรณีที่มิได้วิเคราะห์หาโมเมนต์มาก่อน เราก็อาจจะใช้สูตรสำเร็จมาใช้คำนวณหาระยะโก่งโดยประมาณ เพื่อใช้ตรวจสอบคำตอบที่ได้จากแหล่งอื่น เช่น คำตอบจากคอมพิวเตอร์ หรือใช้ในการประเมินสติฟเนสของโครงข้อแข็ง

รูปที่ 10 แสดงจุดต่อทั่วไป (Typical joint) ของคานและเสาที่สมมติให้มีจุดดัดกลับที่กึ่งกลางช่วง ใช้ระยะโก่งของรูปนี้เป็นตัวแทนของโครงข้อแข็งทั้งโครงโดยรวมค่า I/h และ I/l ของเสาและคานทั้งหมดในแต่ละชั้นไว้ที่รูปนี้ แรงเฉือน Q เป็นแรงเฉือนทั้งหมดของโครงในแต่ละชั้น

จากทฤษฎีพื้นที่โมเมนต์

$$\theta = \frac{(1-\beta_a)^3 Qh}{12E\Sigma I_b/l} \qquad \delta\Delta_f = \frac{(1-\beta_d)^3 Qh^2}{12E\Sigma I_c/h} + \frac{(1-\beta_a)^3 Qh^2}{12E\Sigma I_b/l}$$

หรือ

$$\frac{\delta\Delta_f}{h} = \frac{Qh^2}{12E\Sigma I_c}\left[(1-\beta_d)^3 + 2\lambda(1-\beta_a)^3\right] \qquad (17)$$

ในที่นี้ $\delta\Delta_f$ หมายถึง ผลต่างของระยะโก่งระหว่างชั้น $\beta_a = a/l$ และ $\beta_d = d/h$ หมายถึงอัตราส่วนระหว่างความลึกของเสาเมื่อเทียบกับช่วงคาน และอัตราส่วนความลึกของคานเมื่อเทียบกับความสูงของชั้น ทั้งนี้เพื่อเป็นการรวมเอาผลของ Rigid joint zone มาพิจารณาด้วย

สมมติให้ $\delta\Delta_f/h = \frac{d\Delta_f}{dz}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนระยะโก่งโดยเฉลี่ยเมื่อเทียบกับระยะ z ตามความสูงของโครงข้อแข็ง ดังนั้นจึงอาจเขียนสมการ (17) ในรูปของอนุพันธ์ของระยะโก่งดังนี้

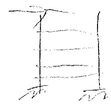
$$\lim_{h \to 0} \frac{\delta \Delta_f}{h} = \frac{d\Delta_f}{dz} = \frac{Qh^2}{12E\Sigma I_c}\left[(1-\beta_d)^3 + 2\lambda(1-\beta_a)^3\right] \tag{18}$$

และเมื่ออินติเกรทจะได้

$$\Delta_f = \int \frac{Qh^2}{12E\Sigma I_c}\left[(1-\beta_d)^3 + 2\lambda(1-\beta_a)^3\right] dz \tag{19}$$

กรณีเฉพาะที่ h $\Sigma I_c/h$ β_d β_a λ มีค่าคงที่ตลอดความสูง อินติกรัลข้างบนก็จะง่ายขึ้น ซึ่งเราอาจจะหาสูตรของกรณีต่างๆ ดังนี้

กรณีที่ 1-รับแรงเดี่ยว P ที่ชั้นยอดเท่านั้น : ในกรณีนี้แรงเฉือนจะมีค่าคงที่เท่ากับ P และสมการ (19) ก็จะให้

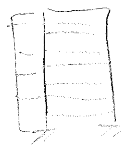


$$\Delta_f(z) = \frac{Ph^2 z}{12E\Sigma I_c}\left[(1-\beta_d)^3 + 2\lambda(1-\beta_a)^3\right] \tag{20}$$

ถ้าความสูงของโครงเป็น H ระยะโก่งที่ระดับยอดจะเท่ากับ

$$\Delta_f(H) = \frac{Ph^2 H}{12E\Sigma I_c}\left[(1-\beta_d)^3 + 2\lambda(1-\beta_a)^3\right] \tag{21}$$

กรณีที่ 2- แรง P แบ่งกระจายสม่ำเสมอ : ในกรณีนี้แรงเฉือนที่ระดับความสูง z จะมีค่าเป็น



$$Q(z) = \frac{P(H-z)}{H} = P\left(1 - \frac{z}{H}\right)$$

และสมการ (19) จะให้

$$\Delta_f(z) = \frac{Ph^2 H}{12E\Sigma I_c}\left[\frac{z}{H} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{H}\right)^2\right]\left[(1-\beta_d)^3 + 2\lambda(1-\beta_a)^3\right] \tag{22}$$

<u>กรณีที่ 3- แรง P แบ่งกระจายเป็นรูปสามเหลี่ยมจากค่าศูนย์ที่ฐานไปสู่ค่าสูงสุดที่ระดับยอด</u>: ในกรณีนี้

$$Q(z) = P[1-(z/H)^2]$$

และสมการ (19) ก็จะให้

$$\Delta_f(z) = \frac{Ph^2H}{12E\Sigma I_c}\left[\frac{z}{H} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{H}\right)^3\right]\left[(1-\beta_d)^3 + 2\lambda(1-\beta_a)^3\right] \tag{23}$$

กรณีอื่นๆ อันเกี่ยวกับการกระจายของแรง หรือการแปรค่าของตัวแปรอื่นๆ ก็อาจจะคำนวณได้ในทำนองเดียวกัน หรือค้นคว้าเพิ่มเติมจากเอกสารอ้างอิง [7]

อย่างไรก็ตาม พึงระลึกว่านี่เป็นเพียงสมการโดยประมาณเท่านั้น <u>เหมาะสำหรับโครงข้อแข็งที่ค่า I_c/h และ I_b/l ของแต่ละคูหา (Bay) ของโครงนั้นๆ ไม่แตกต่างกันมากนัก และ λ ไม่ควรจะเกิน 5</u> [7] $\lambda = \frac{\Sigma I_c/h}{\Sigma I_b/h}$

4. <u>พฤติกรรมของกำแพง</u>

กำแพงคอนกรีตเสริมเหล็ก เช่นส่วนที่เป็นกำแพงตึก ผนังรอบช่องลิฟต์หรือช่องบันได เหล่านี้ล้วนแต่มีค่า I สูงมากๆเมื่อเทียบกับเสาโดยทั่วไป ดังนั้นมันจึงมีส่วนที่จะช่วยรับแรงกระทำทางข้างของอาคารได้เป็นอย่างมาก สำหรับกำแพงธรรมดาที่ไม่มีช่องเปิด จะมีพฤติกรรมเหมือนกับคานยื่น (Cantilever) ซึ่งเราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกระทำกับระยะโก่งได้โดยง่าย

ดังเช่นในรูปที่ 11 กำแพงที่มีค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของหน้าตัดเป็น I_w เมื่อมีแรงทางข้างหนึ่งหน่วยกระทำที่ระดับ t จากฐาน จะทำให้เกิดระยะโก่งที่ z มีค่าเป็นดังนี้

$$\Delta_w(z;t) = W \int_o^z \frac{(t-s)(z-s)ds}{EI_w} + \frac{Wzt}{K_B} \quad , z < t$$

$$= W \int_o^t \frac{(t-s)(z-s)ds}{EI_w} + \frac{Wzt}{K_B} \quad , z > t \qquad (24)$$

ถ้า I_w มีค่าเท่ากันตลอดความสูง

$$\Delta_w(z;t) = \frac{Wz^2}{EI_w}\left(\frac{t}{2} - \frac{z}{6}\right) + \frac{Wzt}{K_B} \quad , z < t$$

$$= \frac{Wt^2}{EI_w}\left(\frac{z}{2} - \frac{t}{6}\right) + \frac{Wzt}{K_B} \quad , z > t \qquad (25)$$

K_B ในสมการข้างบนเป็นสติฟเนสในเชิงหมุน (Rotational stiffness) ของฐานที่รองรับกำแพง ถ้ามั่นใจว่าฐานอยู่ในสภาพยึดแน่นจริงๆ ก็อาจจะให้ $K_B \to \infty$ ซึ่งจะทำให้พจน์สุดท้ายของสมการข้างบนเป็นศูนย์ แต่โดยทั่วไปเราควรจะประเมินค่า K_B ให้สมจริง เพราะจะมีผลต่อสัดส่วนในการรับแรงกระทำทางข้างของกำแพงเป็นอย่างมาก

จากสมการที่ (25) ข้างบน เราสามารถจะคำนวณหาระยะโก่งของกรณีเฉพาะต่างๆ ซึ่งเกี่ยวกับแรงกระทำได้ดังเช่น :

กรณีที่ 1- W เป็นแรงเดี่ยวกระทำที่ระดับยอด

$$\Delta_w(z;H) = \frac{WH^3}{EI_w}\left[\frac{(z/H)^2}{2} - \frac{(z/H)^3}{6}\right] + \frac{WHz}{K_B} \qquad (26)$$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

<u>กรณีที่ 2- W แบ่งกระจายสม่ำเสมอตลอดความสูง</u>

$$\Delta_w(z) = \frac{W/H}{EI_w}\int_0^z t^2\left(\frac{z}{2} - \frac{t}{6}\right)dt + \frac{Wz^2/H}{EI_w}\int_z^H\left(\frac{t}{2} - \frac{z}{6}\right)dt$$

$$+ \frac{Wz/H}{K_B}\int_0^H t\,dt$$

1/8

$$= \frac{WH^3}{EI_w}\left[\frac{(z/H)^4}{24} - \frac{(z/H)^3}{6} + \frac{(z/H)^2}{4}\right] + \frac{WHz}{2K_B} \qquad (27)$$

<u>กรณีที่ 3- W แบ่งกระจายเป็นรูปสามเหลี่ยมจากค่าศูนย์ที่ฐานไปสู่ค่าสูงสุดที่ระดับยอด</u>

$$\Delta_w(z) = \frac{2W/H^2}{EI_w}\int_0^z t^3\left(\frac{z}{2} - \frac{t}{6}\right)dt + \frac{2Wz^2/H^2}{EI_w}\int_z^H t\left(\frac{t}{2} - \frac{z}{6}\right)dt$$

$$+ \frac{2Wz/H^2}{K_B}\int_0^H t^2\,dt$$

11/60

$$= \frac{WH^3}{EI_w}\left[\frac{(z/H)^5}{60} - \frac{(z/H)^3}{6} + \frac{(z/H)^2}{3}\right] + \frac{2WHz}{3K_B} \qquad (28)$$

สำหรับกำแพงที่มีช่องเปิด เช่นเปิดเป็นช่องหน้าต่าง หรือเปิดเป็นช่องทางเดินภายในอาคาร ดังตัวอย่างในรูปที่ 13 เหล่านี้ล้วนมีสภาพเหมือนกำแพงคู่ (Coupled walls) ยึดโยงด้วยคานเชื่อม (Connecting beam) ซึ่งพยายามจะรั้งให้กำแพงทั้งสองดัดตัวร่วมกันคล้ายกับเป็นหน้าตัดประกอบ (Composite section) ซึ่งจะเพิ่มสติฟเนสขึ้นมาเป็นอย่างมากเมื่อเทียบกับกำแพงเดี่ยวสองกำแพงที่ต่างดัดตัวโดยอิสระ การวิเคราะห์พฤติกรรมของกำแพงคู่เป็นเรื่องซับซ้อนและมีรายละเอียดมาก จะไม่นำมากล่าวในที่นี้ ผู้สนใจอาจศึกษาจากเอกสารอ้างอิงท้ายบทความนี้ [2,3,4]