หลักสูตร การออกแบบโครงสร้างอาคารสูง

รองศาสตราจารย์ ดร. สุธรรม สุริยะมงคล

Wind Load Analysis II

โดย

ภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาฯ

ร่วมกับ

ฝ่ายการศึกษาต่อเนื่อง จุฬาฯ

วิธีการวิเคราะห์อย่างง่ายสำหรับอาคารที่ประกอบ
ด้วยกำแพงและโครงข้อแข็งที่มีผังอสมมาตร

รองศาสตราจารย์ ดร. สุธรรม สุริยะมงคล
ภาควิชาวิศวกรรมโยธา
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ธันวาคม 2536

1. ความนำ

การวิเคราะห์หาปฏิสัมพันธ์ (Interaction) ระหว่างกำแพง (Wall) และโครงข้อแข็ง (Frame) ซึ่งเป็นองค์ประกอบของโครงสร้างของอาคารสูงโดยทั่วไปนั้น ได้เป็นที่สนใจของนักวิจัยและนักวิเคราะห์ทางวิศวกรรมโครงสร้างมาเป็นเวลานานแล้ว [1-5] ได้มีการนำเสนอวิธีการวิเคราะห์หลายแบบ ตั้งแต่การวิเคราะห์โดยประมาณ (Approximate analysis) ซึ่งสามารถคำนวณได้ด้วยมือ จนกระทั่งถึงวิธีการที่สมบูรณ์แบบซึ่งจะต้องใช้การคำนวณที่ซับซ้อนโดยอาศัยเครื่องคอมพิวเตอร์

ในทุก ๆ วิธีการที่นำเสนอนั้นจะต้องมีสาระสำคัญร่วมกันอย่างหนึ่ง นั่นคือ จะต้องคำนวณหาค่าความเกร็ง (Stiffness) และ/หรือความอ่อนตัว (Flexibility) ของโครงข้อแข็ง และกำแพง ในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง

กล่าวโดยเฉพาะกรณีของโครงข้อแข็ง สมมุติฐานที่นิยมใช้เพื่อการวิเคราะห์หาคำตอบโดยประมาณก็คือการสมมุติให้มีจุดดัดกลับ (Inflection point) ที่จุดกึ่งกลางของช่วงคานและที่กึ่งกลางความสูงระหว่างชั้นต่อชั้นของเสา [4] อย่างไรก็ตามค่าของแรงและระยะโก่งที่คำนวณได้ตามสมมุติฐานนี้จะใกล้เคียงกับความเป็นจริงก็ต่อเมื่อคานมีค่า Stiffness สูงเพียงพอที่จะรั้งเสาให้เกิดจุดดัดกลับตามสมมุติฐานดังกล่าว ทว่าในทางปฏิบัติจริงนั้นเสาของโครงสร้างอาคารสูงมักมีขนาดใหญ่มากเมื่อเทียบกับคาน ทำให้คานมีสัดส่วน Stiffness ต่ำ ไม่สามารถจะรั้งเสาให้ดัดกลับตามสมมุติฐานได้ ดังนั้นคำตอบที่ได้จึงอาจมีความคลาดเคลื่อนได้มาก

ในการศึกษาครั้งนี้ จะตั้งสมมุติฐานแต่เพียงข้อเดียว คือกำหนดให้มีจุดดัดกลับที่กึ่งกลางของคานเท่านั้น ณ จุดดัดกลับนี้ค่าโมเมนต์ดัดและระยะโก่งต่างก็มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น เราจึงอาจจะพิจารณาเสาแต่ละต้นว่าเสมือนหนึ่งมีแขนยื่นออกไปที่ทุกระดับชั้นของอาคาร ปลายแขนค้ำกับที่รองรับแบบลูกกลิ้ง (Roller) ดังแสดงในรูปที่ 1 (ก) และ (ข) แขนที่ยื่นออกจากตัวเสาที่ทุกระดับชั้นของอาคารจะดัดตัวในการช่วยพยุงเสาเอาไว้เมื่อถูกกระทำด้วยแรงทางข้าง และการที่มีแขนยื่นถี่ ๆ ทุกระดับชั้นของอาคารทำให้

เราสามารถพิจารณาเสมือนหนึ่งว่ามันเป็นที่รองรับแบบต่อเนื่อง (Continuum support) ดังในรูปที่ 1(ค) ซึ่งเราอาจจะเขียนสมการดิฟเฟอเรนเชียล (Differential equation) ตลอดจนหาคำตอบแบบปิด (Close-form solution) ได้ ซึ่งจากคำตอบที่ได้เราจะสามารถคำนวณค่า Flexibility และ Stiffness ที่มีความแม่นยำพอสมควรออกมาได้โดยง่าย

ในการวิเคราะห์ปัญหาประเภทนี้ โดยทั่วไปมักจะสมมุติว่าพื้นอาคารมีความเกร็งในระนาบ (In-plane stiffness) สูงมากจนกระทั่งมันจะเคลื่อนตัวแบบคงรูป (Rigid-body displacement) เท่านั้น ทำให้เราสามารถคำนวณการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement) ของเสาแต่ละต้น และกำแพงแต่ละผืนในผังแต่ละชั้นของอาคาร ให้อยู่ในพจน์ของการเปลี่ยนตำแหน่งเพียง 3 พจน์ คือการเลื่อนตัวในทิศ x, y และการหมุนตัว ซึ่งเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (Unknown variable) ตัวแปรเหล่านี้จะหาค่าได้จากสภาวะสมดุล (Equilibrium) ของอาคาร โดยอาศัย "ทฤษฎีการคงค่าของพลังงานศักย์รวม (Theorem of stationary total potential energy)" ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

พื้นอาคารแข็งเกร็งมาก

2. วิธีการวิเคราะห์

ดังได้กล่าวมาแล้วว่าในการวิเคราะห์การรับแรงของอาคารนั้น เริ่มแรกเราจะต้องหา Stiffness และ Flexibility ขององค์ประกอบทั้งสองประเภท อันได้แก่ กำแพง (Wall) และโครงข้อแข็ง (Frame) ให้ได้เสียก่อน ซึ่งอาจจะแยกพิจารณาได้ดังต่อไปนี้

กำแพง (Wall) พฤติกรรมของกำแพงก็เหมือนกับเป็นคานขนาดใหญ่ยื่นขึ้นไปในแนวดิ่งโดยอิสระ (Free standing cantilever) เป็นองค์ประกอบที่ตายตัวเชิงสถิตย์ (Statically determinate) เราจึงสามารถคำนวณหา Flexibility coefficient, s_{ij}, ซึ่งหมายถึงระยะโก่งที่เกิดขึ้นที่ระดับความสูง z_i ใด ๆ อันเนื่องจากแรงทางข้างหนึ่งหน่วยกระทำที่ระดับ z_j ใด ๆ ได้โดยอาศัยทฤษฎีโครงสร้างพื้นฐาน เช่น Moment-area theorem ออกมาได้ดังนี้

ระยะโก่งที่ z_i

เนื่องจากแรงทางข้าง 1 หน่วยกระทำที่ z_j

$$\delta z_i \quad s_{ij} = z_i^2 (z_j/2 - z_i/6)/EI_s + z_i z_j/K_B , \qquad z_i<z_j \qquad (1)$$

$$= z_j^2 (z_i/2 - z_j/6)/EI_s + z_i z_j/K_B , \qquad z_i>z_j$$

z_j z_i

ทั้งนี้โดยที่ $E\,I_s$ และ K_B หมายถึงค่าโมดูลัสอีลาสติก (Modulus of elasticity) โมเมนต์ของความเฉื่อย (Moment of inertia) ของหน้าตัดกำแพงและความเกร็งเชิงหมุน (Rotational stiffness) ของฐานรากซึ่งรองรับกำแพง ตามลำดับ

Sij คือ จุดต่างๆ ของกำแพง จัดเป็นระบบที่ได้ Flexibility matrix [Sij]

$Ks = [Sij]^{-1}$

Stiffness matrix

โดยอาศัยสูตรในสมการ (1) ข้างบน เราย่อมสามารถคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของการอ่อนตัว (Flexibility coefficient) ณ จุดต่าง ๆ ของกำแพงได้ ซึ่งเมื่อนำมาจัดเรียงเป็นระบบก็จะได้เมทริกซ์ของความอ่อนตัว (Flexibility matrix) $[s_{ij}]$ และค่าอินเวอร์สของมัน (Inverse matrix) ก็คือเมทริกซ์ของความเกร็ง (Stiffness matrix) ของกำแพงหรือ K_s นั่นเอง กล่าวคือ

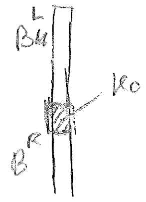
$$K_s = [s_{ij}]^{-1} \tag{2}$$

โครงข้อแข็ง (Frame) ตามที่ได้กล่าวถึงก่อนหน้านี้แล้วนั้น ถ้าเราสมมุติให้มีจุดดัดกลับที่กึ่งกลางช่วงของคานแต่ละตัวในโครงข้อแข็ง เราก็สามารถแยกพิจารณาพฤติกรรมของเสาแต่ละต้นโดยอิสระ โดยใช้แบบจำลอง (Model) ดังแสดงในรูปที่ 1 (ก) และ (ข) ซึ่งจะเห็นได้ว่าเมื่อเสาถูกกระทำด้วยแรงทางข้าง (Lateral load) นั้น แทนที่จะโก่งตัวแบบคานยื่น มันจะได้รับการพยุงจากคานแขนซึ่งดัดตัวฝืนกับทิศทางของแรงกระทำ ทำให้เกิดโมเมนต์ดัดที่ข้อต่อเป็น M_b และ M_b' ดังในรูป ค่าโมเมนต์ดัดนี้จะเป็นสัดส่วนกับมุมหมุนของข้อต่อ (Joint rotation) $d\delta/dz$ โดยที่ δ หมายถึงระยะโก่งของเสาที่ระดับความสูง z รูปที่ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและมุมหมุน โดยอาศัยทฤษฎีพื้นที่โมเมนต์ (Moment-area theorem) เราสามารถหาความสัมพันธ์ออกมาได้ว่า

$$M_b = \{6EK_b/(1-\gamma)^3\}d\delta/dz \ , \ M_b' = \{6EK_b'/(1-\gamma')^3\}d\delta/dz \tag{3}$$

โดยที่ $K_b = I_b/L$ และ $K_b' = I_b'/L'$ หมายถึงอัตราส่วนของความเกร็ง (Stiffness factor) ของคาน I_b, I_b' คือโมเมนต์ของความเฉื่อยของหน้าตัดคาน L, L' คือความยาวจากศูนย์กลางถึงศูนย์กลางของช่วงคาน (Center-to-center span length) $\gamma = a/L$ และ $\gamma' = a/L'$ คืออัตราส่วนระหว่างความลึกของเสาต่อความยาวของช่วงคาน อัตราส่วนนี้มาปรากฏในสูตรเพื่อเป็นการคำนึงถึงผลของบริเวณข้อต่อระหว่างเสาและคาน ซึ่งถือว่ามีค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยเป็นอนันต์

คานแขนจำนวนเท่ากับจำนวนชั้นของอาคารเหล่านี้ เมื่อพิจารณาโดยภาพรวมก็อาจจะแทนด้วยที่รองรับแบบต่อเนื่อง (Continuum support) ซึ่งตอบสนองต่อแรงกระทำด้วยปฏิกิริยาที่เป็นโมเมนต์ดัดมีค่าเป็นสัดส่วนกับมุมเอียง (Slope) ของเสา ซึ่งอัตราการตอบสนองต่อหน่วยความยาวและต่อหน่วยมุมเอียงหรือที่เรียกว่าค่าโมดูลัสของที่รองรับ (Support modulus) J นั้น เราสามารถนำเอาผลของสมการ (3) ข้างบนมาคิดเป็น



$$\boxed{J = 6E\Sigma K_b/(1-\gamma)^3 h} \tag{4}$$

h = ความสูงระหว่างชั้นของอาคาร
ΣK_b = การส่งของเสาภายใน (Interior column)
ต้องรวมค่า K_b ของคานแขนทั้ง 2 ข้างของเสา

ทั้งนี้โดยที่ h หมายถึงความสูงระหว่างชั้นของอาคาร และเครื่องหมายการรวมผล (Summation sign) จะใช้เฉพาะกรณีของเสาภายใน (Interior column) ซึ่งจะต้องรวมค่า K_b ของคานแขนทั้งสองข้างของมัน

รูปที่ 1 (ค) แสดงแบบจำลองของเสาตามแนวจินตนาการดังกล่าวข้างต้น โดยมีหน่วยแรงกระทำทางข้างที่ระดับความสูง z_i และในรูปเดียวกันได้แสดงหน่วยละเอียดของเสาภายใต้การกระทำของโมเมนต์ปฏิกิริยา $J(d\delta/dz)dz$ และแรงภายในอันได้แก่ โมเมนต์ดัด M และแรงเฉือน V

จากทฤษฎีพื้นฐานของการดัดตัว (Fundamental flexural theory)

$$M = -EI_c\delta'' \tag{5}$$

โดย I_c หมายถึงค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยของหน้าตัดเสา

และจากเงื่อนไขของสมดุลของแรงทางข้างและสมดุลของโมเมนต์ เราก็จะได้สมการสมดุลอีก 2 สมการคือ

$\sqrt{\dfrac{6\cancel{\Sigma}K_b}{(1-\gamma)^3 h\ (\cancel{E}I_c)}}$

$$V = -EI_c\delta''' + J\delta' \tag{6}$$

$$dV = 0 \tag{7}$$

แทนสมการ (5) และ (6) ลงในสมการ (7) ก็จะได้สมการควบคุมการโก่งตัวของเสาดังนี้

$$\delta^{IV} - \beta^2\delta'' = 0 \tag{8}$$

โดยให้ $\beta^2 = J/EI_c$

สมการ (8) ข้างบนนี้เป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาอันดับสี่ (Fourth-order ordinary differential equation) ซึ่งอาจหาคำตอบออกมาเป็น

$$\delta_1(z;z_j) = A_1\cosh\beta z + B_1\sinh\beta z + C_1 + D_1\ , \quad o<z<z_j \tag{9}$$

$$\delta_2(z;z_j) = A_2\cosh\beta z + B_2\sinh\beta z + C_2 + D_2\ , \quad z_j<z<H \tag{10}$$

โดยให้ H หมายถึงความสูงทั้งหมดของเสา

ตัวคงที่ของการอินทิเกรท (Constants of integration) 8 ตัว อันได้แก่ A_1 ถึง D_2 สามารถหาได้จากเงื่อนไขที่ปลายขอบและเงื่อนไขของความต่อเนื่อง (Boundary and continuity conditions) จำนวน 8 เงื่อนไขเช่นกัน คือ

$$\begin{aligned}
&\delta_1(o;z_j) = \delta_1'(o;z_j) = 0\ , \quad \delta_1(z_j;z_j) = \delta_2(z_j;z_j),\\
&\delta_1'(z_j;z_j) = \delta_2'(z_j;z_j)\ , \quad M_1(z_j;z_j) = M_2(z_j;z_j),\\
&V_1(z_j;z_j) - V_2(z_j;z_j) = 1,\ M_2(H;z_j) = V_2(H;z_j) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

แทนสมการ (9) และ (10) โดยใช้ผลของสมการ (5) และ (6) ด้วยลงในสมการทั้ง 8 ข้างบนนี้ เราก็จะได้สมการพีชคณิต 8 สมการ เพื่อใช้แก้หาคำตอบของ A_1 ถึง D_2 ซึ่งเมื่อนำไปแทนกลับในสมการ (9) และ (10) อีกก็จะได้ฟังก์ชั่นพื้นฐานของความอ่อนตัว (Fundamental flexibility function) เป็น

$\boxed{\beta^2 = \frac{J}{EI_c}}$ $\beta = \sqrt{\frac{6\Sigma K_b}{(1-\gamma)^3 h I_c}}$

$Z_i < Z_j$

$$\begin{aligned}
\delta(z;z_j) &= [\{\sinh\beta H - \sinh\beta(H-z_j)\}(\cosh\beta z - 1)/\cosh\beta H - \sinh\beta z + \beta z]/\beta^3 EI_c, \quad o<z<z_j\\
&= [\{\sinh\beta H - \sinh\beta(H-z)\}(\cosh\beta z_j - 1)/\cosh\beta H - \sinh\beta z_j + \beta z_j]/\beta^3 EI_c, \quad z_j<z<H
\end{aligned} \tag{12}$$

1 2 3 4 5 6

$Z_i > Z_j$

อย่างไรก็ตามคำตอบข้างบนนี้ยังเป็นเพียงคำตอบเบื้องต้นเท่านั้น เพราะได้ค้นพบว่าจะต้องมีการปรับแก้เสียก่อนจึงจะได้ผลที่แม่นยำพอใช้การได้

<u>การปรับแก้ฟังก์ชั่นของความอ่อนตัว</u> (Adjusted flexibility function) ผู้เขียนได้ทดสอบคำตอบในสมการ (12) ข้างบน โดยเปรียบเทียบกับคำตอบที่ถูกต้อง (Exact solution) โดยย้ายตำแหน่งของแรงกระทำไปที่ระดับความสูงต่าง ๆ และแปรค่าของอัตราส่วนระหว่าง $\Sigma K_b/K_c$ ระหว่าง 0 ถึง 1 นอกจากนั้นยังได้ทดสอบค่าโมเมนต์ในคาน M_b โดยคำนวณจากโมเมนต์ปฏิกิริยาของที่รองรับในจินตนาการได้เป็น

$$M_b(z_i;z_j) = J\int_{z_i-h/2}^{z_i+h/2} \delta' dz = J\{\delta(z_i+h/2;z_j)-\delta(z_i-h/2;z_j)\} \qquad (13)$$

ซึ่งผู้เขียนพบว่า ระยะโก่งที่คำนวณจากสมการ (12) โดยตรงจะมีความคลาดเคลื่อนเป็นระบบจากค่าที่ถูกต้อง แต่ค่าโมเมนต์ M_b ในสมการ (13) ข้างบนกลับมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 5%

ดังนั้นแทนที่จะใช้สมการ (12) ตรง ๆ เราควรจะคำนวณค่าโมเมนต์ในคานจากสมการ (13) เสียก่อน แล้วจึงนำค่าโมเมนต์เหล่านี้ไปคำนวณหาระยะโก่ง โดยใช้ทฤษฎีพื้นที่โมเมนต์ ซึ่งสรุปออกมาเป็นสูตรของสัมประสิทธิ์ของความอ่อนตัว (Flexibility function) f_{ij} ได้ดังต่อไปนี้

$$f_{ij} = [z_i^2(z_j/2-z_i/6)-0.5Jz_i^2\delta(H;z_j)+Jh^2\sum_{n=1,2,3,..}^{i}(i-n+0.5)\,\delta\{(n-0.5)h;\ z_j\}]/EI_c,\ z_i<z_j$$

$$= [z_j^2(z_i/2-z_j/6)-0.5Jz_j^2\delta(H;z_i)+Jh^2\sum_{n=1,2,3,...}^{i}(i-n+0.5)\,\delta\{(n-0.5)h;z_j\}]/EI_c,\ z_i>z_j \qquad (14)$$

หรือในอีกทางหนึ่ง ผู้เขียนพบว่าถ้าอัตราส่วน $\Sigma K_b/K_c$ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 แล้ว เราอาจจะปรับแก้คำตอบในสมการ (12) ได้โดยตรงด้วยตัวคูณ exp(0.408 $\Sigma K_b/K_c$) ดังนั้น ค่าสัมประสิทธิ์ของความอ่อนตัวที่อาจคำนวณได้ง่ายกว่าข้างบนก็คือ

$$f_{ij} = \exp(0.408\Sigma K_b/K_c)\ \delta(z_i;z_j) \qquad (15)$$

สมการ 12 $\quad / \ e^{(0.408 \Sigma k_b/k_c)})(\delta(z_i;z_j))$

และในที่สุดถ้าเรานำเอาสัมประสิทธิ์ของความอ่อนตัว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ มาเรียงตามระบบก็จะได้เมทริกซ์ของความอ่อนตัว (Flexibility matrix) ซึ่งสามารถจะคำนวณค่าอินเวอร์สของมันออกมาเป็นเมทริกซ์ของความเกร็งของเสา K_c ดังนี้

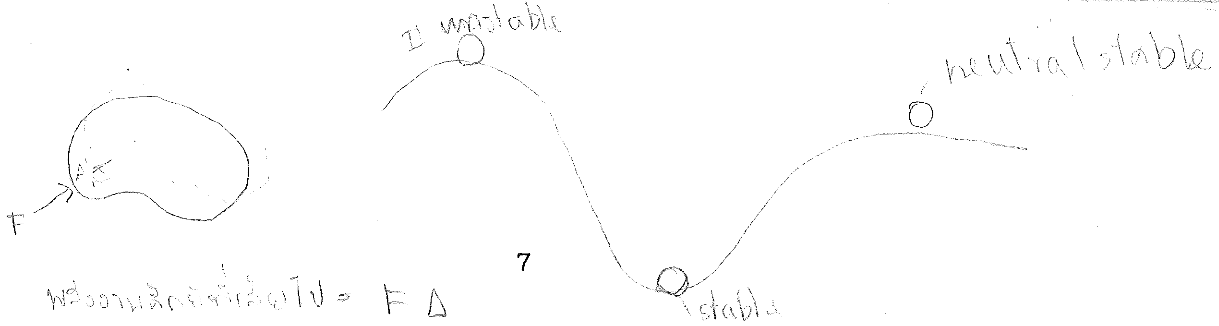
$\beta = 0.41469$

~~$\varepsilon = 1.1461$~~

matrix

$$K_c = [f_{ij}]^{-1} \qquad (16)$$

<u>สภาวะสมดุลของแรงทางข้าง (Lateral Equilibrium)</u> ในการศึกษาครั้งนี้เราจะพิจารณาเสาแต่ละต้นและกำแพงแต่ละผืนว่าเป็นแต่ละองค์ประกอบของอาคาร ร่วมกันตอบสนองต่อแรงกระทำทางข้าง โดยแต่ละองค์ประกอบก็จะมีค่าเมทริกซ์ของความเกร็ง (Stiffness matrix) ซึ่งอาจจะคำนวณได้จากสมการ (1) (2) หรือ (12) (15) และ (16) แล้วแต่กรณีว่าองค์ประกอบนั้นเป็นกำแพงหรือโครงข้อแข็ง



รูปที่ 3 เป็นรูปผังขององค์ประกอบดังกล่าวข้างต้น องค์ที่ n มีศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่ง (x_n, y_n) แนวของระนาบประธาน (Principal plane) ทำมุมทวนเข็มนาฬิกา α_n กับแกนอ้างอิง x

ให้ u_k v_k และ θ_k แทนค่าการเปลี่ยนตำแหน่งแบบคงรูป (Rigid body displacement) ในทิศของแกนอ้างอิง x y และมุมหมุนรอบจุดกำเนิด o ตามลำดับ ของพื้นอาคารชั้นที่ k ใด ๆ ทั้งนี้โดยที่เราได้สมมุติว่าพื้นอาคารมีความแข็งตัวในระนาบ (Rigid floor assumption) ดังนั้นจากค่าของตำแหน่งและมุมเอียงขององค์ประกอบที่ n ใด ๆ เราย่อมสามารถจะเขียนค่าการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศของระนาบประธาน (Principal plane) ขององค์ประกอบนั้น ๆ ให้อยู่ในพจน์ของ u_k v_k และ θ_k ได้โดยใช้หลักของเรขาคณิตของมุมน้อย ๆ ดังนี้

$$\Delta_{kn} = u_k\cos\alpha_n + v_k\sin\alpha_n + \theta_k(x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n) \tag{17}$$

ถ้าเรานำเอาความสัมพันธ์ข้างบนนี้สำหรับอาคารชั้นที่ k ต่าง ๆ มาเขียนเรียงกันตามลำดับ ก็จะได้สมการในรูปของเมทริกซ์ดังนี้ $\boxed{V + x_n\theta}$ $\alpha = 90$

$$\Delta_n = U\cos\alpha_n + V\sin\alpha_n + \theta(x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n) \tag{18}$$

เคลื่อนไปเท่าไรใน plane ของมัน

โดยที่

ชั้นที่ k ใด ๆ

$$\Delta_n = \begin{Bmatrix}\Delta k_1\\ \Delta k_2\\ \Delta k_3\end{Bmatrix} \quad U = \begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_5\end{Bmatrix} \quad V = \begin{Bmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_5\end{Bmatrix} \quad \theta = \begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_6\end{Bmatrix}$$

$$\Delta_n = \{\Delta_{kn}\} \quad u = \{u_k\} \quad v = \{v_k\} \quad \theta = \{\theta_k\} \tag{19}$$

ตึกเป็นรูป ตัว L T หรือ L

เมทริกซ์หลัก (Column matrix) แต่ละตัวข้างบนนี้ จะมีสมาชิกเป็นค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่ระดับชั้นต่าง ๆ นำมาเขียนเรียงกัน

องค์ประกอบ n ใด ๆ ซึ่งมีเมทริกซ์ของความเกร็งเป็น K_n ขณะเมื่อเกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง ก็หมายความว่าต้องถูกกระทำด้วยแรง $K_n\Delta_n$ พร้อม ๆ กันด้วย ยังผลให้เกิดเป็นพลังงานของความเครียด (Strain energy) มีค่าเป็น $1/2 \times \Delta_n^T(K_n\Delta_n)$ ซึ่งนับเป็นส่วนหนึ่งของพลังงานศักย์รวม (Total potential energy) ที่เกิดขึ้นจากแรงภายนอก (External load) ที่กระทำต่ออาคาร แรงภายนอกที่กระทำที่ระดับชั้นต่าง ๆ อาจแทนด้วยเมทริกซ์หลัก 3 ตัว คือ X Y T ซึ่งหมายถึงแรงกระทำในทิศของแกน x y และโมเมนต์บิดคิดรอบจุดกำเนิด o แรงภายนอกเหล่านี้เมื่อเคลื่อนตัวไปตามการอ่อนตัวของอาคาร ก็จะสูญเสียพลังงานศักย์ (Potential energy) ไปเท่ากับงานที่เกิด

ขึ้นจากการเคลื่อนตัวนั้น ดังนั้นพลังงานศักย์รวม W ของระบบทั้งหมดจะเป็น

$$W = -u^T X - v^T Y - \theta^T T + 0.5 \sum_n \Delta_n^T K_n \Delta_n \qquad (20)$$

จะเห็นได้จากสมการข้างบนนี้ว่า การเปลี่ยนตำแหน่ง u v and θ เป็นตัวแปรที่จะทำให้ค่าของพลังงานศักย์รวมเปลี่ยนแปลงไป ซึ่ง "ทฤษฎีการคงค่าของพลังงานศักย์รวม (Theorem of stationary total potential energy)" กำหนดว่าในสภาวะสมดุล พลังงานศักย์รวมจะต้องมีค่าต่ำสุด กล่าวคือ อนุพันธ์ (Derivative) ของ W เทียบกับการเปลี่ยนตำแหน่งของชั้นต่าง ๆ จะต้องเป็นศูนย์ดังนี้

$$\partial W/\partial u = \partial W/\partial v = \partial W/\partial \theta = 0 \qquad (21)$$

จากวิชาพีชคณิตของเมทริกซ์เราได้ว่า [6]

$$\begin{array}{lll} \partial(u^T X)/\partial u = X & \partial(v^T Y)/\partial u = 0 & \partial(\theta^T T)/\partial u = 0 \\ \partial(u^T X)/\partial v = 0 & \partial(v^T Y)/\partial v = Y & \partial(\theta^T T)/\partial v = 0 \\ \partial(u^T X)/\partial \theta = 0 & \partial(v^T Y)/\partial \theta = 0 & \partial(\theta^T T)/\partial \theta = T \end{array} \qquad (22)$$

และเนื่องจากเมทริกซ์ของความเกร็ง K_n ขององค์ประกอบ n ใด ๆ ไม่ว่าจะเป็นกำแพงหรือโครงข้อแข็งก็ตามจะต้องเป็นเมทริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix) ดังนั้น [6]

$$\begin{aligned} \partial(0.5\Delta_n^T K_n \Delta_n)/\partial u &= [\partial(0.5\Delta_n^T K_n \Delta_n)/\partial \Delta_n](\partial \Delta_n/\partial u) \\ &= K_n \Delta_n (\partial \Delta_n/\partial u) \\ \partial(0.5\Delta_n^T K_n \Delta_n)/\partial v &= K_n \Delta_n (\partial \Delta_n/\partial v) \\ \partial(0.5\Delta_n^T K_n \Delta_n)/\partial \theta &= K_n \Delta_n (\partial \Delta_n/\partial \theta) \end{aligned} \qquad (23)$$

ซึ่งเมื่อแทน Δ_n ในรูปของ u v และ θ จากสมการ (18) เราก็จะได้ว่า

$$\partial(0.5\,\Delta_n^T K_n \Delta_n)/\partial u$$

$$= K_n[u\cos\alpha_n + v\sin\alpha_n + \theta(x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n)]\cos\alpha_n$$

$\frac{\partial \Delta_m}{\partial u}$

$$\partial(0.5\,\Delta_n^T K_n \Delta_n)/\partial v$$

$$= K_n[u\cos\alpha_n + v\sin\alpha_n + \theta(x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n)]\sin\alpha_n \qquad (24)$$

$\frac{\partial \Delta_m}{\partial v}$

$$\partial(0.5\,\Delta_n^T K_n \Delta_n)/\partial \theta$$

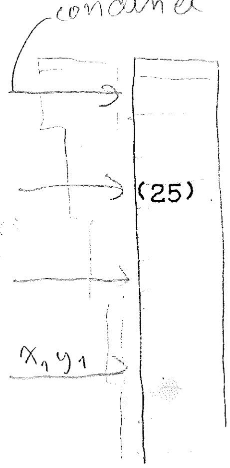
$$= K_n[u\cos\alpha_n + v\sin\alpha_n + \theta(x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n)](x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n)$$

เมื่อแทนสมการ (20), (22)และ (24) ลงในสมการสมดุล (21) ก็จะได้สมการควบคุม (Governing equation) ค่าของ u v และ ซึ่งสามารถจะจัดให้อยู่ในรูป

condense

$$\begin{bmatrix} H_{uu} & H_{uv} & H_{u\theta} \\ H_{vu} & H_{vv} & H_{v\theta} \\ H_{\theta u} & H_{\theta v} & H_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ T \end{bmatrix} \qquad (25)$$

แทนสมการ 21



โดยที่

m x m

n-จำนวน point load

$$H_{uu} = \sum_n K_n\cos^2\alpha_n\,, \quad H_{uv} = H_{vu} = \sum_n K_n\sin\alpha_n\cos\alpha_n\,,$$

$$H_{u\theta} = H_{\theta u} = \sum_n K_n(x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n)\cos\alpha_n\,, \qquad (26)$$

$$H_{vv} = \sum_n K_n\sin^2\alpha_n\,, \quad H_{v\theta} = H_{\theta v} = \sum_n K_n(x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n)\sin\alpha_n\,,$$

$$H_{\theta\theta} = \sum_n K_n(x_n\sin\alpha_n - y_n\cos\alpha_n)^2$$

ชุดของสมการ (25) ข้างบนนี้เกิดจากการดิฟเฟอเรนชิเอท W เทียบกับตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่งที่ระดับต่าง ๆ ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว จากหนึ่งระดับที่เลือกมาจะมี 3 ตัวแปร และในขณะเดียวกันก็จะเกิดสมการในรูปแบบของสมการ (25) จำนวน 3 สมการ

ดังนั้น ถ้าเราเลือกระดับต่าง ๆ ของอาคารมาสัก M ระดับ แบ่งแรงกระทำทางข้างทั้งหมดให้กระทำที่ระดับเหล่านั้น และสร้างเมทริกซ์ของความเกร็ง K_n ขนาด M x M ของแต่ละองค์ประกอบโดยใช้สมการ (2) หรือ (16) ตามแต่กรณี เราก็สามารถที่จะสร้างชุดของสมการตามรูปแบบของสมการ (25) และ (26) ได้จำนวน 3M สมการเพื่อใช้หาคำตอบของตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่ง ณ ระดับต่าง ๆ คือ u v และ θ จำนวน 3M ตัวแปรได้ และจากนั้น เราก็อาจจะคำนวณหาระยะโก่ง Δ_n ของแต่

ละองค์ประกอบจากสมการ (18) ซึ่งเมื่อนำไปคูณกับเมทริกซ์ของความเกร็งของมัน เราก็จะได้แรงกระทำที่แต่ละองค์ประกอบจะได้รับซึ่งเท่ากับ $\boxed{K_n \Delta_n}$

3. ตัวอย่างและการสรุปผล

เพื่อเป็นการประเมินความแม่นยำของวิธีวิเคราะห์ เราจะพิจารณาอาคารตัวอย่างสูง 20 ชั้น แต่ละชั้นสูง 4.00 เมตร มีผังอสมมาตร ดังแสดงในรูปที่ 4 โดยสมมุติให้มีแรงลมขนาด 0.15 ตัน/ตารางเมตร กระทำในทิศของแกน x โดยเลือกคำนวณผลที่ระดับต่าง ๆ จำนวนเพียง 5 ระดับ (M = 5) ก่อน คือที่ z = 16, 32, 48, 64 และ 80 เมตร

เสาแต่ละต้นจะเป็นจุดร่วมของโครงข้อแข็งสองระนาบ ดังนั้น มันจึงทำหน้าที่เป็น 2 องค์ประกอบ ตามทิศของระนาบทั้งสองดังกล่าว แต่สำหรับกำแพงจะมีสถานะเป็นเพียงองค์ประกอบเดียวอยู่ในแนวของระนาบประธานของมัน ตัวเลข 1 2 3 4 ..... 32 ในผังเป็นหมายเลขขององค์ประกอบทั้งหมดของผังอาคารนี้

ท สือชิ้นส่วนจะเข้ม lane or wall 2 ข้าง

ตัวอย่างเช่น สำหรับองค์ประกอบที่ 7 จะมีค่า K_b/K_c = (2 x 0.0114/8)/(0.0341/4) = 0.334 α = 0° คำนวณแมทริกซ์ของความเกร็งจากสมการ (16) ได้ดังนี้ (M = 5) :

$z_j = 16$

$z_1 = 16 \qquad z_2 = 32 \qquad z_3 = 48 \qquad z_4 = 64 \qquad z_5 = 80$

$$K_7 = \begin{bmatrix} 1697 & & & & \\ -897 & 1603 & & \text{Sym.} & \\ 96 & -887 & 1600 & & \\ -10 & 94 & -876 & 1506 & \\ 1 & -8 & 76 & -715 & 646 \end{bmatrix} \begin{array}{l} z_1 = 16 \\ z_2 = 32 \\ z_3 = 48 \\ z_4 = 64 \\ z_5 = 80 \end{array} = [f_{ij}]^{-1}$$

สำหรับองค์ประกอบที่ 19 จะมีค่า K_b/K_c = (0.0114/8.38)/0.0341/4) = 0.160 α = 72.65°

deflection ที่ zi
แรงกระทำที่ zj

$$K_{19} = \begin{bmatrix} 1078 & & & \text{Sym.} & \\ -587 & 988 & & & \\ 95 & -574 & 984 & & \\ -14 & 91 & -560 & 893 & \\ 2 & -10 & 69 & -412 & 352 \end{bmatrix}$$

องค์ประกอบที่ 32 ซึ่งเป็นแพงจะมีค่า $K_b/K_c = 0$ $\alpha = 90^\circ$ กำหนดให้ $K_B \rightarrow \infty$ จะคำนวณเมทริกซ์ของความเกร็งจากสมการ (1) และ (2) ได้เป็น

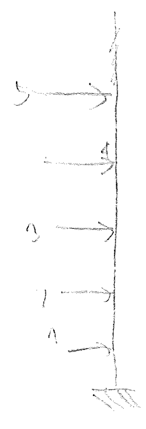
$$K_{92} = \begin{bmatrix} 183{,}874 & & & \text{Sym.} & \\ -116{,}216 & 143{,}085 & & & \\ 46{,}616 & -104{,}562 & 137{,}258 & & \\ -11{,}654 & 40{,}789 & -92{,}908 & 96{,}469 & \\ 1{,}942 & -6{,}798 & 25{,}250 & -35{,}609 & 15{,}701 \end{bmatrix}$$

สำหรับแรงลมทั้งหมดก็จะต้องแบ่งเป็นแรงลัพธ์จำนวน 5 แรง กระทำที่ระดับทั้ง 5 เช่นกัน ดังนั้น

$$X = \begin{bmatrix} 16 \times 28 \times 0.15 \\ 16 \times 28 \times 0.15 \\ 16 \times 28 \times 0.15 \\ 16 \times 28 \times 0.15 \\ 8 \times 28 \times 0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67.20 \\ 67.20 \\ 67.20 \\ 67.20 \\ 33.60 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ไม่มีลมในทิศ Y

$$T = -14 \times \begin{bmatrix} 67.20 \\ 67.20 \\ 67.20 \\ 67.20 \\ 33.60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -940.8 \\ -940.8 \\ -940.8 \\ -940.8 \\ -470.4 \end{bmatrix}$$



รายละเอียดการคำนวณอื่นเป็นไปตามที่ได้อธิบายไว้แล้ว นอกจากนั้นยังได้คำนวณผลที่ละเอียดยิ่งขึ้น โดยเพิ่มค่า M เป็น 10 ค่าของการเปลี่ยนตำแหน่งทั้ง 10 ระดับได้นำมาเขียนเป็นกราฟ โดยเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ETABS [5] ดังในรูปที่ 5 ส่วนในรูปที่ 6 นั้น เป็นการเปรียบเทียบค่าโมเมนต์ดัดของกำแพง SW1 ซึ่งในทั้งสองรูปจะเห็นได้ว่าคำตอบที่ได้มีความแม่นยำพอสมควร

ในตารางที่ 1 ข้างล่างนี้ ได้เปรียบเทียบค่าของการเปลี่ยนตำแหน่ง u ที่คำนวณจาก M = 5 และ 10 ซึ่งจะเห็นว่า มีค่าใกล้เคียงกันมาก แสดงว่าวิธีนี้ให้คำตอบที่เบนเข้าหากัน (Converge) อย่างรวดเร็ว ดังนั้น ไม่ว่าอาคารจะมีความสูงกี่ชั้นก็ตาม เราย่อมสามารถจะแบ่งความสูงทั้งหมดของอาคารเป็นเพียงไม่กี่ระดับ แล้วสร้างสมการเพื่อหาคำตอบของตัวแปรของการเปลี่ยนตำแหน่งเพียงจำนวนน้อย ๆ อันจะช่วยประหยัดเวลาของการวิเคราะห์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งก็คือในขั้นตอนของการออกแบบเบื้องต้น เพื่อกำหนดตำแหน่งและขนาดขององค์ประกอบที่เหมาะสม

ตารางที่ 1 - ค่าการเปลี่ยนตำแหน่งของอาคาร u (เมตร) สำหรับ M = 5 และ 10

z/H	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
M = 5	.0254	.0520	.0713	.0827	.0871
M = 10	.0253	.0519	.0712	.0825	.0866

4. <u>เอกสารอ้างอิง</u>

(1) Gould, P.L., "Interaction of Shear Wall Frame Systems in Multistory Buildings," <u>ACI J.</u>, Vol.62, 1965, pp. 45-70.

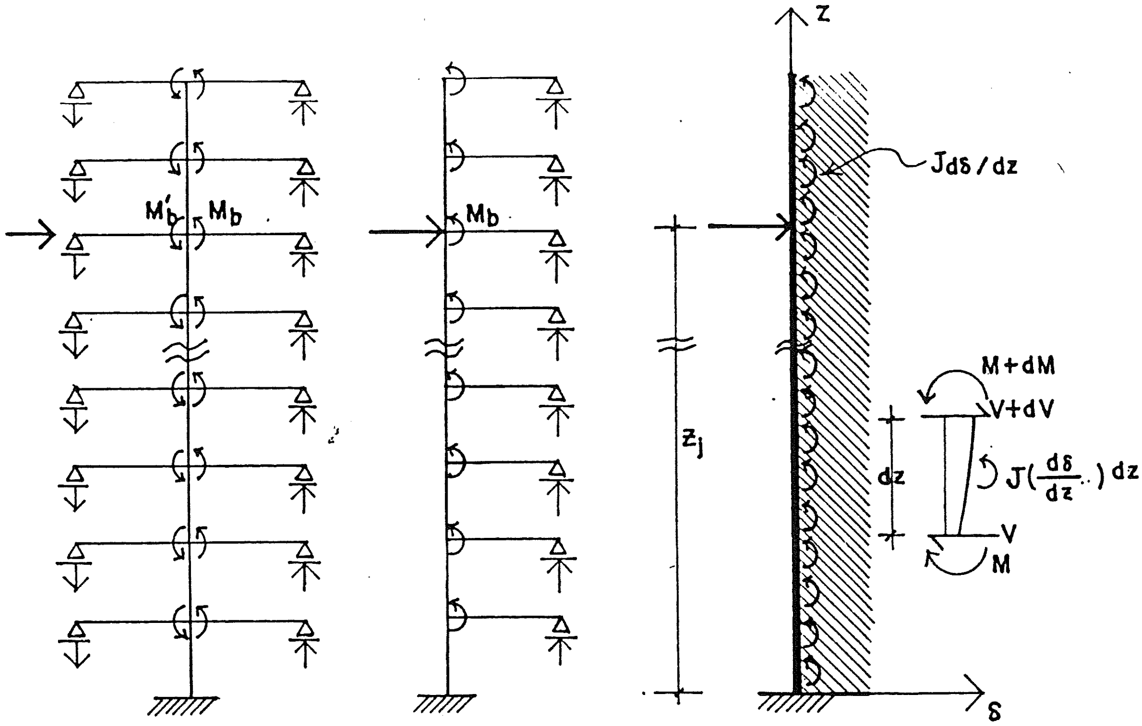
(2) Hongladaromp.T., Pithyachariyakul, P., and Lee, S.L., "Analysis of Asymmetric Shear Wall-Frame Buildings," <u>Proc. of the Regional Conference on Tall Buildings</u>, pp. 353-365, Bangkok, Thailand, 1974.

(3) Khan, F.R., and Sbarounis, J.A., "Interaction of Shear Walls and Frames," <u>J. of Struct. Div., ASCE</u>. Vol. 90, 1964, pp. 285-335.

(4) Mac Leod, A., "Shear Wall-Frame Interaction. A Design Aid, "Portland Cement Association, 1970.

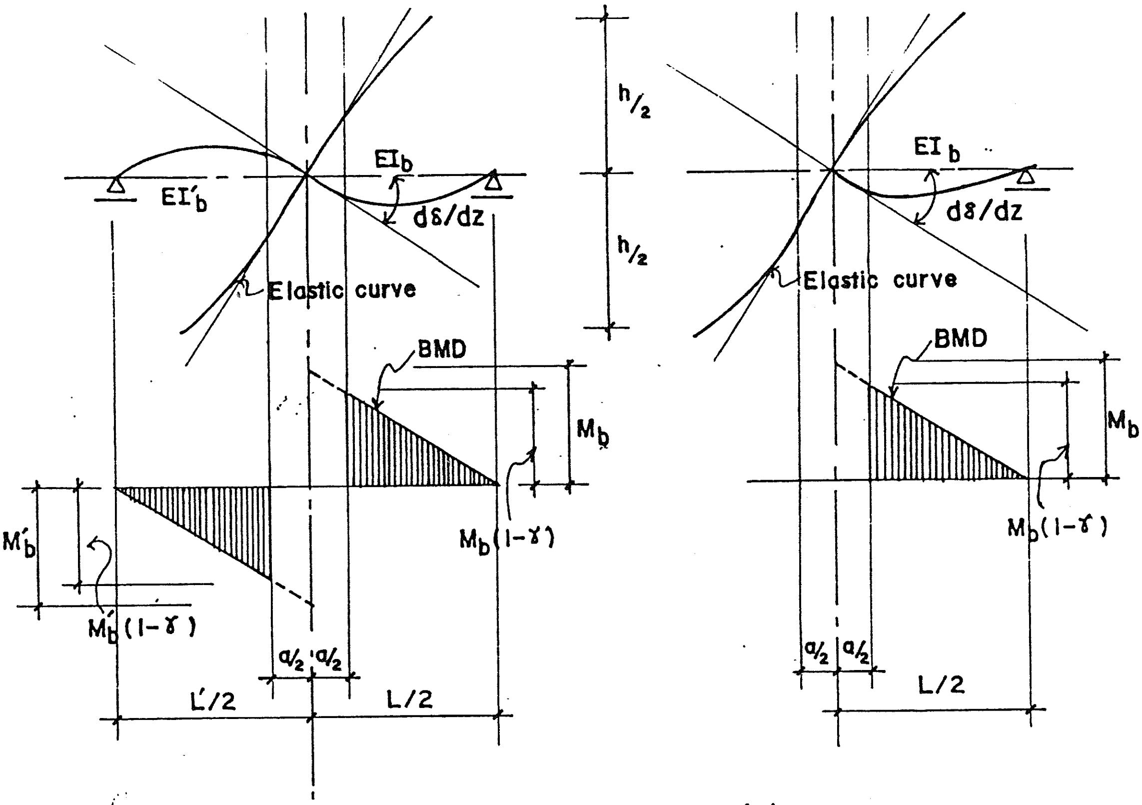
(5) Wilson, E.L., Hollings, J.P., and Dovey, H.H., "Three Dimensional Analysis of Building Systems (Extended Version)," Report No EERC. 75-13, University of California, April 1975.

(6) Martin, H.C., "Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis," McGraw-Hill Book Co., New York, pp. 300-316, 1966.



ก. เสาภายใน ข. เสาริม ค. Continuum model

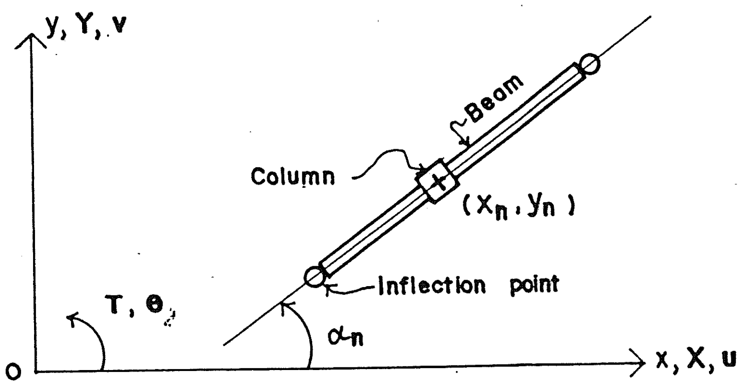
รูปที่ 1 - เสาอาคารตามสมมุติฐาน



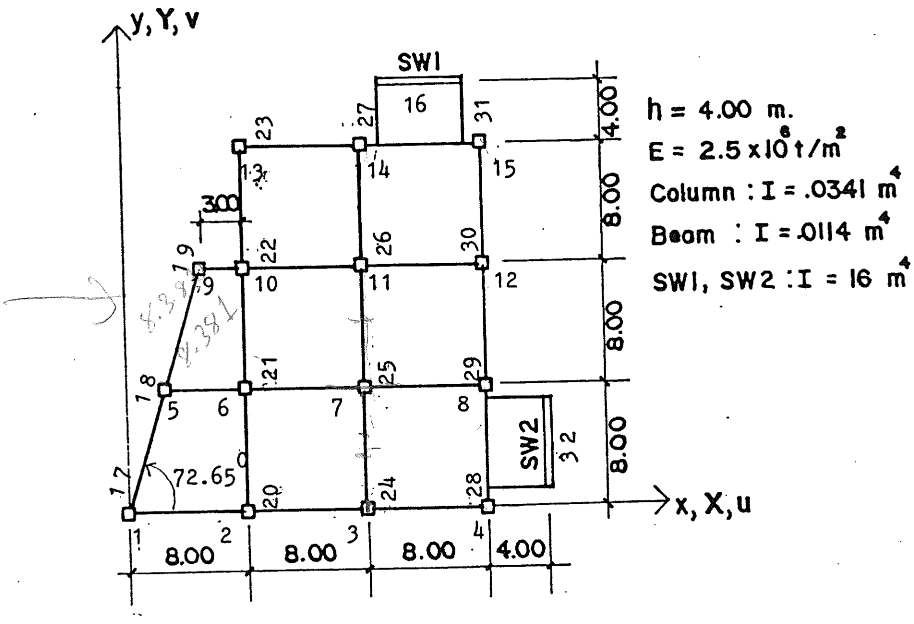
ก. ขั้วต่อเสาภายใน

ข. ขั้วต่อเสาริม

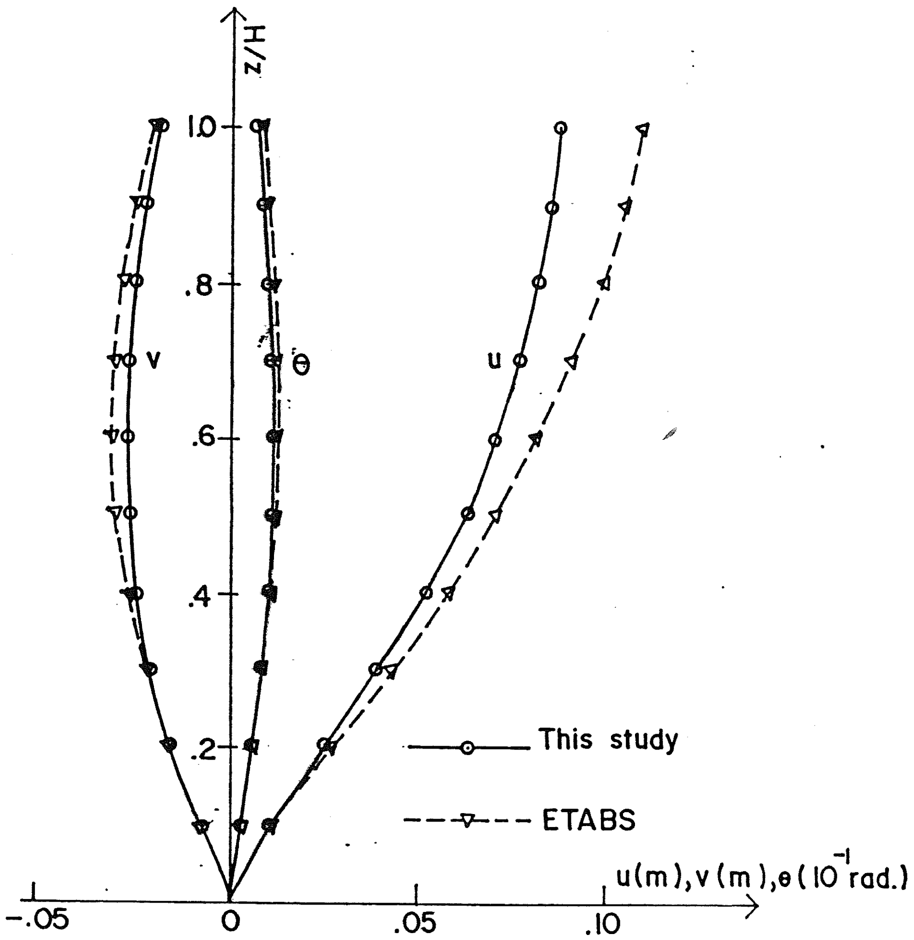
รูปที่ 2 - ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และมุมหมุนของขั้วต่อ



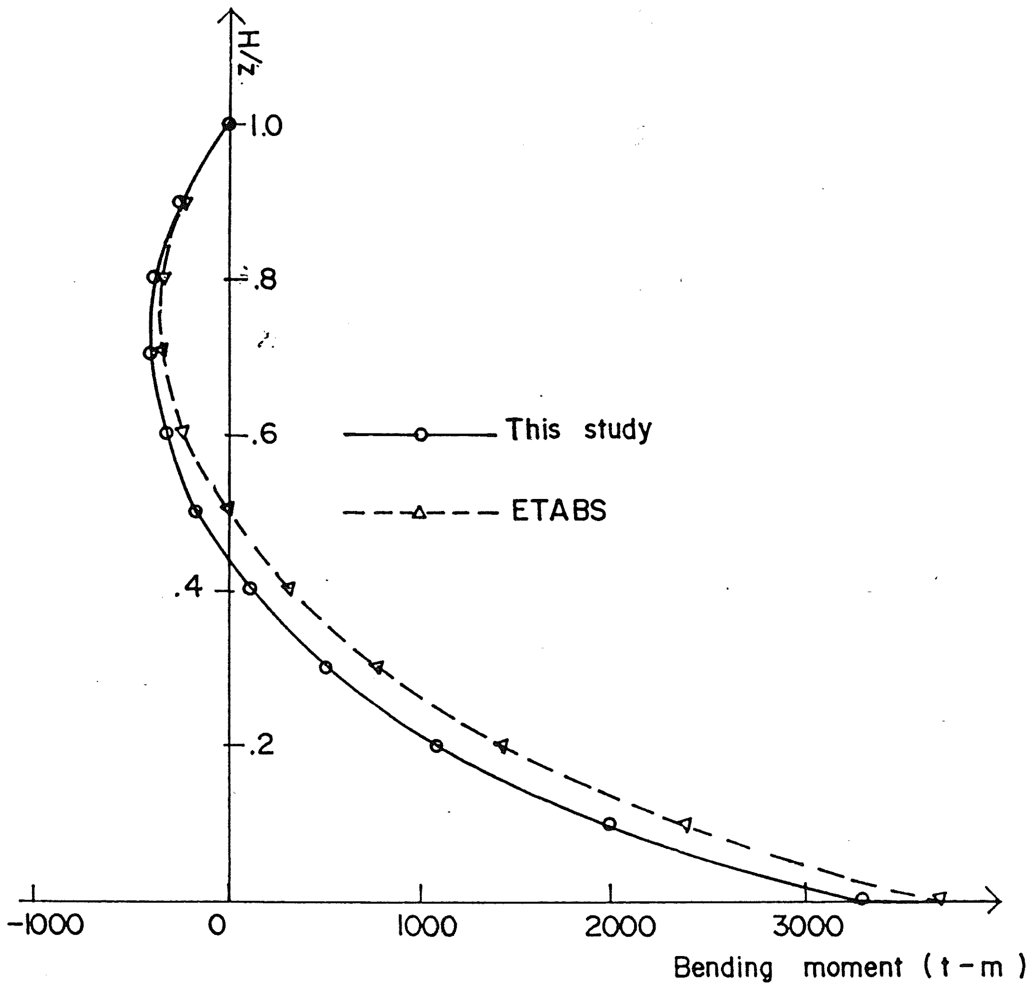
รูปที่ 3 – รูปผังของตัวอย่างองค์ประกอบที่ n ของอาคาร



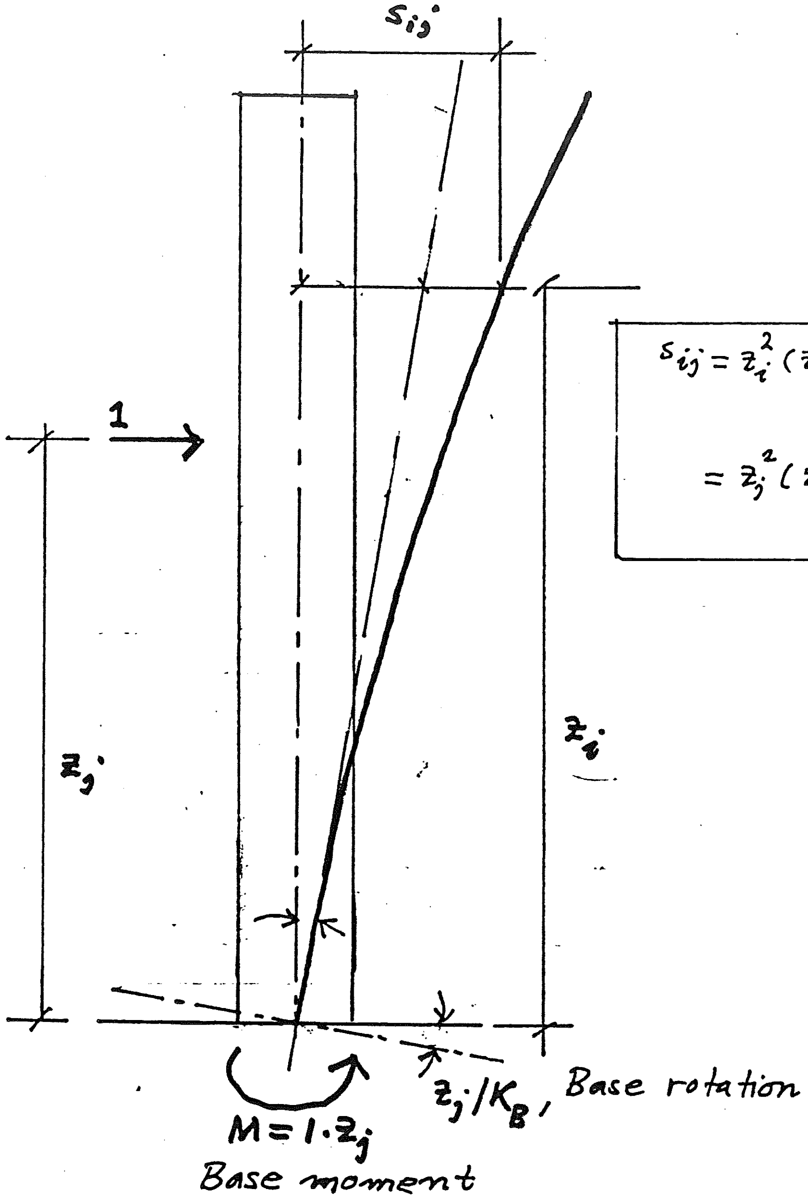
รูปที่ 4 - ผังอาคารตัวอย่าง



รูปที่ 5 - กราฟของการเปลี่ยนตำแหน่งของอาคาร



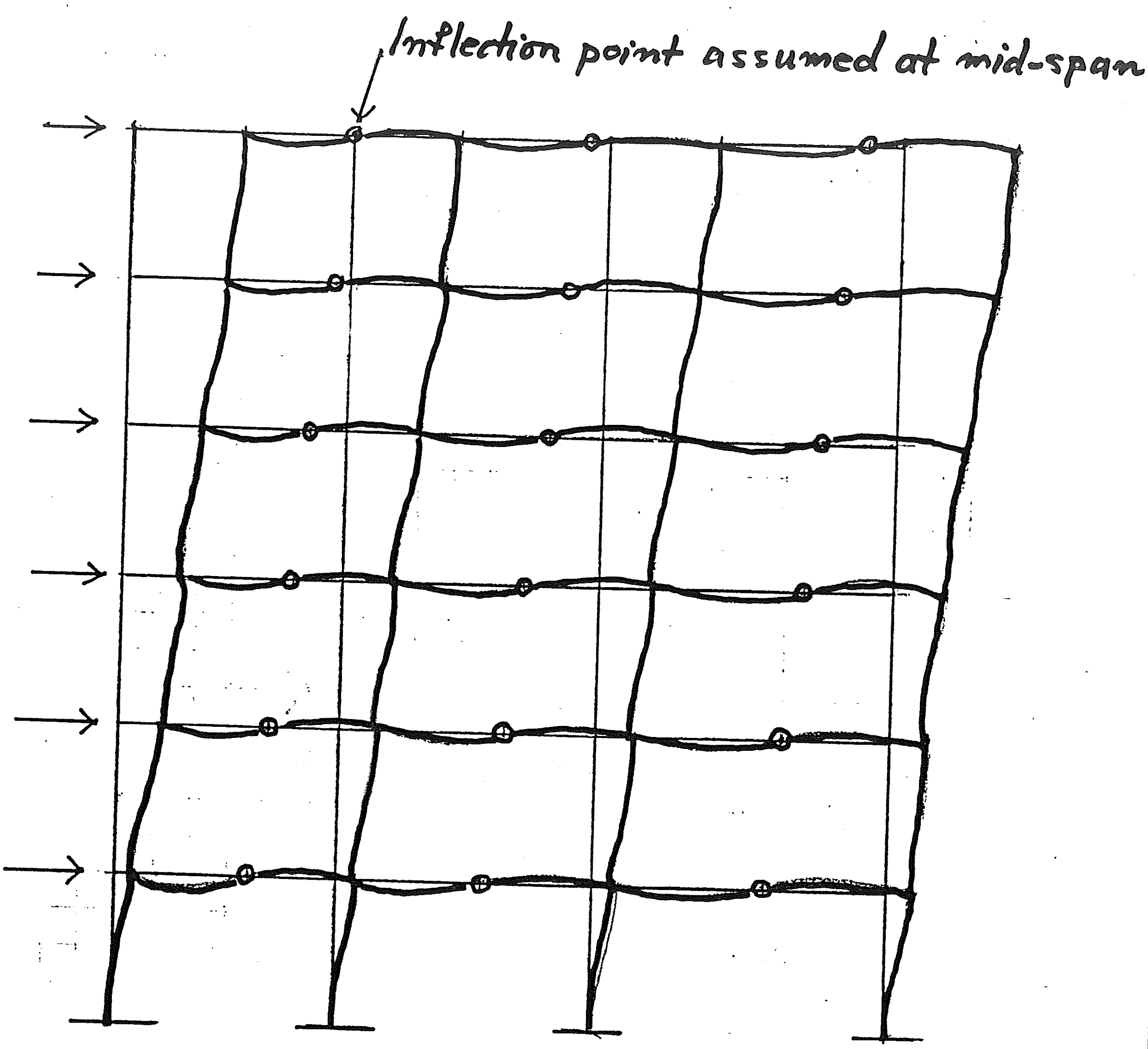
รูปที่ 6 - โมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในกำแพง SW1



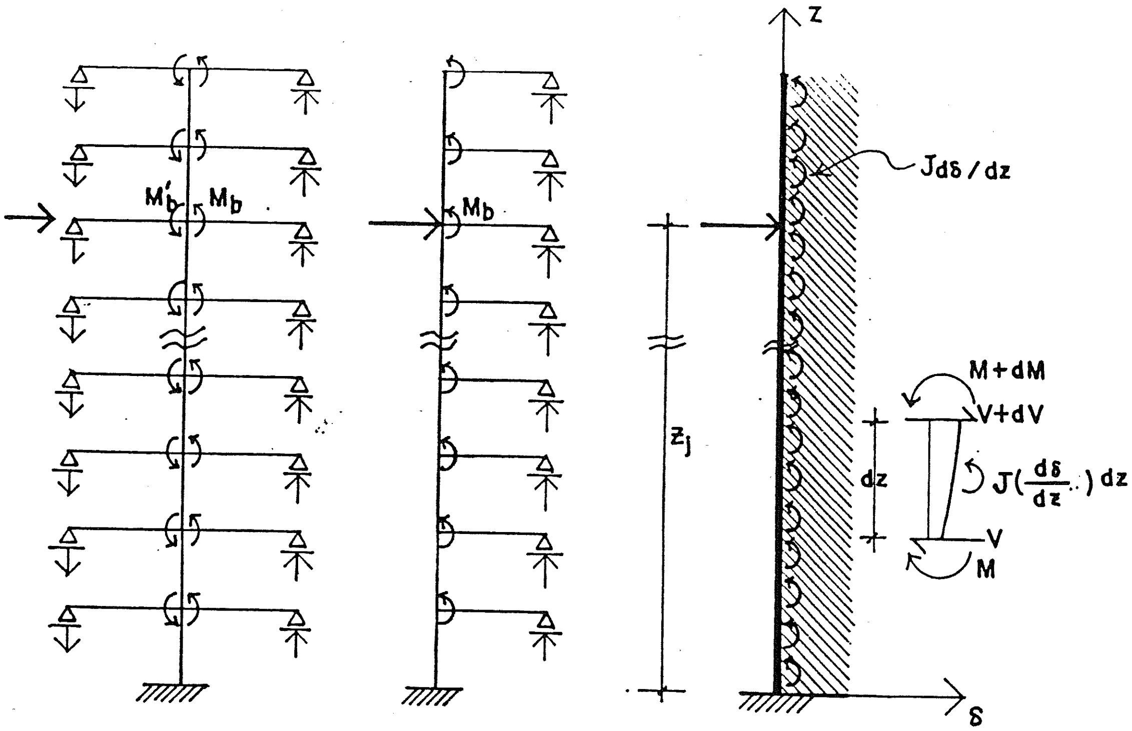
$$s_{ij} = z_i^2 (z_j/2 - z_i/6)/EI_s + z_j z_i/K_B\,, \quad z_i < z_j$$

$$= z_j^2 (z_i/2 - z_j/6)/EI_s + z_i \cdot z_j/K_B\,, \quad z_i > z_j$$

TYPICAL FREESTANDING
WALL DEFLECTION



TYPICAL FRAME DEFLECTION



(a) Interior unit (b) Exterior unit (c) Continuum model

Figure 1. Branched cantilever

From conventional flexure theory: $M = -EI_c\,\delta''$

Equilibrium: $V\,dz - M - J\,d\delta = 0 \;,\quad dV = 0$

Governing equation: $\dfrac{d^4\delta}{dz^4} - \beta^2\dfrac{d^2\delta}{dz^2} = 0 \;,\quad z \neq z_j$

$\beta^2 = J/EI_c$

From Fig. 2: $J = 6E\Sigma K_b/(1-\gamma)^3 h$

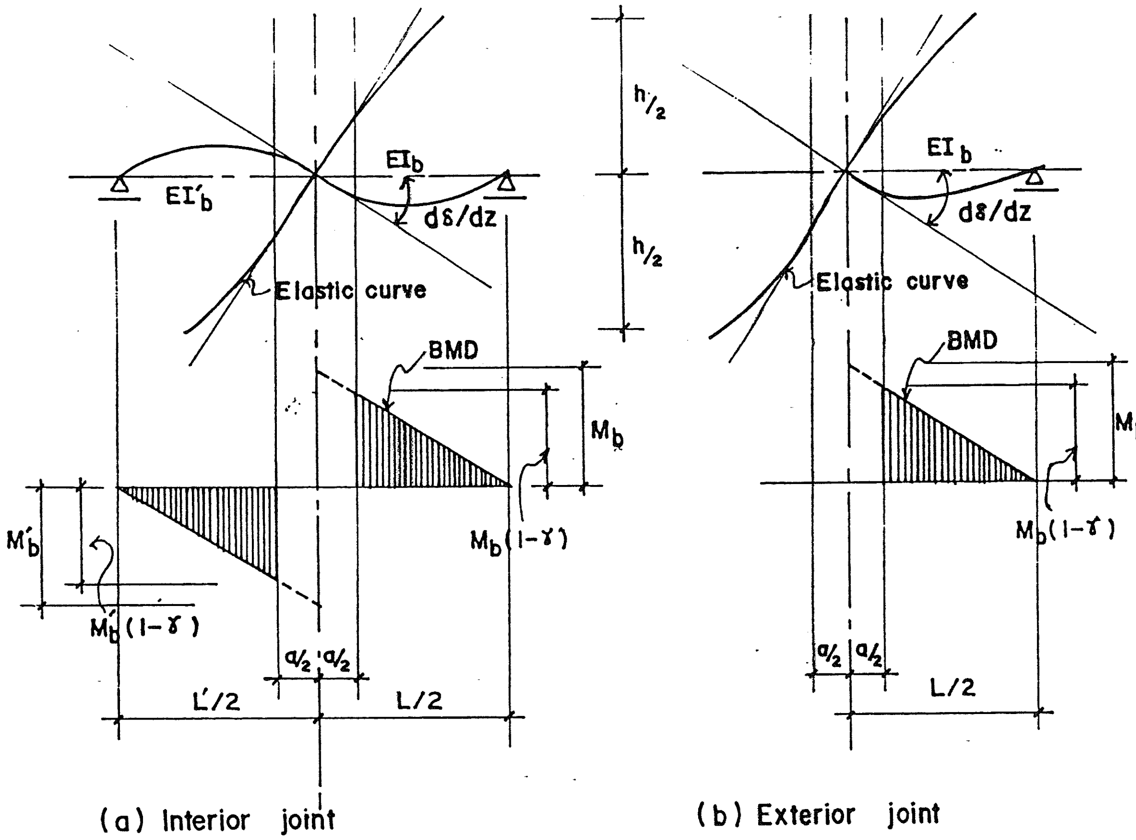
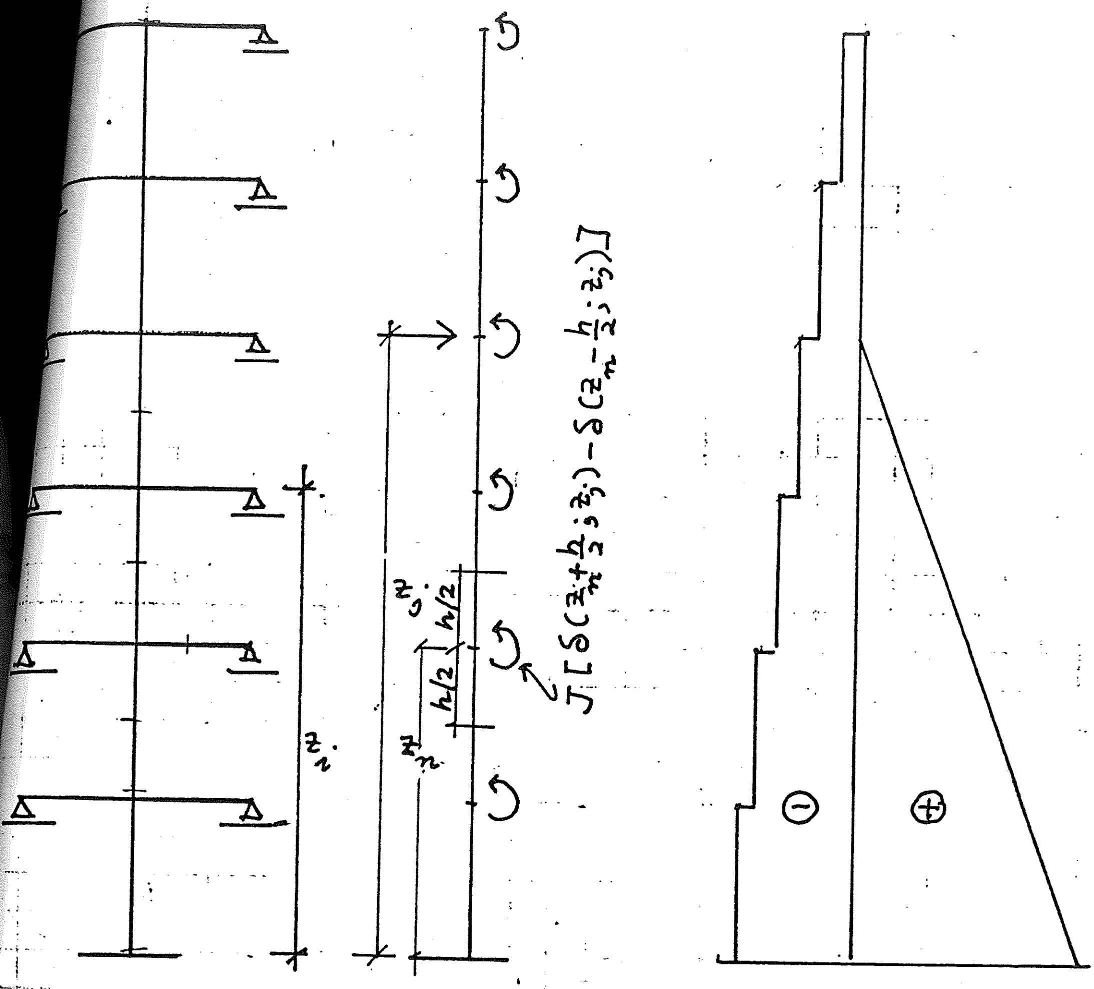


Figure 2. Moment – joint rotation relation

From moment-area theorems:

$$M_b = \frac{6EK_b}{(1-\gamma)^3}\frac{d\delta}{dz} \qquad M_b' = \frac{6EK_b'}{(1-\gamma)^3}\frac{d\delta}{dz}$$

$$J = \frac{M_b + M_b'}{h(d\delta/dz)} = \frac{6E(K_b+K_b')}{(1-\gamma)^3 h} = \frac{6E\Sigma K_b}{(1-\gamma)^3 h}$$



BRANCED COLUMN **BMD**

Equation (14):

$$f_{ij} = [z_i^2(z_j/2 - z_i/6) - 0.5 J z_i^2 \delta(H; z_j) + J h^2 \sum_{n=1,2,3\ldots}^{i} (i-n+0.5)\,\delta\{(n-0.5)h; z_j\}]/EI_c, \quad z_i < z_j$$

$$= [z_j^2(z_i/2 - z_j/6) - 0.5 J z_j^2 \delta(H; z_i) + J h^2 \sum_{n=1,2,3\ldots}^{i} (i-n+0.5)\,\delta\{(n-0.5)h; z_j\}]/EI_c, \quad z_i > z_j$$

Equation (15):

$$f_{ij} = e^{0.408 \sum K_b/K_c}\, \delta(z_i; z_j), \quad 0 < \sum K_b/K_c < 1$$